

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра кадастра недвижимости, землеустройства и геодезии

**ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ МОНИТОРИНГ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к выполнению практических работ для студентов направления  
21.04.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»  
(программа магистерской подготовки «Инженерная геодезия»)  
всех форм обучения

Воронеж 2022

УДК 528(07)  
ББК 26.1я7

*Составители: Ю. С. Нетребина, Н. В. Ершова*

**Геодезический мониторинг зданий и сооружений:** методические указания к выполнению практических работ для студентов направления 21.04.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» (программа магистерской подготовки «Инженерная геодезия») всех форм обучения/ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: Ю. С. Нетребина, Н. В. Ершова. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022. 34 с.

Приводится состав практических работ по дисциплинам «Геодезический мониторинг зданий и сооружений» и «Геодезический мониторинг земель и сооружений».

Предназначены для магистрантов, обучающихся по направлению 21.04.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» всех форм обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ ГМЗИС\_ПР\_pdf.

Ил. 6. Табл. 11.

**УДК 528(07)**  
**ББК 26.1я7**

**Рецензент – Н. И. Самбулов, доцент кафедры кадастра недвижимости, землеустройства и геодезии ВГТУ**

*Издается по решению редакционно-издательского совета  
Воронежского государственного технического университета*

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение.....</b>	<b>4</b>
<b>Практическая работа 1. Уравнивание системы нивелирных ходов с одной узловой точкой способом среднего весового.....</b>	<b>5</b>
<b>Практическая работа 2. Уравнивание системы теодолитных ходов с одной узловой точкой.....</b>	<b>7</b>
<b>Практическая работа 3. Уравнивание систем съёмочных ходов с двумя узловыми точками.....</b>	<b>12</b>
<b>Практическая работа 4. Уравнивание систем съёмочных ходов способом последовательных приближений.....</b>	<b>17</b>
<b>Практическая работа 5. Уравнивание систем ходов способом полигонов проф. В.В. Попова.....</b>	<b>21</b>
<b>Вопросы для самоконтроля.....</b>	<b>27</b>
<b>Приложение 1.....</b>	<b>28</b>
<b>Приложение 2.....</b>	<b>29</b>
<b>Приложение 3.....</b>	<b>31</b>
<b>Приложение 4.....</b>	<b>32</b>
<b>Приложение 5.....</b>	<b>33</b>

## Введение

**Цель практических работ:** научиться уравнивать плановые и высотные съемочные сети различными способами и выполнять оценку точности результатов уравнивания.

### Литература:

1. А.В. Маслов, А.В. Гордеев, Ю.Г. Батраков. Геодезия: Учебник для вузов. – М.: КолосС, 2006, гл. 18 (18.1 – 18.3).

2. Г.Г. Поклад, С.П. Гриднев. Геодезия: Учебное пособие. – М.: Академический проект, 2007, ч. II, гл. 14 (§§80 – 84).

Заданием предусмотрено уравнивание съемочных сетей с использованием следующих способов:

1. Уравнивание системы нивелирных ходов с одной узловой точкой способом среднего весового;

2. Уравнивание системы теодолитных ходов с одной узловой точкой способом среднего весового;

3. Уравнивание системы нивелирных ходов с двумя узловыми точками способом эквивалентной замены и среднего весового;

4. Уравнивание системы ходов способом последовательных приближений;

5. Уравнивание системы ходов способом полигонов проф. В.В. Попова.

В процессе выполнения студентом индивидуальных заданий результаты расчетов должны быть представлены по возможности в табличном виде и сопровождаться необходимыми формулами, схемами и краткими пояснениями.

## Практическая работа 1

### Уравнивание системы нивелирных ходов с одной узловой точкой способом среднего весового

Нивелирные ходы, проложенные между исходными реперами  $A$ ,  $B$  и  $C$  с отметками  $H_A$ ,  $H_B$  и  $H_C$  (рис. 1) сходятся в одной узловой точке  $U$ , образуя три одиночных хода. Измерены длины ходов  $L_i$  (либо число станций в ходе  $n_i$ ) и превышения по каждому ходу.

$$\Sigma h_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Вычисления выполняют в следующей последовательности:

1. На схему выписывают отметки исходных реперов, суммы измеренных превышений по ходам и длины ходов.

2. Определяют допустимость невязок; расчеты выполняют по самым коротким ходам (или по ходам с меньшим числом станций). Количество комбинаций принимают на одну меньше числа ходов (напр.,  $A - C$  и  $B - C$ ).

Фактические и допустимые невязки по ходам рассчитывают как

$$f_h = \sum h_{np} - (H_{кон} - H_{нач}), \quad (1)$$

для нивелирования IV класса  $f_h^{доп} = 20 \text{ мм} \sqrt{L_{км}}$  или  $f_h^{доп} = 5 \text{ мм} \sqrt{n_{ст}}$ .

3. Находят частные значения отметки узловой точки по каждому ходу:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H_A + \Sigma h_1; \\ H_2 &= H_B + \Sigma h_2; \\ H_3 &= H_C + \Sigma h_3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

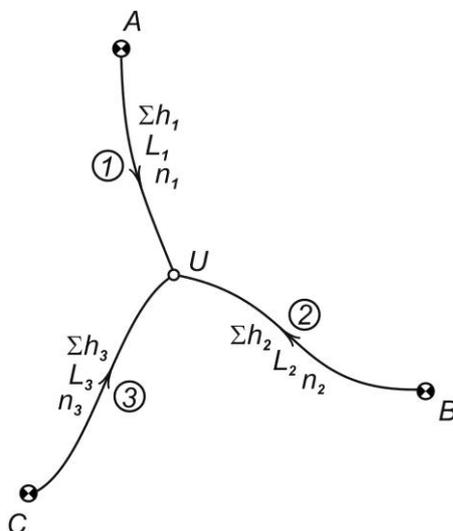


Рис. 1. Схема нивелирования ходов с одной узловой точкой

4. Приняв веса суммы превышений по каждому ходу  $p_i = \frac{1}{L_i}$ , вычисляют вероятнейшее значение отметки узловой точки по формуле среднего весового:

$$H_U = \frac{p_1 H_1 + p_2 H_2 + p_3 H_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{[pH]}{[p]}, \quad (3)$$

или

$$H_U = H_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}, \quad (4)$$

где  $H_0$  – приближенное значение высоты узловой точки;  $\varepsilon_i = H_i - H_0$  – остатки.

В результате систему ходов с одной узловой точкой (см. рис. 1) можно рассматривать как систему одиночных нивелирных ходов с высотой конечной точки равной  $H_U$ .

5. Находят невязки в сумме превышений по каждому ходу:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= H_U - H_1; \\ W_2 &= H_U - H_2; \\ W_3 &= H_U - H_3. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

6. Выполняют оценку точности результатов уравнивания:

Вычисляют среднюю квадратическую погрешность в превышении нивелирного хода длиной 1 км, то есть погрешность единицы веса

$$\mu = m_{\text{км}} = \sqrt{\frac{[p\nu^2]}{N-1}}, \quad (6)$$

где  $m_{\text{км}}$  – средняя квадратическая погрешность превышения в ходе длиной 1 км;  $\nu_i = -W_i$  – поправка в сумму превышений хода;  $N$  – число ходов (в рассматриваемом случае  $N = 3$ ).

Находят среднюю квадратическую погрешность высоты узловой точки

$$M_U = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \quad (7)$$

Пример уравнивания системы нивелирных ходов IV класса точности, показанный на рис. 1, приведен в табл. 1.

Таблица 1

Уравнивание системы нивелирных ходов с одной узловой точкой

$H_A = 120,157\text{ м}$ ,  $H_B = 130,412\text{ м}$ ,  $H_C = 111,310\text{ м}$

№ хода	$h_i$ , м	$H_i$ , м	$L_i$ , м	$p_i$	$\varepsilon$ , мм	$p\varepsilon$ , мм	$\nu_i$ , мм	$p\nu$ , мм	$p\nu^2$	$p\nu\varepsilon$
1	+1,085	121,242	8,2	0,12	39	4,7	-17	-2,0	34	-78
2	-9,209	,203	7,1	0,14	0	0,0	+22	+3,1	68	0
3	+9,920	,230	6,0	0,17	27	4,6	-5	-0,8	4	-22
$H_0 = 121,203\text{ м}$					$[p] = 0,43$	$[p\varepsilon] = 9,3$	$[p\nu] = +0,3$	$[p\nu\varepsilon] = -103$	$[p\nu^2] = 106$	

$$f_{h_{1+2}} = +0,039\text{ м}; \quad f_{h_{1+3}} = +0,012\text{ м}; \quad f_{h_{2+3}} = -0,027\text{ м};$$

$$f_{h_{1+2}}^{\text{дон}} = 0,078\text{ м}; \quad f_{h_{1+3}}^{\text{дон}} = 0,075\text{ м}; \quad f_{h_{1+2}}^{\text{дон}} = 0,072\text{ м};$$

$$H_U = H_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} = 121,203\text{ м} + \frac{9,3\text{ мм}}{0,43} = 121,203\text{ м} + 0,022\text{ м} = 121,225\text{ м};$$

$$\mu = m_{\text{км}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{N-1}} = \sqrt{\frac{106}{3-1}} = 7,3\text{ мм};$$

$$M_U = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{7,3}{\sqrt{0,43}} = 11,1\text{ мм}.$$

Исходные данные для индивидуальных вариантов задания приведены в прил. 1.

## Практическая работа 2

### Уравнивание системы теодолитных ходов с одной узловой точкой

Требуется выполнить уравнивание системы теодолитных ходов, сходящихся в узловой точке  $U$  (рис. 2). Известны плановые координаты исходных пунктов  $B$ ,  $K$ ,  $F$  и дирекционные углы исходных сторон  $\alpha_{AB}$ ,  $\alpha_{CK}$  и  $\alpha_{EF}$ . Измерены горизонтальные углы в ходах  $\beta_i$  и горизонтальные положения сторон  $d_i$ .

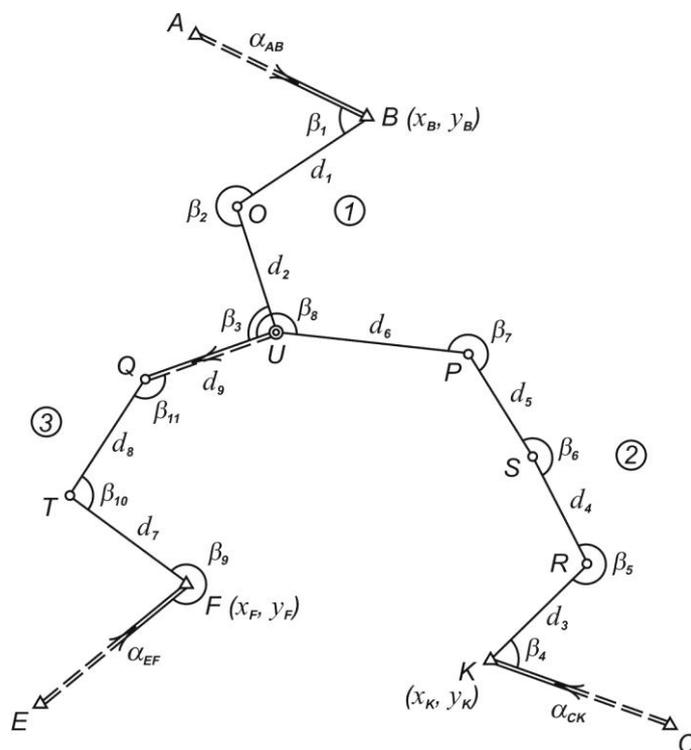


Рис. 2. Система теодолитных ходов с одной узловой точкой

При упрощенном уравнивании системы теодолитных ходов с одной узловой точкой сначала уравнивают углы по способу среднего весового. Далее, вычислив по уравненным углам дирекционные углы и приращения координат, выполняют раздельное уравнивание приращений координат  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

Расчеты выполняют в следующем порядке:

1. Для уравнивания углов выбирают узловую линию, в качестве которой может быть принята любая линия, опирающаяся на узловую точку (в нашем примере линия  $UQ$ ).

Вычисляют значения дирекционного угла узловой линии по каждому ходу:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_{UQ} &= \alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n_1 - [\beta]_1; \\ \alpha''_{UQ} &= \alpha_{CK} + 180^\circ \cdot n_2 - [\beta]_2; \\ \alpha'''_{UQ} &= \alpha_{EF} + 180^\circ \cdot n_3 - [\beta]_3, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $n_i$  – число углов до узловой линии в  $i$ -м ходе ( $i = 1, 2, 3$ );  $[\beta]_i$  – сумма углов в  $i$ -м ходе.

2. Приняв вес суммы углов  $i$ -го хода равным  $p_i = 1/n_i$ , окончательное значение дирекционного угла узловой линии вычисляют по формуле среднего весового

$$\alpha_{UQ} = \frac{p_1 \alpha'_{UQ} + p_2 \alpha''_{UQ} + p_3 \alpha'''_{UQ}}{p_1 + p_2 + p_3}. \quad (9)$$

3. Находят угловые невязки  $W_\beta$  по каждому ходу:

$$\left. \begin{aligned} W'_\beta &= \alpha_{UQ} - \alpha'_{UQ}, \\ W''_\beta &= \alpha_{UQ} - \alpha''_{UQ}, \\ W'''_\beta &= \alpha_{UQ} - \alpha'''_{UQ}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

4. Распределив угловые невязки поровну на углы соответствующего хода с противоположным знаком, находят уравненные значения углов. По уравненным углам вычисляют приращения координат по всем линиям ходов и находят суммы приращений координат по каждому ходу  $[\Delta x]_i$  и  $[\Delta y]_i$ .

5. Уравнивание приращений координат производят раздельно для  $\Delta x$  и  $\Delta y$  аналогично уравниванию превышений системы нивелирных ходов с одной узловой точкой по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x'_U &= x_B + [\Delta x]_1; \\ x''_U &= x_K + [\Delta x]_2; \\ x'''_U &= x_F + [\Delta x]_3. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$x_U = \frac{\tilde{p}_1 x'_U + \tilde{p}_2 x''_U + \tilde{p}_3 x'''_U}{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3}, \quad (12)$$

$$\tilde{p}_i = \frac{l}{[L]_i},$$

где  $\tilde{p}_i$  – вес абсциссы (ординаты) узловой точки;  $[L]_i$  – длина  $i$ -го хода.

6. Вычисляют невязки в приращениях координат по каждому ходу:

$$\left. \begin{aligned} W'_x &= x_U - x'_U, \\ W''_x &= x_U - x''_U, \\ W'''_x &= x_U - x'''_U. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

7. Находят поправки в приращения координат по формуле

$$v_{\Delta x_{ij}} = -\frac{W_x}{[d]_i} \cdot d_{ij}. \quad (14)$$

где  $d_{ij}$  –  $j$ -ая длина стороны  $i$ -го хода.

Для уравнивания приращений ординат используют выражения (11) – (14), заменив  $x$  на  $y$ .

8. По исправленным приращениям координат вычисляют координаты всех пунктов сети.

9. Оценку точности измерения углов производят по известной из теории погрешностей формуле, которая в данном случае дает приближенное значение средней квадратической погрешности измерения угла

$$\mu = m_\beta = \sqrt{\frac{[pW^2]}{N-1}},$$

где  $N$  – число ходов.

В табл. 2-4 приведен пример уравнивания системы теодолитных ходов с одной узловой точкой.

Таблица 2

## Уравнивание системы теодолитных ходов с одной узловой точкой

Пункты	Измеренные углы, $\beta_i$	Дирекционные углы, $\alpha_i$	Длины сторон, $L_i$ , км	Приращения координат, м		Координаты, м	
				$\Delta x$	$\Delta y$	$x$	$y$
1	2	3	4	5	6	7	8
<b>1 – й ход</b>							
A							
B	$-1$ 185°48,0'	54°10,3'					
O	$-1$ 179°49,0'	48°22,4'	304,53	$-19$ +202,29	$+21$ +227,63	5548,34	2380,98
U	$-2$ 128°00,9'	48°33,5'	304,76	$-20$ +201,71	$+22$ +228,46	5750,44	2608,82
Q		100°32,8'				5951,95	2837,50
$[\beta]=$ $[\beta]_T =$ $w_\beta =$	493°37,9' 493°37,5' +0,4'	$L_1 =$	609,29	+404,00 +403,61 $w'_x = +0,39$	+456,09 +456,52 $w'_y = -0,43$	$W_L = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 0,58$ м $W_{omh} = \frac{W_L}{L} = \frac{1}{1050}$	
<b>2 – й ход</b>							
C							
K	$+1$ 198°35,2'	137°07,3'					
R	$+1$ 142°00,6'	118°32,0'	318,32	$+6$ -152,05	$-2$ +279,66	6958,85	2136,41
S	$+1$ 184°49,3'	156°31,3'	267,40	$+5$ -245,26	$-1$ +106,53	6806,86	2416,05
P	$+1$ 177°58,0'	151°42,9'	353,24	$+6$ -311,01	$-2$ +167,48	6561,65	2522,57
U	$+3$ 233°10,7'	153°43,8'	333,23	$+6$ -298,81	$-2$ +147,49	6250,70	2690,03
Q		100°32,8'				5951,95	2837,50
$[\beta]=$ $[\beta]_T =$ $w_\beta =$	936°33,8' 936°34,1' -0,3'	$L_2 =$	1272,19	-1007,13 -1006,90 $w''_x = -0,23$	+701,16 +701,09 $w''_y = +0,07$	$W_L = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 0,24$ м $W_{omh} = \frac{W_L}{L} = \frac{1}{5300}$	

Окончание табл. 2

1	2	3	4	5	6	7	8
<b>3 – й ход</b>							
<i>E</i>							
<i>F</i>	201°51,6'	328°25,3'		+9	-12	5512,83	3408,06
<i>T</i>	167°36,5'	306°33,7'	196,34	+116,96	-157,70	5629,87	3250,23
<i>Q</i>	218°24,4'	318°57,2'	387,78	+292,45	-254,64	5922,46	2995,32
<i>U</i>		280°32,8'	160,46	+29,37	-157,75	5951,92	2837,48
$[\beta] =$ $[\beta]_T =$ $W_\beta =$	587°52,5' 587°52,5' 0,0'	$L_3 =$	744,58	+438,78 +439,12 $W_x''' = -0,34$	-570,09 -570,56 $W_y''' = +0,47$	$W_L = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 0,58 \text{ м}$ $W_{отн} = \frac{W_L}{L} = \frac{1}{1300}$	

Таблица 3

Вычисление уравненного значения дирекционного угла узловой линии *UQ*

№ хода	Дирекцион. углы, $\alpha'$	Число углов в ходе, $n_i$	Вес, $p_i = \frac{1}{n_i}$	$\varepsilon_i$	$p_i \varepsilon_i$	$W_\beta$	Вычисления
1	100°32,4'	3	0,33	0,0'	0,00'	+0,4'	$W_{\beta_{дон}} = l' \sqrt{n} = l' \sqrt{3} = 1,7'$ $\alpha_{QU} = \alpha_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} = 100^\circ 32,4' +$ $+0,4' = 100^\circ 32,8'$
2	33,5'	5	0,20	1,1'	0,22'	-0,7'	
3	32,8'	3	0,33	0,4'	0,13'	0,0'	
$\alpha_0 = 100^\circ 32,4'$		$[p] = 0,86$		$[p\varepsilon] = 0,35$			

$$\mu = m_\beta = \sqrt{\frac{0,33 \cdot 0,4^2 + 0,20 \cdot 0,7^2 + 0,33 \cdot 0,0^2}{3-1}} = 0,27'$$

Таблица 4

Вычисление координат узловой точки *U*

№ хода	Длина хода $[L]$ , км	Вес, $p_i = \frac{1}{[L]_i}$	$x'$ , м	$\varepsilon_x$ , м	$p\varepsilon_x$ , м	$y'$ , м	$\varepsilon_y$ , м	$p\varepsilon_y$ , м
1	0,61	1,64	5952,34	0,73	1,20	2837,07	0,00	0,00
2	1,27	0,79	5951,72	0,11	0,09	2837,57	0,50	0,40
3	0,74	1,35	5951,61	0,00	0,00	2837,97	0,90	1,22
$[p] = 3,78$				$[p\varepsilon_x] = 1,29$			$[p\varepsilon_y] = 1,62$	
$x_0 = 5951,61$				$y_0 = 2837,07$				

$$x_U = x_0 + \frac{[p\varepsilon_x]}{[p]} = 5951,61 + 0,34 = 5951,95 \text{ м}, \quad y_U = 2837,07 + 0,43 = 2837,50 \text{ м}.$$

Исходные данные для индивидуальных вариантов задания приведены в прил. 2.

### Практическая работа 3 Уравнивание систем съёмочных ходов с двумя узловыми точками

В геодезической практике для уравнивания сетей ходов с двумя узловыми точками наряду со способом среднего весового широкое применение получил способ эквивалентной замены. Указанные способы рассмотрим на примере уравнивания системы нивелирных ходов IV класса (рис. 3) с узловыми точками  $R$  и  $T$ . Известны высоты исходных пунктов  $H_A, H_B, H_C, H_D$ , превышения по ходам  $h_i$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ) и их длины  $L_i$ .

Заданием на выполнение расчетной работы предусмотрено уравнивание системы нивелирных ходов с двумя узловыми точками способами эквивалентной замены и среднего весового.

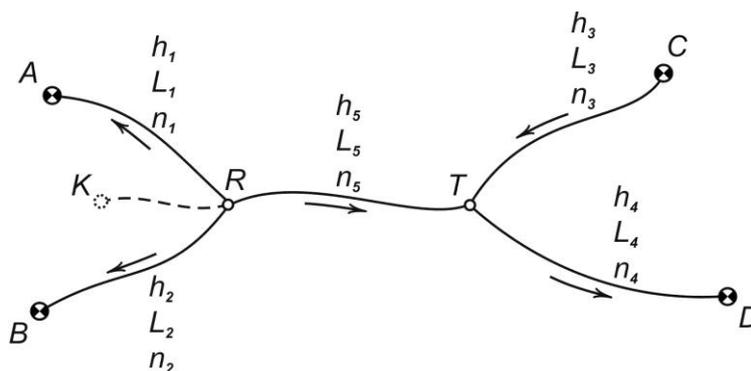


Рис. 3. Система нивелирных ходов с двумя узловыми

**Способ эквивалентной замены.** Суть способа состоит в приведении системы с двумя узловыми точками к системе с одной узловой точкой. Для этого два хода (например 1 и 2) необходимо объединить в один «воображаемый» ( $KR$  на рис. 3), называемый *эквивалентным*. В результате получают систему ходов с одной узловой точкой  $T$ : ход  $KR+5$ , ход 3 и ход 4.

1. По формулам среднего весового вычисляют высоту  $H_{1,2}$  узловой точки  $R$  и параметры эквивалентного хода: его вес  $p_{1,2}$  и длину  $L_{1,2}$ .

$$H_{1,2} = \frac{p_1 H_1 + p_2 H_2}{p_1 + p_2}, \quad (15)$$

где  $H_1 = H_A + h_1$ ,  $H_2 = H_B + h_2$ .

При вычислении отметок узловых точек необходимо учитывать направления положительных превышений показанных на рис. 3 стрелками.

Веса  $p_1$  и  $p_2$  в формуле (15) вычисляют обратно пропорционально длине соответствующего хода

$$p_i = \frac{1}{L_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 5). \quad (16)$$

Вес найденного значения высоты  $H_{1,2}$

$$p_{1,2} = p_1 + p_2. \quad (17)$$

или

$$p_{1,2} = \frac{1}{L_{1,2}}. \quad (18)$$

Отсюда

$$L_{1,2} = \frac{1}{p_1 + p_2}.$$

В результате получают систему ходов с одной узловой точкой  $T$ .

2. Находят высоту узловой точки  $T$  по каждому ходу:

$$\left. \begin{aligned} H_3 &= H_C + h_3, \\ H_4 &= H_D + h_4, \\ H_{1,2+5} &= H_{1,2} + h_5. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Веса вычисленных из выражения (19) значений  $H_i$  будут равны:

$$p_3 = \frac{1}{L_3}, \quad p_4 = \frac{1}{L_4}, \quad p_{1,2+5} = \frac{1}{(L_{1,2} + L_5)}.$$

3. Определяют окончательное значение высоты узловой точки  $T$ , найденное как среднее весовое из выражения

$$H_T = \frac{p_3 H_3 + p_4 H_4 + p_{1,2+5} H_{1,2+5}}{p_3 + p_4 + p_{1,2+5}}. \quad (20)$$

4. Находят поправки в превышения ходов

$$\left. \begin{aligned} v_3 &= H_T - H_3; \\ v_4 &= H_T - H_4; \\ v_{1,2+5} &= H_T - H_{1,2+5}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

5. Поправки  $v_3$  и  $v_4$  распределяют на превышения каждого хода пропорционально длинам  $L_{ij}$  нивелирных линий, т.е.

$$v_{ij} = \frac{v_i}{L_i} \cdot L_{ij}, \quad (22)$$

где  $L_{ij}$  – длина  $j$ -ой линии  $i$ -го хода.

Аналогично распределяют поправку  $v_{1,2+5}$  на превышения эквивалентного хода и хода 5

$$\left. \begin{aligned} v_{1,2} &= \frac{v_{1,2+5}}{L_{1,2+5}} \cdot L_{1,2}, \\ v_5 &= \frac{v_{1,2+5}}{L_{1,2+5}} \cdot L_5. \end{aligned} \right\}$$

6. Находят окончательное значение высоты узловой точки R

$$H_R = H_{1,2} + v_{1,2}, \quad (23)$$

и поправки на 1 и 2 ходы

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= (H_A - H_R) - h_1, \\ v_2 &= (H_B - H_R) - h_2. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Далее по формуле (22) находят поправки и на каждое превышение 1-го и 2-го ходов.

7. Выполняют приближенную оценку точности результатов по поправкам  $v_i$ , вычислив среднюю квадратическую погрешность  $\mu$  единицы веса

$$\mu = m_{\text{км}} = \sqrt{\frac{pv^2}{N-r}}, \quad (25)$$

где  $N$  – число ходов;  $r$  – число узловых точек.

Пример уравнивания нивелирной сети, показанной на рис. 3, приведен в табл. 5.

Таблица 5

Уравнивание нивелирной сети с двумя узловыми точками способом эквивалентной замены

$H_A = 14,930 \text{ м}; H_B = 13,000 \text{ м}; H_C = 11,970 \text{ м}; H_D = 16,480 \text{ м}$

№ хода	Превышения $h_i$ , м	Высоты узловых точек $H_i$ , м	Длина хода $L_i$ , км	Вес $p_i = \frac{1}{L_i}$	Поправки $v_i$ , м
1	+4,980	9,950	2,0	0,50	-8
2	+3,030	9,970	3,0	0,33	+12
3	+0,100	12,970	4,0	0,25	-13
4	+4,442	12,038	5,0	0,20	-19
5	+2,100		2,0	0,50	-1

$$H_{1,2} = \frac{p_1 H_1 + p_2 H_2}{p_1 + p_2} = 9,958 \text{ м}, \quad p_{1,2} = p_1 + p_2 = 0,83, \quad L_{1,2} = \frac{1}{p_{1,2}} = 1,20 \text{ км},$$

$$H_{1,2+5} = H_{1,2} + h_5 = 12,058 \text{ м}, \quad p_{1,2+5} = \frac{1}{L_{1,2} + L_5} = 0,31,$$

$$H_T = \frac{p_3 H_3 + p_4 H_4 + p_{1,2+5} H_{1,2+5}}{p_3 + p_4 + p_{1,2+5}} = 12,057 \text{ м},$$

$$v_{1,2+5} = H_T - H_{1,2+5} = -1 \text{ мм}, \quad v_{1,2} = \frac{v_{1,2+5}}{L_{1,2+5}} \cdot L_{1,2} = 0 \text{ мм},$$

$$H_R = H_{1,2} + v_{1,2} = 9,958 \text{ м}, \quad v_1 = (H_A - H_R) - h_1 = -8 \text{ мм},$$

$$v_2 = (H_B - H_R) - h_2 = +12 \text{ мм}, \quad v_3 = H_T - H_3 = -13 \text{ мм},$$

$$v_4 = H_4 - H_T = -19 \text{ мм}, \quad v_5 = \frac{v_{1,2+5}}{L_{1,2+5}} \cdot L_5 = -1 \text{ мм},$$

$$\mu = m_{\text{км}} = \sqrt{\frac{p v^2}{N - r}} = 8 \text{ мм}.$$

**Способ среднего весового.** Этот способ приводит к тому же результату, что и способ эквивалентной замены.

1. В первом приближении высоты  $H'_R$  и  $H'_T$  узловых точек  $R$  и  $T$  находят по формуле среднего весового как

$$\left. \begin{aligned} H'_R &= \frac{p_1 H_1 + p_2 H_2}{p_1 + p_2}, \\ H'_T &= \frac{p_3 H_3 + p_4 H_4}{p_3 + p_4} \end{aligned} \right\}$$

где  $H_i = H_{\text{исх}} + h_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ );  $p_i = \frac{1}{L_i}$ .

Веса высот узловых точек  $H'_R$  и  $H'_T$  равны

$$p_R = p_1 + p_2, \quad p_T = p_3 + p_4,$$

а обратные веса

$$q_R = \frac{1}{p_R} = \frac{1}{p_1 + p_2}, \quad q_T = \frac{1}{p_T} = \frac{1}{p_3 + p_4}.$$

2. Вычисляют невязку по ходу RT как разность

$$W = h_5 - (H'_T - H'_R).$$

3. Полученную невязку  $W$  распределяют пропорционально обратным весам, т.е. вычисляют поправки в превышение  $h_5$  и высоты  $H'_R$ ,  $H'_T$ :

$$\left. \begin{aligned} v_5 &= -\frac{W}{[q]} \cdot q_5; \\ v_R &= -\frac{W}{[q]} \cdot q_R; \\ v_T &= +\frac{W}{[q]} \cdot q_T, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где  $q_5 = \frac{l}{p_5}$ ;  $[q] = q_5 + q_R + q_T$ .

4. Определяют окончательные значения высот узловых точек

$$\left. \begin{aligned} H_R &= H'_R + v_R, \\ H_T &= H'_T + v_T. \end{aligned} \right\}$$

5. Учитывая, что в выражении (26) поправка  $v_5$  в превышение  $h_5$  хода  $RT$  уже известна, то поправки  $v_i$  в превышения  $1 - 4$  ходов определяют как

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= H_1 - H_R, \\ v_2 &= H_2 - H_R, \\ v_3 &= H_T - H_3, \\ v_4 &= H_4 - H_T. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

6. Поправки  $v_i$  распределяют на измеренные на станциях превышения  $i$ -го хода по формуле (22).

Уравнивание системы ходов (см. рис. 3) по способу среднего весового произведено в табл. 6. Исходные данные для индивидуальных вариантов задания приведены в прил. 3.

Таблица 6

Уравнивание нивелирной сети с двумя узловыми точками способом среднего весового

$H_A = 14,930 \text{ м}; H_B = 13,000 \text{ м}; H_C = 11,970 \text{ м}; H_D = 16,480 \text{ м}$

№ хода	Пре- выше- ния $h_i$ , м	Высо- ты $H_i$ , м	Длины ходов $L_i$ , км	Весы $p_i = \frac{1}{L_i}$	Высо- ты $H'_R$ , $H'_T$ , м	Весы $p_R, p_T$	Обрат- ные ве- сы $q_R$ , $q_T, q_5$	Правки $v_R, v_T$ ,	По- правки $v_i$ , мм
1	+4,980	9,950	2,0	0,50	9,958	0,83	1,20	0	-8
2	+3,030	9,970	3,0	0,33					+12
3	+0,100	12,970	4,0	0,25	12,056	0,45	2,25	+1	-13
4	+4,442	12,038	5,0	0,20					-19
5	+2,100		2,0	0,50			2,00		-1

$$W = h_5 - (H'_T - H'_R) = +2 \text{ мм};$$

$$H_R = H'_R + v_R = 9,958 \text{ м};$$

$$H_T = H'_T + v_T = 12,057 \text{ м};$$

$$\mu = m_{\text{км}} = 8 \text{ мм}.$$

### Практическая работа 4

#### Уравнивание систем съемочных ходов способом последовательных приближений

Данный способ выгодно применять в случаях, когда в системе ходов имеется несколько исходных пунктов и несколько узловых точек.

Приведенная на рис. 4 система состоит из 8 нивелирных ходов с 3 узловыми точками; стрелками показаны направления измеренных превышений. Известны отметки исходных грунтовых реперов 31, 14, 29 и 12 ( $H_{31}$ ,  $H_{14}$ ,  $H_{29}$  и  $H_{12}$ ); в результате нивелирования получены суммарные превышения  $h_i$  по каждому ходу, длины ходов  $L_i$  и количество станций в ходах  $n_i$ .

Выражения для вычисления высот узловых точек Ст. рп. 6, 29, 11 запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{(H_{31} + h_1)p_1 + (H_{14} + h_2)p_2 + (z + h_6)p_6 + (y + h_7)p_7}{p_1 + p_2 + p_6 + p_7}; \\ y &= \frac{(H_{14} + h_3)p_3 + (H_{63} + h_4)p_4 + (x + h_7)p_7 + (z + h_8)p_8}{p_3 + p_4 + p_7 + p_8}; \\ z &= \frac{(H_{12} + h_5)p_5 + (x + h_6)p_6 + (y + h_8)p_8}{p_5 + p_6 + p_8}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – высоты узловых точек 6, 29, 11;  $p_i$  – веса превышений  $h_i$ , определяемые как  $p_i = \frac{l}{L_i}$ . или  $p_i = \frac{l}{n_i}$

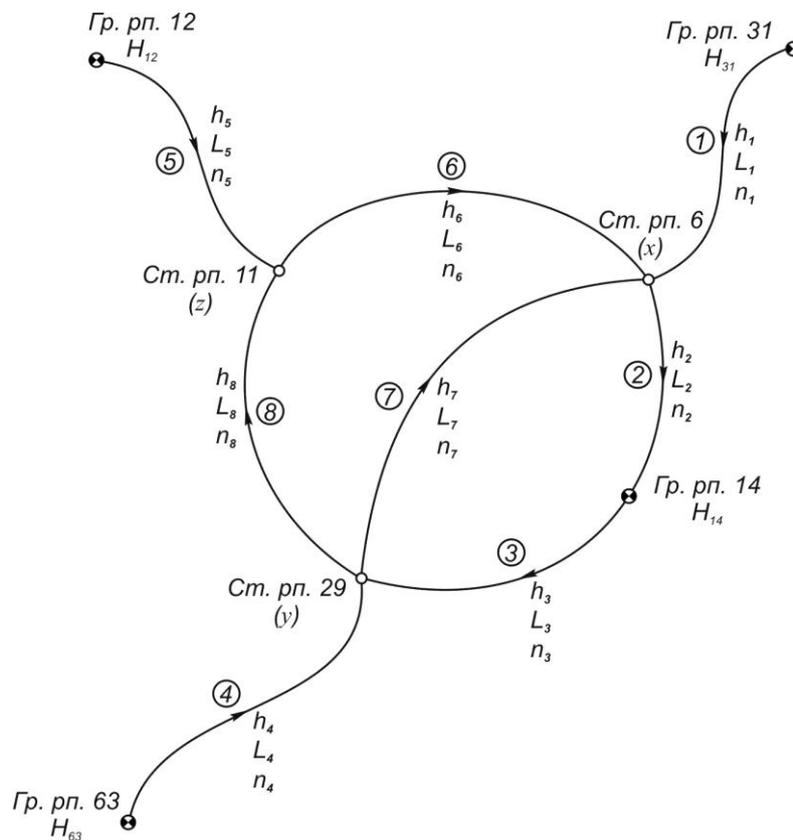


Рис. 4. Система к уравниванию нивелирных ходов способом последовательных приближений

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} p'_i &= \frac{p_i}{\sum p_i}, & (i = 1, 2, 6, 7); \\ p''_i &= \frac{p_i}{\sum p_i}, & (i = 3, 4, 7, 8); \\ p'''_i &= \frac{p_i}{\sum p_i}, & (i = 5, 6, 8), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где  $p'_i, p''_i, p'''_i$  – приведенные веса

Для того, чтобы процесс приближений был более коротким, в качестве начальных принимают высоты узловых точек, получаемые путем передачи от ближайших исходных реперов:

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= H_{14} + h_1; \\ y^0 &= H_{63} + h_4; \\ z^0 &= H_{12} + h_5. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

На основе выражений (28) и с учетом обозначений (29) и (30) вычисляют высоты точек в первом приближении

$$\left. \begin{aligned} x^{(l)} &= (H_{3l} + h_1) p'_1 + x^0 p'_2 + (z^0 + h_6) p'_6 + (y^0 + h_7) p'_7; \\ y^{(l)} &= (H_{14} + h_3) p''_3 + y^0 p''_4 + (x^{(l)} + h_7) p''_7 + (z^0 + h_8) p''_8; \\ z^{(l)} &= z^0 p'''_5 + (x^{(l)} + h_6) p'''_6 + (y^{(l)} + h_8) p'''_8, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

т.е. при вычислении отметки узловой точки 29 ( $y^{(l)}$ ) берут полученные ранее значения  $x^{(l)}$ ,  $y^0$  и  $z^0$ , а при вычислении  $z^{(l)}$  используют  $z^0$ ,  $x^{(l)}$  и  $y^{(l)}$ , полученные в первом приближении, что позволяет сократить количество приближений.

Используя полученные в первом приближении значения высот, вычисляют высоты узловых точек во втором приближении

$$\left. \begin{aligned} x^{(2)} &= (H_{3l} + h_1) p'_1 + x^0 p'_2 + (z^{(l)} + h_6) p'_6 + (y^{(l)} + h_7) p'_7; \\ y^{(2)} &= (H_{14} + h_3) p''_3 + y^0 p''_4 + (x^{(2)} + h_7) p''_7 + (z^{(l)} + h_8) p''_8; \\ z^{(2)} &= z^0 p'''_5 + (x^{(2)} + h_6) p'''_6 + (y^{(2)} + h_8) p'''_8. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Вычисления заканчивают, если в последних двух приближениях получены одинаковые значения высот узловых точек, т.е.

$$\left. \begin{aligned} x^{(k)} &= x^{(k-1)}, \\ y^{(k)} &= y^{(k-1)}, \\ z^{(k)} &= z^{(k-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Эти приближения дают окончательные (уравненные  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ ) значения высот узловых точек. В результате сеть распадается на 8 отдельных ходов, каждый из которых уравнивают по правилам, принятым для одиночного хода.

Точность результатов нивелирования оценивают по формуле

$$\mu = m_{км} = \sqrt{\frac{p\nu^2}{N-r}}, \quad (34)$$

где  $N$  – число ходов;  $r$  – число узловых точек;  $\nu_i$  – поправки, получаемые как разности уравненного значения отметки узловой точки ( $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ ) и отметок, полученных в последнем  $k$ -ом приближении

$$\left. \begin{aligned} \nu_i^{(x)} &= \bar{x} - x_i^{(k)}; \\ \nu_i^{(y)} &= \bar{y} - y_i^{(k)}; \\ \nu_i^{(z)} &= \bar{z} - z_i^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Пример уравнивания нивелирной сети способом приближений приведен в табл. 7.

Исходные данные для индивидуальных вариантов задания приведены в прил. 4.

Таблица 7

## Уравнивание системы нивелирных ходов способом последовательных приближений

$$N_{\text{Гр. рп. 12}} = 136,293\text{м}; N_{\text{Гр. рп. 31}} = 156,436\text{м}; N_{\text{Гр. рп. 14}} = 170,639\text{м}; N_{\text{Гр. рп. 63}} = 108,319\text{м}$$

Обозначение узл. точки	№ хода к узл. точке	Исходный пункт	$H_{\text{исх.}}$ , м	$h_i$ , м	$n_i$ , шт	Вес		Приближения $H_{\text{узл. м.}}$ , м				$\nu_i$ , мм	$p\nu^2$
						$p_i = \frac{k}{n_i}$ $k=10$	$p'_i$	0	1	2	3		
6(x)	1	Гр. рп. 31	156,436	+9,657	53	0,19	0,12		166,093	166,093	166,093	+3	1,71
	2	Гр. рп. 14	170,639	-4,538	24	0,42	0,26	166,101	166,101	166,101	166,101	-5	10,50
	7	Ст. рп. 29		-11,109	15	0,67	0,42		166,088	166,087	166,089	+6	24,12
	6	Ст. рп. 11		-11,345	32	0,31	0,20		166,098	166,102	166,103	-8	19,84
<b>Сумма / средн.</b>							<b>1,59</b>	<b>1,00</b>	<b>166,094</b>	<b>166,094</b>	<b>166,095</b>		<b>56,17</b>
29 (y)	3	Гр. рп. 14	170,639	+6,568	52	0,19	0,08		177,207	177,207	177,207	-8	12,16
	4	Гр. рп. 63	108,319	+68,878	23	0,43	0,19	177,197	177,197	177,197	177,197	+2	1,72
	7	Ст. рп. 6		+11,109	15	0,67	0,29		177,203	177,203	177,204	-6	24,12
	8	Ст. рп. 11		-0,254	10	1,00	0,44		177,189	177,193	177,194	+4	16,00
<b>Сумма / средн.</b>							<b>2,29</b>	<b>1,00</b>	<b>177,196</b>	<b>177,198</b>	<b>177,199</b>		<b>54,00</b>
11 (z)	5	Гр. рп. 12	136,293	+41,150	43	0,23	0,15	177,443	177,443	177,443	177,443	+6	8,28
	6	Ст. рп. 6		+11,345	32	0,31	0,20	177,439	177,439	177,440	177,441	+8	19,84
	8	Ст. рп. 29		+0,254	10	1,00	0,65	177,450	177,450	177,452	177,453	-4	16,00
	<b>Сумма / средн.</b>							<b>1,54</b>	<b>1,00</b>	<b>177,447</b>	<b>177,448</b>	<b>177,449</b>	

$$f_{h_{1,6-5}}^{\text{дон}} = -0,005\text{м}; f_{h_{1,6-5}}^{\text{дон}} = 0,057\text{м}; f_{h_{5,8-4}}^{\text{дон}} = -0,008\text{м}; f_{h_{5,8-4}}^{\text{дон}} = 0,044\text{м}; f_{h_{3,7-2}}^{\text{дон}} = -0,003\text{м}; f_{h_{3,7-2}}^{\text{дон}} = 0,048\text{м};$$

Уравненные высоты узловых точек:  $H_{\text{См. рп. 6}} = 166,096\text{м}; H_{\text{См. рп. 29}} = 177,199\text{м}; H_{\text{См. рп. 11}} = 177,449\text{м}.$

$$\text{Оценка точности: } \mu = \sqrt{\frac{[p\nu^2]}{N-r}} = \sqrt{\frac{154,29}{8-3}} = 5,6\text{ мм}; m_{\text{рум}} = \frac{\mu}{\sqrt{k}} = \frac{5,6}{\sqrt{10}} = 1,8\text{ мм}.$$

## Практическая работа 5

### Уравнивание систем ходов способом полигонов проф. В.В. Попова

Способ применяют для уравнивания как свободных, так и несвободных сетей нивелирных и теодолитных (полигонометрических) ходов.

**Свободными** называют такие геодезические сети, в которых имеются только необходимые исходные элементы: координаты одного исходного пункта и дирекционный угол исходного направления, высота одного исходного репера и т.п. Наличие в сети избыточных исходных данных вызывает дополнительные условия, которым должны удовлетворять уравненные величины; такие сети являются **несвободными**.

#### Уравнивание сети методом непосредственного решения систем уравнений поправок

Сущность способа В.В. Попова можно уяснить на примере уравнивания свободной сети нивелирных ходов, состоящей из трех примыкающих друг к другу полигонов (рис. 5), невязки в которых равны соответственно  $f_{h_1}$ ,  $f_{h_2}$  и  $f_{h_3}$ .

Направления ходов в полигонах показаны стрелками.

Обозначим длину каждого звена (или число станций) между двумя узловыми точками через  $n$  с указанием номеров полигонов, к которым данное звено принадлежит. Тогда длины внешних звеньев полигонов  $AB$ ,  $BC$ , и  $AC$  будут соответственно  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$ , а общие для двух смежных полигонов звенья  $AD$ ,  $BD$ , и  $CD$  —  $n_{1,2}$ ,  $n_{2,3}$ , и  $n_{3,1}$ .

Если каждый из рассматриваемых полигонов рассматривать как независимый, то для устранения невязок в каждом из них длины звеньев нужно умножить на поправки  $k_1$ ,  $k_2$ , и  $k_3$ , приходящиеся на один километр длины каждого полигона. Тогда с учетом взаимного влияния смежных

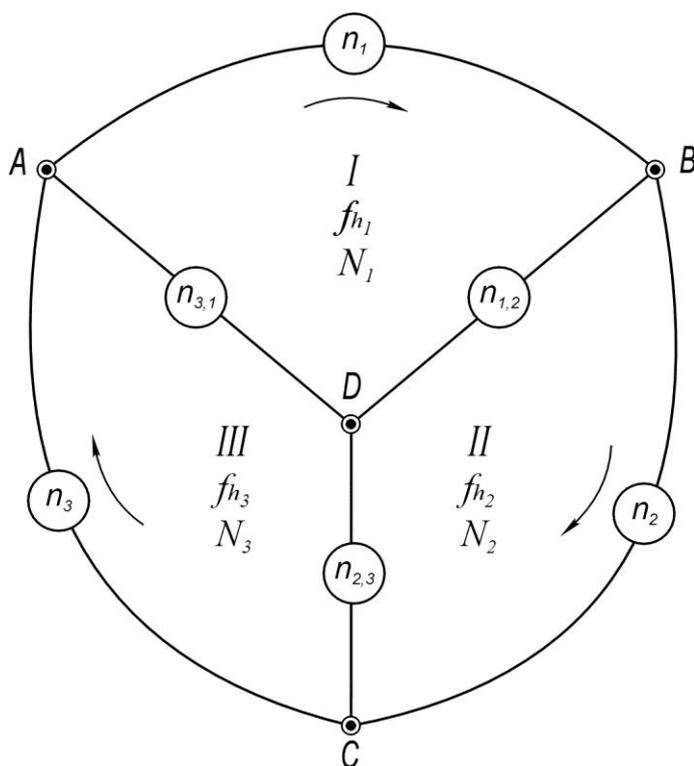


Рис. 5. Схема свободной нивелирной

полигонов, условия устранения невязок в полигонах запишутся в виде системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (n_1 + n_{1,2} + n_{1,3}) \cdot k_1 + W_1 &= 0; \\ (n_2 + n_{2,3} + n_{1,2}) \cdot k_2 + W_2 &= 0; \\ (n_3 + n_{1,3} + n_{2,3}) \cdot k_3 + W_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где  $W_1, W_2, W_3$  – свободные члены уравнений, равные невязкам в соответствующих полигонах  $f_{h_1}, f_{h_2}$  и  $f_{h_3}$ .

Уравнения системы (36) легко составить по схеме сети (см. рис. 5), руководствуясь следующими правилами:

- первый член каждого уравнения представляет собой произведение поправочного коэффициента  $k_i$  на периметр полигона  $N_i$ , где  $i$  – номер полигона;
- второй и третий члены уравнений есть произведения поправочных коэффициентов смежных полигонов на длины соответствующих звеньев;
- четвертый (свободный) член каждого уравнения равен невязке соответствующего полигона, т.е.  $W_i = fh_i$ .

Решение составленной системы уравнений может быть выполнено методом последовательного исключения или в матричном виде, предварительно приведя ее к каноническому виду (когда число неизвестных равно числу уравнений).

Для приведения системы к каноническому виду необходимо перегруппировать ее члены таким образом, чтобы поправочные коэффициенты  $k_i$  с одноименными индексами находились друг под другом.

Уравнения системы в каноническом виде можно легко составить, сведя данные нивелирной сети в табл. 8, в которой диагональные элементы представляют собой периметр  $N$  (или общее количество штативов) полигона. Остальные члены таблицы показывают длину  $n_{ij}$  (число штативов) смежных звеньев соответствующих полигонов с коэффициентами  $-1$  или  $0$ , если между полигонами смежное звено отсутствует. В последнем столбце таблицы записываются значения невязок с обратными знаками.

Таблица 8

Сводная таблица полевых данных для составления системы уравнений поправок в каноническом виде

№ полигона	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	Невязка - $W$ , мм
	$k_1$	$k_2$	$k_3$	
<i>I</i>	$N_1$	- $n_{1,2}$	- $n_{1,3}$	= - $W_1$
<i>II</i>	- $n_{2,1}$	$N_2$	- $n_{2,3}$	= - $W_2$
<i>III</i>	- $n_{3,1}$	- $n_{3,2}$	$N_3$	= - $W_3$

Тогда система (36) запишется как:

$$\left. \begin{aligned} N_1 k_1 - n_{1,2} k_2 - n_{1,3} k_3 &= -W_1; \\ -n_{2,1} k_1 + N_2 k_2 - n_{2,3} k_3 &= -W_2; \\ -n_{3,1} k_1 - n_{3,2} k_2 + N_3 k_3 &= -W_3. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

После решения системы уравнений суммарные поправки в превышения по звеньям  $v$  вычисляются как:

$$\begin{aligned} v_1 &= n_1 k_1; & v_{1,2} &= n_{1,2}(k_1 - k_2); & v_{3,2} &= n_{3,2}(k_3 - k_2); \\ v_2 &= n_2 k_2; & v_{2,1} &= n_{2,1}(k_2 - k_1); & v_{3,1} &= n_{3,1}(k_3 - k_1); \\ v_3 &= n_3 k_3; & v_{2,3} &= n_{2,3}(k_2 - k_3); & v_{1,3} &= n_{1,3}(k_1 - k_3). \end{aligned} \quad (38)$$

Для облегчения составления выражений вычисления поправок в звенья можно воспользоваться табл. 9. В ней показаны разности коэффициентов поправок  $k_i - k_j$ , которые необходимо умножить на длину  $n_{i,j}$  соответствующего смежного звена.

Таблица 9

Таблица разностей поправочных коэффициентов

№ полигона	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
<i>I</i>	$k_1$	$k_1 - k_2$	$k_1 - k_3$
<i>II</i>	$k_2 - k_1$	$k_2$	$k_2 - k_3$
<i>III</i>	$k_3 - k_1$	$k_3 - k_2$	$k_3$

Для нивелирных сетей данный способ уравнивания является строгим и дает результаты, идентичные уравниванию по способу наименьших квадратов.

**Пример:**

Требуется уравнивать несвободную нивелирную сеть IV класса, схема которой приведена на рис. 6.

Методика уравнивания несвободной сети сводится к уравниванию свободной сети путем введения фиктивных звеньев, соединяющих исходные пункты. Число фиктивных звеньев должно быть на 1 меньше числа исходных пунктов. Длину фиктивных звеньев принимают равной 0, следовательно, в фиктивные звенья поправки не вводят.

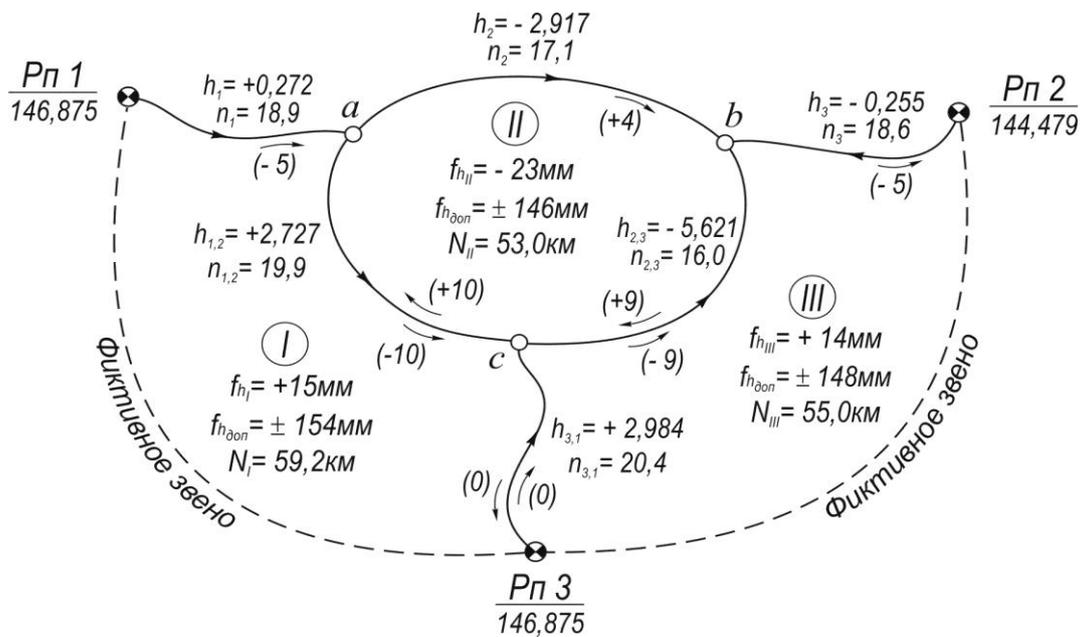


Рис. 6. Схема несвободной нивелирной сети

Уравнивание выполняют в следующей последовательности.

1. На схему сети выписывают все данные, необходимые для уравнивания:
  - номера полигонов;
  - длины звеньев, т.е. расстояния (либо число станций) между исходными и узловыми точками  $n_{ij}$ ;
  - стрелками указывают направления нивелирования;
  - превышения по каждому звену;
  - невязки в превышениях по каждому полигону, соответствующие обходу полигона по ходу часовой стрелки;
  - допустимые высотные невязки.

На основе схемы нивелирной сети сводят данные в табл. 10.

Таблица 10

Сводная таблица данных для составления системы уравнений поправок в каноническом виде

№ полигона	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	Невязка -W, мм
	$k_1$	$k_2$	$k_3$	
<i>I</i>	+59,2	-19,9	-20,4	= -15
<i>II</i>	-19,9	+53,0	-16,0	= +23,0
<i>III</i>	-20,4	-16,0	+55,0	= -14

2. Составляют систему уравнений поправок:

$$\left. \begin{aligned} 59,2k_1 - 19,9k_2 - 20,4k_3 &= -15; \\ -19,9k_1 + 53,0k_2 - 16,0k_3 &= +23; \\ -20,4k_1 - 16,0k_2 + 55,0k_3 &= -14. \end{aligned} \right\}$$

Решение системы уравнений выполняют методом последовательного исключения неизвестных либо методом определителей.

При решении системы уравнений методом исключений получены следующие значения поправочных коэффициентов:

$$k_1 = -0,27; \quad k_2 = +0,25; \quad k_3 = -0,28$$

Для решения системы уравнений в матричном виде представляют коэффициенты  $n_{ij}$  при неизвестных  $k_i$  в виде определителя  $D$ , а значения за знаком равенства - в виде столбца свободных членов  $W$ :

$$D = \begin{vmatrix} 59,2 & -19,9 & -20,4 \\ -19,9 & 53,0 & -16,0 \\ -20,4 & -16,0 & 55,0 \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} -15,0 \\ 23,0 \\ -14,0 \end{vmatrix}.$$

Параметры уравнений  $k_i$  находят по формулам Крамера:

$$k_1 = \frac{D_{k_1}}{D}; \quad k_2 = \frac{D_{k_2}}{D}; \quad k_3 = \frac{D_{k_3}}{D},$$

где  $D_{k_i}$  – определитель, получающийся из  $D$  заменой столбца, составленного из коэффициентов  $n_{ij}$  при неизвестном  $k_j$ , столбцом, составленным из свободных членов  $W_j$ .

$$D_{k_1} = \begin{vmatrix} -15,0 & -19,9 & -20,4 \\ 23,0 & 53,0 & -16,0 \\ -14,0 & -16,0 & 55,0 \end{vmatrix}, \quad D_{k_2} = \begin{vmatrix} 59,2 & -15,0 & -20,4 \\ -19,9 & 23,0 & -16,0 \\ -20,4 & -14,0 & 55,0 \end{vmatrix},$$

$$D_{k_3} = \begin{vmatrix} 59,2 & -19,9 & -15,0 \\ -19,9 & 53,0 & -23,0 \\ -20,4 & -16,0 & -14,0 \end{vmatrix}.$$

Определитель 3-го порядка решают по «правилу Саррюса», тогда:

$$D = 100585, \quad D_{k_1} = -26799, \quad D_{k_2} = 25059, \quad D_{k_3} = -280892;$$

$$k_1 = -0,27, \quad k_2 = +0,25, \quad k_3 = -0,28.$$

3. Вычисляют поправки в превышения для каждого звена:

$$\begin{array}{ll} Pn1 - a & v_1 = n_1 k_1 = 18,9 \text{ км} \times (-0,27) = -5 \text{ мм}; \\ a - c & v_{1,2} = n_{1,2} (k_1 - k_2) = 19,9 \times [(-0,27) - 0,25] = -10 \text{ мм}. \\ a - b & v_2 = n_2 k_2 = 17,1 \text{ км} \times 0,25 = +4 \text{ мм}; \\ b - c & v_{2,3} = n_{2,3} (k_2 - k_3) = 16,0 \times [0,25 - (-0,28)] = +9 \text{ мм}; \\ b - Pn2 & v_3 = n_3 k_3 = 18,6 \text{ км} \times (-0,28) = -4 \text{ мм}; \\ Pn3 - c & v_{3,1} = n_{3,1} (k_3 - k_1) = 20,4 \times [(-0,28) - (-0,27)] = 0 \text{ мм}. \end{array}$$

4. Вычисленные поправки выписывают на схему около соответствующих звеньев каждого полигона.

5. Выполняют контроль уравнивания сети: сумма поправок по звеньям в каждом полигоне должна равняться невязке с обратным знаком, т.е.  $\sum v_i = -f_h$ .

$$\begin{aligned} \text{Полигон I} - & \quad (-5) + (-10) + (0) = -15\text{мм} \quad (fh_I = +15\text{мм}); \\ \text{полигон II} - & \quad (+4) + (+10) + (+9) = +23\text{мм} \quad (fh_{II} = -23\text{мм}); \\ \text{полигон III} - & \quad (-5) + (-9) + (0) = -13\text{мм} \quad (fh_{III} = +14\text{мм}). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнивание сети выполнено правильно.

### Оценка точности результатов уравнивания

Точность определения отметок точек сети, уравненной по способу В. В. Попова, характеризуется средней квадратической погрешностью нивелирования на 1 км хода

$$m_{1\text{км}} = \frac{\mu}{\sqrt{c}}, \quad (39)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r-k}}, \quad (40)$$

где  $v$  - поправки по звеньям;  $p = \frac{c}{n_i}$  - вес превышения по  $i$  звену;  $n_i$  - длина

звена, км;

$c$  - длина нивелирного хода, вес которого принят равным единице;  $r$  - число нивелирных звеньев;  $k$  - число полигонов.

Вычисления, связанные с оценкой точности результатов уравнивания, приведены в табл. 11.

Таблица 11

### Оценка точности результатов уравнивания

Назв.превышений	Длина хода $n_i, \text{км}$	Вес, $p = \frac{c}{n_i}$ $c = 10$	Поправка $v_i$ , мм	$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r-k}}$ , мм	$m_{1\text{км}} = \frac{\mu}{\sqrt{c}}$ , мм
$h_1$	18,9	0,529	-5	6,76	2,14
$h_2$	17,1	0,585	+4		
$h_3$	18,6	0,538	+5		
$h_{1,2}$	19,9	0,503	-10		
$h_{2,3}$	16,0	0,625	-9		
$h_{3,1}$	20,4	0,490	0		

Исходные данные для индивидуальных вариантов задания приведены в прил. 5.

## Вопросы для самоконтроля

1. Какие сети называют свободными и несвободными?
2. В каких случаях выполняют упрощенное уравнивание геодезических сетей?
3. В чем заключается сущность уравнивания систем ходов с одной узловой точкой?
4. Приведите последовательность действий при уравнивании систем ходов с одной узловой точкой.
5. Точность каких величин оценивают при уравнивании?
6. Дайте понятие узловой точки и узловой линии.
7. В чем заключается сущность уравнивания систем теодолитных ходов с одной узловой точкой?
8. Приведите порядок уравнивания систем теодолитных ходов.
9. Дайте понятие эквивалентного хода.
10. В каких случаях целесообразно использовать для уравнивания сети способ среднего весового?
11. В чем состоят отличия уравнивания систем ходов с двумя узловыми точками способами эквивалентной замены и среднего весового?
12. Сущность уравнивания системы съемочных ходов способом эквивалентной замены.
13. Последовательность уравнивания системы нивелирных ходов с одной узловой точкой способом среднего весового.
14. По какой формуле определяют среднюю квадратическую погрешность высоты узловой точки?
15. В каких случаях при уравнивании применяется способ последовательных приближений?
16. Что является критерием для окончания уравнивания способом последовательных приближений?
17. Сущность уравнивания систем полигонов способом В.В. Попова.
18. Особенности уравнивания несвободной сети полигонов.
19. Сформулируйте правила составления системы уравнений при уравнивании способом полигонов проф. В.В. Попова.
20. Что называют фиктивным звеном?
21. Приведите порядок действий при уравнивании систем ходов методом непосредственного решения систем уравнений поправок.
22. Перечислите основные виды контролей правильности уравнивания плановых и высотных геодезических сетей?
23. В чем состоит принцип уравнивания съемочных сетей способом «красных чисел»?
24. Как оценивают точность результатов уравнивания сети способом В.В. Попова?

Исходные данные к расчетной работе №1.

«Упрощенное уравнивание съёмочных сетей»

Задание 1. «Уравнивание системы нивелирных ходов с одной узловой точкой»

Вариант	Высоты исходных пунктов, м			Измеренные превышения, м			Длины ходов, км			Число штативов, шт		
	$H_A$	$H_B$	$H_C$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$n_1$	$n_2$	$n_3$
1	121,394	116,619	116,320	-4,661	+0,094	+0,397	5,59	3,65	5,57	32	23	33
2	118,751	124,312	112,873	-4,631	-10,186	+1,230	7,28	5,00	4,20	42	31	25
3	113,669	123,662	120,948	+0,171	-9,811	-7,094	6,44	5,04	4,10	37	32	24
4	118,535	125,758	111,200	+2,094	-5,137	+9,429	7,52	3,63	7,16	43	23	42
5	114,310	124,311	125,046	+0,613	-9,374	-10,121	5,77	3,22	4,78	33	20	28
6	123,999	117,436	121,886	-7,007	-0,433	-4,885	4,15	4,07	7,79	24	25	46
7	119,041	121,866	119,021	+0,428	-2,397	+0,434	3,91	3,21	7,36	22	20	43
8	124,157	116,512	111,988	-2,336	+5,311	+9,816	6,83	7,27	3,98	39	45	23
9	123,378	124,326	115,215	-4,001	-4,967	+4,161	5,26	4,49	5,90	30	28	35
10	119,182	118,108	122,953	-3,919	-2,843	-7,671	6,88	4,43	3,35	39	28	20
11	125,126	119,600	118,077	-8,782	-3,242	-1,720	4,01	4,49	4,33	23	28	25
12	117,533	119,845	126,392	-1,140	-3,444	-10,005	5,98	4,92	5,73	34	31	34
13	116,125	116,671	126,068	-3,422	-3,965	-13,381	5,49	5,27	7,69	31	33	45
14	118,844	123,965	123,407	-4,909	-10,017	-9,457	6,28	3,50	5,64	36	22	33
15	114,746	118,302	111,992	-1,734	-5,289	+1,008	6,20	4,27	4,82	35	27	28
16	124,208	117,511	118,473	-8,455	-1,754	-2,732	3,62	3,97	7,65	21	25	45
17	115,945	120,128	125,235	+0,145	-4,030	-9,132	6,78	5,42	5,24	39	34	31
18	116,193	124,744	120,144	-5,161	-13,695	-9,121	6,44	4,37	6,23	37	27	37
19	126,357	123,617	114,619	-9,715	-6,988	+2,026	3,62	7,18	6,84	21	45	40
20	117,299	122,098	126,719	+1,789	-3,008	-7,641	6,46	7,36	3,27	37	46	19
21	112,734	125,527	126,956	+6,655	-6,153	-7,585	3,64	3,59	7,73	21	22	45
22	121,586	120,835	123,593	-5,354	-4,608	-7,378	6,43	3,67	5,04	37	23	30
23	116,806	116,711	122,254	-3,302	-3,224	-8,760	6,00	3,75	6,77	34	23	40
24	125,543	119,848	114,368	-4,271	+1,407	+6,894	5,98	6,09	6,66	34	38	39
25	125,282	120,342	123,455	-11,175	-6,207	-9,330	7,10	6,85	3,21	41	43	19

## Приложение 2

### Исходные данные к расчетной работе №1. «Упрощенное уравнивание съёмочных сетей»

#### Задание 2. «Уравнивание системы теодолитных ходов с одной узловоей точкой»

Вариант		1	2	3	4	5
Координаты пунктов, м	$x_B$	4344,52	8836,71	8123,12	4886,25	5897,06
	$y_B$	3803,82	4077,33	6219,04	8371,53	3080,69
	$x_K$	3148,77	7669,54	6924,41	3674,86	4719,83
	$y_K$	4224,53	4484,05	6604,34	8796,60	3457,13
	$x_F$	3305,81	7836,88	7078,68	3862,04	4894,95
	$y_F$	3608,92	3881,72	6005,10	8199,18	2863,09
Дирекционные углы исходных линий	$\alpha_{A-B}$	162° 53,7'	121° 44,9'	141° 13,2'	167° 40,4'	150° 57,0'
	$\alpha_{C-K}$	311° 32,5'	336° 21,9'	343° 50,4'	342° 21,8'	318° 38,3'
	$\alpha_{E-F}$	38° 46,2'	68° 56,9'	73° 34,8'	22° 29,1'	32° 31,9'
Горизонтальные углы	$\beta_1$	144° 55,1'	96° 42,6'	120° 30,0'	145° 36,6'	118° 33,8'
	$\beta_2$	256° 51,4'	265° 48,8'	264° 42,7'	264° 28,6'	271° 34,9'
	$\beta_3$	54° 16,2'	67° 16,0'	55° 11,0'	57° 30,5'	57° 34,0'
	$\beta_4$	75° 56,7'	96° 55,7'	103° 55,8'	101° 52,5'	80° 16,7'
	$\beta_5$	262° 53,5'	264° 09,8'	264° 05,0'	272° 12,6'	262° 46,1'
	$\beta_6$	184° 30,3'	180° 18,3'	187° 14,1'	173° 35,4'	181° 22,3'
	$\beta_7$	223° 36,6'	231° 39,9'	220° 45,6'	230° 03,6'	234° 03,4'
	$\beta_8$	217° 44,8'	231° 22,8'	227° 00,2'	224° 34,0'	216° 53,3'
	$\beta_9$	254° 15,1'	281° 59,5'	276° 28,4'	238° 48,2'	249° 01,3'
	$\beta_{10}$	101° 39,8'	99° 59,0'	112° 20,1'	103° 25,5'	102° 39,0'
	$\beta_{11}$	155° 59,9'	175° 01,3'	163° 57,3'	160° 12,1'	157° 36,0'
Длины линий, м	$d_1$	322,72	307,24	301,25	315,30	302,39
	$d_2$	299,62	279,97	275,60	301,14	309,82
	$d_3$	353,26	339,93	386,16	368,52	348,87
	$d_4$	282,80	275,43	297,52	327,68	293,13
	$d_5$	241,58	270,15	268,74	262,94	283,69
	$d_6$	308,61	365,29	332,63	322,88	330,23
	$d_7$	244,14	241,05	292,04	230,84	241,42
	$d_8$	378,01	336,21	351,31	366,11	374,10
	$d_9$	256,69	248,84	252,97	255,20	246,68

Вариант		6	7	8	9	10
Координаты пунктов, м	$x_B$	6130,33	4190,55	4946,88	2926,69	4681,74
	$y_B$	2968,91	2807,84	4411,32	4296,24	4144,92
	$x_K$	4992,80	3010,91	3758,62	1757,78	3498,37
	$y_K$	3388,28	3170,24	4836,90	4723,90	4551,11
	$x_F$	5127,15	3163,26	3942,25	1883,93	3641,43
	$y_F$	2782,01	2601,38	4259,57	4109,75	3916,77
Дирекционные углы исходных линий	$\alpha_{A-B}$	137° 45,7'	144° 25,1'	172° 37,0'	151° 47,1'	154° 07,6'
	$\alpha_{C-K}$	343° 58,1'	349° 26,8'	348° 11,4'	277° 39,4'	316° 43,3'
	$\alpha_{E-F}$	31° 12,9'	5° 06,8'	46° 49,2'	70° 50,6'	51° 03,4'
Горизонтальные углы	$\beta_1$	112° 55,1'	116° 56,0'	148° 02,3'	128° 46,8'	126° 48,0'
	$\beta_2$	263° 25,6'	269° 32,1'	262° 34,8'	265° 51,7'	264° 09,0'
	$\beta_3$	57° 36,8'	60° 15,4'	63° 15,6'	61° 38,5'	63° 41,1'
	$\beta_4$	95° 38,6'	107° 42,8'	109° 50,5'	42° 22,8'	80° 23,2'
	$\beta_5$	273° 45,4'	262° 03,6'	272° 27,2'	255° 25,0'	260° 08,1'
	$\beta_6$	189° 16,9'	194° 59,0'	167° 50,9'	194° 54,3'	182° 34,0'
	$\beta_7$	220° 42,8'	224° 25,5'	236° 34,2'	220° 48,1'	231° 47,2'
	$\beta_8$	220° 46,3'	222° 33,9'	222° 42,7'	228° 39,0'	222° 20,4'
	$\beta_9$	237° 25,7'	213° 03,4'	261° 50,3'	282° 56,5'	250° 38,6'
	$\beta_{10}$	116° 38,8'	107° 56,5'	100° 41,1'	104° 33,6'	118° 27,6'
	$\beta_{11}$	153° 21,8'	166° 24,9'	165° 32,6'	167° 52,0'	162° 28,9'
Длины линий, м	$d_1$	287,65	302,09	290,85	307,91	316,86
	$d_2$	301,73	294,99	299,15	263,84	294,98
	$d_3$	350,87	377,14	375,21	330,15	327,45
	$d_4$	340,51	330,81	302,45	270,18	285,59
	$d_5$	239,98	283,87	267,63	296,47	250,08
	$d_6$	336,40	299,46	349,27	331,54	358,28
	$d_7$	229,51	270,66	274,86	279,87	256,98
	$d_8$	339,87	340,69	301,32	364,00	315,24
	$d_9$	245,13	256,72	271,45	242,05	238,20

### Приложение 3

Исходные данные к расчетной работе №1. «Упрощенное уравнивание съёмочных сетей»  
Задание 3. «Уравнивание систем съёмочных ходов с двумя узловыми точками»

Вариант	Высоты исходных пунктов, м				Измеренные превышения, м					Длины ходов, км					Число штативов, шт				
	H <sub>A</sub>	H <sub>B</sub>	H <sub>C</sub>	H <sub>D</sub>	h <sub>1</sub>	h <sub>2</sub>	h <sub>3</sub>	h <sub>4</sub>	h <sub>5</sub>	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>	L <sub>5</sub>	n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	n <sub>3</sub>	n <sub>4</sub>	n <sub>5</sub>
1	125,183	121,470	108,717	128,930	+4,918	+1,199	+16,984	+3,242	+5,441	3,65	5,23	6,58	4,79	7,03	21	33	39	27	40
2	126,906	122,648	109,522	129,820	+10,032	+5,786	+12,518	+7,781	+5,177	3,28	4,14	3,95	3,77	5,26	19	26	23	21	30
3	121,380	123,066	108,016	127,003	+6,212	+7,890	+16,145	+2,825	+9,012	5,78	6,38	7,78	6,38	7,52	33	40	46	35	42
4	124,306	122,669	108,914	126,155	+7,427	+5,789	+12,338	+4,883	+4,359	6,86	6,82	5,83	3,73	5,71	39	43	34	21	32
5	122,626	122,178	109,819	127,430	+2,580	+2,126	+12,273	+5,319	+2,052	5,85	4,04	6,78	5,09	5,79	33	25	40	28	33
6	122,751	121,860	109,847	126,349	+3,492	+2,604	+11,641	+4,876	+2,217	3,16	7,58	7,54	6,32	4,22	18	47	44	35	24
7	126,358	124,058	107,980	127,495	+6,223	+3,930	+15,108	+4,421	+2,939	4,58	7,53	5,24	5,41	4,30	26	47	31	30	24
8	123,051	126,508	107,361	129,032	+2,289	+5,725	+18,496	+3,169	+5,083	3,16	3,69	6,91	4,43	4,27	18	23	41	25	24
9	123,941	125,795	108,833	127,165	+3,033	+4,895	+15,438	+2,909	+3,362	3,55	4,73	6,08	7,04	5,81	20	30	36	39	33
10	124,710	122,630	107,119	127,131	+4,550	+2,457	+15,771	+4,253	+2,725	4,76	7,93	4,81	7,68	4,73	27	50	28	43	27
11	123,942	123,440	107,753	126,550	+4,439	+3,930	+17,014	+1,795	+5,264	3,92	6,05	5,69	6,35	7,07	22	38	33	35	40
12	124,096	121,592	109,034	126,110	+7,453	+4,935	+12,337	+4,731	+4,745	7,42	5,70	6,18	3,25	5,35	42	36	36	18	30
13	123,922	126,044	109,409	129,768	+3,376	+5,509	+14,684	+5,695	+3,551	4,85	7,54	7,01	5,51	5,56	28	47	41	31	31
14	123,056	124,739	110,833	127,266	+3,128	+4,798	+13,472	+2,953	+4,398	7,85	7,27	6,27	6,12	6,43	45	45	37	34	36
15	122,728	121,203	109,324	129,048	+1,745	+0,238	+15,176	+4,548	+3,549	6,15	4,72	6,46	5,31	6,99	35	30	38	30	39
16	122,739	124,531	109,777	129,914	+5,573	+7,378	+12,993	+7,136	+5,608	7,67	4,37	4,87	7,90	3,95	44	27	29	44	22
17	124,718	121,386	108,490	127,556	+5,503	+2,192	+16,055	+3,027	+5,332	3,94	3,70	4,32	5,76	7,08	23	23	25	32	40
18	122,240	121,440	107,034	129,940	+6,487	+5,694	+17,675	+5,209	+8,958	4,24	3,61	7,22	5,68	5,26	24	23	42	32	30
19	125,747	124,372	108,753	126,417	+6,958	+5,568	+14,635	+3,024	+4,585	7,65	6,42	4,11	4,25	4,78	44	40	24	24	27
20	125,011	126,074	109,086	127,000	+8,592	+9,664	+15,668	+2,239	+8,361	3,56	3,18	5,39	7,60	4,40	20	20	32	42	25
21	126,397	122,776	109,083	126,859	+6,875	+3,255	+11,317	+6,460	+0,857	3,63	4,25	3,22	4,60	3,02	21	27	19	26	17
22	125,516	121,165	108,269	127,551	+6,682	+2,320	+15,173	+4,097	+4,600	7,41	6,44	3,42	4,14	7,04	42	40	20	23	40
23	126,774	122,695	110,863	127,185	+7,827	+3,769	+14,182	+2,143	+6,102	7,62	5,07	4,31	3,14	7,60	44	32	25	17	43
24	126,439	123,266	108,982	127,696	+6,699	+3,510	+14,823	+3,909	+4,068	5,59	3,40	4,08	3,12	7,81	32	21	24	17	44

# Приложение 4

Исходные данные к расчетной работе №1. «Упрощенное уравнение съёмочных сетей»  
 Задание 4. «Уравнивание систем съёмочных ходов способом последовательных приближений»

Вариант	Отметки исходных пунктов, м				Измеренные превышения, м													Длины ходов, км							
	Гр.пр. 12	Гр.пр. 31	Гр.пр. 63	Гр.пр. 14	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$n_6$	$n_7$	$n_8$					
1	63,892	64,555	67,153	62,131	+7,844	-10,271	+8,443	+3,436	-1,274	+9,776	+1,804	-7,956	16	22	20	26	15	32	22	33					
2	74,267	60,572	55,857	69,671	+5,998	+3,124	-6,240	+7,580	-10,327	+2,628	+3,121	+0,521	28	17	35	16	24	31	32	20					
3	62,627	73,752	57,827	62,857	-17,047	+6,184	+11,911	+16,931	-3,307	-2,629	-18,060	-15,417	33	25	19	24	15	31	34	23					
4	67,407	59,318	61,388	55,063	-2,530	-1,734	+12,742	+6,437	+1,763	-12,369	-11,017	+1,323	28	34	23	17	19	14	22	33					
5	58,153	68,889	59,876	66,601	-9,687	+7,409	+1,882	+8,604	+16,474	-15,445	-9,291	+6,176	26	26	17	26	19	35	12	11					
6	59,888	68,424	68,737	67,369	+0,415	-1,475	-5,569	-6,967	+0,498	+8,462	+7,062	-1,412	25	18	11	35	23	33	22	23					
7	63,486	66,883	60,159	73,692	+4,844	+1,954	-5,222	+8,332	+5,484	+2,752	+3,258	+0,489	24	33	29	20	19	26	33	35					
8	63,360	67,746	55,450	63,993	+4,750	-8,491	-8,272	+0,266	+6,124	+2,986	+16,772	+13,756	16	26	20	10	18	35	12	29					
9	56,747	71,629	60,684	63,914	-10,451	+2,741	+5,016	+8,243	+6,886	-2,477	-7,731	-5,267	34	23	34	28	25	21	17	10					
10	60,677	72,290	58,105	65,993	-12,914	+6,628	+6,213	+14,087	-5,496	+4,205	-12,806	-17,016	29	33	10	17	10	10	20	10					
11	68,773	62,818	56,139	69,479	+8,688	-1,990	-0,528	+12,807	+2,118	+0,591	+2,539	+1,962	24	12	19	24	32	15	20	31					
12	59,646	71,467	70,649	61,432	+0,930	-10,968	-3,392	-12,613	+10,121	+2,662	+14,357	+11,708	29	24	23	10	11	26	20	22					
13	74,273	64,700	66,466	71,218	-0,614	+7,134	+1,453	+6,197	-1,265	-8,920	-8,568	+0,318	17	25	14	31	31	10	22	15					
14	56,622	61,397	56,762	59,225	-3,862	+1,696	-3,229	-0,787	+17,721	-16,786	+1,512	+18,344	28	33	14	16	11	32	33	33					
15	60,420	57,421	73,870	64,632	-0,935	+8,154	-1,300	-10,542	+11,028	-14,969	-6,862	+8,147	16	30	28	35	29	11	33	29					
16	73,801	62,130	72,023	58,647	+10,513	-13,990	+11,526	-1,829	-0,752	-0,438	+2,460	+2,875	30	22	22	13	12	26	10	28					
17	68,110	62,463	56,832	72,667	+0,639	+9,537	-1,271	+14,561	+2,888	-7,893	-8,268	-0,379	25	33	30	11	26	17	33	21					
18	58,153	59,159	64,081	70,937	-1,805	+13,577	-2,605	+4,248	+7,058	-7,842	-10,951	-3,111	17	31	17	32	23	17	26	25					
19	55,140	56,707	61,148	59,930	+4,278	-1,072	+8,024	+6,803	+17,129	-11,272	-6,966	+4,338	32	26	28	33	19	26	35	10					
20	73,884	71,992	74,988	62,340	-14,612	+4,958	+8,970	-3,692	-7,718	-8,805	-13,942	-5,152	35	27	35	19	30	23	33	16					
21	63,726	73,013	56,944	64,810	-5,236	-2,989	-7,734	+0,128	-1,562	+5,599	+10,711	+5,106	27	16	25	24	20	21	28	31					
22	71,268	74,884	64,177	58,017	-12,839	-4,026	+14,690	+8,533	-11,910	+2,696	-10,667	-13,351	11	15	11	12	10	35	16	35					
23	72,899	74,977	60,597	63,478	-1,960	-9,507	+3,843	+6,715	-5,930	+6,018	+5,683	-0,325	24	25	30	29	28	26	27	22					

Исходные данные к расчетной работе №1. «Упрощенное уравнение съёмочных сетей»  
 Задание 5. «Уравнивание систем ходов способом полигонов проф. В.В. Попова»

Ва-риант	Отметки реперов, м			Измеренные превышения, м						Длины ходов, км					
	$Pn\ 1$	$Pn\ 2$	$Pn\ 3$	$h_{Pn\ 1-a}$	$h_{a-c}$	$h_{Pn\ 3-c}$	$h_{c-b}$	$h_{Pn\ 2-b}$	$n_{Pn\ 1-a}$	$n_{a-c}$	$n_{Pn\ 3-c}$	$n_{c-b}$	$n_{a-b}$	$n_{Pn\ 2-b}$	
1	125,857	97,546	115,352	-3,949	-12,361	-5,773	-31,025	-18,696	-6,682	28,2	23,9	28,1	14,5	16,6	26,9
2	93,582	81,682	100,738	+6,607	-5,891	-6,422	-24,516	-18,603	-5,930	22,6	30,0	29,2	14,6	19,6	30,3
3	84,295	87,095	95,647	-4,211	+20,005	+4,439	+5,908	-14,050	-1,020	15,2	22,0	13,1	19,2	21,3	22,6
4	159,940	174,818	152,649	-5,441	+3,792	+5,664	+19,744	+15,977	-0,492	10,6	29,0	25,4	30,2	28,1	12,9
5	54,602	32,713	43,733	+0,815	-5,205	+6,512	-12,681	-7,492	+10,042	26,4	15,7	11,6	25,7	17,3	25,3
6	116,952	122,154	110,198	+2,591	+0,178	+9,550	+10,281	+10,145	+7,784	13,6	28,6	19,2	18,9	19,0	22,1
7	77,262	101,314	74,301	-7,280	+13,903	+9,583	+22,232	+8,336	-9,143	27,1	13,4	24,0	25,1	12,4	20,1
8	195,774	207,241	191,073	+0,144	+2,385	+7,256	+10,136	+7,798	-1,110	16,1	29,7	24,2	15,2	19,6	24,3
9	90,083	126,126	114,377	+10,024	+14,075	-0,184	+32,432	+18,375	+6,421	14,7	16,6	23,1	11,7	21,4	13,6
10	186,309	199,347	196,757	-4,276	+12,972	-1,781	+21,284	+8,286	+3,920	13,6	27,0	16,4	29,4	28,4	15,2
11	169,854	189,376	193,600	+4,554	+20,356	+1,130	+12,622	-7,731	-2,365	27,0	24,1	13,7	17,9	19,7	28,1
12	125,169	134,342	112,459	+4,125	-10,917	+5,886	+1,184	+12,117	-3,919	20,8	16,7	19,4	14,1	14,8	19,2
13	97,583	79,448	78,010	-5,502	-15,196	-1,098	-9,670	+5,585	+3,050	22,7	22,5	28,7	25,9	17,9	13,5
14	183,736	185,614	187,428	-0,911	+3,144	-1,478	-5,083	-8,257	-7,875	13,8	19,6	13,1	22,3	14,3	12,0
15	134,124	138,747	124,046	-6,754	-4,416	-1,062	+7,351	+11,768	-4,038	21,6	26,7	25,8	22,0	25,8	19,2
16	53,922	27,463	31,148	-0,370	-18,849	+3,585	-32,729	-13,891	-6,587	26,3	30,1	20,5	11,4	18,9	13,8
17	184,157	195,229	186,041	+3,635	-8,815	-7,039	+5,848	+14,709	-1,481	20,2	14,9	19,3	25,9	28,1	28,6
18	164,002	199,081	170,082	+6,000	+10,980	+10,869	+27,125	+16,199	-1,974	12,1	22,8	29,0	22,5	21,3	20,2
19	149,496	159,269	177,448	+8,691	+9,774	-9,502	+0,275	-9,541	-0,908	16,4	16,7	25,3	30,1	12,3	20,7
20	63,960	63,351	80,706	+9,875	+8,345	+1,474	-10,157	-18,445	+0,410	16,9	27,4	14,0	19,5	18,4	18,6
21	170,417	176,386	187,761	+1,022	+9,960	-6,393	-4,963	-14,866	-9,915	29,1	15,4	18,2	20,2	17,4	13,4
22	172,822	158,175	174,488	-1,612	+9,155	+5,854	-6,345	-15,543	+6,635	17,9	18,1	15,2	27,6	16,1	24,9
23	136,040	150,368	146,598	+5,445	-0,215	-5,318	+17,338	+17,594	+8,489	17,6	24,6	15,6	10,8	23,0	27,3
24	157,544	147,825	149,317	-0,034	-12,417	-4,235	-8,211	+4,171	+1,431	21,0	28,1	16,5	22,7	19,7	21,5
25	95,777	73,120	75,314	+0,821	-17,613	+3,691	-27,027	-9,369	-3,451	22,4	24,0	22,1	29,6	18,8	13,2

# **ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ МОНИТОРИНГ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ**

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к выполнению практических работ для студентов направления  
21.04.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»  
(программа магистерской подготовки «Инженерная геодезия»)  
всех форм обучения

Составители:

Нетребина Юлия Сергеевна  
Ершова Наталья Викторовна

В авторской редакции

Подписано к изданию 16.05.2022.

Уч.-изд. л. 2,1

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»  
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84