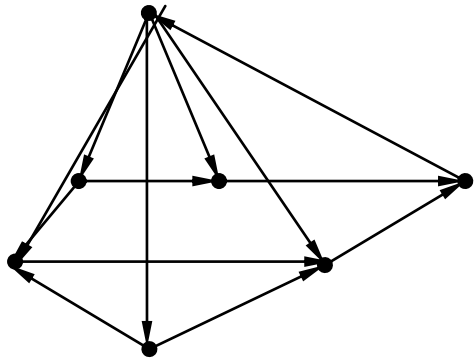
ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра компьютерных интеллектуальных технологий проектирования

230-2009

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы
по дисциплине «Дискретная математика»
для студентов специальности 230104 «Системы автоматизированного проектирования»
очной и заочной форм обучения



Воронеж 2009

Составитель канд. техн. наук О.В. Собенина

УДК 517.9

Методические указания по организации самостоятельной работы по дисциплине «Дискретная математика» для студентов специальности 230104 «Системы автоматизированного проектирования» очной и заочной форм обучения / ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. О.В. Собенина. Воронеж, 2009. 28 с.

Методические указания содержат программу дисциплины, задачи и упражнения по каждому разделу для самостоятельного изучения студентами разделов дисциплины «Дискретная математика».

Предназначены для студентов 2 курса.

Табл. 1. Ил. 8. Библиогр.: 11 назв.

Рецензент канд. техн. наук, доц. Н.А. Ююкин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. Е.Д. Федорков

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

© ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2009

1. ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ОСВОЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате изучения дисциплины студенты должны:

знать:

- способы задания, свойства множеств, отношений;
- основные методы и алгоритмы теории графов, связанные с моделированием и оптимизацией систем различной природы;
- канонические формы представления, методы преобразования и минимизации булевых функций;
- получить знания об основах логики высказываний, логики предикатов, нечеткой логики и теории алгоритмов;

уметь:

- уметь строить и анализировать алгоритмы для решения дискретных задач;

иметь опыт:

- использования символики дискретной математики для выражения количественных и качественных отношений объектов.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Литература: [4, 5, 6, 7, 8, 9, 11].

2.1. Содержание раздела

1. Основные понятия и определения теории множеств: множество, элемент множества, подмножество, пустое множество, универсальное множество, конечное множество, бесконечное множество, счетное множество, включение множеств, равенство множеств, семейство множества.

2. Способы задания множеств (перечисление элементов, описательный способ с помощью характеристического свойства, с помощью характеристической функции).

3. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, дополнение, симметрическая разность) и их свойства.

Диаграммы Венна. Мощность множества. Декартово произведение. Разбиения и покрытия.

2.2. Типовые задачи

Задача 1. Доказать, что

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

Решение. Чтобы доказать равенство двух множеств $A=B$ нужно доказать, что $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Докажем, что $X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Для доказательства этого включения выберем произвольный элемент из множества $X \cap (Y \cup Z)$ и покажем, что он принадлежит множеству $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Итак, пусть $x \in X \cap (Y \cup Z)$. Тогда $x \in X$ и $x \in Y \cup Z$. Если $x \in Y$, то $x \in X \cap Y$, а значит, $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Если $x \in Z$, то $x \in X \cap Z$, а значит, $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Таким образом,

$$X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

Теперь докажем, что $(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$. Пусть $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Если $x \in (X \cap Y)$, то $x \in X$ и $x \in Y$, отсюда следует, что $x \in X$ и $x \in Y \cup Z$, т.е. $x \in X \cap (Y \cup Z)$. Если $x \in (X \cap Z)$, то $x \in X$ и $x \in Z$. Отсюда следует, что $x \in X$ и $x \in Y \cup Z$, т.е. $x \in X \cap (Y \cup Z)$. Итак, $(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$. Таким образом, получили, что $X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ и $(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$, а это значит, что эти два множества равны.

Задача 2. Доказать тождество

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$$

Решение. Используя свойства операций над множествами, покажем, что правую часть выражения с помощью равносильных преобразований можно привести к левой.

$$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{(B \cap \overline{C})} = (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) =$$
$$= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) = (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) =$$

$$= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \varnothing) = (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup \varnothing = A \cap \overline{C} \cap \overline{B} =$$
$$= A \setminus B \setminus C$$

Задача 3. Упростить выражение

$$(A \cap B \cap Y \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap Y) \cup (\overline{B} \cap Y) \cup (Y \cap X).$$

Решение. Используя свойства операций над множествами (свойство дистрибутивности, законы де Моргана, законы, определяющие действия с константами), получим

$$(A \cap B \cap Y \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap Y) \cup (\overline{B} \cap Y) \cup (Y \cap X) = (A \cap B \cap$$
$$\cap Y \cap \overline{X}) \cup (Y \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup X)) = (Y \cap (A \cap B \cap \overline{X})) \cup$$
$$\cup (Y \cap (\overline{\overline{A \cap B} \cup \overline{\overline{X}}})) = Y \cap ((A \cap B \cap \overline{X}) \cup (\overline{\overline{A \cap B} \cap \overline{\overline{X}}})) =$$
$$= Y \cap U = Y.$$

2.3. Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Докажите равенство $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$, где A, B, C - множества.

2. Докажите равенство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, где A, B, C - множества.

3. Верно ли равенство $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, где A, B, C - множества?

4. Верно ли равенство $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, где A, B, C - множества?

5. Что является дополнением к множеству четных чисел во множестве натуральных чисел?

6. Что является дополнением к множеству {1,3,5} во множестве {1,2,3,4,5,6}?

7. Что является дополнением к множеству {1,3,5} во множестве {1,3,5}?

8. Пусть на универсуме E={*a, b, c, d, e, f, g*} определены множества X={*a, c, d, f*}, Y={*b, d, e, f*}. Найти X∪Y, X∩Y, $\overline{X}$, X\Y, Y\X, X⊕Y.

9. Равны ли следующие множества:

а) {2, 4, 5} и {2, 4, 5, 2};

б) {1, 2} и {{1,2}};

в) {1, 2, 3} и {{1}, {2}, {3}}.

10. Множество задано перечислением элементов A={2, 4, 6, 8, …, 32}. Задайте множество с помощью характерного для его элементов свойства.

11. Доказать тождество $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$.

12. Упростить выражение

$(A \cap B \cap Y \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap Y) \cup (\overline{B} \cap Y) \cup (Y \cap X)$.

13. Упростить $(A \cup B) \bigcap (A \cup \overline{B}) \bigcap (\overline{A} \cup B)$.

14.Упростить $A \setminus ((A \cup B) \setminus B)$.

15. Докажите, что $X \bigcap (Y \setminus X) = \varnothing$.

16. Показать, что для любых множеств A, B, C верны следующие соотношения:

а) Ø⊂A∩B⊂A∪B;

б) C⊂A∩B тогда и только тогда, когда C⊂A и C⊂B;

в) A∪B⊂C тогда и только тогда, когда A⊂C и B⊂C;

г) если A∪B=Ø, то A=Ø и B=Ø;

д) A∪B= A∩B тогда и только тогда, когда A=B;

е) если A∪B=C, B∪C=A, C∪A=B, то A=B=C;

ж) если A∩B=C, B∩C=A, C∩A=B, то A=B=C.

17. Доказать, что

а) A⊂B тогда и только тогда, когда A∪B=B;

б) A⊂B тогда и только тогда, когда A∩B=A;

в) A⊂B тогда и только тогда, когда A\B=Ø.

18. Пусть A и B – данные множества. Решить уравнения:

а) A\X=B; б) A∪X=B; в) A∩X=B.

19. Найти A^2, если

а) A=[0,1]; б) A={0,1,2}; в) A={x∈N | 5<x<10}.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОШЕНИЙ

Литература: [4, 5, 6, 7, 8, 9, 11].

3.1. Содержание раздела

1. Отношения. Бинарные отношения. Матрица бинарного отношения. Граф бинарного отношения. Свойства бинарных отношений (рефлексивность, симметричность, транзитивность).

2. Операции над отношениями: объединение, пересечение, дополнение, разность, инверсия, композиция.

3. Отношение эквивалентности и разбиения. Класс эквивалентности. Фактор-множества. Отношение порядка. Диаграмма Хассе.

3.2. Типовые задачи

Задача 1. Доказать, что если R_1 и R_2 – симметричные отношения, то $R_1 \cap R_2$ также симметричное отношение.

Решение. Чтобы доказать симметричность, рассмотрим элемент $(x,y) \in R_1 \cap R_2$ и покажем, что элемент (y,x) также принадлежит этому отношению. Итак,

$$(x,y) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow \begin{cases} (x,y) \in R_1 \\ (x,y) \in R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y,x) \in R_1 \\ (y,x) \in R_2 \end{cases} \Rightarrow (y,x) \in R_1 \cap R_2,$$

что и требовалось доказать.

Доказать утверждение $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

Решение. Пусть

$$(x,y) \in (R_1 \cap R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (y,x) \in R_1 \\ (y,x) \in R_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in R_1^{-1} \\ (x,y) \in R_2^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) \in R_1^{-1} \cap R_2^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что для любых бинарных отношений *P, Q,* выполняется $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$.

Решение. Предположим, что $(x, y) \in (P \circ Q)^{-1}$. Тогда $(y, x) \in P \circ Q$, и, следовательно, $(y, z) \in P$ и $(z, x) \in Q$ для некоторого элемента *z*. Значит, $(x, z) \in Q^{-1}$, $(z, y) \in P^{-1}$ и $(x, y) \in Q^{-1} \circ P^{-1}$. Включение $Q^{-1} \circ P^{-1} \subseteq (P \circ Q)^{-1}$ доказывается аналогично.

Задача 3. Определим свойства отношения R={(*x*,*y*)| *x*,*y*∈***N*** и *x* – делитель *y*}, заданного на множестве натуральных чисел.

1. Так как $\frac{x}{x} = 1$ для всех $x \in \boldsymbol{N}$, то R рефлексивно.

2. Рассмотрим элемент $(2,4) \in R$. 2 - делитель 4, но 4 не является делителем 2, т. е. $(4,2) \notin R$, следовательно, *R* - несимметричное отношение.

3. Так как, если $\frac{y}{x} \in \boldsymbol{N}$ и $\frac{z}{y} \in \boldsymbol{N}$, то $\frac{z}{x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \in \boldsymbol{N}$ и *R* – транзитивно.

3.3. Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. На множестве A={5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} задано бинарное отношение R={(*x*,*y*) / *x* делится на *y*}. Построить граф данного бинарного отношения.

2. Приведите пример четырех различных рефлексивных отношений на множестве $A = \{2,5,3,4,8,1\}$.

3. Приведите пример двух различных транзитивных отношений и двух различных, не являющихся транзитивными, на множестве $\{1,2,4,6,7,0,10\}$.

4. Приведите пример множества и двух различных частичных порядков на нем.

5. Определите свойства следующих отношений, заданных на множестве действительных чисел (***R***)

а) *R*={(*x*,*y*)| *x*,*y*∈***R*** и *x* - *y*<0},

в) $R=\{(x,y)|\ x,y\in\mathbf{R}$ и $|x|\geq|y|\}$.

6. Найдите R^{-1}, $R\circ R$, $R\circ R^{-1}$, $R^{-1}\circ R$ для отношений

а) $R=\{(x,y)\mid x,y\in N$ и x, делит $y\}$,

в) $R=\{(x,y)|\ x,y\in\mathbf{R}$ и $x+y<0\}$,

с) $R=\{(x,y)|\ x,y\in\mathbf{R}$ и $2x\geq 3y\}$.

7. Докажите, что если отношения R_1 и R_2 рефлексивны, то рефлексивны следующие отношения $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, $R_1\circ R_2$, R_1^{-1}.

8. Докажите, что если отношения R_1 и R_2 симметричны, то симметричны следующие отношения $R_1\cup R_2$, $R_1\circ R_1^{-1}$, R_1^{-1}.

9. Докажите, что если R эквивалентность, то R^{-1} есть также эквивалентность.

10. Докажите, что $R_1\cup R_2$ – эквивалентность тогда и только тогда, когда $R_1\cup R_2=R_1\circ R_2$.

11. Пусть X - множество всех прямых на плоскости. Являются ли эквивалентными отношения а) параллельности прямых и б) перпендикулярности прямых? Пусть X - множество всех прямых на плоскости. Являются ли эквивалентными отношения а) параллельности прямых и б) перпендикулярности прямых?

12. Для отношения, заданного матрицей, определить является ли оно отношением эквивалентности. Если является, то определить классы эквивалентности.

а)

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	1	1
c	0	0	1	0	0	0
d	1	0	0	1	0	0
e	0	1	0	0	1	1
f	0	1	0	0	1	1

б)

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	1	0	1
b	0	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0
d	1	0	0	1	0	1
e	0	0	0	0	1	0
f	1	0	0	1	0	1

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Литература: [1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11].

4.1. Содержание раздела

1. Основные понятия теории графов: граф, ориентированные граф, неориентированный граф, смежность в графе, инцидентность в графе. Типы графов.

2. Неориентированный граф. Степень вершины. Цепь, цикл, простой цикл.

3. Ориентированный граф. Полустепень захода вершины, полустепень исхода вершины. Путь, контур, маршрут.

4. Способы задания и представления графов. Матрица смежности, матрица инцидентности.

5. Операции над графами. Подграфы и дополнение графа.

6. Графы с заданной последовательностью степеней. Алгоритм построения простого графа, имеющего заданную последовательность степеней.

7. Достижимость и связность. Множество достижимости. Матрицы достижимости и контрдостижимости. Сильные компоненты.

8. Независимые и доминирующие множества. Алгоритм построения всех максимальных независимых множеств.

9. Покрытия и раскраски. Правильная раскраска. Хроматическое число, хроматический индекс. Алгоритмы раскраски графов. Задача составления расписания.

10. Обходы графа по глубине и ширине. Эйлеровы циклы. Гамильтонов контур. Метод Флери построения эйлерова цикла. Алгебраический метод выделения гамильтоновых путей и контуров.

11. Деревья, остовы и кодеревья. Алгоритм построения остова неорграфа. Кратчайший остов. Алгоритм Прима построения кратчайшего остова взвешенного графа. Алгоритм Краскала построения кратчайшего остова взвешенного графа.

12. Плоские и планарные графы. Критерии анализа планарности. Алгоритм укладки графа на плоскости.

4.2. Типовые задачи

Задача 1. Найти матрицы достижимостей и обратных достижимостей для графа *G*, изображенного на рис. 1.

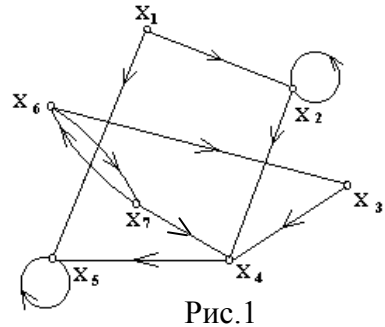


Рис.1

Матрица смежности графа *G* имеет вид

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Множества достижимостей находятся с помощью соотношений

$R(x_1)=\{x_1\} \cup \{x_2,x_5\} \cup \{x_2,x_4,x_5\} \cup \{x_2,x_4,x_5\} = \{x_1,x_2,x_4,x_5\}$,

$R(x_2)= \{x_2\} \cup \{x_2,x_4\} \cup \{x_2,x_4,x_5\} \cup \{x_2,x_4,x_5\} = \{x_2,x_4,x_5\}$,

$R(x_3)= \{x_3\} \cup \{x_4\} \cup \{x_5\} \cup \{x_5\} = \{x_3,x_4,x_5\}$,

$R(x_4)= \{x_4\} \cup \{x_5\} \cup \{x_5\} = \{x_4,x_5\}$,

$R(x_5)= \{x_5\} \cup \{x_5\} = \{x_5\}$,

$R(x_6)= \{x_6\} \cup \{x_3,x_7\} \cup \{x_4 \cup x_6\} \cup \{x_3,x_5,x_7\} \cup \{x_4,x_5,x_6\} =$
$= \{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$,

$R(x_7)= \{x_7\} \cup \{x_4,x_6\} \cup \{x_3,x_5,x_7\} \cup \{x_4,x_5,x_6\}=$
$= \{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}.$

Следовательно, матрица достижимостей имеет вид

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

матрица обратных достижимостей такова:

$$Q = R^T = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Задача 2. Определить гамильтоновы пути и контуры методом перебора Робертса и Флореса для графа, изображенного на рис. 2.

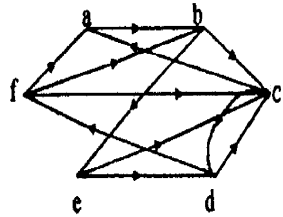


Рис. 2

Решение. Метод перебора Робертса и Флореса для построения гамильтоновых путей и контуров состоит в выполнении следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Построить матрицу $M=\{m_{ij}\}_{m\times n}$, $n=|X|$, $m=\max[d(x_i)]$, m_{ij} , $x_i\in X$. m_{ij} – есть j-я вершина (скажем, x_k), для которой в графе $G=(X,\Gamma)$ существует дуга (x_i,x_k) (вершины в столбцах упорядочены).

Шаг 2. Положить $p=x_1$ (x_1 – отправная вершина), $S=\{x_1\}$.

Шаг 3. Если в столбце p существует возможная вершина (под возможной понимается вершина, еще не принадлежавшая S), то перейти к шагу 4, иначе к шагу 7.

Шаг 4. Выбрать первую возможную вершину x_k. Положить $S=S\cup\{x_k\}$, $p=x_k$ и перейти к шагу 5.

Шаг 5. Если $|S|=n$-1, то напечатать гамильтонов путь S и перейти к шагу 6, иначе перейти к шагу 3.

Шаг 6. Если существует дуга (p,x_1), то напечатать гамильтонов контур ($S\cup\{x_1\}$), иначе перейти к шагу 7.

Шаг 7. Удалить последнюю включенную в S вершину x_1. Если $S=\varnothing$, то процесс заканчивается, так как все пути и контуры найдены. Останов. Иначе положить $p=x_{i-1}$ и перейти к шагу 3.

Матрица М данного графа имеет вид

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	*b*	*c*	*a*	*c*	*c*	*a*
2	-	*e*	*d*	*f*	*d*	*b*
3	-	-	-	-	-	*c*

В качестве отправной вершины рассмотрим *a*. Результаты работы алгоритма представим в следующей таблице.

Номер	Множество S	Комментарии
1	a	Добавляем первую возможную вершину в столбце a (т.е. вершину b).
2	a,b	Добавляем первую возможную вершину в столбце b (т.е. вершину c)
3	a,b,c	Первая вершина a в столбце c не является возможной ($a \in S$), добавляем следующую вершину в столбце (т.е. вершину d).
4	a,b,c,d	Добавляем вершину f.
5	a,b,c,d,f	В столбце f нет возможной вершины. Возвращение.
6	a,b,c,d	В столбце d не существует возможной вершины, следующей за f. Возвращение.
7	a,b,c	Аналогично предыдущему. Возвращение.
8	a,b	Добавляем вершину e.
9	a,b,e	Добавляем вершину c.
10	a,b,e,c	Добавляем вершину d.
11	a,b,e,c,d	Добавляем вершину f.
12	a,b,e,c,d,f	Гамильтонов путь. Дуга (f,a) дает гамильтонов контур. Возвращение.
13	a,b,e,c,d	Возвращение.
14	a,b,e,c	Возвращение.
15	a,b,e	Добавляем вершину d.
16	a,b,e,d	Добавляем вершину f.
17	a,b,e,d,f	Добавляем вершину c.
18	a,b,e,d,f,c	Гамильтонов путь. Путь замыкается дугой (c,a). Возвращение.
19	a,b,e,d,f	Возвращение.
20	a,b,e,d	Возвращение.
21	a,b,e	Возвращение.
22	a,b	Возвращение.
23	a	Возвращение.
24	$\varnothing$	Конец поиска.

В результате работы алгоритма определены гамильтоновы пути μ_1=[*a,b,e,c,d,f*], μ_2=[*a,b,e,d,f,c*] и контуры [*a,b,e,c,d,f,a*], [*a,b,e,d,f,c,a*].

4.3. Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Задайте геометрически графы:

G_1 = ({a.b,c},{(a,b),(a,c),(a,a),(b,c)})

G_2=({x_1,x_2,x_3,x_4},{(x_1,x_2),(x_1,x_4),(x_2,x_4),(x_3,x_3),(x_3,x_4),(x_4,x_1)}

2. Дан граф $G = (A, B)$, где

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(3,2),(3,5),(3,6),(4,6)\}$.

Сколько у него вершин, сколько у него ребер и как он выглядит графически?

3. В условиях предыдущей задачи привести примеры вершин смежных и вершин несмежных.

4. В условиях задачи 2 привести примеры ребер смежных и ребер несмежных.

5. В условиях задачи 2 привести примеры объектов инцидентных и объектов неинцидентных.

6. Есть ли среди вершин графа из задачи 2 изолированные?

7. Чему равна степень вершины «6» графа из задачи 2?

8. Сколько ребер в полном графе на семи вершинах? На восьми вершинах?

9. Доказать, что в неорграфе число вершин с нечетной степенью четно.

10. Построить граф (если он существует) с последовательностью степеней

а) (4,3,3,2,2);

б) (5,4,2,2,1).

11. Привести примеры сильно связного, связного, несвязного графов.

12. Найти матрицы достижимости и контрдостижимости и сильные компоненты для графов G_1 ,G_2, G_3, изображенных на рис. 3.

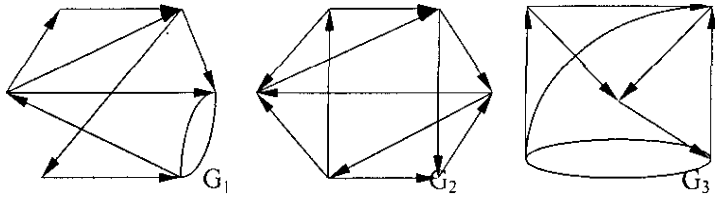


Рис. 3

13. Доказать, что если в n-вершинном графе степень каждой вершины не меньше, чем $(n-1)/2$, то он связен.

14. Доказать, что если G – несвязный граф, то $\bar{G}$ – связный.

15. Что можно сказать о хроматическом числе объединения двух графов?

16. Доказать, что граф G является связным тогда и только тогда, когда он имеет остов.

17. Определить, какие из графов пяти правильных многогранников имеют эйлеровы циклы.

18. Составить алгоритм, основанный на алгоритме Флери и позволяющий найти все эйлеровы циклы графа.

19. Определить раскраску графов, изображенных на рис. 4.

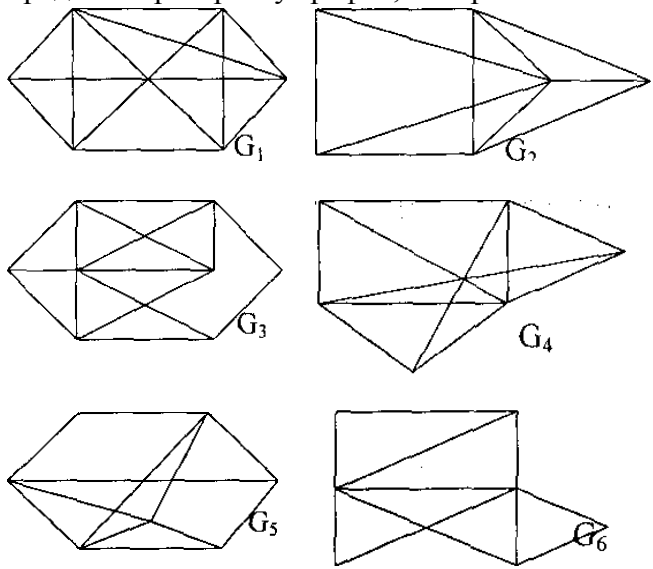


Рис. 4

20. Построить остовы для графов, изображенных на рис. 5.

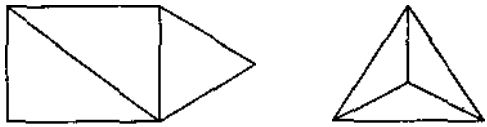


Рис. 5

21. Существует ли эйлеров цикл в графах, изображенных на рис. 6 ?

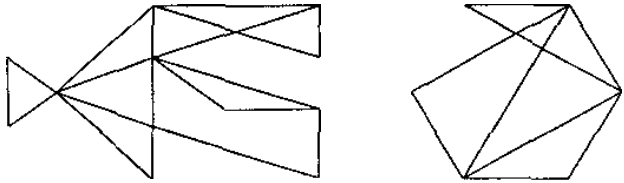


Рис. 6

22. Определить гамильтоновы пути и контуры в графах, изображенных на рис. 7.

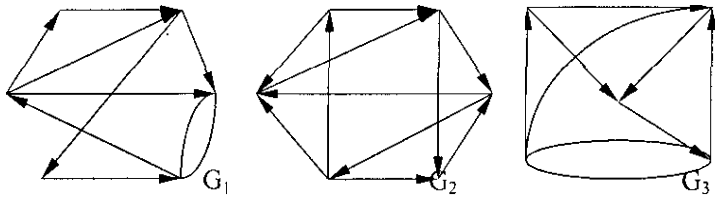
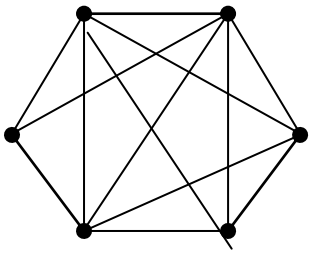


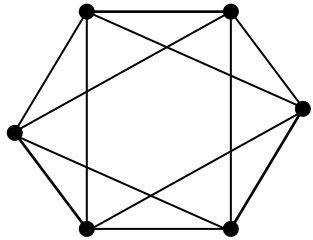
Рис. 7

23. Для графа построить, если это возможно, его укладку на плоскости (рис. 8).

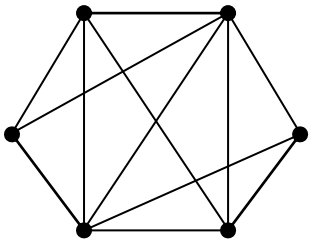
а)



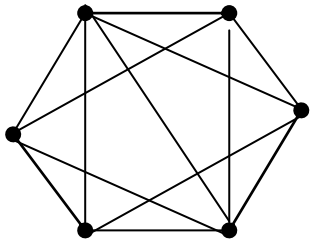
б)



в)



г)



д)

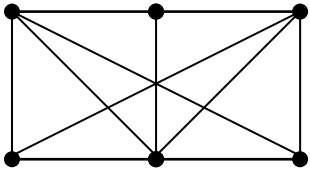


Рис. 8

5. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ (БФ)

Литература: [4, 5, 6, 7, 8, 10].

5.1. Содержание раздела

1. Способы задания БФ. Элементарные функции алгебры логики. Таблицы истинности. Равносильность формул. Основные равносильности.

2. Специальные разложения БФ. Нормальные формы. Дизъюнктивные и конъюнктивне нормальные формы. Совершенные нормальные формы. Теоремы единственности СДНФ и СКНФ для БФ. Аналитический и табличный методы приведения БФ к совершенным нормальным формам.

3. Минимизация БФ и неполностью определенных БФ. Алгоритм Квайна минимизации БФ. Геометрический метод минимизации БФ.

4.Свойства БФ. Двойственная функция, самодвойственная функция, монотонная функция, линейная функция. Полином Жегалкина. Полные системы БФ. Теорема о

функциональной полноте. Примеры функционально-полных базисов.

5.2. Типовые задачи

Задача 1. Записать символически следующее высказывание: “ Для того чтобы натуральное число x было нечетным, достаточно, чтобы x было простым и больше двух”.

Решение. Введем элементарные высказывания, обозначая их буквами: N=”x – нечетное натуральное число”, P=”x – простое число”, D=”x>2”, тогда исходное сложное высказывание можно символически записать в виде

$$P \wedge D \to N .$$

Задача 2. Упростить БФ $X \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee X \wedge Y \vee \overline{X} \wedge Y$, используя равносильные преобразования.

Решение.

$$X \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee X \wedge Y \vee \overline{X} \wedge Y \equiv X \wedge Y \wedge (\overline{Z} \vee 1) \vee \overline{X} \wedge Y \equiv$$

$$\equiv X \wedge Y \vee \overline{X} \wedge Y \equiv Y \wedge 1 \equiv 1.$$

Задача 3. Определить тип БФ $\left(\overline{X} \to Y\right) \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y}$.

Решение. Для определения типа БФ составим таблицу истинности

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \to Y$	$\left(\overline{X} \to Y\right) \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y}$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0

Как видно из таблицы истинности, данная БФ является тождественно – ложной, так как принимает значение 0 на всех наборах переменных.

Задача 4. Доказать равносильность

$$\overline{(\overline{X} \to \overline{Y})} \leftrightarrow X \equiv (X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{X} .$$

Решение.

Способ 1. Составим таблицы истинности для БФ, стоящих в левой и правой части выражения и сравним их.

X	Y	$\overline{(\overline{X} \to \overline{Y})} \leftrightarrow X$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

X	Y	$(X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{X}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Как видим, таблицы истинности БФ совпадают, следовательно, они равносильны.

Способ 2. Для доказательства равносильности двух БФ составим новую формулу вида

$$F \equiv (\overline{(\overline{X} \to \overline{Y})} \leftrightarrow X) \leftrightarrow ((X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{X}$$

и докажем, что она является тавтологией. Для этого составим ее таблицу истинности

X	Y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Способ 3. Чтобы доказать равносильность двух БФ, приведем их к одной и той же более простой БФ с помощью равносильных преобразований.

$$\overline{(X \to Y)} \leftrightarrow X \equiv \overline{(X \vee Y)} \leftrightarrow X \equiv (\overline{X} \wedge Y) \leftrightarrow X \equiv ((\overline{X} \wedge$$

$$\wedge Y) \to X) \wedge (X \to (\overline{X} \wedge Y)) \equiv (\overline{(\overline{X} \wedge Y)} \vee X) \wedge (\overline{X} \vee (\overline{X} \wedge$$

$$\wedge Y)) \equiv (X \vee \overline{Y} \vee X) \wedge (\overline{X} \vee (\overline{X} \wedge Y)) \equiv (X \vee \overline{Y}) \wedge \overline{X} \equiv$$

$$\equiv (X \wedge \overline{X}) \vee (\overline{Y} \wedge \overline{X}) \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}.$$

$$(X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{X} \equiv (X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge \overline{X} \equiv (\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee$$

$$\vee X) \wedge \overline{X} \equiv ((\overline{X} \vee Y) \wedge \overline{X}) \wedge (\overline{Y} \vee X) \equiv \overline{X} \wedge (\overline{Y} \vee X) \equiv (\overline{X} \wedge$$

$$\wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge X) \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}.$$

Таким образом,

$$\overline{(\overline{X} \to \overline{Y})} \leftrightarrow X \equiv (X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{X} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}.$$

Задание 6. Доказать равносильность с помощью совершенных нормальных форм

$$\overline{(\overline{X} \to \overline{Y})} \leftrightarrow X \equiv (X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{X}.$$

Решение. Единственность совершенных нормальных форм является основой для доказательства равносильности БФ. Составим, например, СКНФ для БФ, стоящих в левой и правой частях выражения.

$СКНФ_1$:

$$\overline{(\overline{X} \to \overline{Y})} \leftrightarrow X \equiv \overline{(X \vee \overline{Y})} \leftrightarrow X \equiv (\overline{X} \wedge Y) \leftrightarrow X \equiv ((\overline{X} \wedge$$

$$\wedge Y) \to X) \wedge (X \to ((\overline{X} \wedge Y)) \equiv (\overline{(\overline{X} \wedge Y)} \vee X) \wedge$$

$$\wedge (\overline{X} \vee \overline{X} \wedge Y) \equiv (X \vee \overline{Y} \vee X) \wedge (\overline{X} \vee \overline{X} \wedge Y) \equiv (X \vee \overline{Y}) \wedge$$

$$\wedge \overline{X} \equiv (X \vee \overline{Y}) \wedge (\overline{X} \vee (Y \wedge \overline{Y})) \equiv (X \vee \overline{Y}) \wedge (\overline{X} \vee Y) \wedge$$

$$\wedge (\overline{X} \vee \overline{Y}).$$

$СКНФ_2$:

$(X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{X} \equiv (X \to Y) \wedge (Y \to X) \wedge \overline{X} \equiv (\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee$
$\vee X) \wedge \overline{X} \equiv (\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee X) \wedge (\overline{X} \vee (Y \wedge \overline{Y})) \equiv (\overline{X} \vee Y) \wedge$
$\wedge (\overline{Y} \vee X) \wedge (\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y}) \equiv (\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee X) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y}).$
Так как $СКНФ_1$ и $СКНФ_2$ совпадают, то исходные БФ равносильны.

Задача 5. Является ли полной следующая система функций $\{\to, \bar{}\}$.

Решение. Для проверки полноты системы булевых функций будем использовать критерий полноты – теорему Поста. Составим таблицу Поста.

f	K_0	K_1	$K_м$	$K_л$	$K_с$
$X \to Y$	-	+	-	-	-
$\overline{X}$	-	-	-	+	+

$0 \to 0 \equiv 1, \bar{0} \equiv 1, следовательно \to, \bar{} \notin K_0$.

$1 \to 1 \equiv 1, следовательно \to \in K_1,$ в то время как $\bar{} \notin K_1$, так как $\bar{1} \equiv 0$.

Для проверки монотонности воспользуемся таблицей истинности.

X	Y	$X \to Y$	$\overline{X}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

Анализ показывает, что $X \to Y, \overline{X}$ не являются монотонными функциями, так как $(1,0) \geq (0,0)$, а $(1 \to 0) < (0 \to 0)$; для $\overline{X}: 1 > 0$, а $(\bar{1}) < (\bar{0})$.

Для определения линейности функции построим многочлен Жегалкина.

$\overline{X} = 1 + X;$

$X \to Y = \overline{X} \vee Y = \overline{X \wedge \overline{Y}} = 1 + (X \wedge (1 + Y)) = 1 + X + XY$

Таким образом, $\overline{X}$ - линейная функция, а $X \to Y$ - нет.

Определим являются ли исследуемые функции самодвойственными. Так как $f^*(X) = \bar{f}(\overline{X}) = \overline{X} = f(X)$, то $\overline{X}$ - самодвойственная функция. В то время, как $f^*(X,Y) = \bar{f}(\overline{X},\overline{Y}) = \overline{\overline{X} \to \overline{Y}} = \overline{X \vee \overline{Y}} = \overline{X} \wedge Y \neq X \to Y$, и поэтому $\to \notin K_c$.

Для полноты системы необходимо и достаточно, чтобы в каждом столбце таблицы Поста был хотя бы один "-". Построенная таблица доказывает, что система $(\to, \neg)$ является полной.

5.3. Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Упростить следующие БФ, используя равносильные преобразования:

а) $(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \to (Z \to X)$,

б) $(Y \to X) \wedge Y \vee \overline{(\overline{X} \wedge \overline{Y})}$,

в) $\overline{X} \vee X \wedge Z \vee \overline{X} \wedge Z \vee X \wedge Y$,

г) $(\overline{(\overline{X} \to \overline{Y})} \to X) \wedge (X \to \overline{(\overline{X} \to \overline{Y})})$,

д) $\overline{X} \wedge Y \wedge Z \vee \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee Y \wedge Z$,

е) $\overline{(X \wedge Y \wedge Z)} \to \overline{(X \wedge Z)}$,

ж) $X \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee X \wedge Y \vee \overline{X} \wedge Y$.

2. Составить таблицы истинности следующих БФ и определить их тип:

а) $X \to (\overline{X} \to Y)$,

б) $(X \to (Y \to Z)) \to (Y \to (X \to Z))$,

в) $X \wedge Y \vee \overline{X} \leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y}$,

г) $\overline{(X \to Y)} \to (X \to Y)$.

3. Доказать равносильность

а) $(\overline{\overline{X} \to \overline{Y}}) \leftrightarrow X \equiv (X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{X}$,

б) $(\overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}) \vee (\overline{X \to Y}) \equiv (X \vee Y) \wedge X$,

в) $\overline{(\overline{X} \to \overline{Y})} \leftrightarrow X \equiv (X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{X}$

г) $(Y \to X \vee Z) \wedge (\overline{X \vee Y}) \vee (X \to Z) \to X \wedge Y \wedge \overline{Z} \equiv X \wedge \overline{Z}$.

4. Определить конъюнктивное разложение по переменной X следующих БФ:

а) $X \to (\overline{X} \to Y)$,

б) $X \to Y \vee Z$,

в) $(X \to \overline{Y}) \wedge Y \to \overline{X}$.

5. Определить дизъюнктивное разложение по переменной Y следующих БФ:

а) $\overline{(X \to Y)} \to (X \to Y)$,

б) $(\overline{X} \to Y) \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y}$,

в) $(X \wedge \overline{Z} \to \overline{Y}) \leftrightarrow X$.

6. Привести к нормальным и совершенным нормальным формам следующие БФ:

а) $X \to Y \wedge \overline{Z}$,

б) $(X \vee \overline{Y}) \to X$,

в) $X \wedge Y \vee \overline{X} \leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y}$.

7. Определить все логические следствия из данных посылок.

а) $X \wedge Y$, б) $\overline{X} \to Y$, $X \vee Y$, в) $\overline{X} \to Y$, $\overline{X} \wedge \overline{Y}$,

г) $\overline{X} \to Y$.

8. Определить все посылки, логическим следствием которых является данная формула.

а) $X \leftrightarrow Y$, б) $X \vee Y$, в) $\overline{X} \vee Y$, г) $\overline{X} \to Y$.

9. Запишите символически следующие суждения:

а) «вертолет является средством передвижения по воздуху, имеет двигатель, пилотскую кабину, систему управления, несущий винт, помещение для пассажиров или грузов»;

б) «подготовка специалистов высокой квалификации возможна лишь на базе всемерного развития вузовской науки, усиления связи вузовской, академической и отраслевой науки, обеспечения единства научной и учебной работы, широкого привлечения студентов к научным исследованиям»;

в) «хлеба уцелеют в различных климатических и погодных условиях тогда и только тогда, когда будут выполнены все мелиоративные работы; если хлеба не уцелеют, то фермеры обанкротятся и оставят фермы; следовательно, необходимо выполнить все мелиоративные работы».

г) «если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я опоздаю на работу; если я опоздаю на работу и стану огорчаться, то я не попадусь на глаза моему начальнику; если я не сделаю в срок важную работу, то я начну огорчаться и попадусь на глаза моему начальнику. Следовательно, если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я сделаю в срок важную работу».

11. Записать символически следующее высказывание: “ Для того чтобы натуральное число x было нечетным, достаточно, чтобы x было простым и больше двух”.

12. Построить ПФ, задающую булеву функцию, которая принимает значение 1 только на наборах:

а) (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0),

б) (1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0),

в) (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1),

г) (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0).

13. Построить ПФ, задающую булеву функцию, которая принимает значение 0 только на наборах:

а) (0, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1),

б) (0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 1),

в) (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1),

г) (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0).

14. Являются ли полными следующие системы функций

а) **{↔, ¯}**, б) **{1, +, ∧}**,

в) {↔, ∧, 0}, г) $\{\rightarrow, \bar{}\}$.

15. С помощью метода Квайна найти минимальную ДНФ для следующих булевых функций

а) f(0,1,0)=f(1,0,0)=f(1,0,1)=0,

б) f(0,1,1)=f(1,0,0)=f(1,1,1)=0,

в) f(0,10,0)=f(0,0,1)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=1.

16. Определить МДФ (минимальную дизъюнктивную форму) для булевой функции $(X \rightarrow \overline{Z}) \wedge (\overline{Y} \leftrightarrow Z)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Емеличев В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников. М.: Наука, 1990. – 384 с.

2. Кристофидес Н. Теория графов: алгоритмический подход / Н. Кристофидес. М.: Мир, 1978. – 432 с.

3. Свами М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. М.: Мир, 1974. – 520 с.

4. Судоплатов С.В. Элементы дискретной математики / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. М.: ИНФРА-М, 2002. – 280 с.

5. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. СПб.: Питер, 2004. – 364 с.

6. Нефедов В.Н. Курс дискретной математики / В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. М.: Изд-во МАИ, 1992. – 262 с.

7. Гаврилов Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие, / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. – 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.

8. Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 256 с.

9. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. СП.: Лань, 2005. - 400 с.

10. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О.Е. Акимов. М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 376 с.

11. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы / Б.Н. Иванов М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 288 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Требования к уровню освоения содержания дисциплины	1
2.	Элементы теории множеств	1
3.	Элементы теории отношений	5
4.	Элементы теории графов	8
5.	Переключательные функции	16
	Библиографический список	25

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы
по дисциплине «Дискретная математика»
для студентов специальности 230104 «Системы автоматизированного проектирования»
очной и заочной форм обучения

Составитель
Собенина Ольга Валерьевна

В авторской редакции

Компьютерный набор О.В. Собениной

Подписано в печать 20.10.2009.
Формат 60х84/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л. 1,7. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 50 экз. “С”.
Зак. №

ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14