

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Строительно-политехнический колледж

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для практических и самостоятельных работ
по математике для студентов 1-го и 2-го курса всех специальностей

Воронеж 2020

УДК 512(07)
ББК 22.1я7

Составители:

*Ю. В. Черная, С. Л. Рыбина, И. И. Корчагин
В. И. Маслова, З. И. Шахбазова, Н. В. Федотова*

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ: методические указания для практических и самостоятельных работ по математике для студентов 1-го и 2-го курса всех специальностей/ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: Ю. В. Черная, С. Л. Рыбина, И. И. Корчагин [и др.]. - Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2020. - 15 с.

Приводятся теоретические сведения по теории пределов и непрерывности функции, приведены примеры вычисления пределов, нахождения и классификации точек разрыва функции, даны задания для самостоятельной работы. Могут использоваться для разработки индивидуальных проектов и для подготовки к сдаче ЕГЭ.

Предназначены для самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов 1-го и 2-го курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ ЛРУ(2) pdf.

**УДК 512(07)
ББК 22.1я7**

Рецензент – М. Ю. Глазкова, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики ВГТУ

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для студентов 1-2 курсов Строительно-политехнического колледжа всех специальностей в освоении методов нахождения пределов функций и исследования функций на непрерывность. Сообщаются основные определения и теоремы теории пределов и непрерывности функции, методы вычисления пределов функций, нахождения и классификации точек разрыва функций, приводятся примеры решения практических задач. Методические указания содержат задания для проведения практических занятий и самостоятельной работы и могут использоваться для разработки индивидуальных проектов, а также для подготовки к сдаче ЕГЭ.

Общие положения

Самостоятельная работа студентов представляет собой работу, которую выполняют студенты по заданию и под руководством преподавателя без его непосредственного участия.

Целям и задачами самостоятельной работы студентов являются систематизация и закрепление знаний, умений и навыков, полученных в ходе практических занятий; формирование умений работать со специальной и справочной литературой, а также с Интернет-ресурсами; формирование самостоятельности мышления, стремления к самосовершенствованию и самореализации; формирование и развитие общих компетенций и подготовка к формированию профессиональных компетенций согласно ФГОС СПО; овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности; развитие исследовательских умений.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение предела

Определение 1: Функция $y=f(x)$ имеет предел A при $x \rightarrow x_0$, если при приближении x к x_0 значение функции $f(x)$ подходит как угодно близко к числу A :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Читается: предел $f(x)$ при x стремящемся к x_0 равен A .

Определение 2: Число A называется **пределом функции** $y=f(x)$ при x стремящемся к x_0 , если для любого сколь угодно малого, наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x таких, что $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Теоремы о пределах

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то существуют пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, g(x) \neq 0$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$, где $C - \text{const}$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
6. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$

Вычисление пределов

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = \frac{5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 4}{2^2 - 1} = \frac{22}{3}$$

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x^2 - 2x - 1} = \frac{7}{\infty} = 0$$

Пример 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{x^4 + 3x} = \frac{-2}{0} = \infty$$

Здесь под записью $\frac{-2}{0}$ подразумевается деление на бесконечно малое число.

При нахождении предела функции часто подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\{\infty - \infty$, 1∞ и др. Нахождение предела функций в таких случаях называют **раскрытием неопределенности**. Для раскрытия неопределенности прежде, чем перейти к пределу, производят преобразование выражения под знаком предела.

Пример 4.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \frac{4^2 - 6 \cdot 4 + 8}{4^2 - 5 \cdot 4 + 4} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

При $x=4$ имеем неопределенность. В подобных случаях, когда в числителе и знаменателе многочлены обращаются при $x=a$ в нули, их необходимо сократить на $(x-a)$ после предварительного разложения на множители:

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{3}$$

1. Задачи на нахождение пределов от дробно-рациональных функций при неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$

4. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - x}{x^3 - 27}$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 6x + 8}$

7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x - 4}$

8. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 12x + 36}{x^2 - 7x + 6}$

9. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

10. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x^3 - a^3}$

Пример 5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

Для того, чтобы раскрыть неопределенность $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

Разделим числитель и знаменатель на x^2 :

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{1 + x + 3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3 \rightarrow 0}{x} - \frac{5 \rightarrow 0}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3} = \frac{2}{3}$$

Пример 6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x}{x^2 - 1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} - \frac{2x}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4} - \frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Пример 7.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x}{5x^5 + 7} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^5} - \frac{3x}{x^5}}{\frac{5x^5}{x^5} + \frac{7}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{5 + \frac{7}{x^5}} = \frac{0}{5} = 0$$

2. Задачи на нахождение пределов от дробно-рациональных функций при неопределенности вида $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 12x + 36}{-3x^3 - 7x + 6}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^2}{x^2 + 3}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x + 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + 7x}{x^7 + 3x}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5^x}{5^{x-4}}$

Пример 8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} = \frac{0}{\sqrt{1+0} - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

Раскроем неопределенность. Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби, для чего домножим знаменатель и числитель на выражение, сопряженное знаменателю (дополняющее иррациональное выражение до полного квадрата, куба и пр.).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + 1)}{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + 1)}{\sqrt{1+x}^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + 1)}{1+x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + 1) = \sqrt{1+0} + 1 = 2 \end{aligned}$$

Пример 9.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} &= \frac{8 - 8}{2 - 2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12 \end{aligned}$$

3. Задачи на нахождение пределов от иррациональных функций при неопределенности вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x} - 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3+2x} - 3}{3-x}$

$$3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{3x+4}}{16 - x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 27} \frac{x - 27}{\sqrt[3]{x} - 3}$$

Первый замечательный предел

При вычислении пределов тригонометрических функций часто используется формула $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, которая называется **первым замечательным пределом** и позволяет раскрывать неопределенности вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$.

Пример 10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{-2x} = \frac{\sin 0}{0} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = -\frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{3}{2}$$

Пример 11.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x-a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2}}{x-a} = \cos \frac{a+a}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a \cdot 1 = \cos a \end{aligned}$$

4. Задачи на нахождение пределов с помощью первого замечательного предела

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 2x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{ctg} x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x}{5x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2 - 1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$$

Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом называется предел вида

$$\lim_{u \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e, e = 2,71828 \dots,$$

с помощью которого можно раскрывать неопределенность вида $\{1^\infty\}$.

Пример 12.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{2x} = \{1^\infty\} =$$

Приведем предел ко второму замечательному. Преобразуем степень:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3} 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}} \right)^{\frac{3}{x} 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}} \right)^6 = e^6$$

Пример 13.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x+3} = \{1^\infty\}$$

Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\frac{3x}{3x+2} = \frac{3x+2-2}{3x+2} = \frac{3x+2}{3x+2} + \frac{-2}{3x+2} = 1 + \frac{-2}{3x+2}$$

Пусть $\frac{-2}{3x+2} = t$.

Выразим x :

$$\begin{aligned} (3x+2)t &= -2 \\ 3xt + 2t &= -2 \\ 3xt &= -2t - 2 \\ x &= \frac{-2t}{3t} - \frac{2}{3t} \\ x &= \frac{-2}{3} - \frac{2}{3t} \end{aligned}$$

Следовательно, $t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$

Выразим степень через t :

$$x+3 = \frac{-2}{3} - \frac{2}{3t} + 3 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3t}$$

Перейдем к пределу по переменной t :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x+3} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{7}{3} - \frac{2}{3t}} =$$

По свойству степеней:

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left((1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot (1+t)^{\frac{7}{3}} = e^{\frac{2}{3}} \cdot 1^{\frac{7}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$$

5. Задачи на нахождение пределов с помощью второго замечательного предела

- | | |
|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-3} \right)^{2x-5}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1} \right)^{x-1}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{3x}}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-6}{5x+2} \right)^{\frac{x}{2}}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^{2x}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{2x}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-5} \right)^x$ | 10. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x(\ln(x+1)) - \ln x)$ |

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ. КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК РАЗРЫВА

Непрерывность функций. Точки разрыва

Определение 1: Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

где $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ – **односторонние пределы** (левосторонний и правосторонний соответственно).

Пример 1.

Рассмотрим рис. 1. Если приближаться по оси Ox к точке k слева ($x \rightarrow k - 0$), то соответствующие значения y будут стремиться по оси Oy к точке m . Запишем **левосторонний предел**:

$$\lim_{x \rightarrow k - 0} f(x) = m$$

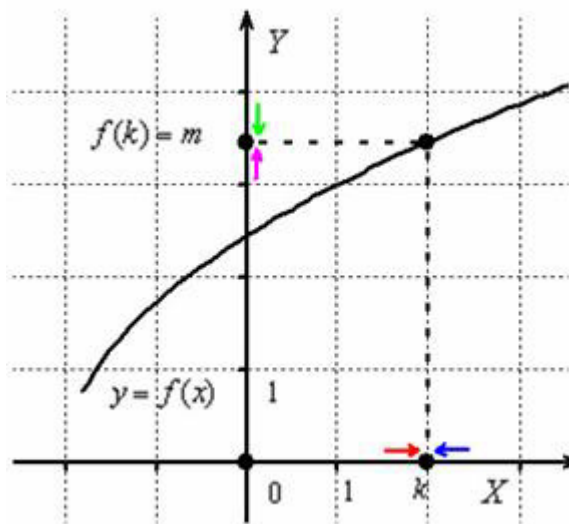


Рис. 1. Непрерывная функция

При приближении к точке k справа ($x \rightarrow k + 0$), y также стремится к значению m . Запишем **правосторонний предел**:

$$\lim_{x \rightarrow k + 0} f(x) = m$$

Значение функции в самой точке k равно m : $f(k) = m$, следовательно, выполнены все **условия непрерывности функции в точке**:

1) функция определена в точке k , то есть существует значение $f(k)$;

2) односторонние пределы конечны и равны;

3) существует общий предел функции в точке k , равный значению

функции в этой точке $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ непрерывна на интервале $(a; b)$, если она непрерывна в каждой точке данного интервала.

Определение 3. Если функция $y=f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной, то она называется **разрывной** в точке x_0 , а точка x_0 – **точкой разрыва** функции.

Классификация точек разрыва

Определение 4. **Точкой разрыва первого рода** называют такую точку x_0 *разрыва функции*, в которой существуют и конечны оба односторонних предела этой функции.

Определение 5. Если выполняется условие $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 – точка **устранимого разрыва**.

Пример 2. Исследовать функцию $y = \frac{\sin x}{x}$ на непрерывность, найти точки разрыва, классифицировать их.

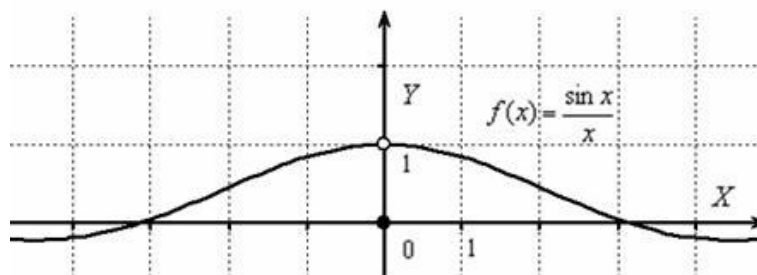


Рис. 2. Точка устраняемого разрыва

Данная функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x=0$. Функция не определена в точке $x=0$, а значит, терпит разрыв в данной точке.

Односторонние пределы в этой точке существуют и равны:

$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$, но не равны значению функции в точке $x=0$. Следовательно, в точке $x=0$ функция претерпевает **устраняемый разрыв**. «Устранимый», т.к. возможно доопределить функцию в данной точке и устранить разрыв, например, таким образом:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

Определение 6. Если выполняется условие $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 – точка **неустраняемого разрыва**. В точке x_0 функция терпит разрыв первого рода **со скачком**.

Пример 3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, классифицировать их.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \leq 0 \\ 1 + 2x, & \text{если } 0 < x < 2 \\ x - 2, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$$

Функция $y=f(x)$ – кусочная.

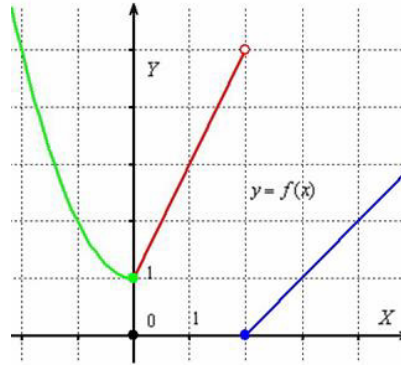


Рис. 3. Скачок функции

Интерес представляют точки $x=0$ и $x=2$.

Вычислив односторонние пределы при $x \rightarrow 0$, а также значение функции в данной точке, сделаем заключение, что функция непрерывна при $x=0$.

Исследуем точку $x=2$ на непрерывность:

- 1) $f(2)=2-2=0$ - функция определена в данной точке.
- 2) Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} (1 + 2x) = 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} (x - 2) = 2 - 2 = 0$$

Пределы конечны, но не равны, следовательно, $x=2$ – точка разрыва первого рода со скачком.

Вычислим скачок:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = 0 - 5 = -5$$

Определение 7. Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 не существует или бесконечен.

Пример 4.

Исследовать функцию $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на непрерывность, найти точки разрыва, классифицировать их.

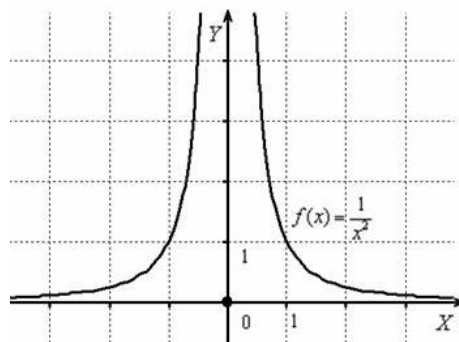


Рис. 4. Точка разрыва второго рода

Функция не определена в точке $x=0$, поскольку знаменатель обращается в ноль, следовательно, функция терпит разрыв в данной точке. Классифицируем характер разрыва. Для этого вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-0)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(+0)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Односторонние пределы бесконечны, значит, функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ терпит разрыв второго рода в точке $x=0$.

Задачи

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, классифицировать их

1. $y = \frac{6}{x-3}$

2. $y = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$

3. $y = \frac{4}{(x-2)^2}$

4. $y = \frac{1}{x-x^3}$

5. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

6. $y = \begin{cases} -x, & x \leq -1 \\ \frac{1}{x+1}, & x > -1 \end{cases}$

7. $y = \frac{4}{x^2-2x+1}$

8. $y = \begin{cases} 3x, & x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$

9. $y = \frac{x^3-8}{2x^2}$

10. $y = \begin{cases} 3+x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 4 \\ 4x, & x > 4 \end{cases}$

11. $y = \frac{x^2-25}{x-5}$

12. $y = \sqrt[3]{x}$

13. $y = \frac{x-2}{|x-2|}$

14. $y = 5^{\frac{1}{x-2}}$

15. $y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$

16. $y = e^{\frac{1}{x-3}}$

Библиографический список

1. Колпачев, Виктор Николаевич. Учебные занятия по высшей математике в активных и интерактивных формах [Текст]: учебно-методическое пособие / Воронеж. гос. архитектур.-строит. ун-т. - Воронеж : [б. и.], 2015 (Воронеж : Отдел оперативной полиграфии изд-ва учеб. лит. и учеб.-метод. пособий Воронежского ГАСУ, 2015). - 127 с.: ил. - ISBN 978-5-89040-556-2 : 53-61.

2. Дорофеева, Алла Владимировна. Математика. Сборник задач: Учебно-практическое пособие для СПО / Дорофеева А. В. - 2-е изд. - Москва: Издательство Юрайт, 2020. - 176. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-08796-3 : 299.00. URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/449051>

3. Богомоллов, Николай Васильевич. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие Для СПО / Богомоллов Н. В. - Москва: Издательство Юрайт, 2020. - 240. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-09525-8: 599.00. URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/449037>

4. Письменный, Дмитрий Трофимович. Конспект лекций по высшей математике [Текст] : полный курс. - 12-е изд. - Москва: Айрис пресс, 2014 (Можайск: ОАО "Можайский полиграф. комбинат", 2014). - 602, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-5257-2 : 378-00.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Общие положения	3
Предел функции.....	4
Определение предела.....	4
Теоремы о пределах.....	4
Первый замечательный предел.....	7
Второй замечательный предел.....	7
Непрерывность функций. Классификация точки разрыва.....	9
Классификация точек разрыва.....	10
Библиографический список.....	13

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для практических и самостоятельных работ
по математике для студентов 1-го и 2-го курса всех специальностей

Составители:

Черная Юлия Викторовна, **Рыбина** Светлана Леонидовна,
Шахбазова Зоя Ивановна, **Федотова** Наталья Викторовна,
Корчагин Игорь Иванович, **Маслова** Валентина Ивановна

Подписано к изданию 25.10.2020 .

Уч.-изд. л. 0,9.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14