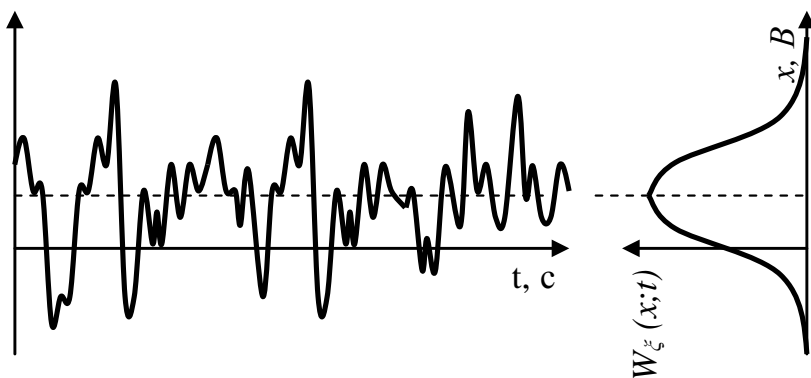


А.Б. Токарев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАДИОТЕХНИКЕ



$\xi(t), B$

Воронеж 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

А. Б. Токарев

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
В РАДИОТЕХНИКЕ**

Сборник задач

Воронеж 2020

УДК 621.396.6:519.2(075.8)

ББК 32.84:22.1я7

T51

Рецензенты:

*кафедра инфокоммуникационных систем и технологий
Воронежского института МВД РФ
(начальник д-р техн. наук, проф. О. И. Бокова);
д-р техн. наук, проф. Ю. Г. Пастернак*

Токарев, А. Б.

Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике: сборник задач [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (2,1 Мб) / А. Б. Токарев. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский госу-дарственный технический университет», 2020. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024x768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

T51

ISBN 978-5-7731-0908-2

Сборник задач предназначен для освоения студентами второй части курса «Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике» и содержит примеры решения задач, материалы для самоконтроля и наборы тестовых заданий, которые могут быть использованы для проведения практических занятий, а также при проведении экзаменов по курсу.

Предназначен для студентов направления 11.03.01 «Радиотехника» (профиль «Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов») очной формы обучения.

Ил. 50. Табл. 36. Библиогр.: 8 назв.

УДК 621.396.6:519.2(075.8)

ББК 32.84:22.1я7

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ISBN 978-5-7731-0908-2

© Токарев А. Б., 2020

© ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический
университет», 2020

ВВЕДЕНИЕ

Научное описание явлений окружающего нас мира предполагает установление количественных закономерностей между разными сторонами анализируемых явлений, возможность предсказания направления их развития при продолжении или повторении наблюдений. Во многих научно-технических областях подобные закономерности и предсказания опираются на принцип детерминизма, который предполагает, что при конкретных воздействиях на системы с известными свойствами, получаемая реакция может быть рассчитана со сколь угодно высокой точностью для сколь угодно продолжительного интервала наблюдения. Однако ситуации, когда и исследуемая система, и воздействия на неё точно известны, встречаются на практике не всегда. В частности, детальный контроль совокупности всех воздействий на радиотехническую систему принципиально невозможен, а потому и исследования свойств подобных систем и наблюдаемых в них сигналов возможны лишь со статистических позиций.

Приобретение навыков статистического описания явлений и освоение методов анализа случайных сигналов в радиотехнических цепях невозможно без практики решения разнообразных статистических задач. С учетом этого настоящий сборник задач направлен на приобретение навыков самостоятельного решения задач по теории вероятностей и по вопросам исследования и обработки случайных процессов.

Задания, приведенные в издании, включают ряд задач, предназначенных для самоконтроля и содержащих готовые ответы, и многовариантные задания, предназначенные для проведения практических занятий по изучаемому курсу. При возникновении затруднений с решением задач целесообразно обратиться к учебным пособиям, указанным в списке рекомендованных литературных источников, и разобрать дополнительно примеры задач, приведенных в этих пособиях.

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Данный раздел изучается в первой части курса и затрагивает вопросы расчета вероятности событий, подразумевающих возможность наступления конечного числа равновероятных элементарных исходов. При необходимости восстановить знания по данному разделу следует обратиться к материалам, представленным в подразделах 1.1–1.4 учебного пособия [1, с. 6–24], а также рассмотреть решения типовых задач, приведенные в [3, с. 6–20, 5, с. 4–18].

2. РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ

В этом разделе вводятся понятия объединения и пересечения событий и изучаются способы расчета вероятностей для разнообразных комбинаций событий. Самостоятельно восстановить знания по данному разделу можно с помощью материалов из подразделов 1.5–2.8 учебного пособия [1, с. 24 – 49]. Образцы решений типовых задач соответствующего типа можно найти в [3, с. 32–47, 5, с. 19–48].

3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ТЕОРЕМА О ГИПОТЕЗАХ

Этот раздел включает задачи, решение которых требует использования совокупности гипотез. Соответствующий теоретический материалы можно найти в подразделе 2.9 учебного пособия [1, с.49–55]. Образцы решения задач, опирающихся на использование гипотез, можно найти в учебных пособиях [3, с. 56–65; 5, с. 49–69].

4. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Теоретические сведения о вероятностных характеристиках случайных величин можно найти, например, в подразделах 3.1–3.9 учебного пособия [1, с.56 – 91]. Для углубленной работы с данной темой полезно рассмотреть образцы решения типовых задач, приведенные в [3, с. 78–92; 5, с. 91–123].

5. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Данный раздел расширяет круг вопросов, затрагиваемых в разделе 4; при необходимости восстановить знания по данному разделу следует обратиться к материалам, представленным в подразделах 4.1–4.7 учебного пособия [1, с.94 – 119], а также к решениям задач, приведенным в [3, с. 104–118; 5, с. 91–123].

6. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

При необходимости проработки вопросов данного раздела необходимые теоретические сведения можно найти в подразделах 5.1–5.4 учебного пособия [1, с.120 – 137]. Полезные образцы решения задач приведены в [3, с. 126–140; 5, с. 211–223].

7. СВОЙСТВА СИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Теоретические материалы к этому разделу изложены в подразделах 6.1–6.10 учебного пособия [1, с.141 – 169]. Для проработки навыков решения типовых задач полезно рассмотреть материалы, представленные в [3, с. 158–166; 5, с. 131–151].

Текущий и все предыдущие разделы изучаются в первой части курса, а далее в задачнике представлены образцы решений и индивидуальные задания к второй части учебного курса, которая охватывает вопросы описания случайных про-

цессов, исследование эффектов, сопровождающих преобразования процессов в линейных и нелинейных цепях, а также вопросы оптимальной фильтрации сигналов. Именно разделы с 8 по 12, изучающиеся во второй части курса, и составляют основное содержание данной части сборника задач.

8. КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

8.1. Образцы решения задач

Подготовку к решению задач из текущего раздела следует начинать с изучения материалов, представленных в подразделах 1.1–1.5 учебного пособия [2, с. 5-18], после чего рекомендуется проанализировать представленные ниже образцы решения типовых задач и попытаться решить самостоятельно по меньшей мере 50% задач из подраздела 8.2 (см. ниже с. 14-15).

Задача 1. Случайное напряжение характеризуется плотностью вероятности

$$W_{\xi}(x;t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-2 \cdot t)^2}{8}\right\}, \quad 1/V.$$

Каковы возможные реализации данного случайного процесса?

Решение

а) отметим сразу, что имеющейся в данной задаче информации о процессе $\xi(t)$ недостаточно для прогнозирования формы его реализаций, т.к. заданная в условии одномерная плотность вероятности характеризует ситуацию лишь в отдельных временных сечениях, но не содержит сведений о динамичности изменения процесса во времени. Таким образом, может существовать огромное множество подходящих процессов с существенно отличающимися реализациями;

б) сопоставляя заданный в условии закон распределения с нормальной (гауссовской) плотностью вероятности [1, (3.24)]

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\},$$

несложно видеть, что в рассматриваемом случае $a = 2 \cdot t$ (В), $\sigma = 2$ (В). Поскольку параметр a , определяющий математическое ожидание нормального распределения, изменяется во времени, то исследуемый процесс является нестационарным, а характерной особенностью реализаций исследуемого СП будет линейное нарастание их среднего значения с течением времени $M_{\xi}(t) = 2 \cdot t$ (В). Несколько подобных функций – возможных реализаций процесса $\xi(t)$ – показано на рис. 8.1. При их построении было учтено правило “3 сигм” [1, с. 177], утверждающее, что для подавляющего большинства случайных величин (процессов) мгновенные значения могут отклоняться от математического ожидания не более чем на три эффективных значения σ .

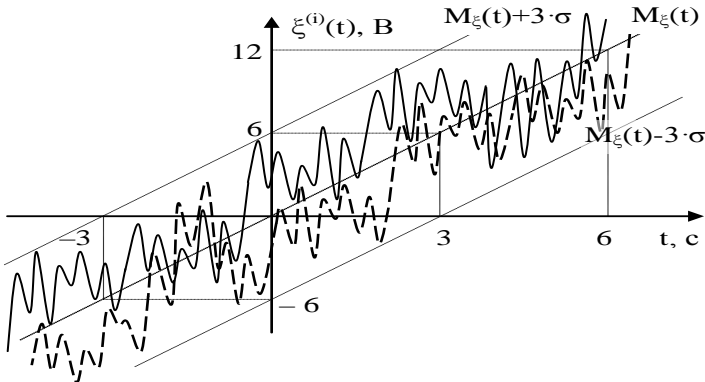


Рис. 8.1. Возможные реализации СП из задачи 1

Задача 2. Реализации эргодического СП, представляют собой последовательность однополярных импульсов напряжения с амплитудой $U = 3$ В (рис. 8.2). Ширина и положение импульсов на оси времени изменяются хаотично, но среднее время, суммарно занимаемое импульсами каждой реализации, со-

ставляет 40 %. Какой дисперсией будет характеризоваться данный СП в момент времени $t = 5$ мс?

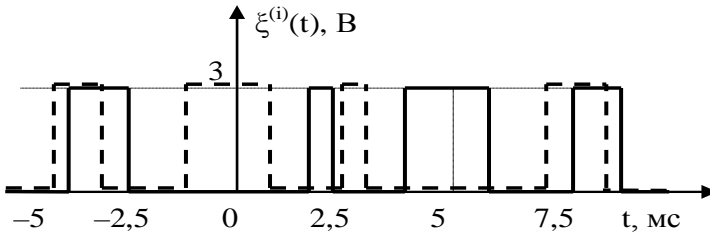


Рис. 8.2. Возможные реализации СП из задачи 2

Решение

а) особенностью данной задачи является тот факт, что существует всего 2 возможных (наблюдаемых) значения СП: нулевое и амплитудное. Среднее время, занимаемое импульсами, определяет вероятность появления амплитудного значения $P\{\xi(t) = U\} = 0,40$. Соответственно, вероятность пребывания процесса на нулевом уровне составляет $P\{\xi(t) = 0\} = 0,60$;

б) эргодичность случайного процесса $\xi(t)$ гарантирует его стационарность, т.е. неизменность свойств СП вдоль временной оси. Таким образом, в каждом своем сечении анализируемый СП ведет себя как дискретная случайная величина, характеризующаяся рядом распределения.

$$\xi(t) :$$

x_i	0	3
p_i	0,6	0,4

Вследствие этого формулы, определяющие числовые характеристики анализируемого СП, оказываются идентичными аналогичным выражениям для дискретной случайной величины

$$M_{\xi} = \sum_i x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,4 = 1,2 \text{ (В)};$$

$$D_{\xi} = \sum_i (x_i - M_{\xi})^2 \cdot p_i = (0-1,2)^2 \cdot 0,6 + (3-1,2)^2 \cdot 0,4 = 2,16 \text{ (В}^2\text{)}.$$

Величина $D_{\xi} = 2,16 \text{ В}^2$ и будет дисперсией анализируемого СП.

Задача 3. Эргодический случайный процесс $u(t)$ состоит из реализаций, которые в случайные моменты времени перепрыгивают с уровня $u(t) = +A$ на уровень $u(t) = -A$, а затем – обратно. Среднее время пребывания на высоком и низком уровнях – совпадают, а средняя мощность реализаций составляет 16 В^2 . Записать аналитическое выражение для одномерной плотности вероятности данного процесса.

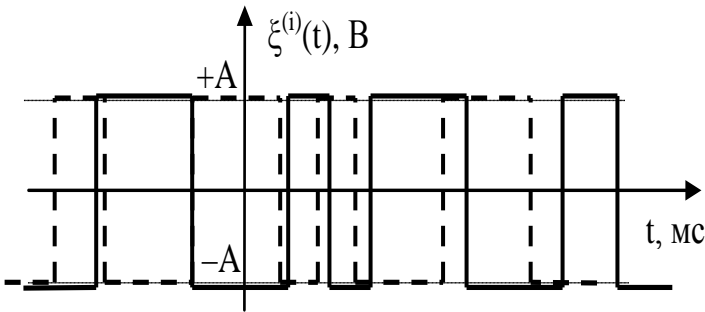


Рис. 8.3. Возможные реализации СП из задачи 3

Решение

а) как и в предыдущей задаче, крайне важным оказывается то, что существует всего 2 возможных (наблюдаемых) значения СП: положительное и отрицательное. Это делает единственно возможной плотность вероятности вида (рис. 8.4):

$$W_{\xi}(x) = 0,5 \cdot \delta(x + A) + 0,5 \cdot \delta(x - A).$$

Два коэффициента по 0,5 соответствуют здесь вероятностям пребывания процесса на высоком и низком уровнях;

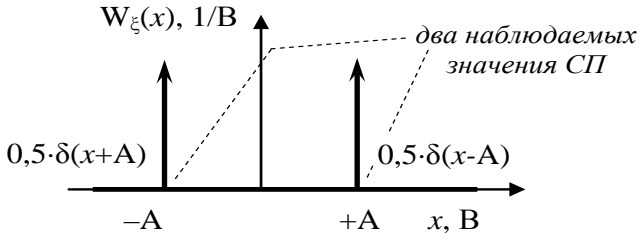


Рис. 8.4. Плотность вероятности СП из задачи 3

б) учитывая, что процесс $\xi(t)$ – эргодический, его математическое ожидание не может зависеть от времени, а симметричность полученной выше плотности вероятности относительно точки $x = 0$ указывает на то, что это математическое ожидание является нулевым $M_\xi = 0$ (В);

в) для эргодических СП дисперсия совпадает со средней мощностью переменной составляющей любой из реализаций. Т.к. $M_\xi = 0$, то постоянная составляющая любой из реализаций исследуемого СП равна нулю, поэтому средняя мощность всего процесса совпадает с мощностью его переменной составляющей. Итак, $D_\xi = 16$ (В²).

С другой стороны, выражая дисперсию через полученную выше плотность вероятности, имеем

$$\begin{aligned}
 D_\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi)^2 \cdot W_\xi(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot 0,5 \cdot \delta(x + A) \cdot dx + \\
 &+ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot 0,5 \cdot \delta(x - A) \cdot dx = 0,5 \cdot (-A)^2 + 0,5 \cdot (-A)^2 = A^2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, неизвестная ранее амплитуда A обязана равняться 4 (В);

г) итак, плотность вероятности исследуемого СП имеет вид $W_\xi(x) = 0,5 \cdot \delta(x + 4) + 0,5 \cdot \delta(x - 4)$, (1/В).

Задача 4. Реализации нормального эргодического случайного процесса обладают постоянной составляющей $U_- = -3$

(В) и полной средней мощностью $P_{\xi^{(i)}} = 13 \text{ (В}^2\text{)}$. Какова частота наблюдения положительных мгновенных значений этого случайного напряжения?

Решение

а) упомянутый в условии нормальный характер случайного процесса означает, что его плотность вероятности имеет вид [1, (3.24)] и характеризуется двумя параметрами a и σ . Эргодичность же процесса означает, что его постоянная составляющая $U_- = M_{\xi} = a$, а полная средняя мощность $P_{\xi^{(i)}} = m_2\{\xi\} = \sigma_{\xi}^2 + M_{\xi}^2$. Подставляя численные значения из условия, имеем

$$a = -3 \text{ (В)}, \quad \sigma = 2 \text{ (В)}.$$

б) из эргодичности процесса следует также и что частота наблюдения каких-либо напряжений определяется вероятностью их попадания в соответствующий интервал значений

$$P\{\xi(t) > 0\} = 1 - P\{\xi(t) \leq 0\} = 1 - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{(x+3)^2}{8}} dx.$$

Интеграл от нормальной плотности вероятности в элементарных функциях не выражается, поэтому для расчета вероятности появления положительных напряжений применим замену переменных $z = (x + 3)/2$ и воспользуемся таблицей из прил. 1

$$P\{\xi(t) > 0\} = 1 - \int_{-\infty}^{1,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 - F_{\text{CT}}(1,5) = 1 - 0,9331 \approx 0,067.$$

(Примечание: верхний предел «1,5» получается при подстановке предела $x_{\text{max}}=0$ в функцию замены $z_{\text{max}} = (x_{\text{max}} + 3)/2 = 1,5$.)

Задача 5. Определить математическое ожидание и дисперсию эргодического случайного процесса, состоящего из повторяющихся с периодом $T_{\Pi} = 6,547 \text{ мс}$ импульсов вида

$$s_{\text{имп}}(t) = \begin{cases} -0,515 + 4 \cdot 1,536 \cdot [(t-t_0)/T_n]^2, & \text{при } t_0 \leq t \leq t_0 + T_n/2 \\ -0,515 - 2 \cdot 1,536 \cdot [(t-t_0)/T_n - 1], & \text{при } t_0 + T_n/2 \leq t \leq T_n \end{cases},$$

где $t \in [t_0; t_0 + T_n]$, t_0 – случайный момент начала очередного периода (рис. 8.5).

Решение

а) периодический эргодический характер исследуемого случайного процесса говорит о том, что исследовать его свойства можно по любому отдельному периоду любой реализации.

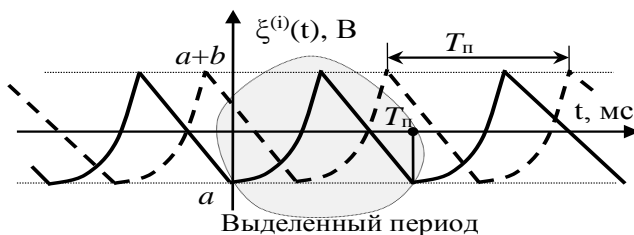


Рис. 8.5. Возможные реализации СП из задачи 5

Для упрощения расчетов выберем реализацию, содержащую период, начинающийся при $t_0 = 0$. Также примем во внимание, что входящие в выражение для $s_{\text{имп}}(t)$ громоздкие числовые константы, повторяющиеся в первой и второй строке, можно заменить обозначениями $a = -0,515$ В, $b = 1,536$ В. С их использованием выделенный на рис. 8.5 период сигнала можно описать выражением вида

$$s_{\text{имп}}(t) = \begin{cases} a + 4b \cdot (t/T_n)^2, & \text{при } 0 \leq t \leq T_n/2 \\ a + 2b \cdot (1 - t/T_n), & \text{при } T_n/2 \leq t \leq T_n \end{cases}.$$

Замена неудобных числовых констант на буквенные значения в подобных обстоятельствах является крайне рекомендуемым шагом, т.к. расчеты в задаче даже после замены оказываются достаточно громоздкими; решение же при непосредственном использовании исходно заданных числовых кон-

стант почти наверняка будет сопровождаться многочисленными расчетными ошибками.

б) связь между «поведением» реализаций СП на периоде и значениями математического ожидания и дисперсии для эргодических СП определяется соотношениями (1.40), (1.41) из [2], однако учитывая некоторую громоздкость выражения $s_{\text{имп}}(t)$ в ходе расчетов будет полезно использовать замену $t/T_{\text{п}} = x$, с изменением x от 0 до 1. Тогда расчет математического ожидания на основе (1.40) из [2] можно записать в виде:

$$\begin{aligned} M_{\xi} &= \frac{1}{T_{\text{п}}} \cdot \int_0^{T_{\text{п}}} s_{\text{имп}}(t) dt = \frac{1}{T_{\text{п}}} \cdot \left[\int_0^{T_{\text{п}}/2} (a + 4b \cdot (t/T_{\text{п}})^2) dt + \right. \\ &+ \left. \int_{T_{\text{п}}/2}^{T_{\text{п}}} (a + 2b \cdot (1 - t/T_{\text{п}})) dt \right] = \frac{1}{T_{\text{п}}} \cdot \left[\int_0^{1/2} (a + 4b \cdot x^2) dx + \right. \\ &+ \left. \int_{1/2}^1 (a + 2b \cdot (1 - x)) dx \right] = \left(ax + \frac{4b}{3} x^3 \right) \Big|_0^{1/2} + \left(ax - \frac{2b}{2} (1 - x)^2 \right) \Big|_{1/2}^1 = \\ &= a + \frac{b}{6} + \frac{b}{4} = a + \frac{5 \cdot b}{12}. \end{aligned}$$

Как следует из результата расчета, математическое ожидание располагается немного ниже средней линии между границами a и $(a+b)$, т.к. форма нарастающего участка импульса – параболическая, что приводит к замедлению роста сигнала и снижению его среднего значения.

в) для расчета дисперсии на основании (1.41) из [2] запишем

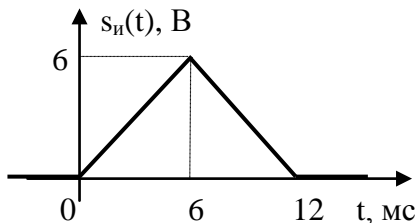
$$\begin{aligned} D_{\xi} &= \frac{1}{T_{\text{п}}} \cdot \int_0^{T_{\text{п}}} (s_{\text{имп}}(t) - M_{\xi})^2 dt = \frac{1}{T_{\text{п}}} \cdot \left[\int_0^{T_{\text{п}}/2} (a + 4b \cdot (t/T_{\text{п}})^2 - M_{\xi})^2 dt + \right. \\ &+ \left. \int_{T_{\text{п}}/2}^{T_{\text{п}}} (a + 2b \cdot (1 - t/T_{\text{п}}) - M_{\xi})^2 dt \right] = \int_0^{1/2} \left(4b \cdot x^2 - \frac{5b}{12} \right)^2 dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{1/2}^1 \left(\frac{19b}{12} - 2b \cdot x \right)^2 dx = \left((4b)^2 \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{10b^2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \left(\frac{5b}{12} \right)^2 x \right) \Bigg|_{1/2}^1 + \\
& + \left(\left(\frac{19b}{12} \right)^2 x - \frac{19b^2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + (2b)^2 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{1/2}^1 = \\
& = b^2 \cdot \left(\frac{1}{10} - \frac{5}{36} + \frac{25}{144} \cdot \frac{1}{2} + \frac{361}{144} \cdot \frac{1}{2} - \frac{19}{3 \cdot 2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{8} \right) \approx 0,093 \cdot b^2
\end{aligned}$$

Для оценки правдоподобия полученного результата сравним его с дисперсией равномерного распределения, которое возникло бы в том случае, если бы отдельный импульс анализируемого СП имел строго пилообразную форму, изменяясь между границами a и $(a+b)$. В соответствии с формулой (4.19) из [1] в подобных условиях дисперсия составила бы $D_{\lambda} = b^2 / 12 \approx 0,083b^2$, т.е. чуть меньше, чем D_{ξ} . Это вполне логично, т.к. для анализируемых $s_{\text{имп}}(t)$ закон распределения будет чуть отличным от равномерного, но это отличие совсем небольшое, из-за чего и возрастание дисперсии оказывается незначительным.

8.2. Задачи для самоконтроля

8.2.1. Определите, к какому классу случайных процессов следует отнести амплитудно-модулированное колебание, получаемое из несущей $u_n(t) = 4 \cdot \cos(10^7 \cdot t + \psi)$ под управлением представленного ниже информационного сигнала при крутизне модулятора $k_{\text{ам}} = 0,5$, если начальная фаза ψ является (а) константой, (б) случайной величиной, распределенной равномерно на интервале от 0 до 2π . Получите аналитическое выражение для дисперсии этого процесса.



Ответ: В обоих случаях

процесс является нестационарным. Случай (а) характеризуется нулевой дисперсией, а в случае (б) закон изменения дисперсии может быть представлен в виде

$$D_{\xi}(t) = \begin{cases} 8, & t < 0 \text{ или } t > 0,012 \\ 8 \cdot (1 + 125t)^2, & 0 < t < 0,006 \\ 8 \cdot (2,5 - 125t)^2, & 0,006 < t < 0,012 \end{cases} .$$

8.2.2. Определите, к какому типу случайных процессов следует отнести сигналы вида $\xi(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$ при условии, что:

- а) $A = \text{const}$, $\omega = \text{const}$, $\psi = \text{const}$;
- б) A – случайная величина, $\omega = \text{const}$, $\psi = \text{const}$;
- в) $A = \text{const}$, ω – случайная величина, распределенная равномерно от 10^4 до 10^5 рад/с, ψ – случайная величина, распределенная равномерно от 0 до 2π .

Ответ: В случае (а) сигнал оказывается строго детерминированным; дисперсия подобного нестационарного процесса равна нулю. В случае (б) процесс также нестационарен, но имеет положительную дисперсию, определяемую свойствами величины A . В последнем случае фигурирует стационарный, но неэргодический процесс.

8.2.3. Пусть $\xi(t)$ – эргодический случайный процесс. Определите тип процесса $\eta(t) = \xi(t) + \zeta$, если (а) $\zeta = \text{const}$ или (б) ζ является случайной величиной.

Ответ: а) эргодический; б) стационарный, но неэргодический.

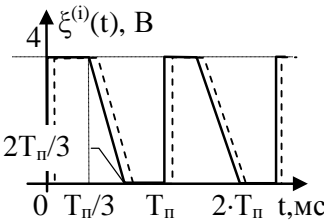
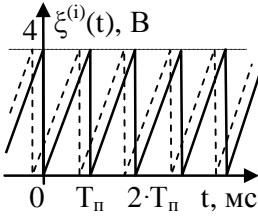
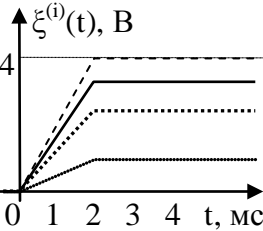
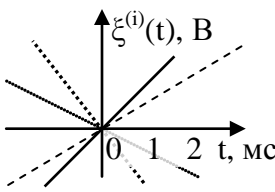
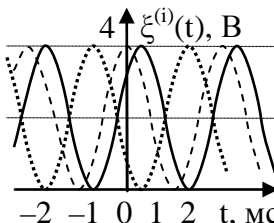
8.2.4. Реализации эргодического шума, имеющего нормальное распределение, характеризуются постоянной составляющей $u_{-} = -3$ (В) и средней мощностью переменной составляющей $P_{-u} = 9$ (В²). Определите частоту наблюдения отрицательных значений подобного шума.

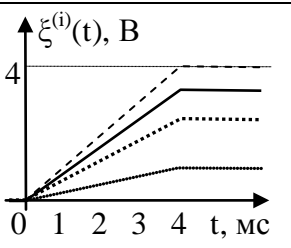
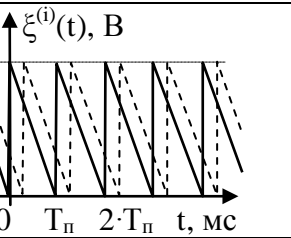
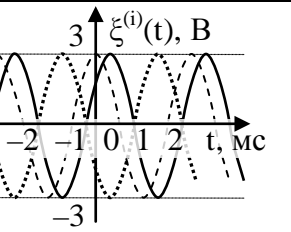
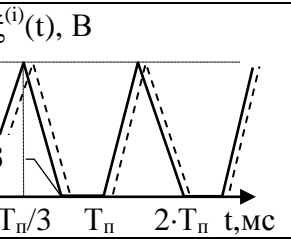
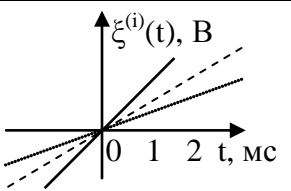
Ответ: $P^* \approx 84\%$.

8.3. Контрольные задания

Задача 8.1. Пользуясь описанием случайного процесса из последнего столбца табл. 8.1, приведенной ниже, определить его дисперсию для указанного во втором столбце таблицы момента времени t_1 .

Таблица 8.1

Но- мер	t_1 , (мс)	Характеристика / типовые реализации случайного процесса
1	$T_{\pi}/2$	<p>периодический эргодический СП с равномерно распределенной случайной начальной фазой</p> 
2	$T_{\pi}/2$	<p>периодический эргодический СП со случайной начальной фазой</p> 
3	4	<p>на участке $0 \dots 2$ (мс) процесс линейно нарастает, а начиная с $t_0 = 2$ мс равновероятно принимает любые значения между 1 и 4 вольтами</p> 
4	1	<p>совокупность линейных реализаций вида $\xi^{(i)}(t) = k \cdot t$, где k равновероятно принимает любые значения между $-4 \cdot 10^4$ и $4 \cdot 10^4$ В/сек</p> 
5	0	<p>периодический гармонический эргодический СП с начальной фазой, распределенной равномерно от 0 до 2π</p> 

Но- мер	t_1 , (м с)	Характеристика / типовые реализации случайного процесса
6	2	<p>на участке $0 \dots 4$ (мс) процесс линейно нарастает, а начиная с $t_0 = 4$ мс равномерно принимает любые значения между 1 и 4 вольтами</p> 
7	T_{π}	<p>периодический эргодический СП с равномерно распределенной случайной начальной фазой</p> 
8	0	<p>периодический гармонический эргодический СП со случайной начальной фазой, равномерно принимающей значения от 0 до 2π.</p> 
9	$T_{\pi}/3$	<p>периодический эргодический СП с равномерно распределенной случайной начальной фазой</p> 
10	1	<p>совокупность линейных реализаций вида $\xi^{(i)}(t) = k \cdot t$, где k равномерно принимает любые значения между 0 и $4 \cdot 10^4$ В/сек</p> 

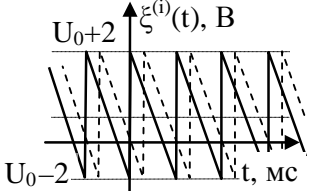
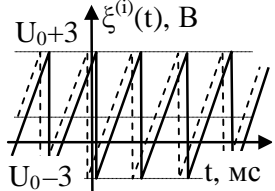
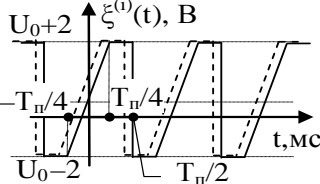
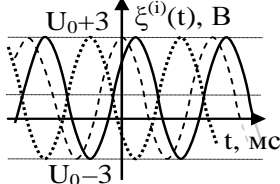
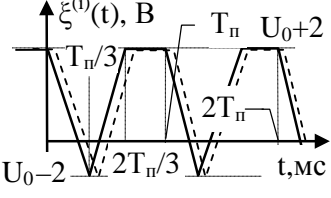
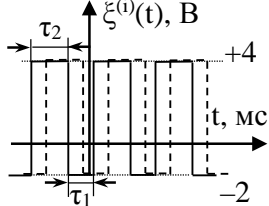
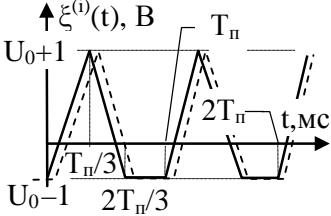
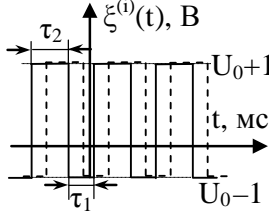
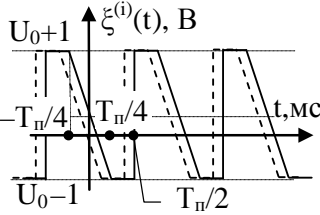
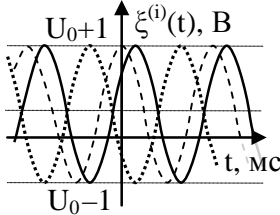
Задача 8.2. Нарисовать потенциально возможные осциллограммы нормального случайного процесса $\xi(t)$, числовые характеристики которого определяются выражениями...

Таблица 8.2

Номер	$M_{\xi}(t), (B)$	$D_{\xi}(t), (B^2)$
1	$3 \cdot t$	4
2	-3	$ t $
3	$3 \cdot \exp(-t)$	1
4	+3	$\exp(- t)$
5	+4	$t/2$
6	$ t $	1
7	-1	$\exp(-t)$
8	$\exp(- t)$	0,3
9	$\exp(+ t)$	1
10	$t/2$	0,66

Задача 8.3. Известно, что на протяжении 40% времени наблюдения реализации представленного в таблице ниже случайного процесса принимают отрицательные значения. Рассчитать второй начальный момент $m_2\{\xi(t)\}$ этого процесса, если...

Таблица 8.3

Но- мер	реализации этого процесса имеют вид	Но- мер	реализации этого процесса имеют вид
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Задача 8.4. Эргодический случайный процесс в каждый момент времени принимает какое-то одно из 3 разрешенных значений. Форма реализаций этого процесса приближенно показана на рисунке на следующей странице, а постоянные составляющие всех реализаций одинаковы и равны +4 (В). Вычислить все неизвестные константы и записать аналитическое выражение для плотности вероятности процесса $\xi(t)$, если...

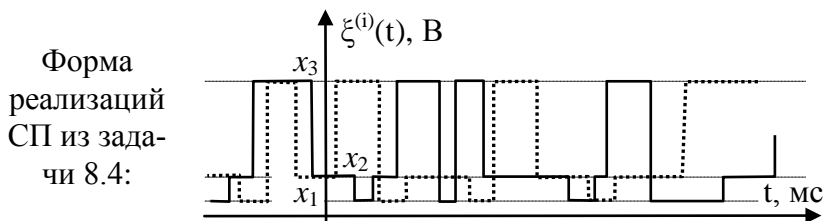


Таблица 8.4

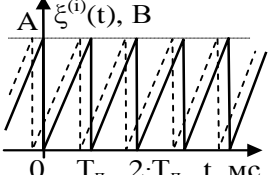
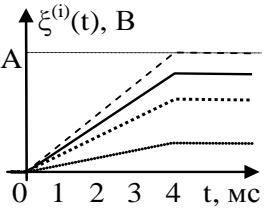
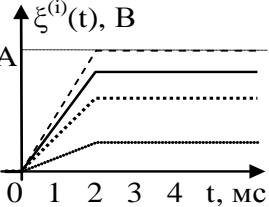
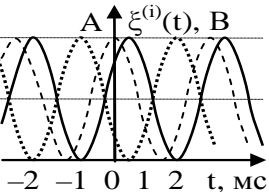
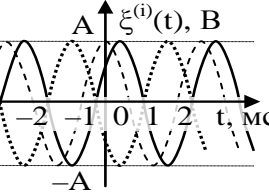
Но- мер	Дополнительное условие
1	принимаемые значения в вольтах составляют $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 10$ (В), а средняя мощность реализаций процесса равна $25,5$ (В^2).
2	все уровни $x_1 \dots x_3$ больше нуля, каждый последующий разрешенный уровень в 3 раза больше предыдущего, а среднее время пребывания реализаций на каждом уровне одно и то же.
3	среднее время пребывания на уровне $x_1 = 2$ (В) совпадает со средним время пребывания на уровне $x_3 = 8$ (В), а продолжительность пребывания на уровне x_2 вдвое больше.
4	принимаемые значения в вольтах составляют $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 10$ (В), а средняя мощность переменной составляющей этих реализаций равна 12 (В^2).
5	$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 3$ (В), а среднее время пребывания реализаций на каждом уровне одно и то же.

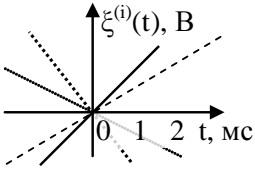
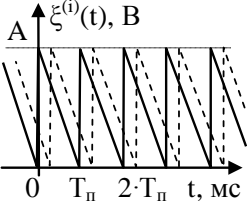
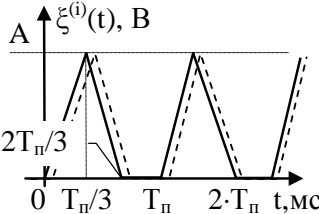
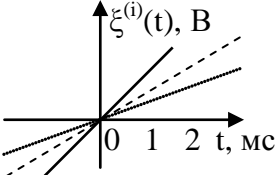
Но- мер	Дополнительное условие
6	среднее время пребывания на уровне $x_1 = 1$ (В) совпадает со средним время пребывания на уровне $x_3 = 8$ (В), а продолжительность пребывания на уровне x_2 вдвое меньше.
7	все уровни $x_1 \dots x_3$ больше нуля, каждый последующий уровень вдвое больше предыдущего, а среднее время пребывания реализаций на каждом уровне одно и то же.
8	$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 2$ (В), а среднее время пребывания реализаций на каждом уровне одно и то же.
9	принимаемые значения в вольтах составляют $x_1 = -2$, $x_2 = +1$, $x_3 = +8$ (В), а средняя мощность переменной составляющей этих реализаций равна 17 (В^2).
10	$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 3$ (В), а среднее время пребывания реализаций на уровне x_1 в $1,5$ раза меньше времени пребывания на уровне x_2 и в $2,5$ раза меньше, чем время пребывания на уровне x_3 .

Задача 8.5. Для всех приведенных в табл. 8.5 СП дисперсия в момент времени $t_1 = 2$ мс равна $D(t_1) = 4 \text{ В}^2$. Определите значение параметра A , входящего в описание этих процессов.

Таблица 8.5

Но- мер	Характеристика / типовые реализации случайного процесса	
1	периодический эргодический СП с равномерно распределенной на периоде случайной начальной фазой	

Но- мер	Характеристика / типовые реализации случайного процесса	
2	<p>периодический эргодический СП с равномерно распределенной на периоде случайной начальной фазой</p>	
3	<p>на участке 0...4 (мс) процесс линейно нарастает, а начиная с $t_0 = 4$ мс равномерно принимает любые значения между 1 и A вольтами</p>	
4	<p>на участке 0...2 (мс) процесс линейно нарастает, а начиная с $t_0 = 2$ мс равномерно принимает любые значения между 1 и A вольтами</p>	
5	<p>периодический гармонический эргодический СП со случайной начальной фазой, равномерно принимающей значения от 0 до 2π</p>	
6	<p>периодический гармонический эргодический СП со случайной начальной фазой, равномерно принимающей значения от 0 до 2π</p>	

Но- мер	Характеристика / типовые реализации случайного процесса	
7	совокупность линейных реализаций вида $\xi^{(i)}(t) = k \cdot t$, где k равновероятно принимает любые значения между $-A$ и $+A$ В/сек	
8	периодический эргодический СП с равномерно распределенной на периоде случайной начальной фазой	
9	периодический эргодический СП с равномерно распределенной на периоде случайной начальной фазой	
10	совокупность линейных реализаций вида $\xi^{(i)}(t) = k \cdot t$, где k равновероятно принимает любые значения между 0 и A В/сек	

Задача 8.6. Известно, что постоянная составляющая реализаций представленного в табл. 8.6 эргодического случайного процесса составляет +2 вольта. Определить дисперсию СП, если...

Таблица 8.6

Но- мер	Реализации этого процесса имеют вид	Но- мер	реализации этого процесса имеют вид
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Задача 8.7. Шум представляет собой эргодический случайный процесс, подчиняющийся нормальному распределению.

Определить полную среднюю мощность реализаций этого шума, если...

Таблица 8.7

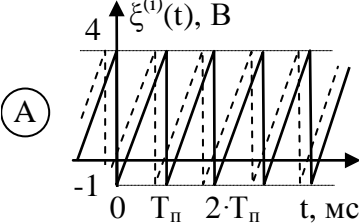
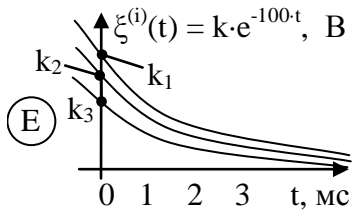
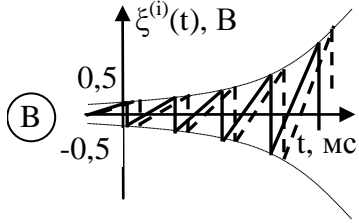
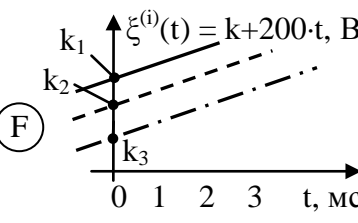
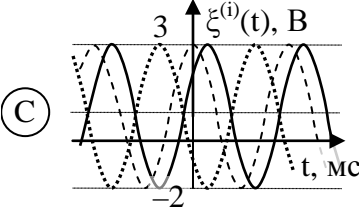
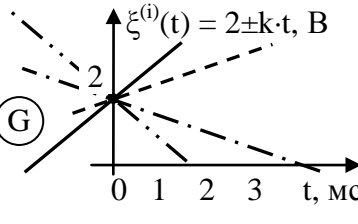
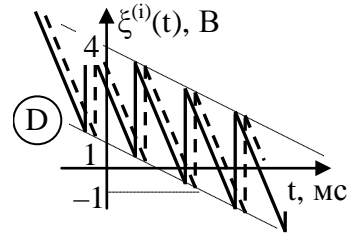
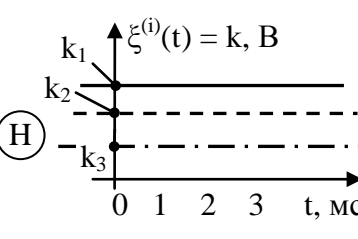
Но- мер	Дополнительная информация о случайном процессе
1	положительные и отрицательные значения наблюдаются одинаково часто, а 95,46% значений шума лежат в диапазоне от минус 8 до плюс 8 вольт.
2	наиболее вероятными являются значения близкие к $U_0 = 2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = 10$ (В) составляет 2,27%.
3	эффективное значение процесса составляет 2 вольта, а вероятность наблюдения значений, не превышающих $U_{\min} = -2$ (В) составляет 2,27%.
4	постоянная составляющая реализаций процесса равна $U_- = -2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +4$ (В) составляет 0,13%.
5	средняя мощность переменной составляющей процесса составляет $P_- = 9$ (В ²), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +6$ (В) составляет 15,87%.
6	постоянная составляющая реализаций процесса равна $U_- = -2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +4$ (В) составляет 2,27%.
7	положительные и отрицательные значения наблюдаются одинаково часто, а 99,74% значений шума лежат в диапазоне от минус 6 до плюс 6 вольт.
8	наиболее вероятными являются значения близкие к $U_0 = -2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +8$ (В) составляет 2,27%.
9	эффективное значение процесса составляет 3 вольта, а вероятность наблюдения значений, не превышающих $U_{\min} = -2$ (В) составляет 15,87%.
10	средняя мощность переменной составляющей процесса составляет $P_- = 9$ (В ²), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +1,5$ (В) составляет 30,85%.

Задача 8.8. Шум представляет собой эргодический случайный процесс, подчиняющийся нормальному распределению. Записать аналитическое выражение для плотности вероятности и определить среднее время пребывания реализаций процесса ниже уровня $+2$ (В), если...

Таблица 8.8

Но- мер	Дополнительная информация о случайном процессе
1	положительные и отрицательные значения наблюдаются одинаково часто, а 99,74% значений шума лежат в диапазоне от минус 6 до плюс 6 вольт.
2	положительные и отрицательные значения наблюдаются одинаково часто, а 95,46% значений шума лежат в диапазоне от минус 8 до плюс 8 вольт.
3	наиболее вероятными являются значения близкие к $U_0 = -2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +8$ (В) составляет 2,27%.
4	наиболее вероятными являются значения близкие к $U_0 = 2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = 10$ (В) составляет 2,27%.
5	эффективное значение процесса составляет 3 вольт, а вероятность наблюдения значений, не превышающих $U_{\min} = -2$ (В) составляет 15,87%.
6	эффективное значение процесса составляет 2 вольт, а вероятность наблюдения значений, не превышающих $U_{\min} = -2$ (В) составляет 2,27%.
7	постоянная составляющая реализаций процесса равна $U_- = -2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +4$ (В) составляет 0,13%.
8	постоянная составляющая реализаций процесса равна $U_- = -2$ (В), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +4$ (В) составляет 2,27%.
9	средняя мощность переменной составляющей процесса составляет $P_- = 9$ (В ²), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +1,5$ (В) составляет 30,85%.
10	средняя мощность переменной составляющей процесса составляет $P_- = 9$ (В ²), а вероятность наблюдения значений, превышающих $U_{\max} = +6$ (В) составляет 15,87%.

Случайные процессы для задач 8.9-8.10

<p><i>Ниже задержки реализаций равновероятны в пределах T_{Π}</i></p>	<p><i>Ниже коэффициенты k равновероятны в пределах от 1 до 4</i></p>
<p>(A) </p>	<p>(E) </p>
<p>(B) </p>	<p>(F) </p>
<p>(C) </p>	<p>(G) </p>
<p>(D) </p>	<p>(H) </p>

Задача 8.9. Среди случайных процессов, представленных в табл. 8.9, перечислите **все** СП, отвечающие условию отбора из таблицы ниже. В решении укажите как причины (признаки), подтверждающие Ваш выбор, так и причины, по которым пришлось отвергнуть все прочие случайные процессы.

Таблица 8.10

Но- мер	Условие отбора СП
1	Дисперсия процесса уменьшается вдоль оси времени.
2	Дисперсия процесса увеличивается вдоль оси времени.
3	Дисперсия процесса уменьшается, а затем увеличивается.
4	Случайный процесс является стационарным.
5	Случайный процесс является эргодическим.
6	Математическое ожидание процесса остается постоянным.
7	Матожидание процесса вдоль оси времени уменьшается.
8	Матожидание процесса увеличивается вдоль оси времени
9	Случайный процесс является нестационарным.
10	Случайный процесс является неэргодическим.

Задача 8.10. Реализации анализируемых случайных процессов, показаны в табл. 8.9. Для процесса, указанного во второй колонке табл. 8.11 определите закон изменения...

Таблица 8.11

Но- мер	Про- цесс	Определяемая характеристика
1	H	дисперсии.
2	G	дисперсии.
3	G	математического ожидания.

Но- мер	Про- цесс	Определяемая характеристика
4	F	математического ожидания.
5	D	дисперсии.
6	E	дисперсии.
7	D	математического ожидания.
8	E	математического ожидания.
9	A	дисперсии.
10	C	дисперсии.

9. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

9.1. Образцы решения задач

Подготовку к решению задач из текущего раздела следует начинать с изучения материалов, представленных в подразделах 2.1–2.5 учебного пособия [2, с. 20–41], после чего рекомендуется проанализировать представленные ниже образцы решения типовых задач и попытаться решить самостоятельно по меньшей мере 50% задач из подраздела 9.2 (см. ниже с. 43–44).

Задача 1. Реализации эргодического случайного процесса $\xi(t)$ были записаны на магнитофонную ленту. В результате воспроизведения записей с удвоенной скоростью образовался новый процесс $\eta(t)$. Сопоставить энергетические характеристики процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Решение

а) исходя из способа получения СП $\eta(t)$ можно прийти к выводу, что все его реализации обязаны быть однотипными, а сам процесс – относиться к классу эргодических. Корреляционную функцию эргодического СП можно искать как среднюю по

времени величину произведения двух разнесенных по времени на интервал τ значений этого процесса

$$B_{\eta}(\tau) = \lim_{T_{\text{набл}} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{\text{набл}}} \cdot \int_{-T_{\text{набл}}/2}^{+T_{\text{набл}}/2} \eta^{(i)}(t) \cdot \eta^{(i)}(t - \tau) dt .$$

Вместе с тем, реализации СП $\eta(t)$ образуются из реализаций процесса $\xi(t)$ по правилу $\eta(t) = \xi(2 \cdot t)$. Подставляя $\eta(t)$ в предыдущее выражение несложно получить

$$\begin{aligned} B_{\eta}(\tau) &= \lim_{T_{\text{набл}} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{\text{набл}}} \cdot \int_{-T_{\text{набл}}/2}^{+T_{\text{набл}}/2} \xi^{(i)}(2 \cdot t) \cdot \xi^{(i)}(2 \cdot t - 2 \cdot \tau) dt = \\ &= \lim_{T_{\text{набл}} \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T_{\text{набл}}} \cdot \int_{-T_{\text{набл}}}^{+T_{\text{набл}}} \xi^{(i)}(z) \cdot \xi^{(i)}(z - 2 \cdot \tau) dz = B_{\xi}(2 \cdot \tau) . \end{aligned}$$

Таким образом, корреляционные функции анализируемых процессов отличаются лишь горизонтальным масштабом – функция $B_{\eta}(\tau)$ вдвое сжата вдоль оси времени по отношению к $B_{\xi}(\tau)$. Подобный результат вполне закономерен: воспроизводимые записи изменяются вдвое быстрее, а значит интервал их предсказуемости вдвое меньше. Средняя же мощность от скорости изменения не зависит, а потому вертикальный масштаб (значение корреляционной функции в нуле) изменяться не должен.

б) в соответствии с теоремой Винера-Хинчина и свойством №3 преобразования Фурье (см. прил. 4) сжатие корреляционной функции вдоль оси времени соответствует в спектральной области растяжению

$$S_{\eta}(f) = 0,5 \cdot S_{\xi}(0,5 \cdot f) .$$

Полученные соотношения проиллюстрированы на рис. 9.1. Ускоренное воспроизведение привело к расширению спектра процесса и подобное распределение мощности по большему диапазону частот привело к снижению в 2 раза мощности, приходящейся на каждый герц оси частот.

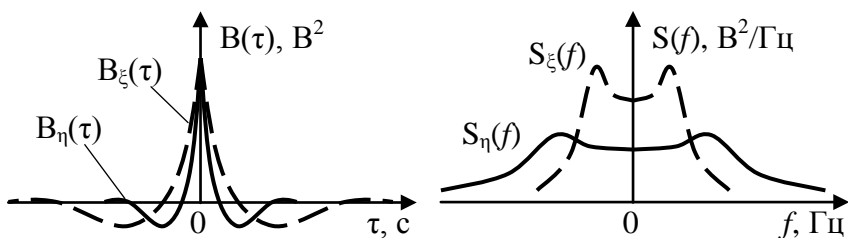


Рис. 9.1. Соотношение энергетических характеристик процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ из задачи 1

Задача 2. Проанализируйте, может ли случайный процесс иметь корреляционную функцию прямоугольной формы?

Решение

а) если корреляционная функция некоторого процесса может иметь прямоугольную форму, то в соответствии теоремой Винера-Хинчина спектральная плотность мощности (СПМ) случайного процесса [2, с. 27] связана с его корреляционной функцией преобразованием Фурье

$$S_{\xi}(f) = \int_{-\tau_k}^{+\tau_k} B_0 \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau = 2B_0\tau_k \cdot \text{sinc}(2\pi \cdot f \cdot \tau_k).$$

б) sinc-образная функция частоты показана на рис. 9.2 справа, однако она не может служить спектральной плотностью мощности какого-либо процесса, т.к. является знакопеременной, а СПМ случайных процессов обязана быть неотрицательной для всех частот. Полученное противоречие свидетельствует, что функция прямоугольной формы не является положительно определенной, а потому не может служить корреляционной функцией никакого случайного процесса.

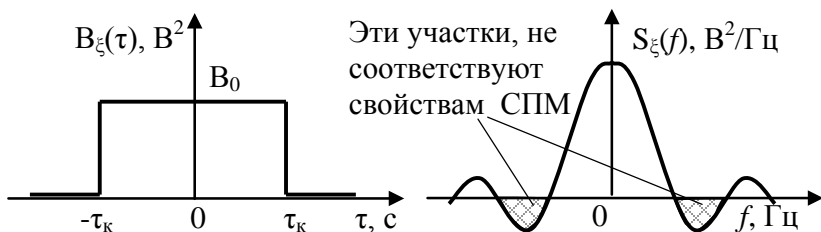


Рис. 9.2. Энергетические характеристики из задачи 2

Задача 3. Найти интервал корреляции случайного процесса $\zeta(t)$, характеризуемого корреляционной функцией

$$B_{\zeta}(\tau) = 12 + 2 \cdot \exp(-6366 |\tau|) \cdot \cos(5 \cdot 10^6 \tau) .$$

Решение

а) Интервал корреляции случайного процесса определяется формулой (2.19) из [2, с.30], т.е. соотношением вида

$$\tau_k = \frac{1}{K_{\zeta}(0)} \cdot \int_0^{+\infty} |K_{\zeta}(\tau)| d\tau ,$$

где $K_{\zeta}(\tau)$ – ковариационная функция процесса.

Полезно вспомнить, что интервал корреляции характеризует временной диапазон предсказуемости переменной составляющей случайного процесса и потому не может зависеть от постоянной составляющей $\zeta(t)$; а корреляционная $B_{\zeta}(\tau)$ и ковариационная $K_{\zeta}(\tau)$ функции отличаются друг от друга как раз на величину квадрата математического ожидания (см. (2.5) из [2, с.21]).

У любых реальных процессов статистическая взаимосвязь между значениями, разнесенными на большие интервалы времени, становится бесконечно малой. Даже периодические сигналы, излучаемые реальными генераторами, демонстрируют нестабильность параметров, из-за которой для больших τ справедливы соотношения:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_{\xi}(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_{\xi}(\tau) = M_{\xi}^2$$

Как следствие, для процесса, с корреляционной функцией, заданной в условии задачи $M_{\xi}^2 = 12$, а $K_{\xi}(\tau)$ определяется вторым слагаемым в $B_{\xi}(\tau)$.

б) из-за наличия в подынтегральном выражении операции вычисления модуля прямой расчет τ_k оказывается затруднительным, однако если рассмотреть отдельный «лепесток» подлежащей интегрированию функции (рис. 9.3), то можно видеть, что изменения, вносимые в этот лепесток косинуса изменением экспоненты $\exp(-6366 \tau)$ оказываются очень малыми.

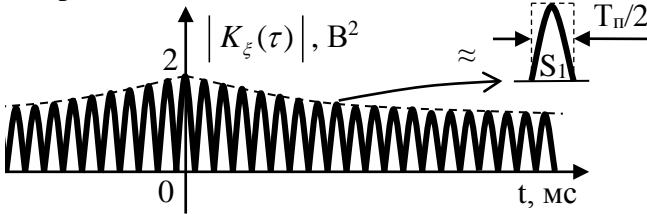


Рис. 9.3. Модуль корреляционной функции из задачи 3

Пусть в прямоугольник шириной $T_n/2$ и высотой 1 (площадью $T_n/2$) «вписан» лепесток гармонической функции. Его площадь

$$S_1 = \int_0^{T_n/2} \sin\left(\frac{2\pi}{T_n} t\right) dt = -\frac{T_n}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{T_n} t\right) \Big|_0^{T_n/2} = \frac{\pi}{T_n}.$$

Таким образом, замена прямоугольника вписанным в него лепестком синуса или косинуса сопровождается уменьшением площади в $\pi/2$ раз. А учитывая слабое влияние экспоненциальной формы огибающей на вид функции $|K_{\xi}(\tau)|$, состоящей из бесконечного набора лепестков, можно утверждать и что площадь под кривой $|K_{\xi}(\tau)|$ будет в $\pi/2$ раз меньше площади под экспоненциальной огибающей.

в) рассчитаем для огибающей

$$S_{oz} = \int_0^{+\infty} 2 \exp(-6366t) dt = \frac{-2}{6366} \exp(-6366t) \Big|_0^{+\infty} \approx 3,1417 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$$

и теперь с учетом правила корректировки из п. «б» для интервала корреляции получаем

$$\tau_k = \frac{1}{K_\xi(0)} \cdot \int_0^{+\infty} |K_\xi(\tau)| d\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{oz}}{\pi/2} = \frac{3,1417 \cdot 10^{-4}}{\pi} = 10^{-4} \text{ с}.$$

Задача 4. Спектральная плотность мощности нормального случайного процесса $\xi(t)$ определяется выражением

$$S_\xi(\omega) = 2 \cdot 10^{-3} / (10^6 + \omega^2), \text{ В}^2/\text{Гц}.$$

Определить интервал корреляции этого процесса, а также вероятность наблюдения значений процесса $\xi(t)$, превышающих +1 милливольт.

Решение

а) Интервал корреляции случайного процесса встречается выше в соотношениях [2, (2.19), (2.21)], однако последнее из них рассчитано на неотрицательную корреляционную функцию, а для анализируемого процесса характер зависимости $V_\xi(\tau)$ пока не установлен. В связи с этим начать решение задачи необходимо с определения корреляционной функции процесса $V_\xi(\tau)$.

В соответствии с [2, (2.17)]

$$V_\xi(\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} S_\xi(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\omega = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega \cdot \tau)}{10^6 + \omega^2} d\omega$$

Для сокращения выкладок воспользуемся табличным интегралом

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega \cdot \tau)}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot e^{-|a \cdot \tau|}$$

При $a = 10^3$ и с учетом поправочного коэффициента $2 \cdot 10^{-3}$ корреляционная функция процесса $V_\xi(\tau)$ равна

$$B_{\xi}(\tau) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^3} \cdot e^{-10^3 \cdot |\tau|} = 10^{-6} \cdot e^{-10^3 \cdot |\tau|}, \quad B^2.$$

б) итак, корреляционная функция анализируемого процесса неотрицательна, а потому

$$\tau_k = \int_0^{+\infty} \frac{|B_{\xi}(\tau)|}{B_{\xi}(0)} d\tau = \frac{1}{B_{\xi}(0)} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau = \frac{S_{\xi}(0)}{2 \cdot B_{\xi}(0)},$$

и, в результате, $\tau_k = 2 \cdot 10^{-9} / (2 \cdot 10^{-6}) = 10^{-3}$, т.е. интервал корреляции равен 1 миллисекунде.

в) спектральная плотность мощности на нулевой частоте конечна и, следовательно, приходящаяся на постоянную составляющую мощность бесконечно мала, т.е. процесс $\xi(t)$ имеет нулевое математическое ожидание. В результате, значение $B_{\xi}(0) = 10^{-6}$ определяет мощность переменной составляющей реализаций или, иначе, дисперсию процесса. Учитывая, что по условию процесс $\xi(t)$ обладает нормальным распределением, плотность вероятности СП может быть записана в виде

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 10^{-3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 10^{-6}}}, \quad 1/B.$$

г) по полученной плотности вероятности в соответствии с [1, (3.20)] определяем вероятность попадания значений СП $\xi(t)$ в

объявленный в условии диапазон $P\{\xi(t) > 10^{-3}\} = \int_{10^{-3}}^{+\infty} W_{\xi}(x) dx$.

Поскольку применительно к нормальному распределению записанный интеграл в элементарных функциях не выражается, то для его расчета воспользуемся вспомогательным (противоположным) событием « $\xi(t) \leq 10^{-3}$ », а также заменой переменных $z = x / 10^{-3}$. С учетом таблицы нормального распределения из прил. 1, получаем

$$P\{\xi(t) > 10^{-3}\} = 1 - \int_{-\infty}^{10^{-3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 10^{-3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 10^{-6}}} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{z^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= 1 - F_{CT}(1) = 1 - 0,8413 \approx 0,16.$$

Итак, вероятность наблюдения значений, превышающих +1 милливольт, для процесса $\xi(t)$ составляет примерно 16%.

Задача 5. Случайный процесс $\xi(t)$ состоит из периодической последовательности прямоугольных импульсов со скважностью 2 (рис. 9.4), отличающихся друг от друга случайной задержкой во времени. Задержка может равновероятно принимать любые значения в пределах периода сигнала. Определить корреляционную функцию этого случайного процесса.

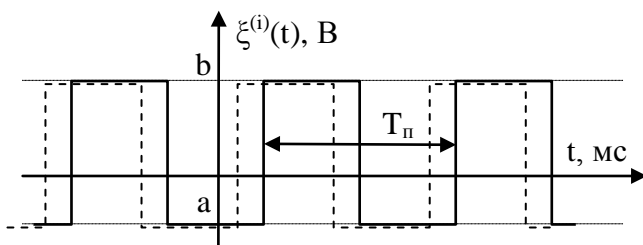


Рис. 9.4. Возможные реализации СП из задачи 5

Решение

а) решение задачи целесообразно начать с определения того, к какому классу относится анализируемый СП.

Так как анализируемый сигнал – периодический, а задержка реализаций равновероятна в пределах периода, то совокупность значений, которую можно наблюдать в одной контрольной точке, обязательно будет наблюдаться и в любой другой точке (возможно, лишь, для иных “номеров” реализаций) и с теми же самыми вероятностями. А это означает, что во всех

временных сечениях анализируемый процесс обладает одинаковыми свойствами и, следовательно, является стационарным.

б) кроме того, из рис. 9.4 видно, что все реализации процесса являются схожими, “однотипными”, что указывает на эргодичность этого процесса. Эргодическое свойство процесса $\xi(t)$ позволяет существенно упростить решение задачи.

Действительно, без учета эргодичности расчет $B_\xi(\tau)$ пришлось бы производить на основе ее определения [2, (2.1)]

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot W_\xi(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 .$$

Это, естественно, потребовало бы предварительно определить двумерную плотность вероятности процесса, что является не слишком простой задачей.

Используя же эргодическое свойство процесса $\xi(t)$, его корреляционную функцию можно искать как среднюю по времени величину произведения двух разнесенных по времени на интервал τ значений этого процесса. Учитывая периодичность реализаций процесса $\xi(t)$, соответствующее расчетное выражение будет иметь вид

$$B_\xi(\tau) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot R \cdot T_\Pi} \cdot \sum_{r=-R}^{R-1} \int_{r \cdot T_\Pi}^{(r+1) \cdot T_\Pi} \xi^{(i)}(t) \cdot \xi^{(i)}(t - \tau) dt ,$$

или, окончательно, для $|\tau| < T_\Pi/2$

$$B_\xi(\tau) = \frac{1}{T_\Pi} \cdot \int_{t_0}^{t_0 + T_\Pi} \xi^{(i)}(t) \cdot \xi^{(i)}(t - \tau) dt ,$$

а для больших τ повторяется периодически с периодом T_Π .

в) учтем, что для вычислений можно использовать произвольную реализацию анализируемого СП – ту, которая наиболее удобна при выполнении расчетов. Так, на рис. 9.5 представлена

одна из возможных реализаций процесса $\xi(t)$ и ее задержанная на интервал τ копия для значений τ из интервала $0 \dots T_{\Pi}/2$.

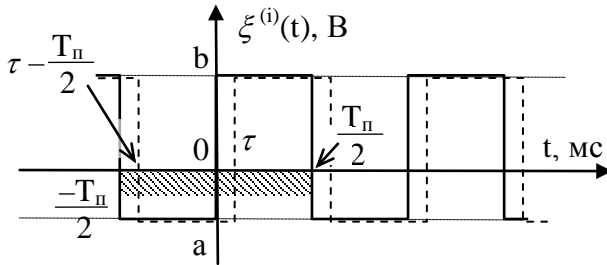


Рис. 9.5. Рекомендуемая для расчета реализация процесса $\xi(t)$ и ее задержанная на интервал τ копия

На подлежащем интегрированию интервале (отмечен на рис. 9.5 штриховкой) как сама реализация, так и ее копия скачкообразно изменяют свои свойства, поэтому $B_{\xi}(\tau)$ придется рассчитывать как сумму интегралов по 4 интервалам

$$\begin{aligned}
 B_{\xi}(\tau) &= \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \int_{-T_{\Pi}/2}^{+T_{\Pi}/2} \xi^{(i)}(t) \cdot \xi^{(i)}(t - \tau) dt = \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \left\{ \int_{-T_{\Pi}/2}^{\tau - T_{\Pi}/2} a \cdot b dt + \int_{\tau - T_{\Pi}/2}^0 a \cdot a dt + \right. \\
 &+ \left. \int_0^{\tau} b \cdot a dt + \int_{\tau}^{T_{\Pi}/2} b \cdot b dt \right\} = \frac{1}{T_{\Pi}} \cdot \left\{ 2 \cdot a \cdot b \cdot \tau + (b^2 + a^2) \cdot \left(\frac{T_{\Pi}}{2} - \tau \right) \right\} = \\
 &= \frac{b^2 + a^2}{2} - (b - a)^2 \cdot \frac{\tau}{T_{\Pi}}, \quad 0 \leq \tau \leq T_{\Pi}/2.
 \end{aligned}$$

г) если сдвинутая по времени копия реализации не отстает, а опережает ее (т.е. $\tau < 0$), то суть расчетов остается неизменной; но изменяется разбиение диапазона значений $-T_{\Pi}/2 \dots +T_{\Pi}/2$ на интервалы (см. рис. 9.6).

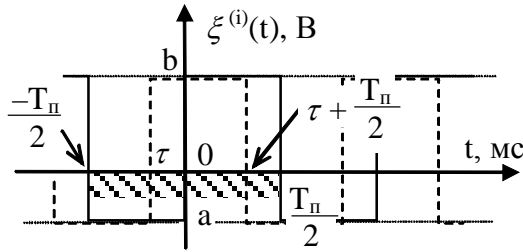


Рис. 9.6. Разбиение области интегрирования на интервалы при $\tau < 0$

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{1}{T_{\pi}} \cdot \left\{ \int_{-T_{\pi}/2}^{\tau} a \cdot a \, dt + \int_{\tau}^0 a \cdot b \, dt + \int_0^{\tau+T_{\pi}/2} b \cdot b \, dt + \int_{\tau+T_{\pi}/2}^{T_{\pi}/2} b \cdot a \, dt \right\} =$$

$$= \frac{b^2 + a^2}{2} + (b - a)^2 \cdot \frac{\tau}{T_{\pi}}, \quad -T_{\pi}/2 \leq \tau \leq 0.$$

д) итак, результат может быть выражен рис. 9.7.

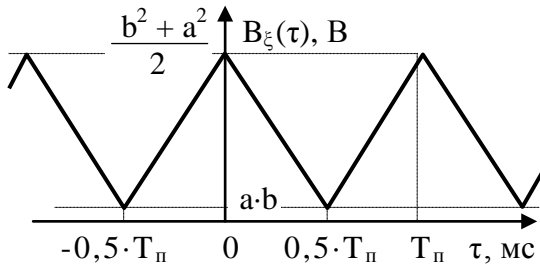


Рис. 9.7. Корреляционная функция процесса из задачи 5

Задача 6. Корреляционная функция случайного процесса имеет вид

$$B_{\xi}(\tau) = 3,613 \cdot \exp(-600 |\tau|) \cdot \cos(2,513 \cdot 10^6 \tau), \quad \text{В}^2.$$

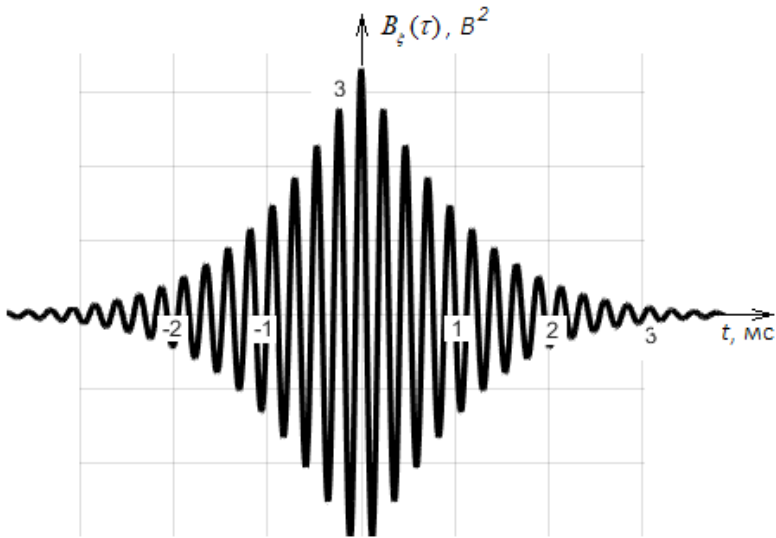


Рис. 9.8. Корреляционная функция процесса из задачи 6

Определить частотный диапазон, в пределах которого значения спектральной плотности мощности случайного процесса падают не более чем 2 раза относительно её максимума.

Решение

а) функция $B_\xi(\tau)$ включает много неудобных числовых констант, поэтому решение следует начать с их замены буквенными обозначениями. Перепишем $B_\xi(\tau)$ в виде

$$B_\xi(\tau) = B_0 \cdot \exp(-\alpha |\tau|) \cdot \cos(\omega_0 \tau),$$

где $B_0 = 3,613 \text{ В}^2$, $\alpha = 600 \text{ Гц}$, $\omega_0 = 2,513 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$.

б) в соответствии с теоремой Винера-Хинчина корреляционная функция и спектральная плотность мощности СП связаны интегральным преобразованием Фурье, однако простая подстановка в (2.14) из [2, с.27] заданной в условии функции $B_\xi(\tau)$ приведет к необходимости громоздких расчетов из-за наличия в составе $B_\xi(\tau)$ операции взятия модуля τ . В подобных ситуациях

полезно вместо (2.14) использовать аналогичное соотношение (2.16) из [2, с.27], которое автоматически устраняет проблему раскрытия модуля, т.к. предполагает интегрирование лишь значений $\tau \geq 0$.

Помимо использования (2.16) вместо (2.14) полезно учесть свойство №7 из прил. 4 «Спектральные свойства сигналов», которое указывает, что если рассчитать спектр огибающей сигнала

$$B_{oz}(t) = B_0 \cdot \exp(-\alpha |t|),$$

то получить спектр самого высокочастотного колебания можно просто за счет переноса копий спектра огибающей на частоты $\pm\omega_0$.

в) рассчитаем спектр огибающей сигнала с рис 9.8, используя (2.14) из [2, с.27] и «отбрасывая» операцию расчета модуля, т.к. для положительных моментов времени $|t| = t$:

$$\begin{aligned} S_{oz}(\omega) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} B_{oz}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right\} = 2B_0 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt \right\} = \\ &= 2B_0 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \left. \frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \right|_0^{+\infty} \right\} = 2B_0 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{0 - 1}{-(\alpha + j\omega)} \right\} = 2B_0 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\alpha + j\omega} \right\}. \end{aligned}$$

Для выделения реальной части выгодно и числитель, и знаменатель возникшей дроби домножить на комплексно-сопряженное значение $\alpha - j\omega$. Получаем:

$$S_{oz}(\omega) = 2B_0 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right\} = B_0 \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Обратите внимание, что при переходе к интегрированию в пределах от 0 до ∞ обязательно следует использовать удвоенную реальную часть выражения, т.к. при попытке просто удвоения будет получено комплексное выражение $2B_0 / (\alpha + j\omega)$, которое не может соответствовать никакой корреляционной функции!

г) согласно свойству №7 из табл. П.4.2, если какая-либо огибающая со спектром $S_{oz}(\omega)$ домножается на высокочастотное

заполнение вида « $\cos(\omega_0 t)$ », то спектр соответствующего сигнала будет иметь вид

$$S_{BЧ}(\omega) = S_{ос}(\omega + \omega_0)/2 + S_{ос}(\omega - \omega_0)/2.$$

Таким образом, для анализируемого случая получаем

$$S_{\xi}(\omega) = B_0 \cdot \left\{ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right\}.$$

д) график полученной спектральной плотности мощности в небольшой окрестности максимума, приходящегося на частоту в герцах $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 4 \cdot 10^5$ Гц, представлен на рис. 9.9. Из графика видно, что диапазон частот, в пределах которого значения спектральной плотности мощности уменьшаются от максимума не более чем в 2 раза включает частоты от 399,9 кГц до 400,1 кГц.

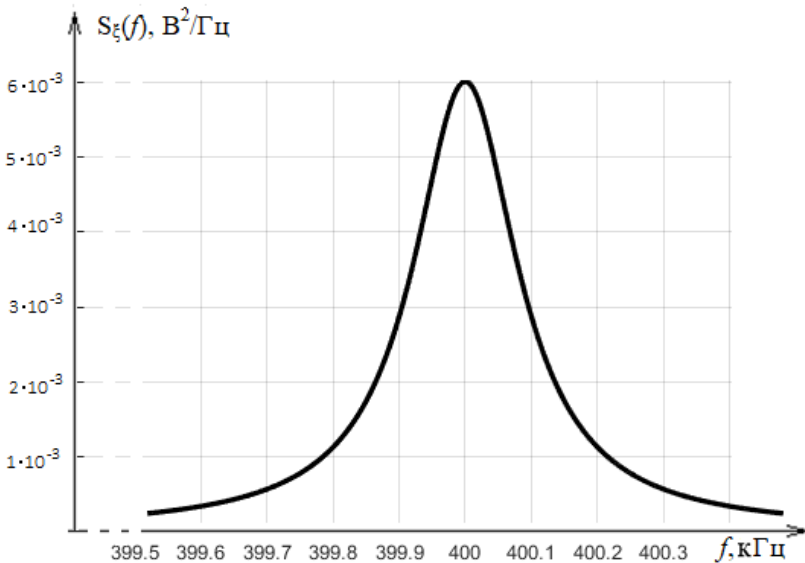


Рис. 9.9. Спектральная плотность мощности СП из задачи 6

9.2. Задачи для самоконтроля

9.2.1. Применительно к разобранный выше задаче 5 определите ковариационную функцию случайного процесса.

Ответ: $K_{\xi}(\tau) = (b - a)^2 \cdot (0,25 - |\tau|/T_{\Pi}), \tau \leq |T_{\Pi} / 2|$.

9.2.2. Запишите аналитическое выражение для корреляционной функции и спектральной плотности мощности СП, реализации которого, измеряемые в вольтах, имеют вид

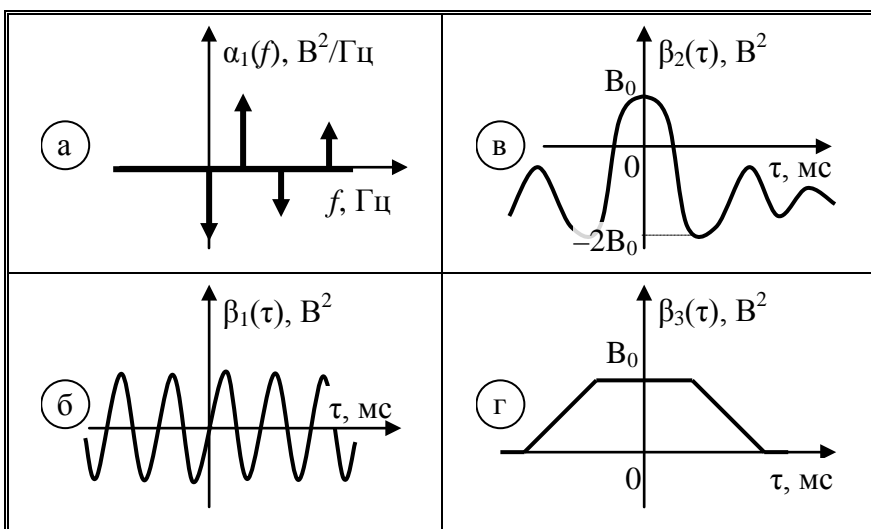
$$\xi(t) = 4 + 3 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot t + \psi),$$

ψ – случайная величина, распределенная равномерно от 0 до 2π .

Ответ: $B_{\xi}(\tau) = 16 + 4,5 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot \tau), B^2$;

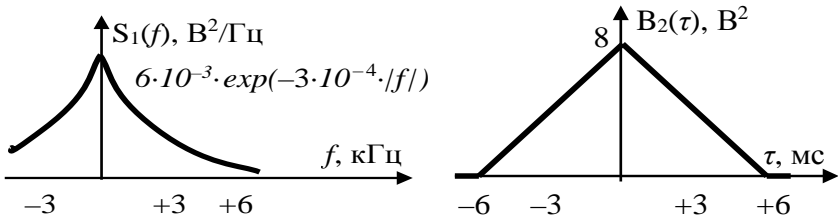
$$S_{\xi}(f) = 2,25 \cdot \delta(f + 10^3) + 16 \cdot \delta(f) + 2,25 \cdot \delta(f - 10^3), B^2/\text{Гц}$$

9.2.3. Для приведенных ниже рисунков укажите причины, по которым представленные функции **не могут** служить энергетическими характеристиками случайных процессов.



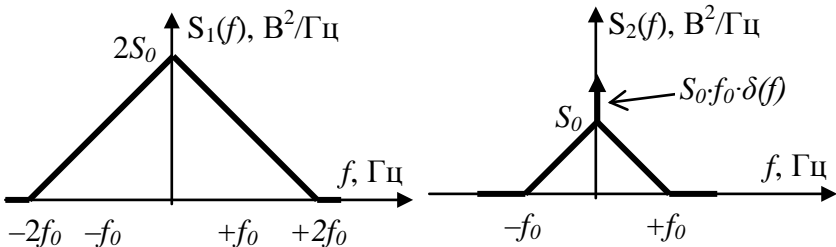
Ответ: (а) спектральная плотность мощности не может принимать отрицательных значений, (б) корреляционная функция обязана быть чётной, (в) значения корреляционной функции не могут по абсолютной величине превышать её значение при $\tau = 0$, (г) не соблюдается требование положительной определенности.

9.2.4. Сопоставьте энергетические показатели процессов с приведенными ниже характеристиками.



Ответ: оба процесса имеют нулевую постоянную составляющую; мощности переменных составляющих равны $P_{1\sim} = 40 \text{ В}^2$ и $P_{2\sim} = 8 \text{ В}^2$. Интервалы корреляции процессов составляют $\tau_1 = 0,075 \text{ мс}$, $\tau_2 = 3 \text{ мс}$; соответственно ширина спектра процесса $\xi_1(t)$ в 40 раз больше чем у $\xi_2(t)$.

9.2.5. Спектральные плотности мощности двух эргодических случайных процессов представлены на рисунках ниже. Сопоставьте средние мощности реализаций этих процессов.



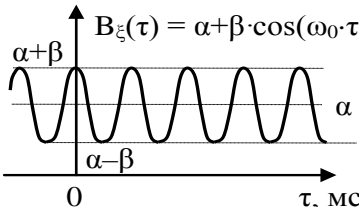
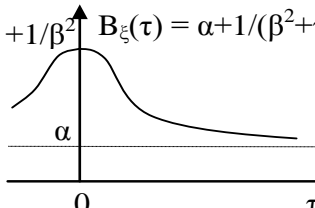
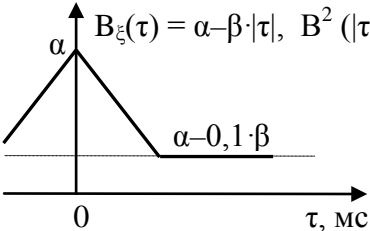
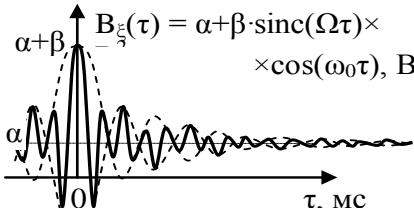
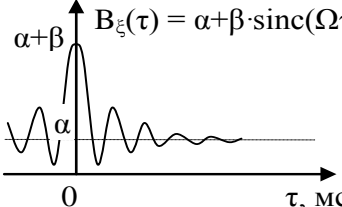
Ответ: процесс $\xi_1(t)$ имеет в 4 раза большую мощность переменной составляющей, но его полная мощность превышает мощность процесса $\xi_2(t)$ лишь вдвое, т.к. у $\xi_1(t)$ постоянная составляющая отсутствует, а у второго имеет мощность $S_0 \cdot f_0$.

9.3. Контрольные задания

Задача 9.1. Полная средняя мощность $P_{\text{полн}}$ реализаций эргодического случайного процесса $\xi(t)$ приведена в левой колонке приведенной ниже таблицы. В центральной колонке указана дисперсия этого случайного процесса. Определить параметры α и β , соответствующие корреляционной функции данного процесса, показанной в правой колонке табл. 9.1.

Таблица 9.1

Но- мер	$P_{\text{полн}},$ B^2	$D_{\xi},$ B^2	Корреляционная функция СП
1	9	8	$B_{\xi}(\tau) = \alpha + \beta \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) + 4 \cdot \cos(2\omega_0 \cdot \tau), B^2$
2	5	2	$B_{\xi}(\tau) = \alpha + \beta \cdot \exp(- \tau), B^2$
3	9	1	$B_{\xi}(\tau) = \alpha + \beta \cdot \exp(- \tau) \times \cos(\omega_0 \tau), B^2$

Но- мер	$P_{\text{полн}}$, B^2	D_{ξ} , B^2	Корреляционная функция СП
4	4	3	$B_{\xi}(\tau) = \alpha + \beta \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau), B^2$ 
5	5	1	$B_{\xi}(\tau) = \alpha + 1/(\beta^2 + \tau^2), B^2$ 
6	6	2	$B_{\xi}(\tau) = \alpha - \beta \cdot \tau , B^2 (\tau < 0,1)$ 
7	7	6	$B_{\xi}(\tau) = \alpha + \beta \cdot \text{sinc}(\Omega\tau) \times \cos(\omega_0\tau), B^2$ 
8	8	4	$B_{\xi}(\tau) = \alpha + \beta \cdot \text{sinc}^2(\Omega\tau), B^2$ 

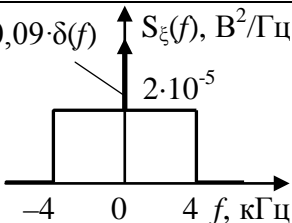
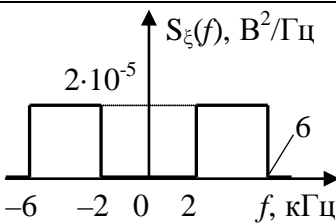
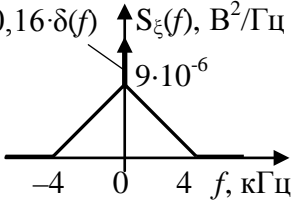
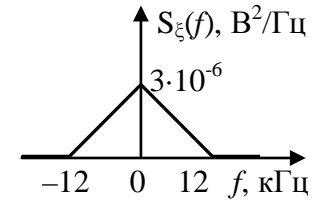
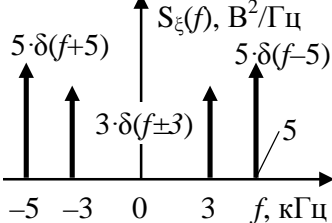
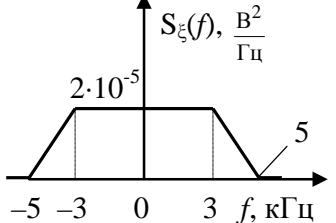
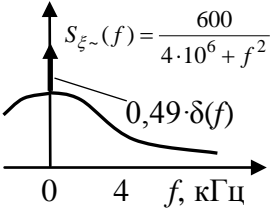
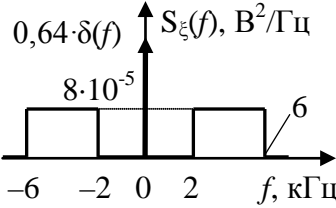
Но- мер	$P_{\text{полн}}$, B^2	D_{ξ} , B^2	Корреляционная функция СП
9	11	7	$B_{\xi}(\tau) = \alpha - \beta \cdot \tau^2 / (\beta^2 + \tau^2), B^2$
10	12	8	$B_{\xi}(\tau) = \alpha + \beta \cdot (1 - \tau) \cdot \cos(\omega_0 \tau), B^2 (\tau < 1)$

Задача 9.2. По представленной в табл. 9.2 спектральной плотности мощности эргодического случайного процесса $\xi(t)$ определить постоянную составляющую реализаций этого процесса и его дисперсию D_{ξ} .

Таблица 9.2

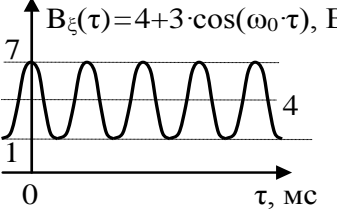
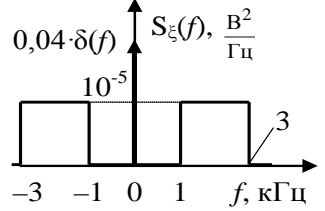
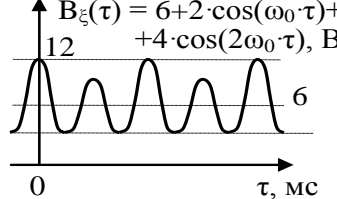
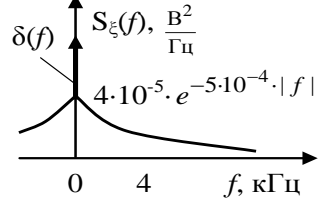
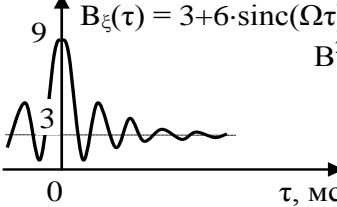
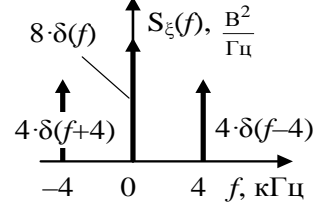
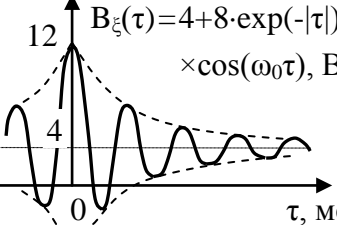
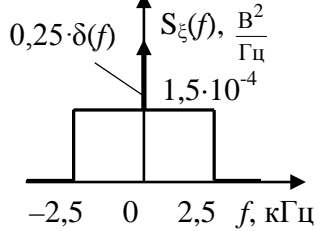
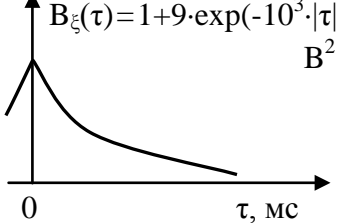
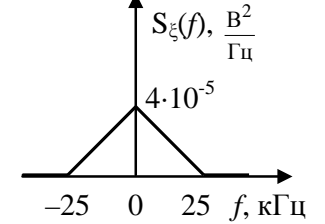
Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$	Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$
1	$S_{\xi}(f), B^2/\Gamma\text{ц}$	6	$S_{\xi}(f), B^2/\Gamma\text{ц}$

Окончание табл. 9.2

Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$	Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$
2	$0,09 \cdot \delta(f)$ $S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$ $2 \cdot 10^{-5}$ 	7	$S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$ $2 \cdot 10^{-5}$ 
3	$0,16 \cdot \delta(f)$ $S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$ $9 \cdot 10^{-6}$ 	8	$S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$ $3 \cdot 10^{-6}$ 
4	$5 \cdot \delta(f+5)$ $3 \cdot \delta(f+3)$ $5 \cdot \delta(f-5)$ $S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$ 	9	$S_{\xi}(f), \frac{\text{В}^2}{\text{Гц}}$ $2 \cdot 10^{-5}$ 
5	$S_{\xi}(f) = \frac{600}{4 \cdot 10^6 + f^2}, \frac{\text{В}^2}{\text{Гц}}$ $0,49 \cdot \delta(f)$ 	10	$0,64 \cdot \delta(f)$ $S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$ $8 \cdot 10^{-5}$ 

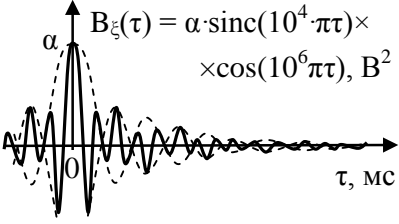
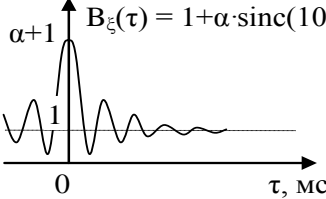
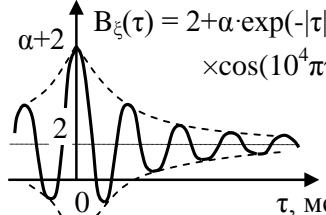
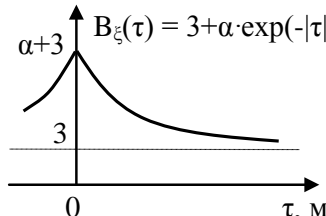
Задача 9.3. По заданному в табл. 9.3 энергетическому описанию случайного процесса $\xi(t)$ определить сопряженную характеристику (корреляционную функцию, если задана СПМ, и СПМ, если известна корреляционная функция).

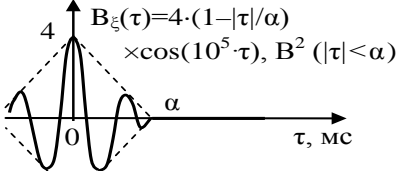
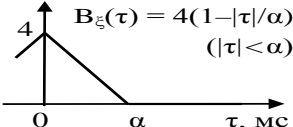
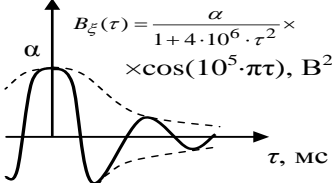
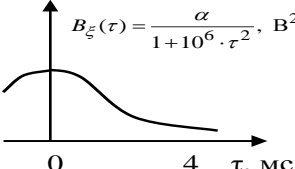
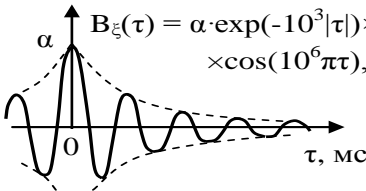
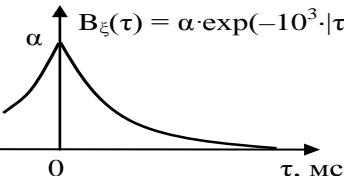
Таблица 9.3

Но- мер	Корреляционная функция процесса $\xi(t)$	Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$
1	$B_{\xi}(\tau) = 4 + 3 \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau), B^2$ 	6	
2	$B_{\xi}(\tau) = 6 + 2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) + 4 \cdot \cos(2\omega_0 \cdot \tau), B^2$ 	7	
3	$B_{\xi}(\tau) = 3 + 6 \cdot \text{sinc}(\Omega \tau), B^2$ 	8	
4	$B_{\xi}(\tau) = 4 + 8 \cdot \exp(- \tau) \times \cos(\omega_0 \tau), B^2$ 	9	
5	$B_{\xi}(\tau) = 1 + 9 \cdot \exp(-10^3 \cdot \tau), B^2$ 	10	

Задача 9.4. В левой колонке таблицы приведено общее выражение для корреляционной функции эргодического СП $\xi(t)$. Определите входящую в описание свойств процесса неизвестную константу α , если известно, что на указанной в центральной колонке частоте f_1 спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$ принимает значение, приведенное в правой колонке табл. 9.4.

Таблица 9.4

Но- мер	Корреляционная функция процесса $\xi(t)$	Частота f_1 , кГц	СПМ, $S_{\xi}(f_1)$, $B^2/\Gamma\text{ц}$
1	$B_{\xi}(\tau) = \alpha \cdot \text{sinc}(10^4 \cdot \pi\tau) \times \cos(10^6 \pi\tau), B^2$ 	500	$3 \cdot 10^{-8}$
2	$B_{\xi}(\tau) = 1 + \alpha \cdot \text{sinc}(10^4 \tau), B^2$ 	1	$5 \cdot 10^{-4}$
3	$B_{\xi}(\tau) = 2 + \alpha \cdot \exp(- \tau) \times \cos(10^4 \pi\tau), B^2$ 	5	$4 \cdot 10^{-3}$
4	$B_{\xi}(\tau) = 3 + \alpha \cdot \exp(- \tau), B^2$ 	0,01	10^{-9}

Но- мер	Корреляционная функция процесса $\xi(t)$	Частота f_1 , кГц	СПМ, $S_\xi(f_1)$, $B^2/\Gamma\text{ц}$
5	 $B_\xi(\tau) = 4 \cdot (1 - \tau /\alpha) \times \cos(10^5 \cdot \tau), B^2 \quad (\tau < \alpha)$	50/π	$2 \cdot 10^{-2}$
6	 $B_\xi(\tau) = 4(1 - \tau /\alpha), B^2 \quad (\tau < \alpha)$	1/(6α)	$2 \cdot 10^{-4}$
7	 $B_\xi(\tau) = \frac{\alpha}{1 + 4 \cdot 10^6 \cdot \tau^2} \times \cos(10^5 \cdot \pi \tau), B^2$	50	10^{-4}
8	 $B_\xi(\tau) = \frac{\alpha}{1 + 10^6 \cdot \tau^2}, B^2$	1	$4 \cdot 10^{-3}$
9	 $B_\xi(\tau) = \alpha \cdot \exp(-10^3 \tau) \times \cos(10^6 \pi \tau), B^2$	500	10^{-4}
10	 $B_\xi(\tau) = \alpha \cdot \exp(-10^3 \cdot \tau), B^2$	1	10^{-3}

Задача 9.5. Определить интервал корреляции СП $\xi(t)$, энергетические характеристики которого представлены в табл. 9.5.

Таблица 9.5

Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$	Но- мер	Корреляционная функция процесса $\xi(t)$
1	<p>$\delta(f) S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$</p> <p>$4 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-5 \cdot 10^{-5} \cdot f }$</p> <p>0 40 $f, \text{кГц}$</p>	6	<p>$B_{\xi}(\tau) = 2 + 3 \cdot \exp(- \tau) \times \cos(10^5 \tau), \text{В}^2$</p> <p>5 2 0 $\tau, \text{мс}$</p>
2	<p>$10^{-5} S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$</p> <p>-50 0 50 $f, \text{кГц}$</p>	7	<p>$B_{\xi}(\tau) = 1 + 4 \cdot \exp(-10^3 \cdot \tau), \text{В}^2$</p> <p>5 0 $\tau, \text{мс}$</p>
3	<p>$8 \cdot \delta(f) S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$</p> <p>$4 \cdot \delta(f+30)$ $4 \cdot \delta(f-30)$</p> <p>-30 0 30 $f, \text{кГц}$</p>	8	<p>$B_{\xi}(\tau) = 6 \cdot \exp(-10^4 \tau^2), \text{В}^2$</p> <p>6 0 $\tau, \text{мс}$</p>
4	<p>$0,25 \cdot \delta(f) S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$</p> <p>$1,5 \cdot 10^{-7}$</p> <p>-20 0 20 $f, \text{кГц}$</p>	9	<p>$B_{\xi}(\tau) = 6 + 3 \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau), \text{В}^2$</p> <p>9 6 3 0 $\tau, \text{мс}$</p>
5	<p>$S_{\xi}(f) = \exp(-10^{-8} f^2), \text{В}^2/\text{Гц}$</p> <p>0 $f, \text{кГц}$</p>	10	<p>$B_{\xi}(\tau) = 5 + 2 \cdot \cos(10^4 \cdot \tau) + 3 \cdot \cos(2 \cdot 10^4 \cdot \tau), \text{В}^2$</p> <p>10 5 0 $\tau, \text{мс}$</p>

Задача 9.6. По заданному в табл. 9.6 энергетическому описанию случайного процесса $\xi(t)$ рассчитать его ширину спектра.

Таблица 9.6

Но- мер	Корреляционная функция процесса $\xi(t)$	Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$
1	$B_{\xi}(\tau) = \frac{\alpha}{1+10^6 \cdot \tau^2}, B^2$ 	6	$S_{\xi}(f), B^2/\Gamma_{\text{ц}}$
2	$B_{\xi}(\tau) = 3 + 6 \cdot \text{sinc}(10^4 \tau), B^2$ 	7	$S_{\xi}(f), B^2/\Gamma_{\text{ц}}$
3	$B_{\xi}(\tau) = 4 + 3 \cdot \cos(\omega_0 \tau), B^2$ 	8	$S_{\xi}(f) = \frac{600}{4 \cdot 10^6 + f^2}, \frac{B^2}{\Gamma_{\text{ц}}}$ $0,49 \cdot \delta(f)$
4	$B_{\xi}(\tau) = 6 + 2 \cdot \cos(\omega_0 \tau) + 4 \cdot \cos(2\omega_0 \tau), B^2$ 	9	$S_{\xi}(f), \frac{B^2}{\Gamma_{\text{ц}}}$ $0,25 \cdot \delta(f)$ $1,5 \cdot 10^{-4}$
5	$B_{\xi}(\tau) = 1 + 9 \cdot \exp(-10^3 \cdot \tau), B^2$ 	10	$S_{\xi}(f), \frac{B^2}{\Gamma_{\text{ц}}}$ $4 \cdot 10^{-5}$

Задача 9.7. Нарисовать потенциально возможные осциллограммы нормального СП, имеющего спектральную плотность мощности.

Таблица 9.7

Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$	Но- мер	Спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

10.1. Образцы решения задач

Подготовку к решению задач из текущего раздела следует начинать с изучения материалов, представленных в подразделах 3.1–3.4 учебного пособия [2, с. 45-58], после чего рекомендуется проанализировать представленные ниже образцы решения типовых задач и попытаться решить самостоятельно по меньшей мере 50% задач из подраздела 10.2 (см. ниже с. 68-70).

Задача 1. Источник постоянного напряжения обеспечивает протекание через резистор с сопротивлением $R = 5 \text{ кОм}$ (рис. 10.1) постоянного тока силой $I_0 = 2 \text{ мА}$.

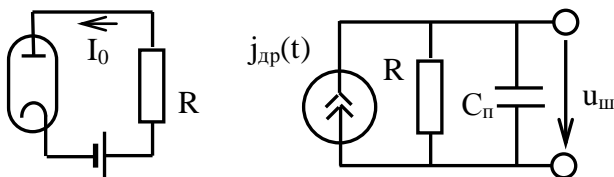


Рис. 10.1. Исследуемая схема из задачи 1 и ее схема замещения по переменной составляющей

Каково эффективное значение шумового напряжения на этом резисторе, вызываемого действием дробового тока, если паразитная емкость электронной лампы составляет 20 пФ?

Решение

а) в [2, с. 32-36] отмечалось, что в радиотехнических цепях даже при (формально) постоянных воздействиях возникают флуктуации напряжения и тока, вызываемые реально хаотическим движением заряженных частиц. Аналогично и в рассматриваемой цепи наряду с упорядоченным движением зарядов, порождаемых подключенным источником постоянного напряжения, существует флуктуационная составляющая тока. Обнаружить эту составляющую можно, например, измеряя чувствительным прибором переменную составляющую напряжения на резисторе R .

б) для оценки интенсивности шумового напряжения следует вспомнить, что дробовой ток (который и является в данном случае основным источником шума) представляет собой стационарный широкополосный случайный процесс со спектральной плотностью мощности, определяемой [2, (2.27)]. Дробовой ток содержит составляющие бесконечного числа частот, поэтому для расчета наблюдаемого на резисторе R напряжения необходимо воспользоваться схемой замещения по переменной составляющей. Учитывая, что используемая в схеме электронная лампа обладает паразитной емкостью $C_{\text{п}}$ эта схема замещения будет иметь вид, показанный на рис. 10.1 справа.

в) при воздействии на параллельную RC-цепочку тока и выходном сигнале в форме напряжения в роли коэффициента передачи цепи выступает ее комплексное сопротивление

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{1}{1/R + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega \cdot RC},$$

а АЧХ цепи задается выражением

$$|\dot{K}(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega \cdot RC)^2}}.$$

г) стандартным методом дальнейшего решения задачи является использование частотного метода анализа (такой вариант будет использован, например, в следующей задаче). Вместе с тем, есть и альтернативный (более быстрый) путь решения задачи, основанный на понятии шумовой полосы пропускания цепи. Действительно, для RC-цепочки в соответствии с (10.5)

$$\Pi_{\text{шф}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot RC} = \frac{1}{4 \cdot RC} = \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-12}} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ (Гц)},$$

максимум коэффициента передачи определяется

$$K_0 = \max_{\omega} |\dot{K}(\omega)| = R,$$

и, следовательно, мощность шума на выходе исследуемой цепи должна совпадать с мощностью шума на выходе идеального

ФНЧ, на вход которого поступает дробовой ток. Применительно к идеальному ФНЧ спектральные плотности мощности на входе и на выходе показаны на рис. 10.2, а мощность (дисперсия) выходного процесса определяется площадью под кривой $S_{\text{вых}}(f)$.

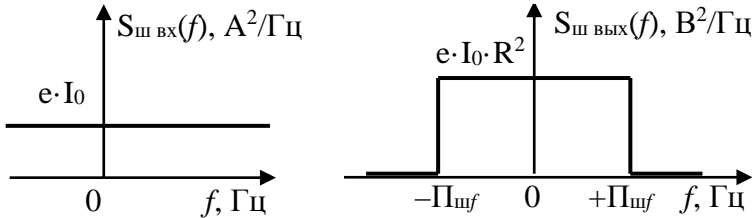


Рис. 10.2. Спектральная плотность мощности шума на входе и на выходе идеального ФНЧ

С учетом прямоугольной формы графика получаем

$$D_{\text{ш вых}} = 2 \cdot \Pi_{\text{ш}f} \cdot e \cdot I_0 \cdot R^2 = 5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5000^2 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ В}^2.$$

Итак, эффективное значение шумового напряжения на выходе цепи составит $\sigma_{\text{ш вых}} = \sqrt{D_{\text{ш вых}}} = 2 \cdot 10^{-4} = 0,2 \text{ мВ}$.

Задача 2. На последовательную RC-цепь с номиналами элементов $R = 2 \text{ кОм}$, $C = 0,5 \text{ мкФ}$ воздействует нормальный случайный процесс с математическим ожиданием $M_{u1} = +1 \text{ (В)}$ и корреляционной функцией $B_{u1}(\tau) = 1 + 10 \cdot e^{-10^3 \cdot |\tau|} \text{ (В}^2\text{)}$. Найти плотность вероятности напряжения, снимаемого с емкости.

Решение

а) хотя общего решения задача о нахождении закона распределения процесса на выходе линейной цепи не имеет [2, с. 53], но при воздействии на цепь нормального процесса реакция обязана иметь нормальное распределение, поэтому нужно лишь определить параметры a_2 и σ_2 выходного процесса.

б) комплексный коэффициент передачи последовательной RC-цепи (рис. 10.3) определяется выражением

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot \tau_u}, \quad \text{где } \tau_u = R \cdot C = 10^{-3} \text{ (с)},$$

а ее АЧХ $|\dot{K}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_u)^2}}$ представлена на рис. 10.3 справа.

в) для оценки математического ожидания напряжения $u_2(t)$ целесообразно учесть, что физически математическому ожиданию соответствует постоянная составляющая случайного процесса. Но, как следует из физических свойств и АЧХ цепи, RC-цепь передает постоянную составляющую на выход без изменений и, следовательно, оцениваемое матожидание просто совпадает с исходным $M_{u_2} = M_{u_1} = a_2 = +1$ (В).

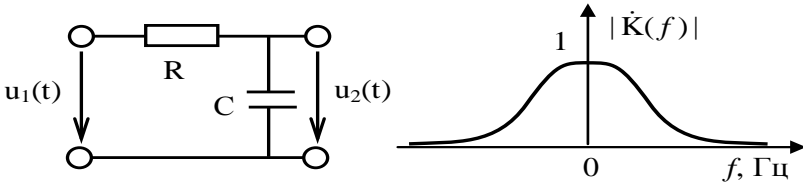


Рис. 10.3. Исследуемая цепь из задачи 2

г) последующая часть решения требует учета корреляционной функции воздействующего напряжения, однако использовать в расчетах непосредственно заданное в условии численное выражение допустимо, но не целесообразно. Переписав $V_{u_1}(\tau)$ в символьной форме, мы не только сможем получить более универсальное решение, но и контролировать корректность промежуточных величин, на основе анализа их размерностей. Значение $V_{u_1}(0)$ характеризует полную мощность реализаций случайного процесса, состоящую из мощности постоянной $M_{u_1}^2$ и флуктуационной D_{u_1} составляющих. Но $M_{u_1}^2 = 1$ (B^2), поэтому амплитуда “10” второго слагаемого $V_{u_1}(\tau)$ однозначно соответствует дисперсии воздействия $D_{u_1} = 10$ (B^2). Кроме того, можно учесть, что $10^3 = 1/\tau_u$ (введено выше), а потому корреляционную функцию воздействия можно переписать в виде

$$B_{u1}(\tau) = 1 + D_{u1} \cdot e^{-|\tau|/\tau_u} (B^2).$$

д) найденная корреляционная функция не является δ -образной, поэтому мощность этого процесса распределена вдоль оси частот неравномерно, воздействие не является белым шумом и воспользоваться для поиска эффективного значения выходного напряжения понятием шумовой полосы невозможно. Будем рассчитывать величину σ_2 на основе частотного метода анализа [2, (3.4)], для чего, воспользовавшись теоремой Винера-Хинчина, определим спектральную плотность мощности воздействующего напряжения.

Учитывая, что при интегрировании лишь по неотрицательным значениям τ знак модуля в выражении корреляционной функции оказывается избыточным, запишем [2, (2.16)] в виде

$$\begin{aligned} S_{u1}(\omega) &= 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} (1 + D_{u1} \cdot e^{-\tau/\tau_u}) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau \right\} = 2\pi \cdot \delta(\omega) + \\ &+ 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ D_{u1} \cdot \frac{e^{-\tau(1/\tau_u + j\omega)} \Big|_0^{+\infty}}{-(1/\tau_u + j\omega)} \right\} = 2\pi \cdot \delta(\omega) + 2 \cdot D_{u1} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{1/\tau_u + j\omega} \right\} = \\ &= 2\pi \cdot \delta(\omega) + D_{u1} \cdot \frac{2 \cdot \tau_u}{1 + (\omega\tau_u)^2} (B^2/\Gamma_{ц}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое полученного выражения отражает факт наличия у воздействия постоянной составляющей, вследствие чего на нулевой частоте (в одной точке оси частот) сосредоточена мощность $M_{u1}^2 = 1 (B^2)$, а спектральная плотность мощности бесконечно велика. Влияние этого слагаемого на реакцию, наблюдаемую на выходе цепи, мы уже реально оценили выше, когда получили $M_{u2} = a_2 = +1 (B)$, поэтому в дальнейших расчетах, направленных на анализ переменной составляющей выходного напряжения, будем учитывать лишь второе слагаемое $S_{u1}(\omega)$.

е) в соответствии с [2, (3.4)] спектральная плотность мощности переменной составляющей напряжения, снимаемого с емкости RC-цепи, определяется соотношением

$$S_{u2\sim}(\omega) = D_{u1} \cdot \frac{2 \cdot \tau_u}{1 + (\omega \tau_u)^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_u)^2}} \right)^2 = D_{u1} \cdot \frac{2 \cdot \tau_u}{[1 + (\omega \tau_u)^2]^2}.$$

Подставляя эту часть спектральной плотности мощности в [2, (2.9)], получим среднюю мощность переменной составляющей реализаций процесса, т.е. *дисперсию* выходного напряжения

$$D_{u2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_{u1} \cdot \frac{2 \cdot \tau_u}{[1 + (\omega \tau_u)^2]^2} d\omega = \frac{D_{u1} \cdot \tau_u}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{dx / (\tau_u \cdot \cos^2(x))}{[1 / \cos^2(x)]^2}.$$

Здесь использована подстановка $\omega \tau_u = \operatorname{tg}(x)$, где x изменяется от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, $[1 + (\omega \tau_u)^2] = 1 / \cos^2(x)$ и $d\omega = dx / (\tau_u \cdot \cos^2(x))$. Продолжая преобразование, получаем

$$D_{u2} = \frac{D_{u1}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2(x) dx = \frac{D_{u1}}{\pi} \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{D_{u1}}{2}.$$

ж) итак, поскольку на низких частотах коэффициент передачи RC-цепи близок к единице, а на высоких – снижается, то интенсивность процесса на выходе цепи оказывается ниже, чем на входе. В рассматриваемой задаче это уменьшение оказалось двукратным $D_{u2} = \sigma_2^2 = D_{u1} / 2 = 5 \text{ (В}^2\text{)}$; при этом итоговая плотность вероятности выходного напряжения

$$W_{u2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{5}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2 \cdot 5}} = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{10}}, \quad (1/\text{В}).$$

Задача 3. Показанный на рис. 10.4 резонансный усилитель обеспечивает на частоте резонанса контура $f_{\text{рез}} = 2$ МГц коэффициент усиления $K_0 = 25$ и обладает полосой пропускания $\Pi_{f0,707} = 50$ кГц. Усилитель работает при температуре $t^\circ\text{C} = 17^\circ\text{C}$. Тепловой шум резисторов $R_1 = 36$ кОм и

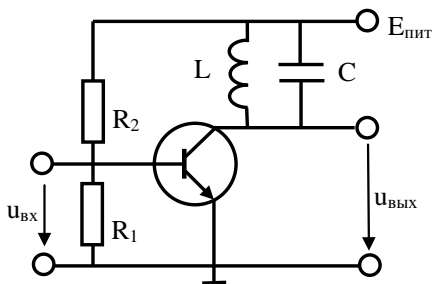


Рис. 10.4. Резонансный усилитель из задачи 3

$R_2 = 7,5$ кОм, усиливаясь, проходит на выход. Если на вход усилителя подать слабое гармоническое напряжение частоты $f_c = 2$ МГц, то при какой амплитуде воздействия на выходе будет наблюдаться отношение сигнал/шум $h = 1$?

Решение

а) если исследуемому усилителю поставить в соответствие его схему замещения, то по отношению к переменной составляющей резисторы R_1 и R_2 окажутся включенными параллельно и их можно будет заменить эквивалентным сопротивлением

$$R_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{36 \cdot 7,5}{36 + 7,5} = 6,2 \text{ кОм}.$$

б) ширина спектра теплового шума многократно превосходит полосу пропускания усилителя, так что по отношению к нему этот шум можно считать белым. Как следствие, для расчета интенсивности отклика усилителя на этот шум можно использовать понятие шумовой полосы, которая согласно [2, (3.26)] будет равна

$$\Pi_{\text{шф}} = \frac{\pi}{2} \cdot \Pi_{f0,707} = 78,54 \text{ кГц}.$$

в) с использованием понятия шумовой полосы мощность процесса на выходе линейной цепи определяется соотношением

$$D_{\text{вых}} = 2 \cdot \Pi_{\text{шф}} \cdot K_0^2 \cdot N_0,$$

где N_0 – спектральная плотность мощности процесса на входе цепи, для теплового шума определяемая [2, (2.25)]. Учитывая также, что абсолютная температура отличается от температуры в градусах Цельсия на 273° , получаем окончательно

$$D_{\text{ВЫХ}} = 2 \cdot \Pi_{\text{шф}} \cdot K_0^2 \cdot 2 \cdot k \cdot (t_C^\circ + 273^\circ) \cdot R_9 = \\ = 2 \cdot 78540 \cdot 25^2 \cdot 2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \cdot 6200 = 4,87 \cdot 10^{-9} \text{ (В}^2\text{)}.$$

г) соотношение сигнал/шум равно единице, если мощности полезного сигнала и шума совпадают. Таким образом, для выполнения требований условия задачи на вход усилителя следует подать гармонический сигнал такой амплитуды, чтобы мощность отклика на него на выходе составляла $P_{\text{ВЫХ}} = 4,87 \cdot 10^{-9} \text{ (В}^2\text{)}$.

Вместе с тем, учитывая совпадение частоты воздействия с частотой настройки усилителя, можно записать

$$P_{\text{ВЫХ}} = (U_0 \cdot K_0)^2 / 2,$$

откуда
$$U_0 = \frac{\sqrt{2 \cdot P_{\text{ВЫХ}}}}{K_0} = \frac{\sqrt{9,74 \cdot 10^{-9}}}{25} = 3,95 \cdot 10^{-6} \text{ (В)}.$$

Итак, тепловой шум оказывает на анализируемый усилитель (по мощности) такое же влияние, как и полезный гармонический сигнал с амплитудой $U_0 \approx 4 \text{ мкВ}$.

Задача 4. На фильтр, амплитудно-частотная характеристика которого показана на рис. 10.5 (слева), воздействует случайный процесс, спектральная плотность мощности которого отображена на рис. 10.5 (справа). Найти граничную частоту полосы пропускания фильтра, если известно, что средние мощности реализаций процессов на входе и выходе фильтра совпадают.

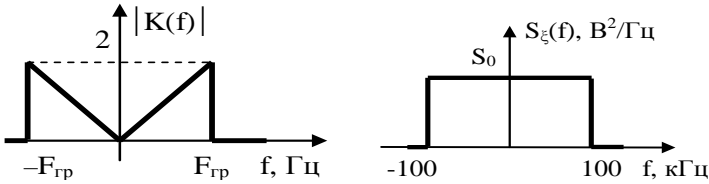


Рис. 10.5. Характеристики фильтра и воздействия из задачи 4

Решение

а) учитывая прямоугольную форму СПМ воздействия, среднюю мощность реализаций процесса на входе фильтр можно определить из соотношения

$$P_{\text{полн}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) df = 2 \cdot \text{Ш}_{f\xi} \cdot S_0,$$

где $\text{Ш}_{f\xi} = 100$ кГц – ширина спектра воздействия.

б) рассчитать аналогично (из геометрических соображений) среднюю мощность реализаций на выходе фильтра весьма проблематично, поскольку спектральная плотность мощности выходного процесса пропорциональна квадрату АЧХ (см. [2, (3.4)]) и имеет параболическую форму. Более того, существует два различных и удовлетворяющих требованиям условия значения $F_{\text{гр}}$, одно из которых заметно меньше, а другое – заметно больше $\text{Ш}_{f\xi}$ и способы расчета каждого из них имеют свои особенности.

в) для варианта $F_{\text{гр}} < \text{Ш}_{f\xi}$ на основании [2, (2.9)] записываем

$$P_{\text{полн}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) \cdot |K(f)|^2 df = S_0 \cdot \int_{-F_{\text{гр}}}^{+F_{\text{гр}}} \left(2 \cdot f / F_{\text{гр}}\right)^2 df = \frac{4 \cdot S_0}{F_{\text{гр}}^2} \cdot \frac{f^3}{3} \Big|_{-F_{\text{гр}}}^{+F_{\text{гр}}} =$$

$$= \frac{8 \cdot S_0}{3} \cdot F_{\text{гр}} \quad \text{и, приравнявая} \quad \frac{8 \cdot S_0}{3} \cdot F_{\text{гр}} = 2 \cdot \text{Ш}_{f\xi} \cdot S_0, \quad \text{получаем}$$

$$F_{\text{гр}} = \frac{3}{4} \cdot \text{Ш}_{f\xi} = 75 \text{ кГц}.$$

г) для варианта $F_{гр} > \text{Ш}_{f\xi}$ аналогично записываем

$$P_{\text{полн}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) \cdot |K(f)|^2 df = S_0 \cdot \int_{-\text{Ш}_{f\xi}}^{+\text{Ш}_{f\xi}} \left(2 \cdot f / F_{гр}\right)^2 df = \frac{4 \cdot S_0}{F_{гр}^2} \cdot \frac{f^3}{3} \Big|_{-\text{Ш}_{f\xi}}^{+\text{Ш}_{f\xi}} =$$

$$= \frac{8 \cdot S_0}{3} \cdot \frac{\text{Ш}_{f\xi}^3}{F_{гр}^2} \text{ и, приравнявая } \frac{8 \cdot S_0}{3} \cdot \frac{\text{Ш}_{f\xi}^3}{F_{гр}^2} = 2 \cdot \text{Ш}_{f\xi} \cdot S_0, \text{ получаем}$$

$$F_{гр} = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \text{Ш}_{f\xi} = 115,47 \text{ кГц.}$$

Задача 5. На фильтр, представленный на рис. 10.6 (слева), с постоянной времени цепи $\tau_{\text{ц}} = 0,01 \text{ с}$ воздействует случайный процесс, корреляционная функция которого отображена на рис. 10.6 (справа). Найти корреляционную функцию случайного напряжения на выходе фильтра.

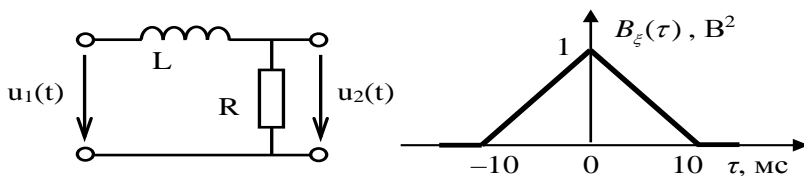


Рис. 10.6. Фильтра и корреляционная функция воздействия из задачи 5

Решение

а) в ситуации, когда необходимо по корреляционной функции воздействия найти корреляционную функцию отклика линейной цепи, целесообразно воспользоваться временным методом анализа, определяемым соотношением (3.12) из [2, с. 47]

$$B_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(x) \cdot R_{\xi}(\tau - x) dx .$$

Входящую сюда корреляционную функцию импульсной характеристики цепи $R_{\xi}(\tau)$ будем рассчитывать с частотных позиций.

Комплексный коэффициент передачи анализируемой цепи может быть получен как

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_{\text{ц}}},$$

где $\tau_{\text{ц}}$ – постоянная времени RL -цепи, равная $\tau_{\text{ц}} = R/L = 0,01 \text{ с}$.

Учитывая соотношение (3.11) из [2, с. 47] и используя при расчетах табличный интеграл (3.19) из [2, с. 50], запишем

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{K}(\omega)|^2 \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega\tau)}{1 + (\omega\tau_{\text{ц}})^2} d\tau = \frac{1}{2\tau_{\text{ц}}} \cdot \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_{\text{ц}}}\right).$$

б) основной проблемой применения временного метода анализа является необходимость вычисления свёртки (3.12) из [2] для зависящей от модуля τ функции $R_g(\tau)$ и имеющей конечную продолжительность функции (определяемой по графику из условия задачи)

$$B_{\xi}(\tau) = 1 - 100 \cdot |\tau|, \quad \text{при } |\tau| \leq 0,01.$$

При разных τ входящие в интегральную свертку множители оказываются по-разному смещенными друг относительно друга, что требует особого внимания при раскрытии модуля и выборе пределов интегрирования.

Упрощению анализа немного способствует тот факт, что и $B_{\xi}(\tau)$, и $R_g(\tau)$ являются функциями чётными, и потому, к примеру, замена аргумента τ на « $-x$ », означающая разворот вокруг оси « y » на форме функции $R_g()$ не сказывается (рис. 10.7).

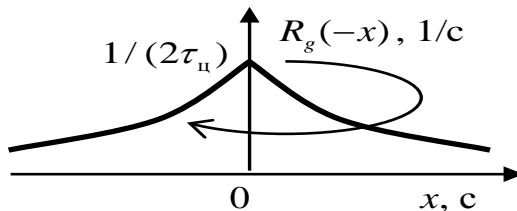


Рис. 10.7. Вид развернутой вокруг оси « y » функции $R_g(-x)$, соответствующий (3.12) из [2] при $\tau = 0$

Учитывая влияние формы $B_{\xi}(x)$ на характер пересечения этой функции с $R_g(\tau-x)$, при вычислении свёртки следует отдельно рассмотреть четыре случая, представленные на рис. 10.8.

Все показанные на рис. 10.8 подварианты отражают тот факт, что функция $R_g(\tau-x)$ отличается от $R_g(-x)$ переносом точки «0» в точку $x = \tau$. Соответственно, для $\tau \ll 0$ двухсторонняя экспонента смещается далеко влево, так как именно при больших отрицательных x оказывается достижимо $x = \tau$. И, напротив, при $\tau > 0$ функция $R_g(\tau-x)$ смещается вправо, вследствие чего изменяется характер взаимного наложения сомножителей в (3.12) из [2].

в) для упрощения дальнейших вычислений будем использовать следующий неопределенный интеграл:

$$\int x \cdot e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c^2} (cx - 1),$$

и с опорой на это выражение рассмотрим последовательно все представленные на рис. 10.8 варианты.

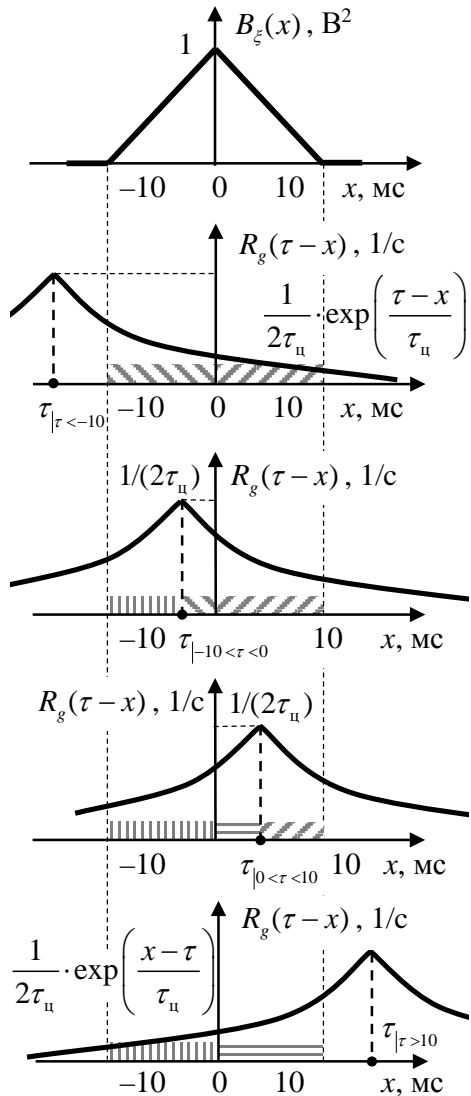


Рис. 10.8. Сомножители в (3.12)

Для случая $\tau < -0,01$ (здесь время представлено уже в секундах) получаем

$$\begin{aligned}
 B_{\eta}(\tau) &= \int_{-0,01}^0 \frac{1+100 \cdot x}{2\tau_{\text{ц}}} \cdot \exp\left(\frac{\tau-x}{\tau_{\text{ц}}}\right) dx + \int_0^{0,01} \frac{1-100 \cdot x}{2\tau_{\text{ц}}} \cdot \exp\left(\frac{\tau-x}{\tau_{\text{ц}}}\right) dx = \\
 &= \frac{e^{\frac{\tau}{\tau_{\text{ц}}}}}{2} \cdot \left[\left(-1 \cdot e^{-\frac{x}{\tau_{\text{ц}}}} - 100e^{-\frac{x}{\tau_{\text{ц}}}} (x + \tau_{\text{ц}}) \right) \right]_{-0,01}^0 + \left(e^{\frac{x}{\tau_{\text{ц}}}} - 100e^{\frac{x}{\tau_{\text{ц}}}} (x - \tau_{\text{ц}}) \right) \Big|_0^{0,01} = \\
 &= e^{+100\tau} \cdot (e-2), \text{ В}^2.
 \end{aligned}$$

В случае $-0,01 < \tau \leq 0$ приходится учитывать 3 слагаемых

$$\begin{aligned}
 B_{\eta}(\tau) &= \int_{-0,01}^{\tau} \frac{1+100 \cdot x}{2\tau_{\text{ц}}} \cdot \exp\left(\frac{x-\tau}{\tau_{\text{ц}}}\right) dx + \int_{\tau}^0 \frac{1+100 \cdot x}{2\tau_{\text{ц}}} \cdot \exp\left(\frac{\tau-x}{\tau_{\text{ц}}}\right) dx + \\
 &+ \int_0^{0,01} \frac{1-100 \cdot x}{2\tau_{\text{ц}}} \cdot \exp\left(\frac{\tau-x}{\tau_{\text{ц}}}\right) dx = \frac{e^{-\frac{\tau}{\tau_{\text{ц}}}}}{2} \left(e^{\frac{x}{\tau_{\text{ц}}}} + 100e^{\frac{x}{\tau_{\text{ц}}}} (x - \tau_{\text{ц}}) \right) \Big|_{-0,01}^{\tau} + \\
 &+ \frac{e^{\frac{\tau}{\tau_{\text{ц}}}}}{2} \cdot \left[\left(-1 \cdot e^{-\frac{x}{\tau_{\text{ц}}}} - 100e^{-\frac{x}{\tau_{\text{ц}}}} (x + \tau_{\text{ц}}) \right) \right]_{\tau}^0 + \left(e^{\frac{x}{\tau_{\text{ц}}}} - 100e^{\frac{x}{\tau_{\text{ц}}}} (x - \tau_{\text{ц}}) \right) \Big|_0^{0,01} = \\
 &= 1+150\tau + (e/2-2)e^{100\tau} + e^{-(100\tau+1)}, \text{ В}^2.
 \end{aligned}$$

Для случаев $0 < \tau \leq 0,01$ и $\tau > 0,01$ расчеты производятся аналогично, а получаемая в итоге корреляционная функция процесса на выходе цепи может быть представлена выражением

$$B_{\eta}(\tau) = \begin{cases} (e-2) \cdot e^{-100|\tau|} & \text{при } |\tau| > 0,01 \\ 1-150 \cdot |\tau| + (e/2-2)e^{-100|\tau|} + e^{100|\tau|-1} & \text{при } |\tau| \leq 0,01 \end{cases}.$$

График рассчитанной корреляционной функции процесса на выходе цепи показан на рис. 10.9. Как видно, функция $B_{\eta}(\tau)$

шире исходной $B_{\xi}(\tau)$, т.к. инерционность RL-цепи влечет усиление взаимосвязи между разнесенными по времени значениями, а $B_{\eta}(0) < B_{\xi}(0)$, т.к. RL-цепь – пассивная и получаемый в результате фильтрации СП оказывается по мощности меньше, чем СП, воздействующий на вход цепи.

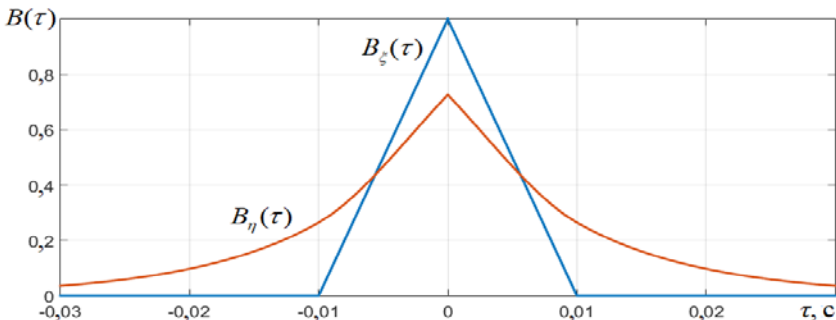


Рис. 10.9. Корреляционная функция процесса на выходе цепи для задачи 5

10.2. Задачи для самоконтроля

10.2.1. На резонансный усилитель с центральной частотой полосы пропускания $f_0 = 1$ МГц, эквивалентной добротностью $Q = 25$ и коэффициентом усиления на частоте резонанса $K_0 = 20$ воздействует случайный процесс со спектральной плотностью мощности, представленной на рис. 10.10. Оцените изменение средней мощности постоянной и переменной составляющих реализаций процесса.

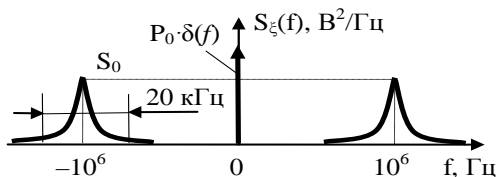


Рис. 10.10. Спектральная плотность мощности воздействия

Ответ: Т.к. резонансный усилитель не предназначен для усиления постоянной составляющей, то её мощность на выходе будет пренебрежимо мала, а мощность переменной составляющей увеличится приблизительно в 400 раз.

10.2.2. На цепь с импульсной характеристикой, показанной на рис. 10.11, воздействует белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0 = 10^{-13} \text{ В}^2/\text{Гц}$. Определить корреляционную функцию реакции цепи.

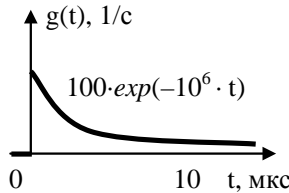


Рис. 10.11. Импульсная характеристика цепи, на которую воздействует случайное напряжение

Ответ: Корреляционная функция импульсной характеристики цепи имеет вид $R_g(\tau) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(-10^6 \cdot |\tau|)$ (1/c), а корреляционная функция отклика цепи на воздействие случайного напряжения $B_{\text{вых}}(\tau) = 5 \cdot 10^{-16} \cdot \exp(-10^6 \cdot |\tau|)$ (В^2).

10.2.3. Сопоставьте шумовые полосы пропускания цепей, амплитудно-частотные характеристики которых показаны на рис. 10.12.

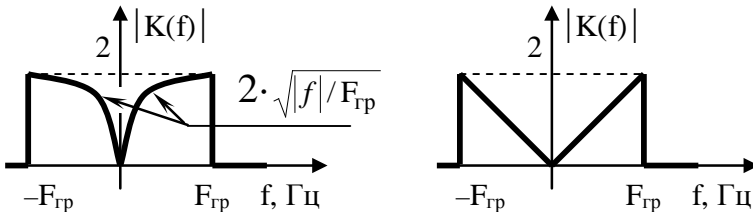


Рис. 10.12. Амплитудно-частотные характеристики сравниваемых цепей

Ответ: Для АЧХ, показанной слева, шумовая полоса пропускания составляет $\Pi_{\text{шf1}} = F_{\text{гр}} / 2$, а для показанной справа – шумовая полоса равна $\Pi_{\text{шf2}} = F_{\text{гр}} / 3$.

10.2.4. На параллельную RC-цепь с номиналами элементов $R = 2 \text{ кОм}$, $C = 0,25 \text{ мкФ}$ воздействует дробовой ток со спектральной плотностью мощности $S_j(f) = 4 \cdot 10^{-21} \text{ А}^2/\text{Гц}$. Оцените возможность наблюдения на элементах RC напряжения, мгновенное значение которого превышает $+2 \text{ мкВ}$.

Ответ: При шумовой полосе $\Pi_{\text{шf}} = 500 \text{ Гц}$ эффективное значение напряжения на элементах RC составляет $\sigma_{\text{RC}} = 4 \text{ мкВ}$. Вероятность превышения порога 2 мкВ составляет $p \approx 30\%$.

10.2.5. На резонансный усилитель с частотой настройки контура $\omega_{\text{рез}} = 10^7 \text{ рад/с}$ и максимумом коэффициента усиления $K_0 = 20$ воздействует дробовой ток со спектральной плотностью мощности $S_j(\omega) = 10^{-22} \text{ А}^2/\text{Гц}$. Определите эквивалентную добротность контура, служащего нагрузкой усилителя, если средняя мощность наблюдаемых на контуре реализаций напряжения составляет $P_u = 2 \cdot 10^{-15} \text{ В}^2$.

Ответ: Для обеспечения мощностных показателей необходимо, чтобы шумовая полоса усилителя составляла $2,5 \cdot 10^4 \text{ Гц}$, что требует эквивалентной добротности $Q_0 = 100$.

10.3. Контрольные задания

Задача 10.1. На фильтр, схема которого приведена в таблице ниже, воздействует нормальный случайный процесс, имеющий прямоугольную спектральную плотность мощности.

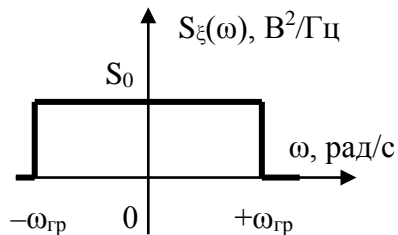
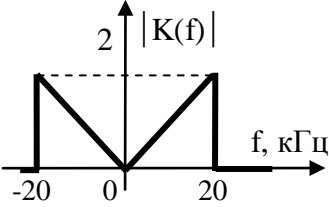
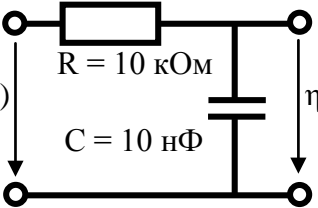
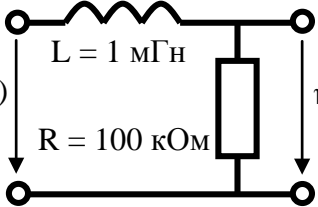
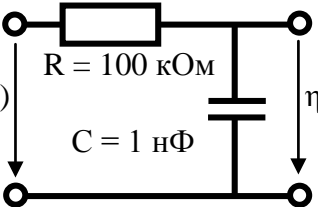
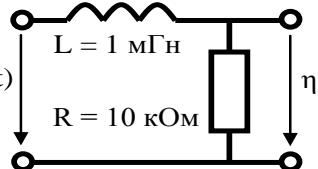
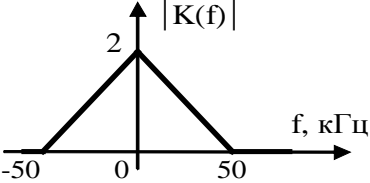
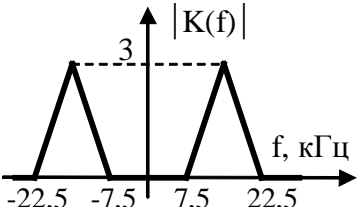
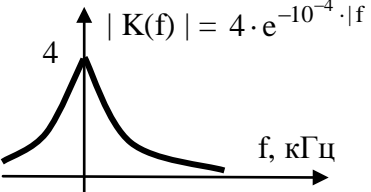


Таблица 10.1

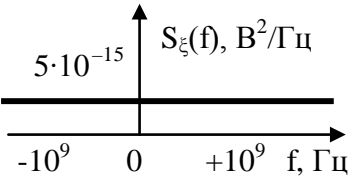
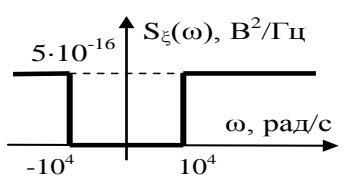
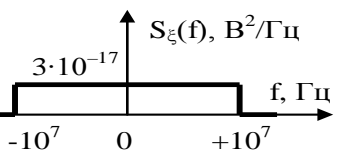
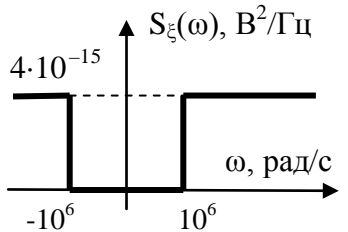
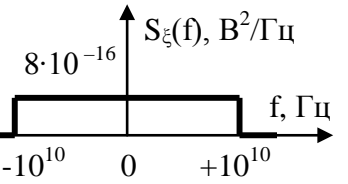
Но- мер	$\omega_{гр}$, рад/с	Схема или АЧХ фильтра	Определить...
1	10^7		<p>эффективное значение напряжения на выходе схемы, если $S_0 = 10^{-7}$ ($\text{В}^2/\text{Гц}$)</p>
2	10^4		<p>константу S_0, если эффективное значение напряжения на выходе цепи составляет 1 мВ.</p>
3	10^8		<p>константу S_0, если эф- фективное значение напряжения на выходе цепи составляет 10 мВ.</p>
4	10^4		<p>эффективное значение напряжения на выходе схемы, если $S_0 = 10^{-6}$ ($\text{В}^2/\text{Гц}$)</p>
5	10^7		<p>эффективное значение напряжения на выходе схемы, если $S_0 = 10^{-7}$ ($\text{В}^2/\text{Гц}$)</p>

Но- мер	$\omega_{гр}$, рад/с	Схема или АЧХ фильтра	Определить...
6	$\pi \cdot 10^5$		во сколько раз мощность переменной составляющей процесса на выходе усилителя больше чем на входе
7	10^{10}	резонансный усилитель с максимальным коэффициентом усиления $K_0 = 20$ и частотой резонанса $\omega_p = 10^6$ рад/с	добротность контура усилителя, если $S_0 = 10^{-12}$ ($\text{В}^2/\text{Гц}$), а эффективное значение выходного напряжения $\sigma_{ц\text{ вых}} = 2$ мВ.
8	10^7		эффективное значение выходного напряжения, если $S_0 = 10^{-8}$ ($\text{В}^2/\text{Гц}$)
9	$\pi \cdot 10^6$		во сколько раз мощность переменной составляющей СП на выходе усилителя больше чем на входе
10	10^{10}	резонансный усилитель с максимальным коэффициентом усиления $K_0 = 20$ и частотой резонанса $\omega_p = 10^6$ рад/с	константу S_0 , если эффективное значение напряжения на выходе цепи составляет 4 мВ, а добротность контура усилителя $Q = 100$

Задача 10.2. На резонансный усилитель, настроенный на частоту $\omega_{\text{рез}} = 3 \cdot 10^6$ (рад/с) и обладающий коэффициентом усиления на частоте резонанса $K_0 = 40$ воздействует нормальное случайное напряжение, обладающее спектральной плотностью мощности, показанной в табл. 10.2. Определить эквивалентную добротность контура усилителя Q , с учетом дополнительной информации, представленной в табл. 10.2.

Таблица 10.2

Но- мер	Спектральная плотность мощности шума на входе	Дополнительная информация
1		<p>вероятность наблюдения на выходе усилителя мгновенных значений, превышающих $-0,2$ мВ</p> <p>$P\{u_{\text{вых}} > -2 \cdot 10^{-4}\} = 58\%$.</p>
2		<p>у СП на выходе усилителя второй начальный момент распределения равен</p> <p>$m_2\{\eta(t)\} = 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ В}^2$</p>
3		<p>средняя мощность реализаций СП на выходе усилителя $P_{\text{вых}} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ В}^2$</p>
4		<p>вероятность наблюдения на выходе усилителя значений, по абсолютной величине превышающих $+0,3$ мВ</p> <p>$P\{ u_{\text{вых}} > 3 \cdot 10^{-4}\} = 13\%$.</p>

Но- мер	Спектральная плотность мощности шума на входе	Дополнительная информация
5		у СП на выходе усилителя второй начальный момент распределения равен $m_2\{\eta(t)\} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ В}^2$
6		вероятность наблюдения на выходе усилителя мгновенных значений, превышающих +0,2 мВ $P\{u_{\text{вых}} > 2 \cdot 10^{-4}\} = 16\%$.
7		дисперсия случайного процесса на выходе усилителя составляет $D_\eta = 10^{-9} \text{ В}^2$
8		вероятность наблюдения на выходе усилителя значений, по абсолютной величине превышающих 1 мВ $P\{ u_{\text{вых}} > 10^{-3}\} = 0,8\%$.
9	белый шум $S_{\text{вх}}(f) = 8 \cdot 10^{-13} \text{ В}^2/\text{Гц}$	средняя мощность реализаций СП на выходе усилителя $P_{\text{вых}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ В}^2$
10		эффективное значение СП на выходе усилителя равно $\sigma_\eta = 2 \cdot 10^{-4} \text{ В}$

Задача 10.3. Шум с показанной в левом столбце табл. 10.3 спектральной плотностью мощности воздействует на усилитель, АЧХ которого представлена в правом столбце той же таблицы. Используя эффект нормализации широкополосных процессов в узкополосных цепях, определить вероятность наблюдения на выходе усилителя *отрицательных* мгновенных значений, меньших чем $-0,2$ В.

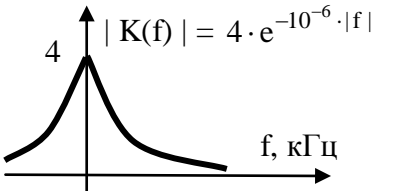
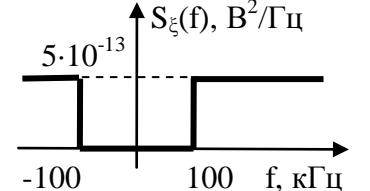
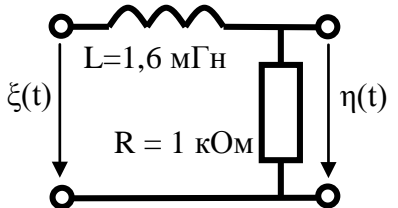
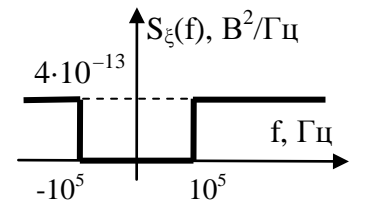
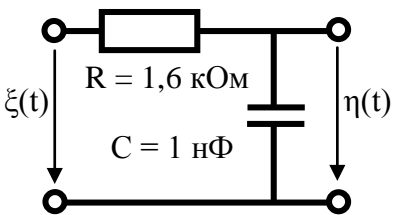
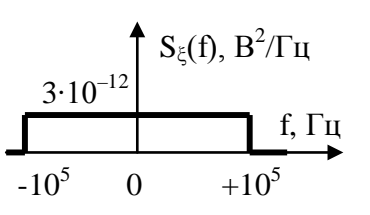
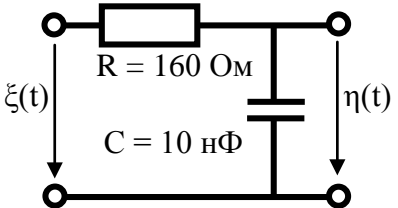
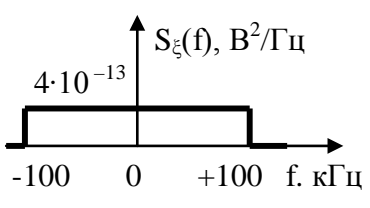
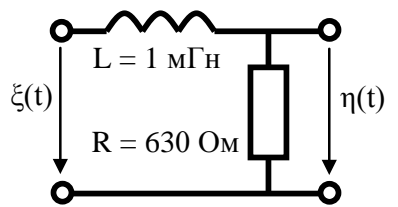
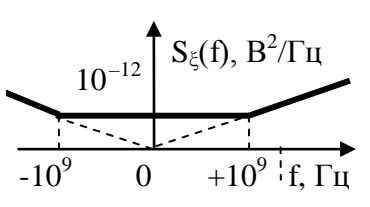
Таблица 10.3

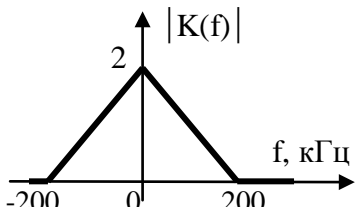
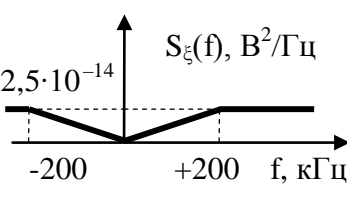
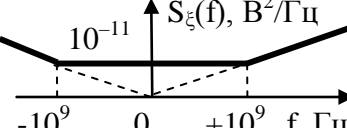
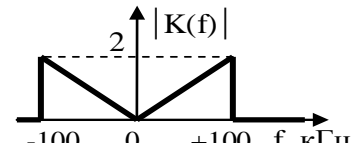
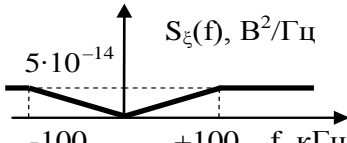
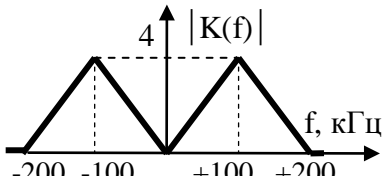
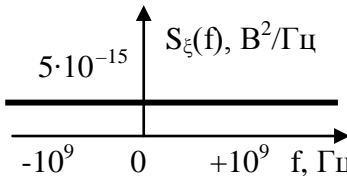
Но- мер	Спектральная плотность мощности шума на входе	Характеристика фильтра
1		интегрирующая RC-цепь с номиналами элементов $R = 20$ кОм, $C = 5$ нФ
2	белый шум $S_{\xi}(f) = 8 \cdot 10^{-6}$ В ² /Гц	интегрирующая RC-цепь с номиналами элементов $R = 20$ кОм, $C = 5$ нФ
3		
4	белый шум $S_{\xi}(f) = 5 \cdot 10^{-6}$ В ² /Гц	$ K(f) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot f - 10^4 }, & f > 0 \\ 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot f + 10^4 }, & f < 0 \end{cases}$
5		$ K(f) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot f - 10^4 }, & f > 0 \\ 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot f + 10^4 }, & f < 0 \end{cases}$
6	белый шум $S_{\text{вх}}(f) = 2,5 \cdot 10^{-6}$ А ² /Гц	интегрирующая RC-цепь с постоянной времени $\tau_{\text{ц}} = 5 \cdot 10^{-4}$ с

Но- мер	Спектральная плотность мощности шума на входе	Характеристика фильтра
7		
8		
9		<p>параллельный колебательный контур с полосой пропускания $\Pi_{\omega,0,707} = 2 \cdot 10^5$ рад/с и резонансным сопротивлением $R_k = 2$ кОм</p>
10		

Задача 10.4. На фильтр, свойства которого определяются левой колонкой табл. 10.4, воздействует смесь гармонического сигнала с частотой $f_s = 100$ кГц и амплитудой $A_s = 10^{-4}$ В и шума, характеристики которого приведены в таблице справа. Определить соотношение сигнал/шум, наблюдаемое на выходе фильтра.

Таблица 10.4

Но- мер	Схема или АЧХ фильтра	Спектральная плотность мощности шума на входе
1	 <p>$K(f) = 4 \cdot e^{-10^{-6} \cdot f }$</p> <p>$f, \text{кГц}$</p>	 <p>$S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$</p> <p>$5 \cdot 10^{-13}$</p> <p>$-100 \quad 100 \quad f, \text{кГц}$</p>
2	 <p>$L = 1,6 \text{ мГн}$</p> <p>$R = 1 \text{ кОм}$</p> <p>$\xi(t)$ $\eta(t)$</p>	 <p>$S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$</p> <p>$4 \cdot 10^{-13}$</p> <p>$-10^5 \quad 10^5 \quad f, \text{Гц}$</p>
3	 <p>$R = 1,6 \text{ кОм}$</p> <p>$C = 1 \text{ нФ}$</p> <p>$\xi(t)$ $\eta(t)$</p>	 <p>$S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$</p> <p>$3 \cdot 10^{-12}$</p> <p>$-10^5 \quad 0 \quad +10^5 \quad f, \text{Гц}$</p>
4	 <p>$R = 160 \text{ Ом}$</p> <p>$C = 10 \text{ нФ}$</p> <p>$\xi(t)$ $\eta(t)$</p>	 <p>$S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$</p> <p>$4 \cdot 10^{-13}$</p> <p>$-100 \quad 0 \quad +100 \quad f, \text{кГц}$</p>
5	 <p>$L = 1 \text{ мГн}$</p> <p>$R = 630 \text{ Ом}$</p> <p>$\xi(t)$ $\eta(t)$</p>	 <p>$S_{\xi}(f), \text{В}^2/\text{Гц}$</p> <p>$10^{-12}$</p> <p>$-10^9 \quad 0 \quad +10^9 \quad f, \text{Гц}$</p>

Но- мер	Схема или АЧХ фильтра	Спектральная плотность мощности шума на входе
6		
7	<p>резонансный усилитель с коэф. усиления $K_0 = 20$, резон. частотой $f_p = 10^5$ Гц и добротностью $Q_{\Sigma} = 50$</p>	
8		
9	<p>резонансный усилитель с коэф. усиления $K_0 = 20$, резон. частотой $f_p = 96$ кГц и добротностью $Q_{\Sigma} = 12$</p>	<p>белый шум $S_{\xi}(f) = 8 \cdot 10^{-13}$ В²/Гц</p>
10		

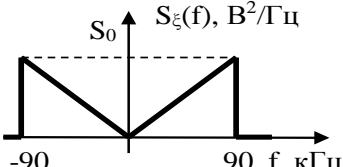
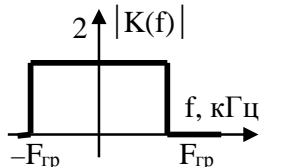
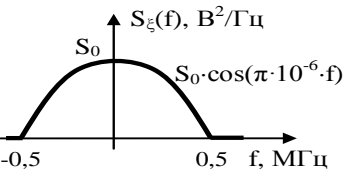
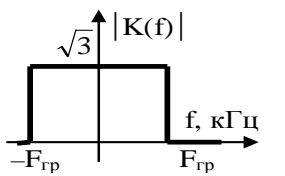
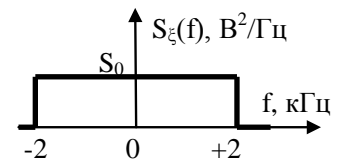
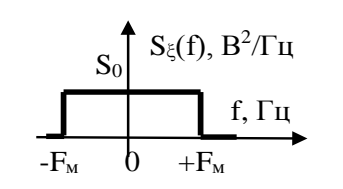
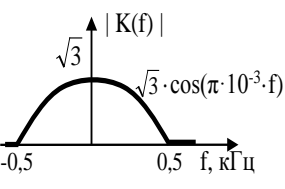
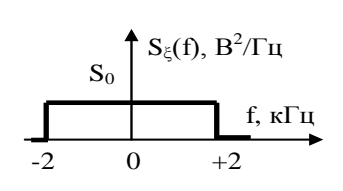
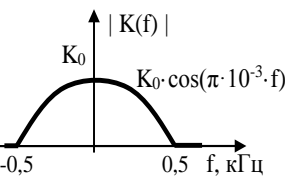
Задача 10.5. Случайный процесс с показанной в левом столбце табл. 10.5 ниже спектральной плотностью мощности воздействует на вход фильтра, определяемого центральным столбцом той же таблицы. После прохождения через фильтр мощность случайного процесса не изменяется. Определить

значение параметра, приведенного в последнем столбце табл. 10.5.

Таблица 10.5

Но- мер	Спектральная плотность мощности воздействия	Фильтр / схема фильтра	Ис- кать
1	<p>$S_{\xi}(f), \text{B}^2/\text{Гц}$</p> <p>$S_0$</p> <p>$f, \text{Гц}$</p> <p>$-F_M$ 0 $+F_M$</p>	<p>$K(f)$</p> <p>9</p> <p>$f, \text{кГц}$</p> <p>-9 9</p>	F_M
2	<p>$S_{\xi}(f) = S_0 \cdot e^{-0,01 \cdot f }$</p> <p>$S_0$</p> <p>$f, \text{кГц}$</p>	<p>$K(f) = 1,1 \cdot e^{-\alpha \cdot f }$</p>	α
3	<p>$S_{\xi}(\omega), \text{B}^2/\text{Гц}$</p> <p>$S_0$</p> <p>$f, \text{кГц}$</p> <p>$-50$ 50</p>	<p>$K(f)$</p> <p>K_0</p> <p>$f, \text{кГц}$</p> <p>-20 $+20$</p>	K_0
4	<p>$S_{\xi}(f) = S_0 \cdot e^{-0,001 \cdot f }$</p> <p>$S_0$</p> <p>$f, \text{кГц}$</p>	<p>$K(f)$</p> <p>K_0</p> <p>$f, \text{кГц}$</p> <p>$-0,5$ $+0,5$</p>	K_0
5	<p>$S_{\xi}(f), \text{B}^2/\text{Гц}$</p> <p>$S_0$</p> <p>$f, \text{МГц}$</p> <p>$-1$ 1</p>	<p>$K(f)$</p> <p>5</p> <p>$f, \text{кГц}$</p> <p>$-F_{гр}$ $F_{гр}$</p>	$F_{гр}$

Окончание табл. 10.5

Но- мер	Спектральная плотность мощности воздействия	Фильтр / схема фильтра	Ис- кать
6			F _{гр}
7			F _{гр}
8		$ K(f) = 2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot f }$	α
9			F _M
10			K ₀

Задача 10.6. Шум с приведенной на рисунке слева корреляционной функцией $B_{\xi}(\tau)$ поступает на вход линейной цепи, обладающей корреляционной функцией импульсной характеристики $R_g(\tau)$, показанной в табл. 10.6. Используя временной метод анализа, определить корреляционную характеристику отклика цепи $B_{\eta}(\tau)$.

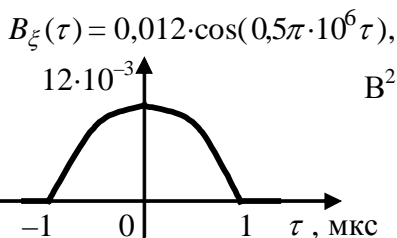
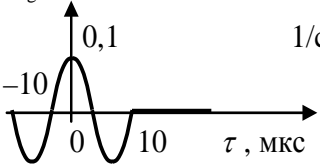
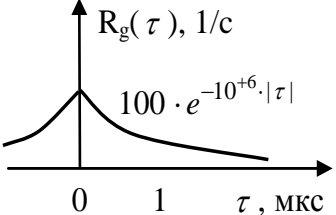
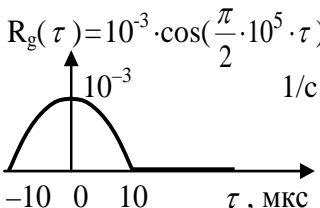
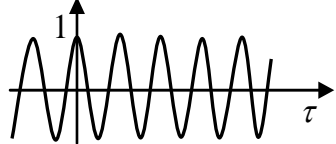


Таблица 10.6

Но- мер	Корр. функция импульсной характеристики цепи $R_g(\tau)$	Но- мер	Корр. функция импульсной характеристики цепи $R_g(\tau)$
1	$R_g(\tau) = 10^{-2} \cdot \cos(0,5\pi \cdot 10^6 \tau),$ 	6	
2		7	$R_g(\tau) = 10^{-2} \cdot \cos(1,5\pi \cdot 10^6 \tau),$
3		8	$R_g(\tau) = \cos(0,5\pi \cdot 10^6 \cdot \tau), 1/c$

Но- мер	Корр. функция импульсной характеристики цепи $R_g(\tau)$	Но- мер	Корр. функция импульсной характеристики цепи $R_g(\tau)$
4	$R_g(\tau) = 0,1 \cdot \cos(1,5\pi \cdot 10^5 \tau),$  $1/c$	9	 $R_g(\tau), 1/c$ $100 \cdot e^{-10^{+6} \cdot \tau }$ $0 \quad 1 \quad \tau, \text{ мкс}$
5	$R_g(\tau) = 10^{-3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10^5 \cdot \tau\right),$  10^{-3} $1/c$ $-10 \quad 0 \quad 10 \quad \tau, \text{ мкс}$	10	$R_g(\tau) = \cos(0,5\pi \cdot 10^5 \tau), 1/c$  1 τ

11. УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

11.1. Образцы решения задач

Подготовку к решению задач из текущего раздела следует начинать с изучения материалов, представленных в подразделе 4.2 учебного пособия [2, с. 79-88], после чего рекомендуется проанализировать представленные ниже образцы решения типовых задач и попытаться решить самостоятельно по меньшей мере 50% задач из подраздела 11.2 (см. ниже с. 90-91).

Задача 1. На вход идеального амплитудного детектора воздействует узкополосный нормальный шум неизвестной интенсивности. Напряжение, наблюдаемое на выходе детектора, превышает уровень 1,2 вольта в 70% случаев. Определить среднюю мощность реализаций шума на входе детектора.

Решение

а) огибающая нормального шума имеет релейское распределение, поэтому вероятность наблюдения для нее значений, превышающих произвольный уровень $U_{\text{пор}}$, может быть рассчитана по формуле

$$P_{\text{прев}} = P\{A(t) > U_{\text{пор}}\} = \int_{U_{\text{пор}}}^{+\infty} \frac{x}{\sigma_{\xi}^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right) dx = \exp\left(-\frac{U_{\text{пор}}^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right).$$

Таким образом, вероятность превышения огибающей шума некоторого порогового уровня определяется отношением этого уровня к эффективному значению анализируемого шума σ_{ξ} . Для отношения $U_{\text{пор}} / \sigma_{\xi}$, имеем

$$\frac{U_{\text{пор}}}{\sigma_{\xi}} = \sqrt{-2 \cdot \ln(P_{\text{прев}})}.$$

б) шумовой характер воздействия подразумевает, что математическое ожидание воздействующего напряжения равно нулю, а значит средняя мощность реализаций входного процесса совпадает с мощностью их переменной составляющей и численно равна дисперсии процесса. Учитывая нормальное распределение воздействующего напряжения, получаем

$$P_{\text{ср}}|_{M_{\xi}=0} = D_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 = \frac{U_{\text{пор}}^2}{-2 \cdot \ln(P_{\text{прев}})} = \frac{1,2^2}{-2 \cdot \ln(0,7)} = \frac{1,44}{0,713} \approx 2 \text{ (В}^2\text{)}.$$

Задача 2. Эргодический нормальный СП со спектральной плотностью мощности (СПМ), представленной на рис. 11.1, воздействует на вход идеального амплитудного детектора. Средняя мощность реализаций, наблюдаемых на выходе детектора, составляет $1,0 \text{ В}^2$. Построить (с соблюдением масштаба) график корреляционной функции воздействия.

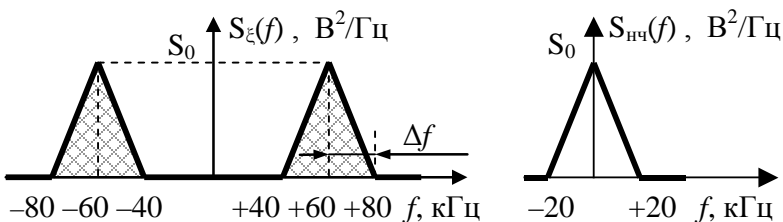


Рис. 11.1. Спектральные характеристики исходного и вспомогательного низкочастотного СП из задачи 2

Решение

а) для процессов на выходе амплитудного детектора в условии задана средняя мощность реализаций, которую следует рассматривать как полную среднюю мощность, т.е. включающую как мощность переменной, так и мощность постоянной составляющей. С учетом [2, (4.36), (4.37)] эта мощность равна

$$1,0 = P_{\text{ср}} = D_{\xi} + M_{\xi}^2 = 2 \cdot \sigma_{\xi}^2,$$

а значит воздействующий на детектор нормальный СП должен иметь мощность $\sigma_{\xi}^2 = 0,5 \text{ (В}^2\text{)}$.

б) исходя из спектральной плотности мощности среднюю мощность СП можно получить на основе соотношения [2, (2.13)] или (из геометрического смысла интеграла) как площадь под кривой $S_{\xi}(f)$. Применительно к графику, представленному на рис. 11.1 слева, площадь определяется соотношением

$$P_{\text{ср}} = 2 \cdot S_{\wedge} = 2 \cdot \Delta f \cdot S_0,$$

откуда $S_0 = 0,5 \cdot P_{\text{ср}} / \Delta f = 0,5 \cdot 0,5 / (2 \cdot 10^4) = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ В}^2/\text{Гц}$.

в) итак, параметры СПМ исходного процесса определены, однако попытка получить корреляционную функцию процесса $\xi(t)$ непосредственно из $S_{\xi}(f)$ хотя и допустима, но сопряжена с весьма громоздкими вычислениями. Гораздо выгоднее сначала рассчитать корреляционную функцию $B_{\text{нч}}(\tau)$ вспомогательного низкочастотного процесса (спектр которого показан на рис. 11.1

справа), а уже по ней на основании соотношения [2, (2.33)] записать искомую корреляционную функцию $B_{\xi}(\tau)$.

СПМ низкочастотного процесса можно представить в виде

$$S_{\text{нч}}(f) = S_0 \cdot \left(1 - \frac{|f|}{\Delta f} \right), \quad |f| \leq \Delta f.$$

В соответствии с теоремой Винера-Хинчина корреляционная функция $B_{\text{нч}}(\tau)$ связана с $S_{\text{нч}}(f)$ преобразованием Фурье. Таким образом, для расчета $B_{\text{нч}}(\tau)$ необходимо осуществить обратное преобразование Фурье. Наличие под интегралом модуля затрудняет интегрирование, поэтому для расчета $B_{\text{нч}}(\tau)$ воспользуемся [2, (2.17)]. Применяя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} B_{\text{нч}}(\tau) &= 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} S_{\text{нч}}(f) \cdot e^{+j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} df \right\} = \\ &= 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\Delta f} S_0 \cdot e^{+j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} df - S_0 \cdot \int_0^{+\Delta f} \frac{f}{\Delta f} \cdot e^{+j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} df \right\} = \\ &= 2 \cdot S_0 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{+j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau}}{j \cdot 2\pi \cdot \tau} \Big|_0^{\Delta f} - \frac{1}{\Delta f} \cdot \left[f \cdot \frac{e^{+j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau}}{j \cdot 2\pi \cdot \tau} \Big|_0^{\Delta f} - \frac{e^{+j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau}}{(j \cdot 2\pi \cdot \tau)^2} \Big|_0^{\Delta f} \right] \right\} = \\ &= 2 \cdot S_0 \cdot \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{j \cdot 2\pi \cdot \tau} + \frac{1 - e^{+j \cdot 2\pi \cdot \Delta f \cdot \tau}}{\Delta f \cdot (2\pi \cdot \tau)^2} \right\} = 2 \cdot S_0 \cdot \frac{1 - \cos(2\pi \cdot \Delta f \cdot \tau)}{\Delta f \cdot (2\pi \cdot \tau)^2} = \\ &= 2 \cdot S_0 \cdot \frac{\sin^2(\pi \cdot \Delta f \cdot \tau)}{\Delta f \cdot (\pi \cdot \tau)^2} = S_0 \cdot \Delta f \cdot \sin^2(\pi \cdot \Delta f \cdot \tau). \end{aligned}$$

г) используя теперь соотношение [2, (2.33)] и подставляя $\Delta f = 20$ кГц, $f_0 = 60$ кГц, получаем окончательно

$$B_{\xi}(\tau) = 2 \cdot B_{\text{нц}}(\tau) \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot \tau) = 2 \cdot S_0 \cdot f_{\text{гр}} \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot \Delta f \cdot \tau) \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot \tau) = \\ = 0,5 \cdot \text{sinc}^2(2\pi \cdot 10^4 \cdot \tau) \cdot \cos(1,2 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot \tau), \text{ В}^2.$$

Соответствующий график показан на рис. 11.2.

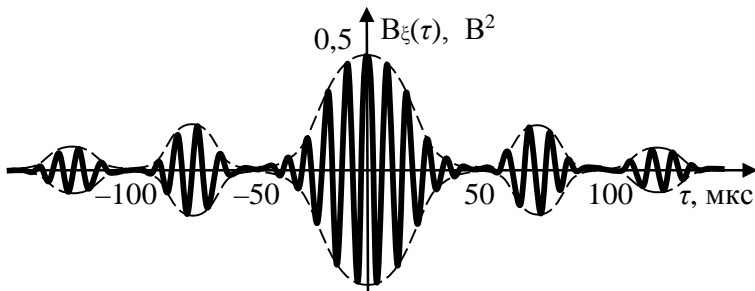


Рис. 11.2. Корреляционная функция узкополосного СП из задачи 2

Задача 3. Белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0 = 10^{-12} \text{ В}^2/\text{Гц}$ проходит через усилитель с АЧХ, представленной на рис. 11.3, и поступает на вход идеального амплитудного детектора. При каком коэффициенте усиления усилителя наблюдаемая на выходе детектора постоянная составляющая реализаций будет составлять 0,25 мВ?

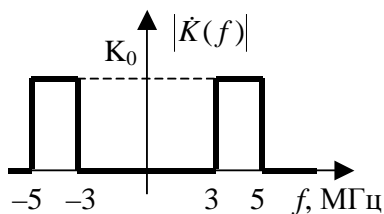


Рис. 11.3. Амплитудно-частотная характеристика усилителя из задачи 3

Решение

а) используемую в данной задаче цепь по отношению к белому шуму можно считать узкополосной, а потому прохож-

дение шума через усилитель будет сопровождаться эффектом нормализации, описанным в [2, с.53-55], и независимо от характера распределения значений исходного шума процесс, поступающий на вход детектора, будет иметь нормальное распределение. Это, в свою очередь, означает, что СП на выходе детектора будет релейевским, а его постоянная составляющая (математическое ожидание) будет связана с эффективным значением нормального процесса на входе детектора соотношением [2, (4.51)], откуда

$$\sigma_{\xi} = \frac{M_A}{\sqrt{\pi/2}} = \frac{0,25}{1,25} = 0,2 \text{ В.}$$

б) прямоугольная форма АЧХ усилителя означает, что его шумовая полоса будет равна $\Pi_{шф} = 2 \text{ МГц}$. Тогда, учитывая, что $P_{\text{вых}} = \sigma_{\xi}^2 = 2 \cdot K_0^2 \cdot \Pi_{шф} \cdot N_0$, для расчета необходимого коэффициента усиления усилителя получаем соотношение

$$K_0 = \frac{\sigma_{\xi}}{\sqrt{2 \cdot \Pi_{шф} \cdot N_0}} = \frac{0,2}{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-12}}} = \frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} = 100.$$

Задача 4. Определить закон распределения огибающей и фазы нормального случайного процесса, обладающего спектральной плотностью мощности, показанной на рис. 11.4, для случаев (а) $\Delta f = 3,14 \text{ МГц}$ и (б) $\Delta f = 348 \text{ кГц}$.

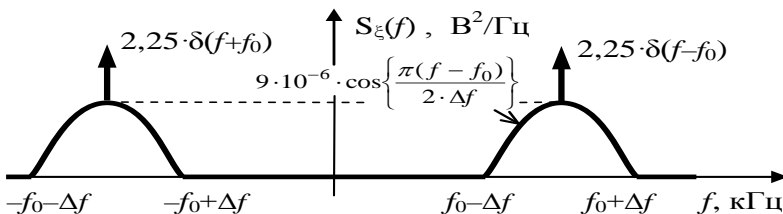


Рис. 11.4. Спектральная плотность мощности СП из задачи 4

Решение

а) особенностью СПМ, представленной на рис. 11.4, является наличие δ -функций на частотах $f = -f_0$ и $f = +f_0$. Спектральные всплески подобной формы однозначно указывают на наличие в составе исследуемого СП гармонической компоненты. Таким образом, анализируемый случайный процесс представляет собой смесь узкополосного нормального шума с сигналом вида $u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$.

б) оценим наблюдаемое соотношение сигнал/шум. Коэффициенты “2,25” при δ -функциях характеризуют мощность узкополосных компонент на соответствующих частотах, поэтому мощность гармонического сигнала составляет $4,5 \text{ В}^2$, что соответствует косинусоиду с амплитудой $U_0 = 3,0 \text{ В}$. Мощность же шумовой составляющей СП определяется площадью под кривой СПМ и может быть определена, например, по правилу [2, (2.13)]

$$\begin{aligned} P_{ш} &= 2 \cdot \int_0^{+\infty} S_{\xi}(f) df = 2 \cdot \int_{f_0 - \Delta f}^{f_0 + \Delta f} 9 \cdot 10^{-6} \cdot \cos\left(\frac{\pi(f - f_0)}{2 \cdot \Delta f}\right) df = \\ &= 9 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2\Delta f}{\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{36 \cdot 10^{-6}}{\pi} \cdot \Delta f \text{ В}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, применительно к случаю (а) мощность шума равна $P_{ш} = 36 \text{ В}^2$, а в случае (б) $P_{ш} \approx 4 \text{ В}^2$.

в) согласно [2, (4.44)] огибающая смеси нормального шума и гармонического сигнала подчиняется распределению Релея-Райса. При низком отношении сигнал/шум (случай “а”) это распределение похоже по форме на стандартное релеевское, а по мере увеличения отношения сигнал/шум все больше концентрируется в окрестности точки $x = U_0$. Для построения графиков распределений перепишем [2, (4.44)] в виде

$$W_A(x) = \frac{x}{\sigma_{\xi}^2} \cdot \exp\left(-\frac{(x - U_0)^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right) \cdot \left\{ \exp\left(-\frac{xU_0}{\sigma_{\xi}^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x \cdot U_0}{\sigma_{\xi}^2}\right) \right\}, \quad x \geq 0,$$

и воспользуемся табличными данными из прил. 3. Результаты представлены на рис. 11.5.

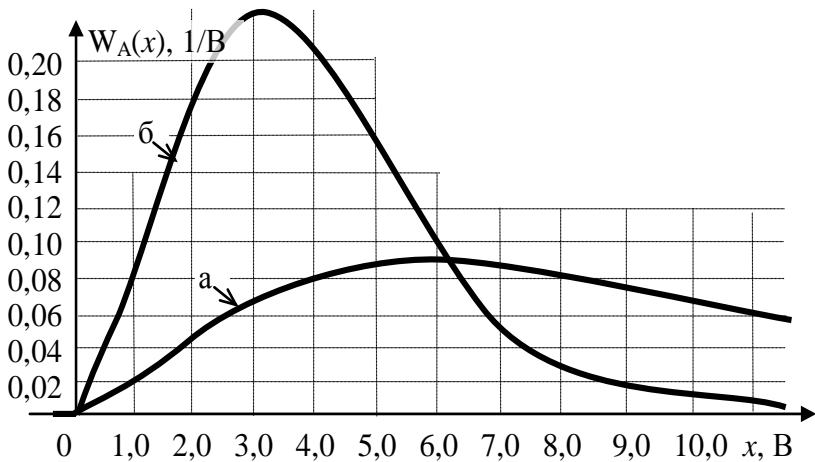


Рис. 11.5. Закон распределения огибающей смеси нормального шума и гармонического сигнала

г) следует заметить, что анализируемый процесс является нестационарным СП и, в частности, возможные значения фазы концентрируется в окрестности значения мгновенной фазы гармонической компоненты. Поскольку в условии не определены ни начальная фаза гармонического сигнала, ни момент времени, для которого требуется построить закон распределения фазы, то однозначного решения данная задача не имеет. Предположим, что в интересующий нас момент времени мгновенная фаза гармонической компоненты $\omega_0 \cdot t + \psi_0 = 5\pi/4$. Построенные для этого случая в соответствии с (11.13) распределения фазы СП показаны на рис. 11.6.

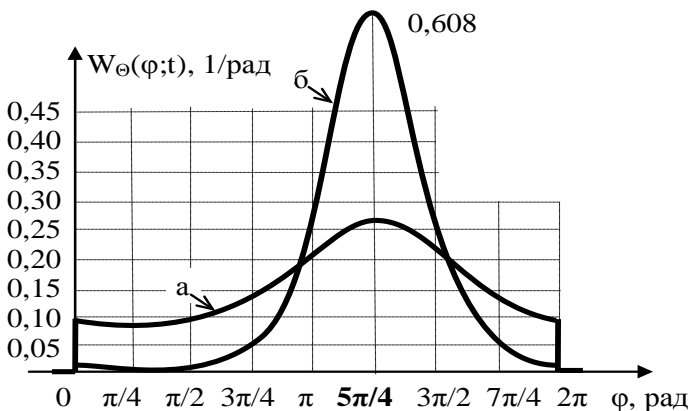


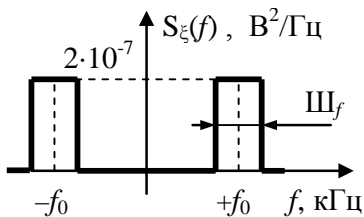
Рис. 11.6. Закон распределения фазы смеси нормального шума и гармонического сигнала

11.2. Задачи для самоконтроля

11.2.1. На вход идеального амплитудного детектора поступает узкополосный нормальный шум с эффективным значением $\sigma_{\xi} = 0,4$ В. Сколь сильно изменится постоянная составляющая сигнала на выходе детектора, если в дополнение к шуму на вход детектора подать сигнал $u(t) = 0,5 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$.

Ответ: При воздействии лишь шума на выходе детектора будет наблюдаться постоянная составляющая $u_{\text{вых}} = 0,5$ В. После добавления сигнала она увеличится до $u_{\text{вых}} = 1,02$ В.

11.2.2. Случайный процесс с представленной на рисунке



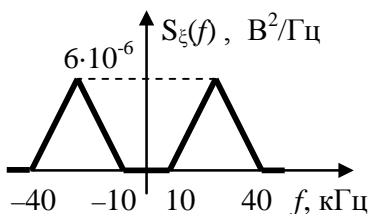
слева спектральной плотностью мощности поступает на вход идеального амплитудного детектора. При какой ширине спектра СП средняя мощность переменной составляющей сигнала на выходе детектора составит $0,02$ В²?

Ответ: $\text{Ш}_f \approx 115$ кГц.

11.2.3. На вход идеального фазового детектора на фоне нормального шума поступает сигнал $u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0)$. Как сказываются параметры гармонического сигнала на свойства сигнала на выходе детектора?

Ответ: Частота воздействия ω_0 не должна оказывать влияния на сигнал на выходе идеального фазового детектора; начальная фаза ψ_0 будет определять расположение максимума распределения, а амплитуда U_0 влияет на сконцентрированность распределения около этого максимума (при увеличении U_0 дисперсия процесса на выходе детектора уменьшается).

11.2.4. Случайный процесс с представленной на рисунке



слева спектральной плотностью мощности поступает на вход идеального амплитудного детектора. С какой вероятностью на выходе детектора можно наблюдать напряжения, превышающие +1,0 В?

Ответ: Вероятность превышения мгновенными значениями огибающей процесса уровня 1 вольт составит 6%.

11.3. Контрольные задания

Задача 11.1. Узкополосный нормальный шум с математическим ожиданием, приведенным в левой колонке табл. 11.1, через разделительную ёмкость, устраняющую постоянную составляющую процесса, поступает на вход идеального амплитудного детектора. Вероятность наблюдения отрицательных шумовых напряжений до разделительной ёмкости приведена в предпоследней колонке табл. 11.1. Определить параметр выходного процесса, указанный в правой колонке.

Таблица 11.1

Но- мер	Матожидание нор- мального шума, В	$P\{ u_{\text{ВЫХ}}(t) < 0 \}$	Искомый параметр
1	- 3,30	0,933	$P\{u_{\text{ВЫХ}}(t)>1В\}$
2	- 2,20	0,864	$P\{u_{\text{ВЫХ}}(t)<1В\}$
3	- 1,80	0,816	$m_1\{ u_{\text{ВЫХ}}(t) \}$
4	- 1,20	0,726	$m_2\{ u_{\text{ВЫХ}}(t) \}$
5	- 0,60	0,618	$D\{ u_{\text{ВЫХ}}(t) \}$
6	0,14	0,421	$m_2\{ u_{\text{ВЫХ}}(t) \}$
7	0,16	0,345	$m_1\{ u_{\text{ВЫХ}}(t) \}$
8	0,24	0,212	$D\{ u_{\text{ВЫХ}}(t) \}$
9	0,32	0,345	$P\{u_{\text{ВЫХ}}(t)<1В\}$
10	0,48	0,382	$P\{u_{\text{ВЫХ}}(t)>1В\}$

Задача 11.2. Гармонический сигнал с амплитудой, указанной в левой колонке табл. 11.2, в смеси с нормальным шумом, обладающим корреляционной функцией $B_{\xi}(\tau) = 0,25 \cdot \text{sinc}(\pi \cdot 10^4 \cdot \tau) \times \cos(10^8 \cdot \tau)$, (B^2) поступает на вход фазового детектора. Определить наименьшее и наибольшее значение плотности вероятности процесса, наблюдаемого на выходе детектора.

Таблица 11.2

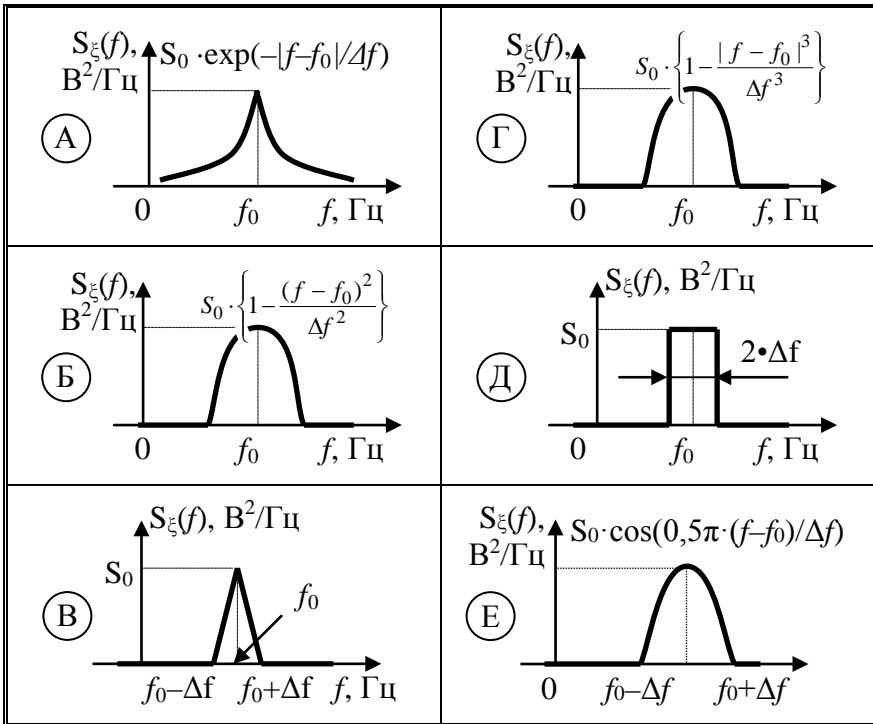
Но- мер	Амплитуда гармоническо- го сигнала U_0 , В	Но- мер	Амплитуда гармоническо- го сигнала U_0 , В
1	0,1	6	0,6
2	0,2	7	0,7
3	0,3	8	0,8
4	0,4	9	0,9
5	0,5	10	1,0

Задача 11.3. На идеальный амплитудный детектор воздействует эргодический узкополосный нормальный СП $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием. Записать аналитическое выражение плотности вероятности воздействующего процесса, если известно, что на выходе детектора (см. табл. 11.3)...

Таблица 11.3

Но- мер	информация о процессе на <u>выходе</u> детектора
1	дисперсия процесса равна $0,108 \text{ В}$.
2	полная средняя мощность процесса составляет $0,08 \text{ В}^2$.
3	постоянная составляющая реализаций равна $0,625 \text{ В}$.
4	математическое ожидание процесса равно 1 В .
5	средняя мощность переменной составляющей $0,048 \text{ В}^2$.
6	второй начальный момент $m_2 \{ u_{\text{вых}}(t) \} = 0,18 \text{ В}^2$.
7	постоянная составляющая реализаций равна $0,125 \text{ В}$.
8	дисперсия процесса составляет $0,027 \text{ В}^2$.
9	полная средняя мощность реализаций составляет $0,98 \text{ В}^2$.
10	математическое ожидание процесса равно $0,25 \text{ В}$.

СПМ случайных процессов из задач 11.4–11.6



Примечание: для уменьшения размера рисунков в таблице показаны лишь правые половины графиков СПМ, соответствующие частотам $f > 0$. Симметричную левую часть следует учитывать в решении самостоятельно.

Задача 11.4. Спектральные плотности мощности (СПМ) различных эргодических случайных процессов представлены в табл. 11.4. Шум с СПМ, указанной в левой колонке таблицы, приведенной ниже, поступает на вход идеального амплитудного детектора. Из параметров S_0 и Δf (см. табл. 11.5) один указан в табл. 11.5, а другой необходимо найти, учитывая, что на выходе детектора...

Таблица 11.5

Но- мер	Вид СПМ (табл. 11.4)	Известный параметр	дополнительное условие
1	А	$\Delta f = 1 \text{ кГц}$	$P\{u_{\text{ВЫХ}}(t) < 1 \text{ В}\} = 0,221$
2	В	$\Delta f = 2 \text{ кГц}$	$P\{u_{\text{ВЫХ}}(t) > 1 \text{ В}\} = 0,607$
3	Д	$\Delta f = 3 \text{ кГц}$	$m_2\{u_{\text{ВЫХ}}(t)\} = 0,08 \text{ В}^2$
4	Б	$\Delta f = 4 \text{ кГц}$	$D\{u_{\text{ВЫХ}}(t)\} = 0,86 \text{ В}^2$
5	Г	$\Delta f = 5 \text{ кГц}$	$m_1\{u_{\text{ВЫХ}}(t)\} = 0,5 \text{ В}$
6	А	$S_0 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$	$m_1\{u_{\text{ВЫХ}}(t)\} = 0,15 \text{ В}$
7	В	$S_0 = 7 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$	$D\{u_{\text{ВЫХ}}(t)\} = 0,21 \text{ В}^2$
8	Д	$S_0 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$	$m_2\{u_{\text{ВЫХ}}(t)\} = 0,8 \text{ В}^2$
9	Б	$S_0 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$	$P\{u_{\text{ВЫХ}}(t) < 1 \text{ В}\} = 0,393$
10	Г	$S_0 = 10^{-5} \text{ В}^2/\text{Гц}$	$P\{u_{\text{ВЫХ}}(t) > 1 \text{ В}\} = 0,779$

Задача 11.5. Узкополосный нормальный случайный процесс со спектральной плотностью мощности, указанной в левой колонке табл. 11.6, поступает на вход идеального амплитудного детектора. Определить вероятность наблюдения на выходе детектора напряжений, превышающих +1 вольт, если параметры входного процесса соответствуют указанным в табл. 11.6.

Таблица 11.6

Но- мер	Вид СПМ (табл. 11.1)	Максимум СПМ S_0 , $\text{В}^2/\text{Гц}$	Δf , кГц
1	Д	$6 \cdot 10^{-6}$	15
2	Б	$7 \cdot 10^{-6}$	15
3	Г	$8 \cdot 10^{-6}$	20
4	Е	$9 \cdot 10^{-6}$	20
5	А	10^{-5}	25

Окончание табл. 11.6

6	Д	$4 \cdot 10^{-5}$	25
7	Б	$3 \cdot 10^{-5}$	50
8	Г	$2 \cdot 10^{-5}$	50
9	Е	10^{-5}	100
10	А	10^{-6}	100

Задача 11.6. Шум со спектральной плотностью мощности, указанной в левой колонке таблицы, приведенной ниже, поступает на вход идеального амплитудного детектора совместно с сигналом $u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \pi/4)$. Определить постоянную составляющую напряжения на выходе детектора.

Таблица 11.7

Но- мер	Вид СПМ (табл. 11.1)	Максимум СПМ S_0 , В ² /Гц	Δf , кГц	U_0 , В
1	Г	$6 \cdot 10^{-6}$	150	1,0
2	Е	$7 \cdot 10^{-6}$	150	0,9
3	А	$4 \cdot 10^{-6}$	200	0,8
4	В	$9 \cdot 10^{-6}$	125	0,7
5	Б	10^{-5}	400	0,6
6	Г	$4 \cdot 10^{-5}$	100	0,5
7	Е	10^{-4}	100	0,4
8	А	$2 \cdot 10^{-5}$	200	0,3
9	В	10^{-5}	250	0,2
10	Б	10^{-6}	1000	0,1

12. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

12.1. Образцы решения задач

Подготовку к решению задач следует начинать с изучения материалов, представленных в подразделах 5.1–5.4 и 6.1–6.4 учебного пособия [2, с. 92–117], после чего рекомендуется проанализировать представленные ниже образцы решения типовых задач и попытаться решить самостоятельно по меньшей мере 50% задач из подраздела 12.2 (см. ниже с. 108–111).

Задача 1. Спектральные плотности мощности случайного полезного сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$, на фоне которой принимается этот сигнал, показаны на рис. 12.1. Определить амплитудно-частотную характеристику фильтра, обеспечивающего выделение сигнала из шума с наименьшей среднеквадратической погрешностью.

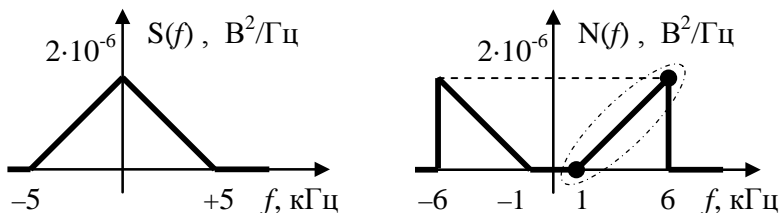


Рис. 12.1. Спектральные характеристики сигнала и помехи из задачи 1

Решение

а) согласно рис. 12.1 спектральные плотности мощности фигурирующих в данной задаче СП представляют собой четные кусочно-линейные функции и потому могут быть записаны в виде совокупности выражений вида $y = k \cdot |f| + b$, где коэффициенты k и b можно определить, в частности, по паре контрольных точек анализируемого линейного участка. Например,

линия, выделенная на рис. 12.1 овалом, должна проходить через точки (*частоты подставляются в герцах*)

$$N(10^3) = k \cdot 10^3 + b = 0 ;$$

$$N(6 \cdot 10^3) = k \cdot 6 \cdot 10^3 + b = 2 \cdot 10^{-6} .$$

Рассматривая эти два соотношения как систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными, несложно установить, что для анализируемого участка коэффициенты k и b должны равняться

$$k = 4 \cdot 10^{-10} ; b = -4 \cdot 10^{-7} .$$

Анализируя подобным образом прочие участки графиков $S(f)$ и $N(f)$, можно убедиться, что спектральным плотностям мощности полезного сигнала и шума соответствуют выражения

$$S(f) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|, & \text{при } |f| \leq 5 \cdot 10^3 \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases} ;$$

$$N(f) = \begin{cases} -4 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|, & \text{при } 1 \cdot 10^3 \leq |f| \leq 5 \cdot 10^3 \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases} .$$

б) согласно правилу [2, (5.8)], коэффициент передачи оптимального фильтра принимает отличающиеся от нуля значения лишь для совокупности частот, где $S(f) > 0$, т.е. имеются спектральные составляющие полезного сигнала, причем там, где сигнал наблюдается без шума, коэффициент передачи следует брать равным единице и лишь там, где действует смесь сигнала с шумом, АЧХ цепи обязана быть меньше единицы.

В соответствии со сказанным, расчет АЧХ фильтра требуется лишь для совокупности частот от 1 до 5 кГц. Подставляя в [2, (5.8)] полученные выше аналитические выражения, получаем

$$|\dot{K}_{\text{опт}}(f)| = \frac{2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|}{(2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|) + (-4 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-10} \cdot |f|}{1,6 \cdot 10^{-6}} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} \cdot |f|.$$

Итак, коэффициент передачи оптимального по критерию минимума среднеквадратической погрешности фильтра имеет вид

$$|\dot{K}_{\text{опт}}(f)| = \begin{cases} 1, & \text{при } |f| \leq 1 \text{ кГц} \\ 1,25 - 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot |f|, & \text{при } 1 < |f| \leq 5 \text{ кГц} \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases}$$

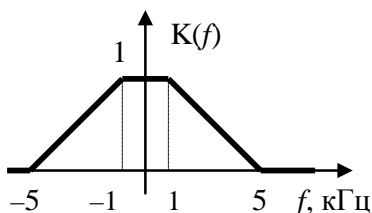


Рис. 12.2. Коэффициент передачи фильтра из задачи 1

Задача 2. Случайный сигнал $s(t)$ с корреляционной функцией $B_s(\tau) = \sigma_s^2 \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|}$ (B^2) принимается на фоне помехи $n(t)$ с корреляционной функцией $B_n(\tau) = \sigma_n^2 \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|}$ (B^2), где α и β – некоторые положительные константы. Найти коэффициент передачи фильтра, выделяющего сигнал из смеси с наименьшей среднеквадратической погрешностью, и получить выражение для оценки самой этой погрешности.

Решение

а) так как основные расчетные формулы, относящиеся к оптимальной фильтрации сигналов неизвестной формы, опи-

раются на спектральные характеристики обрабатываемых случайных процессов, то решение задачи следует начать с поиска спектральной плотности мощности процессов $s(t)$ и $n(t)$.

Входящий в выражения корреляционных функций знак модуля несколько затрудняет интегрирование, но от него легко избавиться, если в качестве математической записи теоремы Винера-Хинчина использовать выражение [2, (2.16)]. Оно предполагает интегрирование лишь по области $\tau \geq 0$, применительно к которой $|\tau| \equiv \tau$, поэтому в подынтегральном выражении знак модуля может быть пропущен

$$\begin{aligned} S(\omega) &= 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} \sigma_s^2 \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot e^{-j\omega \cdot \tau} d\tau \right\} = 2 \cdot \sigma_s^2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \left. \frac{e^{-\tau \cdot (\alpha + j\omega)}}{-(\alpha + j\omega)} \right|_0^{+\infty} \right\} = \\ &= 2 \cdot \sigma_s^2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\alpha + j\omega} \right\} = \sigma_s^2 \cdot \frac{2 \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{В}^2/\Gamma_{\text{ц}}). \end{aligned}$$

По аналогии, $N(\omega) = \sigma_n^2 \cdot \frac{2 \cdot \beta}{\beta^2 + \omega^2} \quad (\text{В}^2/\Gamma_{\text{ц}})$.

б) в соответствии с [2, (5.8)] для АЧХ оптимального фильтра получаем

$$|\dot{K}_{\text{опт}}(\omega)| = \frac{1}{1 + \frac{N(\omega)}{S(\omega)}} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\beta^2 + \omega^2}}.$$

В качестве оценки погрешности имеет смысл использовать среднюю мощность сигнала ошибки, рассчитываемую в соответствии с [2, (5.10)] как

$$P_{\Delta \text{cp}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{N(\omega)} + \frac{1}{S(\omega)}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha \cdot \sigma_s^2} + \frac{\beta^2 + \omega^2}{2\beta \cdot \sigma_n^2}} d\omega.$$

Введем вспомогательные обозначения

$$\frac{\alpha^2}{2\alpha \cdot \sigma_s^2} + \frac{\beta^2}{2\beta \cdot \sigma_n^2} = c^2; \quad \frac{1}{2\alpha \cdot \sigma_s^2} + \frac{1}{2\beta \cdot \sigma_n^2} = q^2.$$

С их использованием предыдущий интеграл принимает вид

$$P_{\Delta cp} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c^2 + (q \cdot \omega)^2} d\omega = \frac{1}{2\pi \cdot cq} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + z^2} dz = \frac{1}{2 \cdot c \cdot q}.$$

После подстановки ранее введенных значений c и q для средней мощности сигнала ошибки получаем выражение

$$P_{\Delta cp} = \left(\frac{\alpha}{\sigma_s^2} + \frac{\beta}{\sigma_n^2} \right)^{-0,5} \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cdot \sigma_s^2} + \frac{1}{\beta \cdot \sigma_n^2} \right)^{-0,5}.$$

Задача 3. Определить импульсную характеристику фильтра, согласованного с видеоимпульсом, показанным на рис. 12.3, и рассчитать отклик этого фильтра на сигнал $s_1(t)$.

Решение

а) на основании [2, (6.18)] импульсная характеристика фильтра, согласованного с сигналом $s_1(t)$, должна иметь вид, показанный на рис. 12.4, и определяться выражением

$$g_{сф}(t) = -A \cdot U_0 \cdot \sin(2\pi \cdot t / \tau).$$

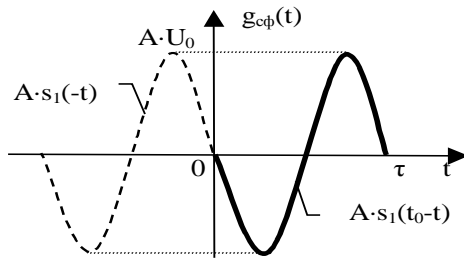
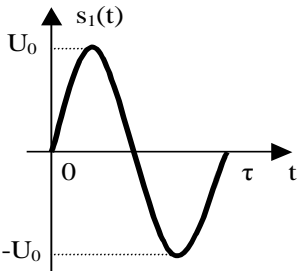


Рис. 12.3. Обнаруживаемый видеоимпульс из задачи 3

Рис. 12.4. Импульсная характеристика фильтра, согласованного с $s_1(t)$

б) так как согласованный фильтр - это линейное устройство и его импульсная характеристика известна, то наиболее простым способом расчета отклика такого фильтра на любой сигнал является интеграл Дюамеля [2, (6.20)]

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(x) \cdot g_{\text{сф}}(t-x) dx.$$

Для уточнения пределов интегрирования проанализируем графики функций, входящих в интеграл Дюамеля, в отдельности для случаев $0 \leq t \leq \tau$ (см. рис. 12.5а) и $\tau \leq t \leq 2\tau$ (см. рис. 12.5б). В соответствии с рис. 12.5а при $0 \leq t \leq \tau$ интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} s_2(t) &= \int_0^t U_0 \cdot \sin(2\pi x / \tau) \cdot A \cdot U_0 \cdot \sin(2\pi(t-x) / \tau) dx = \\ &= \frac{A \cdot U_0^2}{2} \cdot \int_0^t \{ \cos(2\pi t / \tau) - \cos(2\pi(2x-t) / \tau) \} dx = \\ &= \frac{A \cdot U_0^2}{2} \cdot t \cdot \cos(2\pi \cdot t / \tau) - \frac{A \cdot U_0^2}{2} \cdot \frac{\tau}{2\pi} \cdot \sin(2\pi \cdot t / \tau). \end{aligned}$$

Если заменить пределы интегрирования на показанные на рис. 12.5б и повторить расчет для моментов времени из интервала $\tau \leq t \leq 2\tau$, то нетрудно получить выражение аналогичное полученному выше.

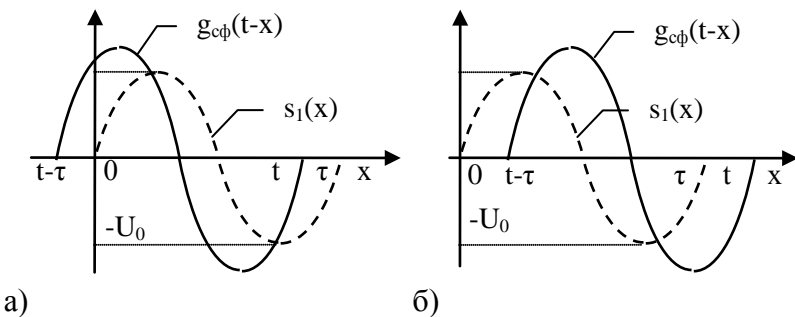


Рис. 12.5. Компоненты интеграла Дюамеля из задачи 3

Объединяя эти результаты искомый сигнал можно записать в виде

$$s_2(t) = \begin{cases} \frac{AU_0^2}{2} \cdot t \cdot \left[\cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) - \text{sinc}\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) \right], & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{AU_0^2}{2} \cdot \left[(2\tau - t) \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) + t \cdot \text{sinc}\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) \right], & \text{при } \tau \leq t \leq 2\tau \end{cases},$$

где функция $\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$. Соответствующая найденному выражению реакция фильтра показана на рис. 12.6. Обратите внимание, что отклик достигает максимума в момент окончания входного сигнала и этот максимум равен $A \cdot \mathcal{E}_s$, где \mathcal{E}_s - энергия обрабатываемого сигнала.

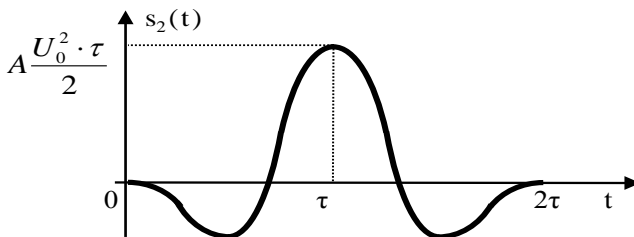


Рис. 12.6. Отклик согласованного фильтра на сигнал $s_1(t)$

Задача 4. Существует ли сигнал, с которым согласован фильтр, имеющий комплексный коэффициент передачи

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1}{\alpha + j \cdot \omega} ?$$

Решение

а) ограничение, связанное с вопросами согласованной фильтрации, может относиться лишь к практической реализуемости фильтра, однако любому фильтру можно поставить в соответствие сигнал, с которым этот фильтр согласован

$$s_{\text{согл}}(t) = g_{\text{сф}}(t_0 - t) / A,$$

где t_0 и A – произвольные по величине константы.

б) импульсная характеристика анализируемого фильтра, определяемая обратным преобразованием Фурье от $\dot{K}(\omega)$, имеет вид $g_{сф}(t) = \exp(-\alpha \cdot t)$, $t \geq 0$.

Таким образом, согласованными с данным фильтром являются любые сигналы, удовлетворяющие соотношению

$$s_{сogl}(t) = \exp(\alpha \cdot (t - t_0)) / A, \quad t \leq t_0.$$

Несколько возможных вариантов подобных сигналов показаны на рис. 12.7.

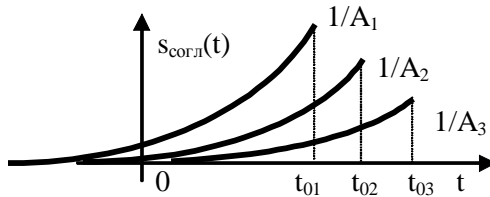


Рис. 12.7. Сигналы, согласованные с фильтром из задачи 2

Задача 5. Как изменятся требования к фильтру, рассмотренному в задаче 4, если согласованные с ним сигналы необходимо принимать на фоне помехи с корреляционной функцией

$$B_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|} ?$$

Решение

а) согласно теореме Винера-Хинчина [2, (2.16)] спектральная плотность мощности помехи, на фоне которой производится теперь обнаружение сигналов, показанных на рис. 12.8, может быть найдена из выражения

$$S_{\xi}(\omega) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} \sigma_{\xi}^2 \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau \right\} = \frac{2 \cdot \sigma_{\xi}^2 \cdot \beta}{\beta^2 + \omega^2}.$$

б) из [2, (6.32)] следует, что коэффициент передачи фильт-

ра, обеспечивающего максимальное соотношение сигнал/шум при обнаружении сигналов на фоне шума с неравномерной спектральной мощности, связан с коэффициентом передачи согласованного фильтра соотношением $\dot{K}_{opt}(\omega) = \frac{\dot{K}_{сф}(\omega)}{S_{\xi}(\omega)}$.

Таким образом, оптимальный фильтр должен обладать коэффициентом передачи

$$\dot{K}_{opt}(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2 \cdot \beta} \cdot \frac{\beta^2 + \omega^2}{\alpha + j \cdot \omega} = K_0 \cdot \frac{\beta^2 + \omega^2}{\alpha + j \cdot \omega},$$

где, в принципе, K_0 может быть произвольным по величине.

Задача 6. Полезный сигнал – импульс с линейной частотной модуляцией – имеет длительность $\tau = 5$ мкс и неизвестную амплитуду U . Этот полезный сигнал поступает на вход согласованного с ним фильтра. Источником шума на входе фильтра служит резистор $R = 100$ кОм, находящийся при температуре $T = 300$ К. При какой амплитуде сигнала отношение сигнал/шум на выходе фильтра будет удовлетворять соотношению $q_{сф}^2 \geq 5$?

Решение

а) в соответствии с [2, (6.14)] обеспечиваемое согласованным фильтром отношение сигнал/шум определяется энергией \mathcal{E}_s полезного сигнала и спектральной плотностью мощности шума N_0 , на фоне которого производится обнаружение. Примерный вид обнаруживаемого сигнала показан на рис. 12.8. Поскольку средняя мощность гармонического сигнала не зависит от его частоты, то средняя за “период” мощность обнаруживаемого сигнала равна $U^2/2$, а энергия радиоимпульса продолжительности τ составляет

$$\mathcal{E}_s = \tau \cdot U^2/2.$$

б) помехой, на фоне которой происходит обнаружение сигнала $s_{лчм}(t)$, служит тепловой шум, спектральная плотность мощности которого (в соответствии с [2, (2.25)] равна

$$N_0 = 2 \cdot k \cdot T \cdot R,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Вт/(Гц*Град) – постоянная Больцмана.

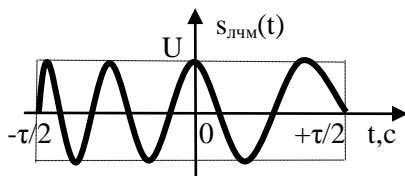


Рис. 12.8. Импульс с линейной частотной модуляцией из задачи 6

в) итак, для выполнения требований задания необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\tau \cdot U^2}{4 \cdot k \cdot T \cdot R} \geq 5$, откуда для амплитуды обнаруживаемого сигнала получаем

$$U \geq \sqrt{5 \cdot \frac{4 \cdot k \cdot T \cdot R}{\tau}} = \sqrt{5 \cdot \frac{4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^{-6}}} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ (В)}.$$

Т.е. заданные условием требования к соотношению сигнал/шум на выходе устройства обработки обеспечиваются при амплитуде обнаруживаемых сигналов, превышающей 40 мкВ.

Задача 7. Спектральная плотность амплитуд полезного сигнала $u(t)$ показана на рис. 12.9. Если на вход фильтра, согласованного с этим сигналом, подать белый шум (без полезного сигнала), то какова будет спектральная плотность мощности отклика фильтра?

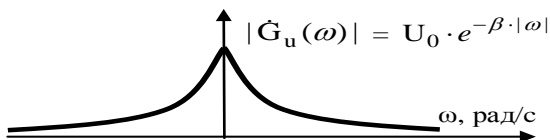


Рис. 12.9. Спектральная плотность амплитуд полезного сигнала из задачи 7

Решение

а) в соответствии с частотным методом анализа случайных процессов в линейных цепях для оценки спектральных характеристик процесса на выходе цепи необходимо знать квадрат ее амплитудно-частотной характеристики. Вместе с тем, формула [2, (6.13)] полностью определяет комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра и согласно ей

$$|\dot{K}_{сф}(\omega)| = A \cdot |G_u^*(\omega)|.$$

б) исходя из соотношения [2, (3.4)] спектральная плотность мощности на выходе цепи может быть представлена в виде

$$S_{\text{вых}}(\omega) = S_{\text{вх}}(\omega) \cdot |\dot{K}_{сф}(\omega)|^2.$$

При воздействии на вход фильтра белого шума, имеющего равномерную по частоте спектральную плотность мощности, форма $S_{\text{вых}}(\omega)$ будет определяться коэффициентом передачи фильтра. В рассматриваемом случае, очевидно, $S_{\text{вых}}(\omega)$ будет максимальна на нулевой частоте. Вместе с тем, входящий в [2, (6.13)] коэффициент A произволен по величине, поэтому мы принципиально не можем определить точное значение $S_{\text{вых}}(0)$.

Итак, без уточнения величины параметра A , входящего в коэффициент передачи согласованного фильтра, может быть определена лишь форма спектральной плотности мощности шума на выходе фильтра, которая показана на рис. 12.10.

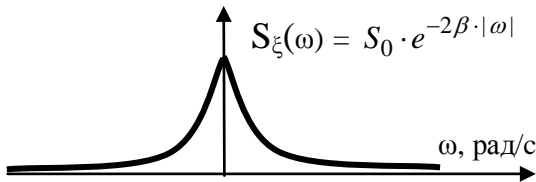


Рис. 12.10. Спектральная плотность мощности шума, наблюдаемого на выходе согласованного фильтра из задачи 7

12.2. Задачи для самоконтроля

12.2.1. Помеха представляет собой случайный процесс со спектральной плотностью мощности, показанной на рис. 12.11. При каких условиях фильтром, обеспечивающим оптимальную фильтрацию полезного сигнала неизвестной формы окажется ИФНЧ с коэффициентом передачи $K_0 = 0,8$ и частотой среза $F_c = 2$ кГц?

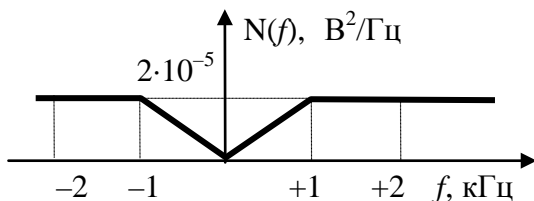


Рис. 12.11. Спектральная плотность мощности помехи

Ответ: полезный сигнал должен быть схожим по форме СПМ с помехой в пределах полосы пропускания фильтра и не иметь полезных составляющих спектра на частотах выше F_c . Его спектральная плотность мощности может быть записана в виде

$$S(f) = \begin{cases} 8 \cdot 10^{-8} \cdot |f|, & |f| < 10^3 \\ 8 \cdot 10^{-5}, & 10^3 \leq |f| \leq 2 \cdot 10^3 \\ 0, & |f| > 2 \cdot 10^3 \end{cases} .$$

12.2.2. Полезный сигнал представляет собой случайный процесс со спектральной плотностью мощности, показанной на рис. 12.12 (слева). Определить коэффициент передачи фильтра, обеспечивающего выделение этого сигнала из смеси с помехой, имеющей СПМ, показанную на рис. 12.12 справа, с наименьшей среднеквадратической погрешностью. Рассчитать среднюю мощность сигнала ошибки.

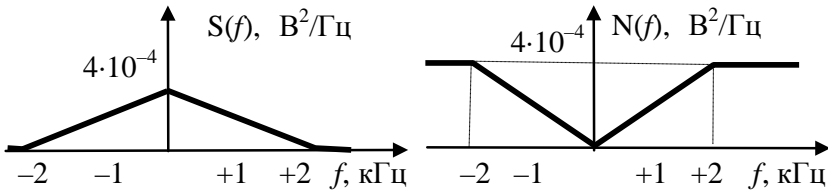
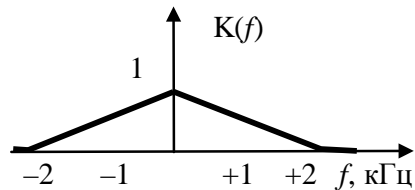


Рис. 12.12. Спектральные плотности мощности полезного сигнала и аддитивной помехи

Ответ: коэффициент передачи оптимального фильтра показан на рисунке справа, а средняя мощность сигнала ошибки составляет $0,266 \text{ В}^2$.



12.2.3. Проанализируйте структурную схему фильтра, приведенную на рис. 12.13 (где «ЛЗ(τ)» - линия задержки сигналов на интервал τ), и укажите, для каких сигналов он может служить согласованным фильтром?

Ответ: в соответствии с импульсной характеристикой цепи данный фильтр может служить согласованным фильтром для прямоугольных импульсов длительности τ .

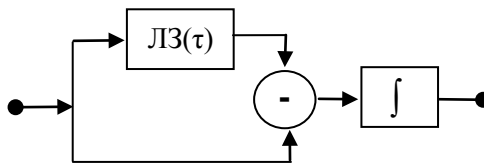


Рис. 12.13. Структурная схема линейной цепи

12.2.4. Для передачи информации на фоне равномерной по спектру помехи может быть задействован либо сигнал $u_1(t)$, представленный на рис. 12.14, либо сигнал $u_2(t)$. Если для приема каждого из сигналов предполагается возможным использовать

соответствующий согласованный фильтр, то какой из них обеспечит меньшую вероятность ошибки?

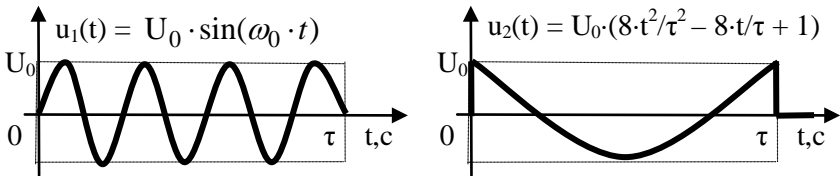


Рис. 12.14. Сигналы, которые могут быть использованы для передачи информации в задаче 12.4

Ответ: сигнал $u_2(t)$ немного уступает в помехоустойчивости сигналу $u_1(t)$, так как имеет меньшую энергию, а именно $\mathcal{E}_1 = U_0^2 \cdot \tau / 2$; $\mathcal{E}_2 = U_0^2 \cdot \tau \cdot 7 / 15$.

12.2.5. Полезный сигнал $s(t)$ имеет вид, показанный на рис. 12.15. Разумно ли для обнаружения подобного сигнала на фоне белого шума использовать фильтр с комплексным коэффициентом передачи $K(\omega) = A \cdot S_0 \cdot \text{sinc}^2[0,5 \cdot \omega \tau] \cdot e^{-j \cdot 2 \omega \tau}$?

Если “да”, то в какой момент времени следует контролировать сигнал на выходе фильтра? Какое отношение сигнал/шум обеспечивается на выходе фильтра в этот момент времени, если СПМ аддитивного шума равна N_0 ?

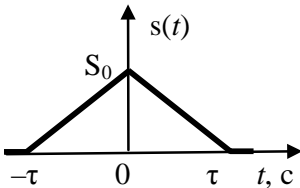


Рис. 12.15. Полезный сигнал

Ответ: предложенный фильтр является согласованным с сигналом $s(t)$ применительно к моменту принятия решения $t_0 = 2 \cdot \tau$; использовать подобный для обнаружения сигнала $s(t)$ вполне возможно, однако решение будет приниматься с излишней

задержкой по отношению к моменту окончания сигнала. Обеспечиваемое фильтром отношение сигнал/шум по мощности может быть рассчитано по формуле $q^2 = 2 \cdot S_0^2 \cdot \tau / (3 \cdot N_0)$.

12.2.6. Полезный сигнал $u(t)$ представляет собой импульс треугольной формы длительности τ , показанный на рис. 12.16.

Определите комплексный коэффициент передачи фильтра, согласованного с данным сигналом и обеспечивающего максимальное отношение сигнал/шум в момент окончания сигнала. Рассчитайте форму отклика фильтра на воздействие на его вход сигнала $u(t)$.

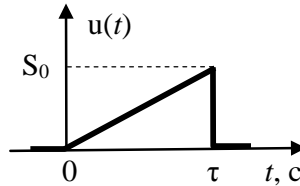


Рис. 12.16. Полезный сигнал $u(t)$

Ответ: $K_{сф}(\omega) = \frac{A \cdot S_0}{\omega^2 \cdot \tau} \cdot [1 - j\omega\tau - e^{-j\omega\tau}]$

Отклик фильтра на сигнал $u(t)$ показан на рис. 12.17 и определяется выражением $u_{\text{вых}}(t) =$

$$= \begin{cases} \left(\frac{S_0}{\tau}\right)^2 \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \left(\tau - \frac{t}{3}\right), & 0 < t \leq \tau \\ \left(\frac{S_0}{\tau}\right)^2 \cdot \left(\frac{2\tau^3}{3} - \frac{\tau t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right), & \tau < t \leq 2\tau \end{cases}$$

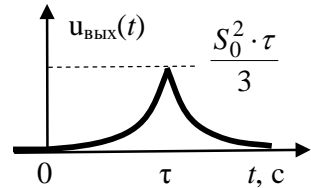


Рис. 12.17. Отклик фильтра на сигнал $u(t)$

12.3. Контрольные задания

Задача 12.1. Полезный сигнал $s(t)$ представляет собой стационарный нормальный случайный процесс с показанной на рис. 12.18 спектральной плотностью мощности (СПМ) $S(\omega)$. Смесь этого сигнала и нормального шума с СПМ $N(\omega)$ посту-

пает на вход фильтра, обеспечивающего минимальную возможную среднеквадратическую ошибку фильтрации сигнала. Величина P_ε – это вероятность того, что отклик, наблюдаемый на выходе фильтра, будет отклоняться от истинного значения сигнала $s(t)$ по абсолютной величине более чем на ε милливольт. Руководствуясь представленными в таблице ниже значениями, определить величину, помеченную в табл. 12.1 значком (?).

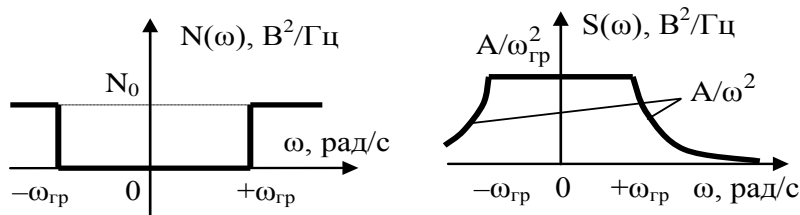


Рис. 12.18. Спектральные плотности мощности к задаче 12.7

Таблица 12.1

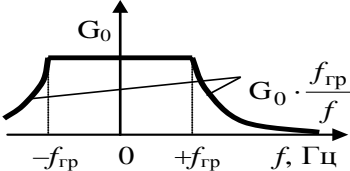
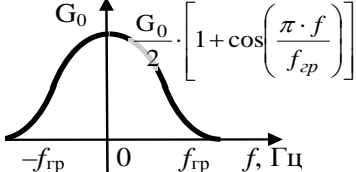
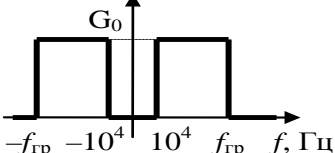
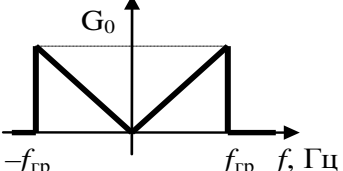
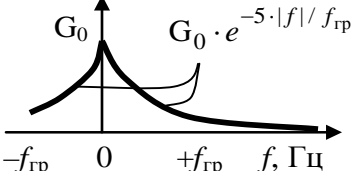
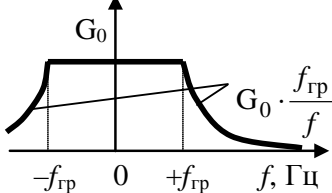
Но- мер	N_0 , B^2/Gts	A , $B^2 \cdot c$	ω_{gp} , рад/с	ε , мВ	P_ε
1	10^{-6}	3	$3 \cdot 10^3$	50	(?)
2	$3 \cdot 10^{-7}$	0,1	10^3	(?)	0,005
3	$3 \cdot 10^{-7}$	0,3	(?)	7	0,424
4	10^{-8}	10^{-2}	10^3	(?)	0,230
5	10^{-8}	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^3$	5	(?)
6	$3 \cdot 10^{-9}$	10^{-3}	10^3	(?)	0,005
7	$3 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-3}$	(?)	0,8	0,424
8	$2 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-5}$	10^3	(?)	0,072
9	10^{-10}	10^{-4}	10^3	0,19	(?)
10	10^{-10}	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^3$	(?)	0,004

Задача 12.2. Детерминированный полезный сигнал $s(t)$, с представленной в табл. 12.2 спектральной плотностью амплитуд, поступает на вход согласованного с ним фильтра вместе с шумом, имеющим спектральную плотность мощности $N_0 = 10^{-4}$ В²/Гц. Руководствуясь представленными в табл. 12.2 значениями, определить величину, помеченную в этой таблице значком (?).

Примечание: величина q^2 , приведенная в последнем столбце табл. 12.2, представляет собой отношение сигнал/шум по мощности на выходе фильтра.

Таблица 12.2

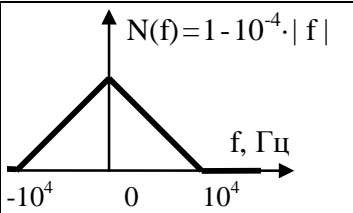
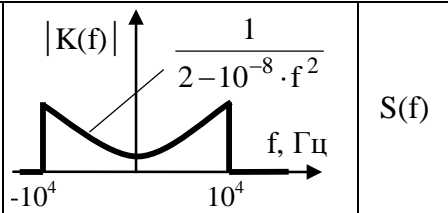
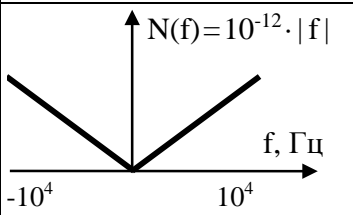
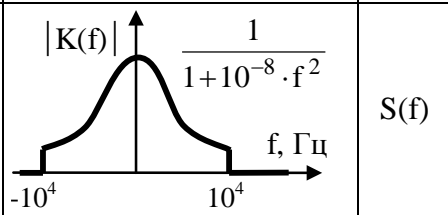
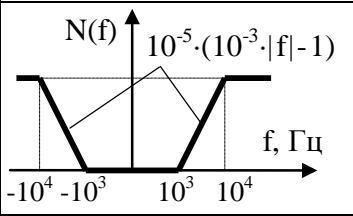
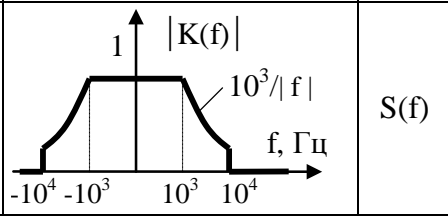
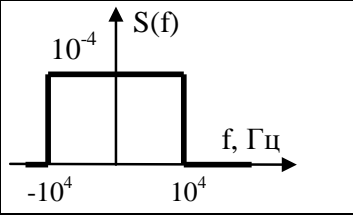
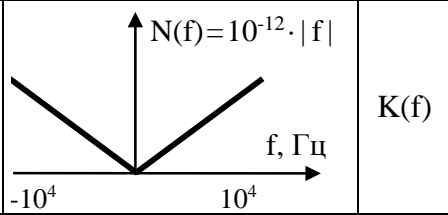
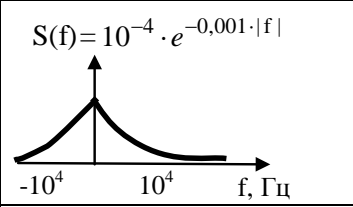
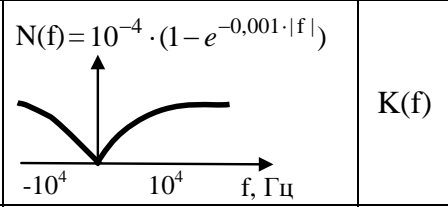
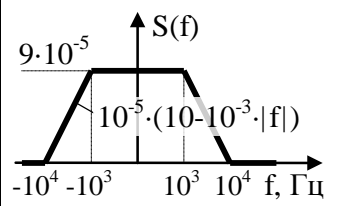
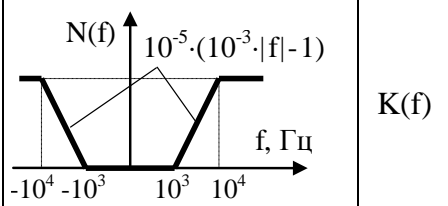
Но- мер	Спектральная плотность ам- плитуд полезного сигнала $ G_s(f) $, В / Гц	G_0 , В/Гц	$f_{гр}$, Гц	q^2
1		(?)	$3 \cdot 10^5$	5
2		10^{-4}	$6 \cdot 10^4$	(?)
3		10^{-3}	(?)	9
4		(?)	$5 \cdot 10^5$	10

Но- мер	Спектральная плотность амплитуд полезного сигнала $ G_s(f) $, В / Гц	G_0 , В/Гц	$f_{гр}$, Гц	q^2
5		$5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^4$	②
6		$2 \cdot 10^{-4}$	10^5	②
7		②	$4 \cdot 10^4$	6
8		$\sqrt{6} \cdot 10^{-4}$	10^4	②
9		$\sqrt{5} \cdot 10^{-3}$	②	4
10		10^{-4}	②	8

Задача 12.3. Случайный полезный сигнал со спектральной плотностью мощности (СПМ) $S(f)$, в смеси с помехой, обладающей СПМ $N(f)$, воздействует на вход оптимального линейного фильтра. Фильтр обладает коэффициентом передачи $K(f)$ и обеспечивает на своем выходе минимально возможную среднеквадратическую ошибку фильтрации полезного сигнала из смеси с помехой. По представленным в табл. 12.3 данным определить недостающую характеристику (из упомянутых в задаче).

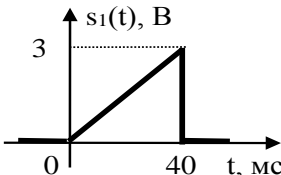
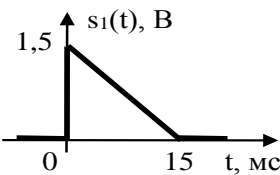
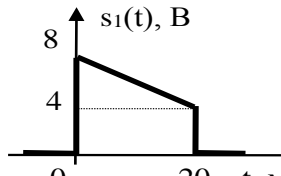
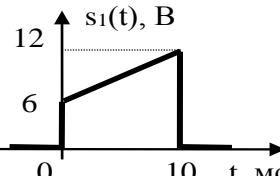
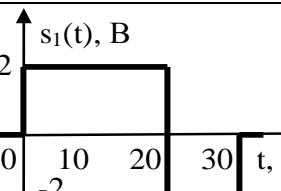
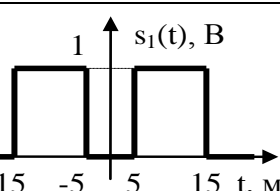
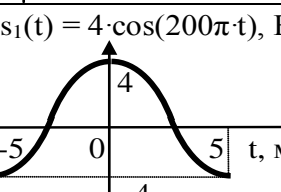
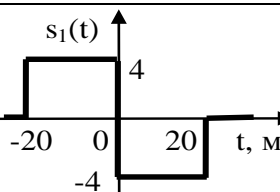
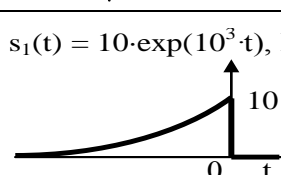
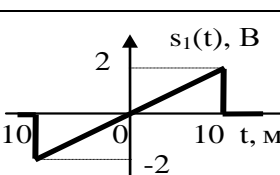
Таблица 12.3

Но- мер	Известные характеристики		Иск. хар- ка
1			$N(f)$
2			$N(f)$
3			$N(f)$
4			$N(f)$

5	 <p>$N(f) = 1 - 10^{-4} \cdot f$</p> <p>$f, \Gamma_{\Pi}$</p>	 <p>$K(f) = \frac{1}{2 - 10^{-8} \cdot f^2}$</p> <p>$f, \Gamma_{\Pi}$</p>	S(f)
6	 <p>$N(f) = 10^{-12} \cdot f$</p> <p>f, Γ_{Π}</p>	 <p>$K(f) = \frac{1}{1 + 10^{-8} \cdot f^2}$</p> <p>$f, \Gamma_{\Pi}$</p>	S(f)
7	 <p>$N(f) = 10^{-5} \cdot (10^{-3} \cdot f - 1)$</p> <p>$f, \Gamma_{\Pi}$</p>	 <p>$K(f) = 10^3 / f$</p> <p>f, Γ_{Π}</p>	S(f)
8	 <p>$S(f) = 10^{-4}$</p> <p>f, Γ_{Π}</p>	 <p>$N(f) = 10^{-12} \cdot f$</p> <p>f, Γ_{Π}</p>	K(f)
9	 <p>$S(f) = 10^{-4} \cdot e^{-0,001 \cdot f }$</p> <p>$f, \Gamma_{\Pi}$</p>	 <p>$N(f) = 10^{-4} \cdot (1 - e^{-0,001 \cdot f })$</p> <p>$f, \Gamma_{\Pi}$</p>	K(f)
10	 <p>$S(f) = 9 \cdot 10^{-5}$</p> <p>$10^{-5} \cdot (10 - 10^{-3} \cdot f)$</p> <p>$f, \Gamma_{\Pi}$</p>	 <p>$N(f) = 10^{-5} \cdot (10^{-3} \cdot f - 1)$</p> <p>$f, \Gamma_{\Pi}$</p>	K(f)

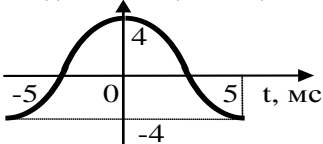
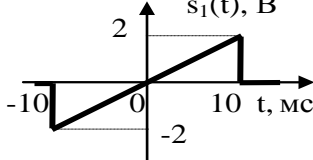
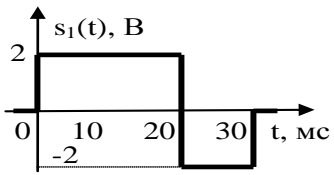
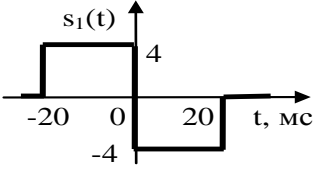
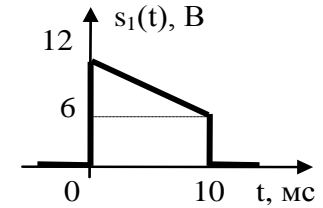
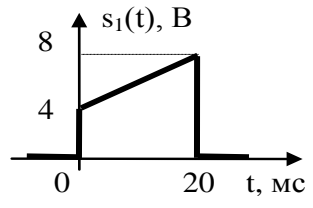
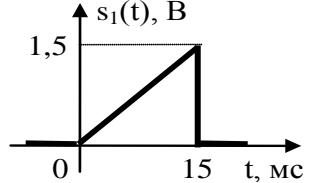
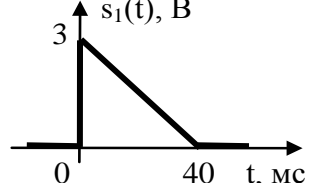
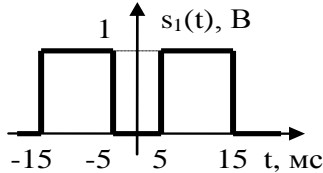
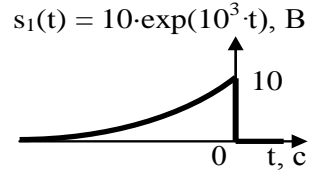
Задача 12.4. Определите импульсную характеристику фильтра, согласованного с приведенным ниже сигналом $s_1(t)$. Рассчитайте также отклик, наблюдаемый на выходе этого фильтра в ответ на воздействие сигнала $s_1(t)$.

Таблица 12.4

Но- мер	Сигнал $s_1(t)$	Но- мер	Сигнал $s_1(t)$
1		6	
2		7	
3		8	
4	$s_1(t) = 4 \cdot \cos(200\pi t)$, В 	9	
5	$s_1(t) = 10 \cdot \exp(10^3 \cdot t)$, В 	10	

Задача 12.5. Найдите соотношение сигнал/шум, наблюдаемое на выходе фильтра, согласованного с приведенным ниже сигналом $s_1(t)$, если помимо этого сигнала на вход фильтра поступает белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0 = 10^{-4}$ В²/Гц.

Таблица 12.5

Но-мер	Сигнал $s_1(t)$	Но-мер	Сигнал $s_1(t)$
1	$s_1(t) = 4 \cdot \cos(200\pi \cdot t)$, В 	6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	$s_1(t) = 10 \cdot \exp(10^3 \cdot t)$, В 

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в данном учебном пособии образцы решений задач составляют, по мнению автора, минимальный законченный объем материала, необходимый для ознакомления с методами обработки случайных процессов в радиотехнических цепях. Автор сознательно стремился к минимизации объема пособия, учитывая, в частности, что часть интересных примеров представлена в учебниках, указанных в списке литературных источников.

Студентам, заинтересованным в углубленном изучении дисциплины «Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике», будет полезно рассмотреть примеры и задачи, приведенные в других изданиях. При этом не следует игнорировать и источники, выпущенные 20, 30 и более лет назад, т.к. освоение дисциплины направлено на изучение математического аппарата и методов обработки сигналов, которые не теряют своей актуальности и могут быть успешно использованы и сегодня, и в будущем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Токарев, А.Б. Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике: учеб. пособие [Текст] / А.Б. Токарев. – Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2015. – Ч.1. – 197 с.

2. Токарев, А.Б. Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике: учеб. пособие [Текст] / А.Б. Токарев. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2017. – Ч.2. – 144 с.

3. Токарев, А.Б. Вероятностные методы в радиотехнике: учеб. пособие [Текст] / А.Б. Токарев. – Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т, 2005. – Ч.1. – 173 с.

4. Токарев, А.Б. Вероятностные методы в радиотехнике: учеб. пособие [Текст] / А.Б. Токарев. – Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т, 2008. – Ч.2. – 157 с.

5. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие для студ. Втузов [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Академия, 2003. – 448 с.

6. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов [Текст] / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 404 с.

7. Гихман, И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – Киев: Вища школа, 1979. – 408 с.

8. Филиппский, Ю.К. Случайные сигналы в радиотехнике [Текст] / Ю.К. Филиппский. – Киев: Вища школа, 1986. – 126 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Функция распределения стандартной нормальной случайной величины

Данная функция распределения равна $F_{\text{ст}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

x	$F_{\text{ст}}(x)$	x	$F_{\text{ст}}(x)$	x	$F_{\text{ст}}(x)$	x	$F_{\text{ст}}(x)$
0,0	0,5000	1,0	0,8413	2,0	0,9773	3,0	0,9987
0,1	0,5398	1,1	0,8643	2,1	0,9821	3,1	0,9990
0,2	0,5793	1,2	0,8849	2,2	0,9861	3,2	0,9993
0,3	0,6179	1,3	0,9032	2,3	0,9893	3,3	0,9995
0,4	0,6554	1,4	0,9192	2,4	0,9918	3,4	0,9997
0,5	0,6915	1,5	0,9331	2,5	0,9938	3,5	0,9998
0,6	0,7258	1,6	0,9452	2,6	0,9953	3,6	0,9998
0,7	0,7580	1,7	0,9554	2,7	0,9965	3,7	0,9999
0,8	0,7881	1,8	0,9641	2,8	0,9974	3,8	0,9999
0,9	0,8159	1,9	0,9713	2,9	0,9981	3,9	0,9999

Для отрицательных аргументов x значения можно получить из соотношения $F_{\text{ст}}(x)|_{x<0} = 1 - F_{\text{ст}}(-x)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Некоторые неопределенные и определенные интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign}(a), \quad \text{где } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad (\text{П.2.1})$$

$$\int x \cdot \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot \sin(ax)}{a}, \quad (\text{П.2.2})$$

$$\int x^2 \cdot \cos(ax) dx = \frac{2x \cdot \cos(ax)}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \sin(ax), \quad (\text{П.2.3})$$

$$\int x \cdot \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a}, \quad (\text{П.2.4})$$

$$\int x^2 \cdot \sin(ax) dx = \frac{2x \cdot \sin(ax)}{a^2} - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cdot \cos(ax). \quad (\text{П.2.5})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Модифицированные функции Бесселя

$$I_0(z) = 1 + \frac{z^2/4}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \dots ; \quad (\text{П.3.1})$$

$$I_1(z) = \frac{z}{2} \cdot \left[1 + \frac{z^2/4}{(1!) \cdot (2!)} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!) \cdot (3!)} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!) \cdot (4!)} + \dots \right]. \quad (\text{П.3.2})$$

x	$\exp(-x) \cdot I_0(x)$	$\exp(-x) \cdot I_1(x)$	x	$\exp(-x) \cdot I_0(x)$	$\exp(-x) \cdot I_1(x)$
0,0	1,0000	0,0000	2,0	0,3085	0,2153
0,2	0,8269	0,0823	2,2	0,2913	0,2121
0,4	0,6974	0,1367	2,4	0,2766	0,2085
0,6	0,5883	0,1722	2,6	0,2639	0,2047
0,8	0,5241	0,1945	2,8	0,2528	0,2007
1,0	0,4658	0,2079	3,0	0,2430	0,1968
1,2	0,4198	0,2153	3,2	0,2343	0,1930
1,4	0,3831	0,2185	3,4	0,2264	0,1892
1,6	0,3533	0,2190	3,6	0,2193	0,1856
1,8	0,3289	0,2177	3,8	0,2129	0,1821

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

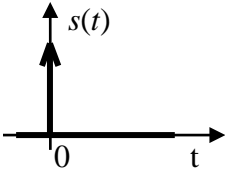
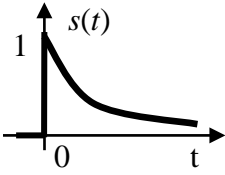
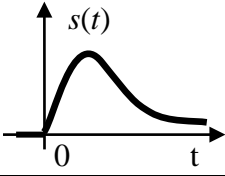
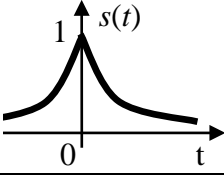
Спектральные свойства сигналов

Комплексная спектральная плотность сигнала, характеризует спектральные свойства непериодических сигналов и может быть рассчитана с помощью прямого интегрального преобразования

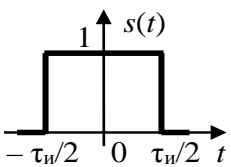
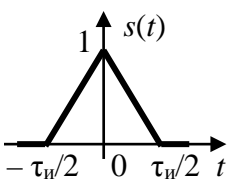
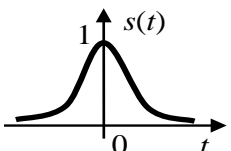
$$\text{Фурье} \quad G_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (\text{П.4.1})$$

Комплексные спектральные плотности для набора типовых сигналов приведены в представленной ниже табл. П.4.1.

Таблица П.4.1

Сигнал $s(t)$	График сигнала	Комплексная спектральная плотность
$s(t) = \delta(t)$		$\dot{G}_s(\omega) = 1$
$s(t) = e^{-\alpha t} \cdot \mathbf{1}(t)$		$\dot{G}_s(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$
$s(t) = t e^{-\alpha t} \cdot \mathbf{1}(t)$		$\dot{G}_s(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$
$s(t) = e^{-\alpha t }$		$\dot{G}_s(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

Окончание табл. П.4.1

Сигнал $s(t)$	График сигнала	Комплексная спектральная плотность
$s(t) = \text{rect}(t / \tau_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq \tau_n / 2 \\ 0 & \text{при } t > \tau_n / 2 \end{cases}$		$\dot{G}_s(\omega) = \tau_n \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau_n}{2}\right)$
$s(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2 t }{\tau_n}, & t \leq \frac{\tau_n}{2} \\ 0 & \text{при } t > \frac{\tau_n}{2} \end{cases}$		$\dot{G}_s(\omega) = \frac{\tau_n}{2} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau_n}{4}\right)$
$s(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$		$\dot{G}_s(\omega) = \frac{\sigma \sqrt{2\pi}}{\exp\left(\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}\right)}$

Для расчета спектральных характеристик сигналов, отсутствующих в представленной выше таблице, могут быть полезны следующие свойства комплексной спектральной плотности (табл. П.4.2):

Таблица П.4.2

Характер, свойство преобразования	Колебание во временной области $s(t)$	Комплексная спектральная плотность колебания $\dot{G}(\omega)$
1. Свойство симметрии	$\dot{G}(t)$	$2\pi \cdot s(-\omega)$
2. Инверсия аргумента функции	$s(-t)$	$\dot{G}_s^*(\omega)$, где * - знак комплексного сопряжения

Окончание табл. П.4.2

Характер, свойство преобразования	Колебание во временной области $s(t)$	Комплексная спектральная плотность колебания $\dot{G}(\omega)$
3. Изменение масштаба времени	$a \cdot s(at)$	$\dot{G}_s\left(\frac{\omega}{a}\right)$
4. Дифференцирование по времени	$s'(t)$	$j\omega \cdot \dot{G}_s(\omega)$
5. Теорема о запаздывании	$s(t - t_3)$	$\dot{G}_s(\omega) \cdot e^{-j\omega t_3}$
6. Свойство частотного сдвига	$s(t) \cdot \exp(j\Omega t)$	$\dot{G}_s(\omega - \Omega)$
7. Умножение на гармоническую функцию	$s(t) \cdot \cos(\Omega t)$	$0,5 \cdot \dot{G}_s(\omega + \Omega) + 0,5 \cdot \dot{G}_s(\omega - \Omega)$
8. Произведение двух функций	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$\dot{G}_1(\omega) \otimes \dot{G}_2(\omega)$
9. Теорема о свёртке	$s_1(t) \otimes s_2(t)$	$\dot{G}_1(\omega) \cdot \dot{G}_2(\omega)$

Здесь в пунктах 8 и 9 значком \otimes обозначена операция интегральной свертки, определяемая выражением

$$s_1(t) \otimes s_2(t) = \int_{-\epsilon}^{+\infty} s_1(x) \cdot s_2(t-x) dx = \int_{-\epsilon}^{+\infty} s_2(y) \cdot s_1(t-y) dy \quad (\text{П.4.2})$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ	4
2. РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ	4
3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ТЕОРЕМА О ГИПОТЕЗАХ	4
4. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	5
5. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	5
6. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ..	5
7. СВОЙСТВА СИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	5
8. КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	6
8.1. Образцы решения задач	6
8.2. Задачи для самоконтроля.....	14
8.3. Контрольные задания.....	15
9. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	29
9.1. Образцы решения задач	29
9.2. Задачи для самоконтроля.....	43
9.3. Контрольные задания.....	45
10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ	55
10.1. Образцы решения задач	55
10.2. Задачи для самоконтроля.....	68
10.3. Контрольные задания.....	70

11. Узкополосные случайные процессы и их нелинейные преобразования	82
11.1. Образцы решения задач	82
11.2. Задачи для самоконтроля.....	90
11.3. Контрольные задания.....	91
12. Оптимальная линейная фильтрация сигналов	97
12.1. Образцы решения задач	97
12.2. Задачи для самоконтроля.....	108
12.3. Контрольные задания.....	111
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	119
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	120
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Функция распределения стандартной нормальной случайной величины	121
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Некоторые неопределенные и определенные интегралы	122
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Модифицированные функции Бесселя	123
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Спектральные свойства сигналов	124

Учебное издание

Токарев Антон Борисович

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАДИОТЕХНИКЕ**

Сборник задач

Редактор Кусаинова Е.А.

Подписано к изданию 18.12.2020.

Объем данных 2,1 Мб.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»

394026 Воронеж, Московский проспект, 14