№ 662

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания и контрольные задания к типовому расчету №3 по курсу математики для студентов 1-го курса

Воронеж 2010

УДК 517
ББК 22161.я7

*Составители В.С. Муштенко
Л.В. Стенюхин
В.К. Евченко*

Неопределенный и определенный интегралы: метод. указания и контрольные задания к типовому расчету № 3 по курсу математики для студ. 1-го курса / Воронеж. гос. арх.-строит. ун-т; сост.: В.С. Муштенко, Л.В. Стенюхин, В.К. Евченко – Воронеж, 2010. – 48 с.

Методические указания содержат краткие сведения по интегральному исчислению и рекомендации по решению задач, входящих в расчетно-графические задания.

Приведены 25 вариантов заданий.

Предназначены для студентов 1-го курса всех специальностей.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517
ББК 22161.я7

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного архитектурно-строительного университета.

***Рецензент** – А.М.Дементьева, к.ф.-м.н., доц. кафедры высшей математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета*

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью данных методических указаний является оказание помощи студентам всех специальностей дневного обучения при изучении тем «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Несобственные интегралы», «Приложения определенных интегралов». В каждом разделе приводятся необходимые формулы, определения и образцы решения задач.

Методические указания содержат 25 вариантов, содержащих необходимый для выполнения типового расчета набор примеров и задач. Выполнение студентами типового расчета контролируется преподавателем. Типовой расчет выполняется в отдельной тетради, с четкими чертежами и рисунками, с кратким описанием решения задач и примеров.

Типовой расчет состоит из 9 задач:

<u>Первая задача</u>: найти неопределенные интегралы.

<u>Вторая задача</u>: вычислить определенные интегралы.

<u>Третья задача</u>: вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

<u>Четвертая задача</u>: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в декартовой системе координат. Фигуру изобразить на чертеже.

<u>Пятая задача</u>: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат или в параметрической форме. Фигуру изобразить на чертеже.

<u>Шестая задача</u>: вычислить объем тела, полученного при вращении фигуры, лежащей в плоскость XOY и ограниченной заданными линиями, вокруг оси (ось указана в задании). Фигуру изобразить на чертеже.

<u>Седьмая задача</u>: вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в декартовой системе координат.

<u>Восьмая задача</u>: вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярной системе координат или в параметрической форме.

<u>Девятая задача</u>: решить задачу на физические или механические приложения определенного интеграла.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом $\int f(x)dx$ от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$, то есть

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, а C - произвольная постоянная. Функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ - подынтегральным выражением.

1.2. Таблица неопределенных интегралов

Из формул дифференцирования основных элементарных функций можно получить таблицу неопределенных интегралов:

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$, $a = const$.
11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a = const$.
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$, $a = const$.
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C$, $k = const$.

1.3. Свойства неопределенного интеграла

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $k = const$.
5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Пример 1.1. Найти интеграл $\int\left(2\cos x + 3x^2 - \sqrt{x} + 4x + 5\right)dx$.

Решение. Применяя свойства (4) - (5) и формулы (6), (2), (1), получим цепочку равенств

$$\int\left(2\cos x + 3x^2 - \sqrt{x} + 4x + 5\right)dx =$$

$$= 2\int \cos x dx + 3\int x^2 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + 4\int x dx + 5\int dx =$$

$$= 2\sin x + 3\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 4\frac{x^2}{2} + 5x + C =$$

$$= 2\sin x + x^3 - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^2 + 5x + C.$$

Используем свойство (1) неопределенного интеграла для проверки:

$$\left(2\sin x + x^3 - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^2 + 5x + C\right)' =$$

$$= 2\cos x + 3x^2 - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2\cdot 2x + 5 =$$

$$= 2\cos x + 3x^2 - \sqrt{x} + 4x + 5.$$

Мы получили подынтегральную функцию. Следовательно, интеграл найден правильно.

1.4. Замена переменной в неопределенном интеграле

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

а) $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;$$

б) $u=\psi(x)$, где u - новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(u)du.$$

Пример 1.2. Найти интеграл $\int\sqrt{1+3x}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $1+3x$, то есть $x=\frac{t-1}{3}$, $dx=\frac{dt}{3}$. Тогда в силу *а)*

$$\int\sqrt{1+3x}dx=\int t^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}\sqrt{(1+3x)^3}+C.$$

Пример 1.3. Найти интеграл $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t=\sin x$, $dt=\cos xdx$. Тогда в силу *б)*

$$\int e^{\sin x}\cos xdx=\int e^t dt=e^t+C=e^{\sin x}+C.$$

1.5. Интегрированием по частям

Интегрированием по частям называется отыскание интеграла по формуле

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du,$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int u\,dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v\,du$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо подобен ему.

Для интегралов вида $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin\alpha x\,dx$, $\int P(x)\cos\alpha x\,dx$, где $P(x)$ - многочлен, за u следует принять $P(x)$, а за dv - соответственно выражения $e^{\alpha x}dx$, $\sin\alpha x\,dx$, $\cos\alpha x\,dx$. Для интегралов вида $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)arctg\,x\,dx$, $\int P(x)arcctg\,x\,dx$ за u принимаются соответственно $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg\,x$, $arcctg\,x$, а за dv - выражения $P(x)dx$.

Пример 1.4. Найти интеграл $\int x\cos x\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x\cos x\,dx=\left|\begin{matrix}u=x;du=dx;\\ dv=\cos x\,dx;v=\int dv=\int\cos x\,dx=\sin x+C\end{matrix}\right|=$$

$$=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C.$$

Пример 1.5. Найти интеграл $\int x^2\ln x\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x^2\ln x\,dx=\left|\begin{matrix}u=\ln x;du=\frac{dx}{x};\\ dv=x^2dx;v=\int dv=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C.$$

1.6. Для интегрирования выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Для интегрирования выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе, необходимо выделить полный квадрат по формуле

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Затем ввести новую переменную $t=x+\frac{b}{2a}$; $x=t-\frac{b}{2a}$; $dx=dt$ и попытаться свести полученный интеграл к табличным интегралам (10)-(13).

Пример 1.6. Найти интеграл $\int \frac{3x+5}{x^2-4x+13}dx$.

Решение. Выделим полный квадрат:

$$x^2-4x+13=(x-2)^2+9.$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2-4x+13}dx=\int \frac{3x+5}{(x-2)^2+9}dx=\left| \begin{matrix} t=x-2; x=t+2; \\ dx=dt \end{matrix} \right| =$$

$$=\int \frac{3(t+2)+5}{t^2+9}dt=\int \frac{3t+11}{t^2+9}dt=3\int \frac{t}{t^2+9}dt+11\int \frac{1}{t^2+3^2}dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2+9}dt+\frac{11}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right|+\frac{11}{3}arctg\frac{t}{3}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|+\frac{11}{3}arctg\frac{x-2}{3}+C.$$

1.7. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется неправильной.

Простейшими дробями называются правильные дроби вида:

1. $\frac{A}{x-a}$.

2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, где k - целое число, больше единицы.

3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, где n - целое число, больше единицы.

Во всех четырех случаях предполагается, что A, B, a, p, q - действительные числа.

Интегралы от простейших дробей первых трех типов соответственно равны:

1. $\int \frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$.

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$.

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$.

Интегрирование рациональной дроби следует проводить по следующей схеме:

а) если дробь неправильная, необходимо выделить целую часть, то есть представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=H(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $H(x)$ - многочлен, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь;

б) если дробь правильная, разложить знаменатель на линейные и квадратичные сомножители

$$Q(x)=(x-a)^k...(x^2+px+q)^m...,$$

где квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней;

в) правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}+...+$$
$$+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}+...,$$

где A_i, B_i, C_i - неизвестные коэффициенты, которые можно найти, приведя последнее равенство к общему знаменателю, а затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Пример 1.7. Найти интеграл $\int \frac{x^5 - x + 4}{x^4 - 1} dx$.

Решение. Выделим целую часть:

$$\frac{x^5 - x + 4}{x^4 - 1} = x + \frac{4}{x^4 - 1}.$$

Правильную дробь разложим по формуле

$$\frac{4}{x^4 - 1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю, приравняв числители, получим

$$4 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1),$$

$$4 = 4 = A(x^3 + x^2 + 1) + B(x^3 - x^2 + x - 1) + C(x^3 - x) + D(x^2 - 1),$$

$$4 = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D).$$

Приравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x в левой и правой частях, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ A-B+D=0, \\ A+B-C=0, \\ A-B-D=4. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-2$. Таким образом,

$$\int \frac{x^5 - x + 4}{x^4 - 1} dx = \int \left(x + \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)} - \frac{2}{(x^2+1)} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| - \ln|x+1| - 2arctgx + C.$$

1.8. Универсальная тригонометрическая подстановка

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R - рациональная функция, можно свести к интегралам от рациональной функции одной переменной с помощью так называемой универсальной тригонометрической подстановки:

$$t = tg\frac{x}{2},\ \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctg\, t,\ dx = d(2arctg\, t) = (2arctg\, t)' dt = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Пример 1.8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$.

Решение. Полагая $t = tg\frac{x}{2}$, получим

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2(1+t^2) + 1 - t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{3+t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

1.9. Интегрирование тригонометрических выражений

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^m x\, dx$ целесообразно разбить на два случая:

а) хотя бы один из показателей m или n - нечетное положительное число. Если m - нечетное число, то применяется подстановка $t = \cos x$. Если n - нечетное число, то применяется подстановка $t = \sin x$;.

б) оба показателя степени m и n - четные положительные числа. Тогда следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Пример 1.9. Найти интеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x\, dx$.

Решение. Полагая $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$, получим

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x\, dx = -\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot (-\sin x\, dx) =$$

$$= -\int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^4 x \cdot (-\sin x\, dx) = -\int (1 - t^2) \cdot t^4 dt = -\int (t^4 - t^6)\, dt =$$

$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

Пример 1.10. Найти интеграл $\int \cos^4 x\,dx$.

Решение.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right)+C$$

Интегралы вида $\int \sin\alpha x\cdot\cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x\cdot\sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x\cdot\cos\beta x dx$ можно легко решить, применив формулы тригонометрии:

$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\right],$$

$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right],$$

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x\right].$$

Пример 1.11. Найти интеграл $\int \sin 7x\cdot\cos 3x\,dx$.

Решение.

$$\int \sin 7x\cdot\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 10x+\sin 4x)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 10x}{10}-\frac{\cos 4x}{4}\right)+C.$$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c\in(a,b)$.
4. $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

5. $\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx$.
6. Если $f(x)$ - нечетная функция на отрезке $[-a,a]$, то есть $f(-x)=-f(x)$, где $x\in[-a,a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Если $f(x)$ - четная функция на отрезке $[-a,a]$, то есть $f(-x)=f(x)$, где $x\in[-a,a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

2.2. Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке. Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, существует на этом отрезке неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x)+C$ и имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

При вычислениях эту формулу обычно пишут в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где символ – «подстановка от a до b» - обозначает ту же самую разность $F(b)-F(a)$.

Пример 2.1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл $\int_{-1}^{2} x^3 dx$.

Решение.

$$\int_{-1}^{2} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4} = \frac{16}{4}-\frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

Пример 2.2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi$.

<u>Решение.</u> Преобразуем подынтегральное выражение по формуле $\cos^2\varphi=\dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

<u>2.3</u> Замена переменной в определенном интеграле

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и пусть:

1) функция $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, когда новая переменная t меняется от α до β;
2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Тогда имеет место следующее правило замены переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

Первое условие обеспечивает непрерывность функции под знаком интеграла в правой части равенства.

Монотонность функции $x=\varphi(t)$ нужна для того, чтобы при изменении t от α до β соответствующее значение $x=\varphi(t)$ не вышло за пределы отрезка $[a,b]$, где функция $f(x)$ может быть не задана.

Второе условие устанавливает соответствие между пределами интегрирования до и после замены переменной по формуле $x=\varphi(t)$.

Пример 2.3. Вычислить $\int\limits_4^9\dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

<u>Решение.</u> Перейдем к новой переменной интегрирования, полагая $x=t^2$. При этом новая переменная выражается через старую так: $t=\sqrt{x}$.

Так как старая переменная меняется в пределах от 4 до 9, то новая переменная будет меняться от 2 до 3, так как при $x=4$ $t=2$, при $x=9$ $t=3$.

Пределы изменения для новой переменной удобно находить при помощи следующей таблицы: $\begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9\\ \hline t & 2 & 3\end{array}$, а все преобразования удобно записывать в фигурных скобках. Тогда получаем

$$\int\limits_4^9\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\left|\begin{array}{c} x=t^2,\ \ t=\sqrt{x},\\ dx=2tdt,\\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9\\ \hline t & 2 & 3\end{array}\end{array}\right|=\int\limits_2^3\frac{2dt}{1+t}=2\int\limits_2^3\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=$$

$$=2\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^3=2+\ln\frac{9}{16}.$$

При замене переменной часто удобно пользоваться не подстановкой $x=\varphi(t)$ для перехода к новой переменной t, а, наоборот, обозначить новой переменной $u=\psi(x)$. В этом случае новые пределы определяют по формулам $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$.

Пример 2.4. Вычислить $\int\limits_1^e\dfrac{(\ln x)^2\,dx}{x}$.

<u>Решение.</u>

$$\int\limits_1^e\frac{(\ln x)^2\,dx}{x}=\left|\begin{array}{c} u=\ln x;\\ \dfrac{dx}{x}=d(\ln x)=du;\\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & e\\ \hline u & 0 & 1\end{array}\end{array}\right|=\int\limits_0^1 u^2du=\frac{u^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

2.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то имеет место формула

$$\int\limits_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\,du\,,$$

где $uv\Big|_a^b=u(b)v(b)-u(a)v(a)$.

Пример 2.5. Найти интеграл $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_0^{\pi/2} x\cos xdx = \left| \begin{matrix} u = x; du = dx; \\ dv = \cos xdx; v = \int dv = \int \cos xdx = \sin x + C \end{matrix} \right| =$$

$$= x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin xdx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример 2.5. Найти интеграл $\int_0^1 x\,arctgx\,dx$.

Решение.

$$\int_0^1 x\,arctgx\,dx = \left| \begin{matrix} u = arctg\,x; du = d(arctgx) = \dfrac{dx}{1+x^2}; \\ dv = xdx; v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^2)}dx = \frac{1}{2}arctg1 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)}dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}arctg\,x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Интегралы с бесконечными пределами или несобственные интегралы первого рода

Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $a \le x < +\infty$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным с бесконечным пределом и он вычисляется по формуле

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\left[F(b) - F(a)\right],$$

где $F'(x) = f(x)$.

Если предел в правой части равенства существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае он называется расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл с нижним бесконечным пределом и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\left[F(b) - F(a)\right],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx.$$

Пример 3.1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^6}$.

Решение.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^6} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{(x+1)^6} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b (x+1)^{-6}d(x+1) = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^{-5}}{-5}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{-5(x+1)^5}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{-5(b+1)^5} + \frac{1}{5}\right] = \frac{1}{5},$$

и, следовательно, несобственный интеграл сходится.

Пример 3.2. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение.

$$\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 x^{-\frac{2}{3}}dx = \lim_{a\to-\infty}\left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_a^1 = \lim_{a\to-\infty}\left[3 - 3\sqrt[3]{a}\right]_a^1 = +\infty$$

и, следовательно, несобственный интеграл расходится.

Пример 3.3. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Это интеграл с обоими бесконечными пределами. Так как подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ четная, то по свойству 7 определенного интеграла получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Тогда $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty} arctg\, x\Big|_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty} arctg\, b=\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$ и, следовательно, несобственный интеграл сходится.

3.2. Интегралы от неограниченных функций или несобственные интегралы второго рода

Если в некоторой точке «c» отрезка $[a,b]$ функция $y=f(x)$ имеет бесконечный разрыв, то есть $f(c)=\infty$, $a<c<b$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом от неограниченной функции и он вычисляется по формуле:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\delta\to0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Если точка «c» является одним из концов отрезка $[a,b]$, то есть $c=a$ или $c=b$, то имеем соответственно

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,\quad \text{если}\quad f(b)=\infty,$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx,\quad \text{если}\quad f(a)=\infty.$$

Несобственный интеграл от неограниченной функции называется сходящимся, если существуют и конечны пределы в правой части указанных формул, и расходящимися, если не существует хотя бы одни из них.

Пример 3.4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не определена и не ограничена в точке $x=1$, так как $f(x)=\infty$, поэтому данный интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции.

Для вычисления этого интеграла применим формулы

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0\right]=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример 3.5. Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ в точке обращается в бесконечность, следовательно, данный интеграл несобственный.

Тогда

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}=\lim_{\delta\to0}\int\limits_\delta^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}=\lim_{\delta\to0}\int\limits_\delta^{\pi/2}\frac{d\sin x}{\sin^2 x}=\lim_{\delta\to0}\left(-\frac{1}{\sin x}\right)\Bigg|_\delta^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\lim_{\delta\to0}\left(-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sin\delta}\right)=\lim_{\delta\to0}\left(-1+\frac{1}{\sin\delta}\right)=\infty,$$

так как $\frac{1}{\sin\delta}\to\infty$ при $\delta\to0$, и, следовательно, несобственный интеграл расходится.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

4.1. Площадь плоской криволинейной фигуры

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y=f(x)$ ($f(x)\ge0$), слева и справа соответственно прямыми $x=a$ и $x=b$, а снизу осью OX, вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \le f_2(x)$) и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx \ .$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью OX, выражается формулой

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt\,,$$

где α и β определяются из уравнений $a = \varphi(\alpha)$, $b = \psi(\beta)$.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi\,.$$

4.2. Длина дуги кривой

Длина дуги кривой, заданной уравнением в явном виде $y = f(x)$, где $a \le x \le b$, вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx\,.$$

Длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, выражается формулой

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}\,dt\,.$$

Если кривая задана уравнениями в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги кривой находится по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho)^2 + (\rho')^2}\,dt\,.$$

4.3. Объем тела вращения

Если криволинейная трапеция, имеющая основанием отрезок $a \le x \le b$, вращается вокруг оси OX, то объем полученного тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx\ ,$$

где $y = f(x)$ - уравнение кривой, ограничивающей криволинейную трапецию сверху.

Если тело получено от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \le f_2(x)$) и прямыми $x = a$ и $x = b$, то объем тела вращения равен

$$V = \pi\int_a^b \left[(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2\right]dx\,.$$

Если криволинейная трапеция, имеющая основанием отрезок $c \le y \le d$, вращается вокруг оси OY, то объем такого тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2\,dy\ ,$$

где $x = \varphi(y)$ - уравнение кривой, ограничивающей криволинейную трапецию справа.

Если тело получено от вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривыми $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$ и прямыми $y = c$ и $y = d$, то объем тела вращения равен

$$V = \pi\int_c^d \left[(\varphi_2(y))^2 - (\varphi_1(y))^2\right]dy\,.$$

4.4. Некоторые физические задачи

4.4.1. Путь, пройденный телом

Если материальная точка движется по некоторой прямой со скоростью $v = f(t)$, то путь S, пройденный ею за промежуток времени $\alpha \le t \le \beta$, вычисляется по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt\,.$$

4.4.2. Работа переменной силы

Пусть под действием силы $F = f(x)$ материальная точка движется по прямой. Работа A этой силы на участке пути $[a,b]$ определяется по формуле

$$A = \int_a^b f(x)dx .$$

4.4.2 Давление жидкости

Для вычисления силы давления жидкости используется закон Паскаля, согласно которому давление жидкости на площадку равно ее площади S, умноженной на глубину погружения h, на плотность ρ и ускорение силы тяжести g, то есть

$$P = \rho\, g\, h\, S .$$

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

1. 1) $\int x\sqrt{x^2-5}\,dx$;

2) $\int \frac{5}{1-2x}dx$;

3) $\int \sin(1-3x)\,dx$;

4) $\int \sqrt{\cos^3 x}\sin x\,dx$;

5) $\int x^2 e^x dx$;

6) $\int \ln x\,dx$;

7) $\int \frac{1}{x^3+x^2}dx$;

8) $\int \frac{x^3}{x^2+x+1}dx$;

9) $\int \frac{5x-1}{3x^2-2x+1}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt{x}+1)}dx$;

12) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$;

13) $\int \frac{\cos^3 x}{4+\sin x}dx$;

14) $\int \sin 3x\cdot\cos 2x\,dx$.

2. 1) $\int_2^3 y\ln(y-1)\,dy$; 2) $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$.

3. 1) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{16x^4+1}dx$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

4. $y = x^2$, $y = 3-2x$.

5. $\rho = 3\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

6. $y = 2x - x^2$, $y = x$, (OX).

7. $y = x^{\frac{3}{2}}$ от $x = 0$ до $x = 5$.

8. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.

9. Скорость тела задается формулой $v = \sqrt{1+t}$ *м/с*. Найти путь, пройденный телом за первые *10 с* после начала движения.

Вариант 2

1. 1) $\int x\sqrt{2-3x^2}\,dx$;

2) $\int \frac{x^2}{x^3-2}\,dx$;

3) $\int \cos(2+6x)\,dx$;

4) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

5) $\int xe^{-x}dx$;

6) $\int (x+1)\ln x\,dx$;

7) $\int \frac{x-1}{x^2+x}\,dx$;

8) $\int \frac{x^2}{x^2+x+1}\,dx$;

9) $\int \frac{1}{3x^2-2x+4}\,dx$;

10) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$;

11) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}\,dx$;

12) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$;

13) $\int \sin^2 3x\,dx$;

14) $\int \sin 3x \cdot \sin x\,dx$.

2. 1) $\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2 x\,dx$.

3. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$; 2) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$.

4. $y=x^2$, $y=4x-3$.

5. $\rho=3(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

6. $y=2x-x^2$, $y=0$, (OX).

7. $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$.

8. $x=2(\cos t+t\sin t)$, $y=2(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le\pi$.

9. Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение конического кургана, радиус основания которого $R=2м$, а высота $H=3м$, из однородного строительного материала плотностью $\delta=2{,}5т/м^3$.

Вариант 3

1. 1) $\int x^2\sqrt{2+5x^3}\,dx$;

2) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\int e^{2+7x}dx$;

4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^4}}\,dx$;

5) $\int x^2e^x dx$;

6) $\int \ln(x+2)\,dx$;

7) $\int \frac{1}{1-x^3}\,dx$;

8) $\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$;

9) $\int \frac{2x+5}{x^2-6x+10}\,dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{2-2x-x^2}}\,dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-5}\,dx$;

12) $\int \frac{dx}{\cos x+\sin x}$;

13) $\int \sin^4 x\,dx$;

14) $\int \sin 8x\cdot\cos x\,dx$.

2. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+3}\,dx$.

3. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{(x^3+8)^5}}\,dx$; 2) $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

4. $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{5}{2}x-2$.

5. $\rho=4\sin 2\varphi$ (четырехлепестковая роза).

6. $y=4x-2x^2$, $y=0$, (OX).

7. $y=\ln\sin x$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{2\pi}{3}$.

8. $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$.

9. Вычислить силу давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что его основание *8м*, высота *12м*, верхнее основание параллельно поверхности воды и находится на глубине *5м*. Плотность $\delta=1\,кг/м^3$.

Вариант 4

1. 1) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$;

2) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

4) $\int \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

5) $\int arctg\, x\, dx$;

6) $\int \cos(\ln x)\, dx$;

7) $\int \frac{1}{x+x^3}dx$;

8) $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$;

9) $\int \frac{6x+4}{x^2-8x+4}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+2}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$;

12) $\int \frac{dx}{\cos x-\sin x}$;

13) $\int \sin^2 x\cdot\cos^2 x\, dx$;

14) $\int \sin 2x\cdot\cos 4x\, dx$.

2. 1) $\int\limits_0^{\pi} x^2\cdot\sin x\, dx$; 2) $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{1}{e^x-1}dx$.

3. 1) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\pi(x^2+4x+5)}dx$; 2) $\int\limits_0^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{64-x^6}}$.

4. $y=x^2$, $y=6-5x$.

5. $\rho=2(1-\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

6. $y=4x-2x^2$, $y=x$, (OX).

7. $y=\frac{x^2}{2}$ от $x=0$ до $x=2$.

8. $x=5\cos^2 t$, $y=5\sin^2 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

9. Скорость движения материальной точки $v=4te^{-t^2}$ *м/с*. Какой путь пройдет точка от начала движения до полной остановки?

Вариант 5

1. 1) $\int \frac{2x+2}{x^2+2x}dx$;

2) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$;

4) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$;

5) $\int x\, arctg\, x\, dx$;

6) $\int x\cdot 2^x dx$;

7) $\int \frac{x^2+1}{x-x^3}dx$;

8) $\int \frac{x^3+1}{x^2+x}dx$;

9) $\int \frac{1}{1-3x-x^2}dx$;

10) $\int \frac{5x-1}{\sqrt{6+4x-x^2}}dx$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{x}-1)}dx$;

12) $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$;

13) $\int \cos^5 x\, dx$;

14) $\int \cos 3x\cdot\cos 5x\, dx$.

2. 1) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\arccos 2x\, dx$; 2) $\int\limits_0^{5}\frac{1}{2x+\sqrt{3x+1}}dx$.

3. 1) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}dx$; 2) $\int\limits_{0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

4. $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{x}{2}+3$.

5. $\rho=4\cos 3\varphi$.

6. $y=3x-x^2$, $y=0$, (OX).

7. $y=\sqrt{(x-1)^3}$ от $x=1$ до $x=6$.

8. $x=9(t-\sin t)$, $y=9(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

9. Вычислить силу давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что его основание *2м*, высота *3м*, верхнее основание параллельно поверхности воды и находится на глубине *4м*. Плотность $\delta=1\,кг/м^3$.

Вариант 6

1. 1) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$;

2) $\int \frac{x^2 + \frac{1}{3}}{x^3 + x} dx$;

3) $\int tg\, x\, dx$;

4) $\int \frac{x}{x^4 - 3} dx$;

5) $\int x^2\, arctg\, x\, dx$;

6) $\int x \cdot e^{3x} dx$;

7) $\int \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2} dx$;

8) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$;

9) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$;

10) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 16x + 60}} dx$;

11) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}} dx$;

12) $\int \frac{\sin x\, dx}{3 + \cos x}$;

13) $\int \frac{1}{tg^3 x} dx$;

14) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x\, dx$.

2. 1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin 2x\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{5} \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$.

3. 1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+4)^4}} dx$; 2) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\ln(3x-1)\, dx}{3x - 1}$.

4. $y = 2x^2 + \frac{x}{2}$, $y = \frac{5x}{2}$.

5. $\rho = 2\varphi$, один виток спирали Архимеда и полярная ось.

6. $xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$, (OX).

7. $y = 1 - \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$.

8. $x = 7(t - \sin t)$, $y = 7(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

9. Скорость тела задается формулой $v = 3t^2 + 2t + 1$ *м/с*. Найти путь, пройденный телом за первые *3 с* после начала движения.

Вариант 7

1. 1) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$;

2) $\int \frac{x^5}{x^6 + 10} dx$;

3) $\int ctg\, x\, dx$;

4) $\int \frac{x + 5}{\sqrt{6 - x^2}} dx$;

5) $\int x^2 \sin x\, dx$;

6) $\int (x^2 + 9) \cdot \ln x\, dx$;

7) $\int \frac{x}{(x^2 + 3)(x - 1)} dx$;

8) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$;

9) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4x + 10}} dx$;

10) $\int \frac{8}{4x^2 + 16x - 20} dx$;

11) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{2 - \sqrt[3]{x}} dx$;

12) $\int \sin^3 2x\, dx$;

13) $\int tg^4 x\, dx$;

14) $\int \sin 3x \cdot \sin 5x\, dx$.

2. 1) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} x \cdot e^{-2x} dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx$.

3. 1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{4}{x(1 + \ln^2 x)} dx$; 2) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3 - 4x}}$.

4. $y = 3x^2 + x$, $y = 4x$.

5. $\rho = 4\sin^2\varphi$.

6. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$, (OX).

7. $y = \sqrt{(x+1)^3}$ от $x = -1$ до $x = 4$.

8. $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$.

9. Определить работу A, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из прямого кругового цилиндра. Радиус основания цилиндра $R = 2\,м$, высота $h = 4\,м$.

Вариант 8

1. 1) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$;

2) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$;

3) $\int \frac{arcctg^2 x}{x^2+1}\,dx$;

4) $\int \sin(2x-7)\,dx$;

5) $\int x^2 \arcsin x\,dx$;

6) $\int (x+2)\cdot\cos 4x\,dx$;

7) $\int \frac{x-2}{x^3+x^2+x-3}\,dx$;

8) $\int \frac{2x^5-2x^3+x^2}{1-x^4}\,dx$;

9) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$;

10) $\int \frac{8}{x^2-6x+25}\,dx$;

11) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+3}}\,dx$;

12) $\int \frac{1}{2-3\cos x+\sin x}\,dx$;

13) $\int \cos^2 3x \sin 3x\,dx$;

14) $\int \cos 4x\cdot\cos 5x\,dx$.

2. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2 x\,dx$; 2) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx$.

3. 1) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1-x^4}$.

4. $y=x^2$, $y=2-x^2$.

5. $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}$.

6. $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$, (OX).

7. $y=\sqrt{x^3}$ от $x=0$ до $x=4$.

8. $x=7(t-\sin t)$, $y=7(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

9. Определить работу A, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого равен $20\,м$, если плотность воды $\delta = 1\,кг/м^3$.

Вариант 9

1. 1) $\int x^3\cos(x^4)\,dx$;

2) $\int \frac{x+4}{\sqrt{3+2x^2}}\,dx$;

3) $\int ctg 5x\,dx$;

4) $\int \sqrt[4]{5-3x}\,dx$;

5) $\int \ln^2 x\,dx$;

6) $\int (x+2)\cdot e^{4x}\,dx$;

7) $\int \frac{x+6}{x(x^2+x+2)}\,dx$;

8) $\int \frac{x^3+x-1}{x^2+x-2}\,dx$;

9) $\int \frac{3}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,dx$;

10) $\int \frac{x}{2x^2-12x+15}\,dx$;

11) $\int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}\,dx$;

12) $\int \frac{1}{-2\cos x+\sin x}\,dx$;

13) $\int \sin^2 5x\,dx$;

14) $\int \sin 4x\cdot\cos 15x\,dx$.

2. 1) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,dx$.

3. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^5}}$.

4. $y=\sin x$, $y=0$.

5. $x=3\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

6. $y=x^2$, $y^2=x$, (OX).

7. $y=1-\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$.

8. $\rho=\sin^3\frac{\varphi}{3}$ $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

9. Скорость тела задается формулой $v=2t^2-t+3$ *м/с*. Найти путь, пройденный телом за первые *5 с* после начала движения.

Вариант 10

1. 1) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$;

2) $\int \frac{2x+1}{3-5x^2} dx$;

3) $\int e^{5x-6} dx$;

4) $\int x \sin(1-x^2)\, dx$;

5) $\int arctg\sqrt{x}\, dx$;

6) $\int (2x+1)\cdot \cos 7x\, dx$;

7) $\int \frac{x+3}{x^4-1} dx$;

8) $\int \frac{2-x^2}{x^2+1} dx$;

9) $\int \frac{8x+3}{\sqrt{27+12x-4x^2}} dx$;

10) $\int \frac{1}{x^2-8x+15} dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-2} dx$;

12) $\int \frac{1}{5+2\cos x+\sin x} dx$;

13) $\int tg^3 2x\, dx$;

14) $\int \cos 4x \cdot \cos 5x\, dx$.

2. 1) $\int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x} dx$;   2) $\int_4^9 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$.

3. 1) $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+5)^7}} dx$;   2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$.

4. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

5. $\rho = 4\sin^2 \varphi$.

6. $y = 2x - x^2$, $y = 0$, (OX).

7. $y = \ln\sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

8. $\rho = 3\cos\varphi$.

9. Материальная точка движется со скоростью $v = 3t^2 - 2t + 2$ *м/с*. Какой путь она пройдет за первые *5 с* после начала движения?

Вариант 11

1. 1) $\int \frac{tg^3 x+1}{\cos^2 x} dx$;

2) $\int \frac{3-9x}{\sqrt{3+x^2}} dx$;

3) $\int e^{3-5x} dx$;

4) $\int x\cos(1-4x^2)\, dx$;

5) $\int \arccos 2x\, dx$;

6) $\int (1-x)\cdot \sin 3x\, dx$;

7) $\int \frac{x}{x^4+6x^2+5} dx$;

8) $\int \frac{1+x^3}{x^3-x^2} dx$;

9) $\int \frac{5x+3}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$;

10) $\int \frac{1}{x^2+3x+3} dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}-6}{\sqrt{x^2+9}} dx$;

12) $\int \frac{1}{2+\cos x} dx$;

13) $\int \sin^5 2x\, dx$;

14) $\int \sin 7x \cdot \sin 5x\, dx$.

2. 1) $\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x\, dx$;   2) $\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$.

3. 1) $\int_0^{+\infty} \frac{arctg\, x}{\pi(1+x^2)} dx$;   2) $\int_0^1 \frac{2x\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

4. $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

5. $\rho = 4(1+\cos\varphi)$.

6. $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ (OX).

7. $y = \sqrt[2]{x^3}$ от $x = 0$ до $x = 4$.

8. $\rho = 5\sin\varphi$.

9. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на *0,05 м*, если известно, что сила, растягивающая пружину на x *м*, равна $F(x) = kx$, где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от упругости пружины, и что для растяжения пружины на *0,01 м* необходима сила *1 кг*.

Вариант 12

1. 1) $\int \cos^3 2x \cdot \sin 2x\, dx$;

2) $\int \frac{3+x}{10-x^2}\, dx$;

3) $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\, dx$;

4) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\, dx$;

5) $\int \sin(\ln x)\, dx$;

6) $\int \frac{x-2}{e^x}\, dx$;

7) $\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\, dx$;

8) $\int \frac{4+x^3}{x^3-x}\, dx$;

9) $\int \frac{x+3}{5+x-x^2}\, dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+12}}\, dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+5}\, dx$;

12) $\int \frac{1}{2+4\cos x-3\sin x}\, dx$;

13) $\int \sin^4 x\, dx$;

14) $\int \sin 7x \cdot \cos 8x\, dx$.

2. 1) $\int_0^1 arctg\sqrt{x}\, dx$;   2) $\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}\, dx$.

3. 1) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\, dx$;   2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x}}$.

4. $y^2 = 4x$, $x = 4$.

5. $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$.

6. $y = x+2$, $x = 2$, $y = 1$ (OX).

7. $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$.

8. $\rho = 2(1-\cos\varphi)$.

9. Определить работу A, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму полушария радиусом $R = 4\,м$, если плотность воды $\delta = 1\,кг/м^3$.

Вариант 13

1. 1) $\int \sin(2x-9)\, dx$;

2) $\int \frac{0{,}5x+1}{x^2+x}\, dx$;

3) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

4) $\int tg\, 3x\, dx$;

5) $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$;

6) $\int (2x+5)\sin x\, dx$;

7) $\int \frac{x^2+6}{x(x^2+4x+5)}\, dx$;

8) $\int \frac{x^3+1}{x^3+x^2-x}\, dx$;

9) $\int \frac{x-5}{1+x+x^2}\, dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x+7}}\, dx$;

11) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\, dx$;

12) $\int \frac{1}{\sin x - 4\cos x}\, dx$;

13) $\int \sin^2 3x\, dx$;

14) $\int \sin 6x \cdot \sin 8x\, dx$.

2. 1) $\int_0^1 (x+3)e^{-2x}\, dx$;   2) $\int_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+9}}\, dx$.

3. 1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}\, dx$;   2) $\int_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

4. $y = x^2$, $y = 1$.

5. $x = 4\cos t$, $y = 5\sin t$.

6. $y = \frac{x}{2}+3$, $x = 4$, $y = 1$ (OX).

7. $y = \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

8. $\rho = 3\cos\varphi$.

9. Материальная точка движется со скоростью $v = t^2 - 2t + 2$ м/с. Какой путь она пройдет за первые 7 $с$ после начала движения?

Вариант 14

1. 1) $\int \cos(2-9x)\,dx$;

2) $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx$;

3) $\int \frac{arctgx}{x^2+1}\,dx$;

4) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$;

5) $\int \ln(x+5)\,dx$;

6) $\int x\cos(1-x)\,dx$;

7) $\int \frac{4}{x(x^2+2x+2)}\,dx$;

8) $\int \frac{x^2+1}{x^2+x-6}\,dx$;

9) $\int \frac{4x-5}{10+6x+x^2}\,dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{5-2x+x^2}}\,dx$;

11) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$;

12) $\int \frac{1}{8+5\sin x-4\cos x}\,dx$;

13) $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$;

14) $\int \sin 2x\cdot\cos 6x\,dx$.

2. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\sin 4x\,dx$; 2) $\int\limits_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$.

3. 1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$.

4. $y^2=9x$, $y=3x$.

5. $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$.

6. $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $x=1$, $y=0$ (OX).

7. $y=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ от $x=0$ до $x=1$.

8. $\rho=3\sin\varphi$.

9. Материальная точка движется со скоростью $v=t\cdot e^{-0{,}5t}$ *м/с*. Какой путь она пройдет за первые 2 *с* после начала движения?

Вариант 15

1. 1) $\int ctg\,5x\,dx$;

2) $\int \frac{1}{3x+5}\,dx$;

3) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

4) $\int e^{x^3+5}x^2\,dx$;

5) $\int x\ln(x+5)\,dx$;

6) $\int (2+x)e^{1-x}\,dx$;

7) $\int \frac{4}{x^2(x+2)}\,dx$;

8) $\int \frac{x^3+1}{x^2+2x-6}\,dx$;

9) $\int \frac{1}{5+2x+x^2}\,dx$;

10) $\int \frac{2x-6}{\sqrt{5-2x-x^2}}\,dx$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}\,dx$;

12) $\int \frac{1}{1+\sin x-\cos x}\,dx$;

13) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$;

14) $\int \cos 4x\cdot\cos 6x\,dx$.

2. 1) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \arcsin(1-x)\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9}$.

3. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9}\,dx$; 2) $\int\limits_0^3 \frac{\sqrt[3]{9}x\,dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

4. $y^2=4x$, $x=1$.

5. $\rho=3\sqrt{\cos\varphi}$.

6. $y=\sin x$, $y=0$ (OX).

7. $y=(x-1)^{\frac{3}{2}}$ от $x=1$ до $x=5$.

8. $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

9. Шар лежит на дне бассейна глубиной $h=8\,м$. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы извлечь шар из воды, если его радиус $R=2\,м$ и удельный вес шара и воды равен *1*.

Вариант 16

1. 1) $\int x\sin(5x^2+3)\,dx$;

2) $\int \frac{1}{2x-7}\,dx$;

3) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$;

4) $\int \frac{2x-3}{x^2+5}\,dx$;

5) $\int x\cos(4x+5)\,dx$;

6) $\int (2+x+x^2)\ln x\,dx$;

7) $\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$;

8) $\int \frac{2x^3+1}{x^2+2x+7}\,dx$;

9) $\int \frac{3x-2}{x^2-8x-8}\,dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{3-6x-x^2}}\,dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$;

12) $\int \frac{1}{5+3\sin^2 x}\,dx$;

13) $\int \sin^3 2x\,dx$;

14) $\int \cos 4x\cdot\sin 5x\,dx$.

2. 1) $\int\limits_0^1 xe^x\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

3. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}}$.

4. $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{3}{2}-x$.

5. $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$.

6. $y=2-\frac{x^2}{2}$, $x+y=2$, (OX).

7. $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$.

8. $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

9. Материальная точка движется со скоростью $v=t\cdot 2^{-0.05t}$ *м/с*. Какой путь она пройдет за первые 2 *с* после начала движения?

Вариант 17

1. 1) $\int 4x^3\sqrt{x^4-5}\,dx$;

2) $\int \frac{5}{1-6x}\,dx$;

3) $\int \sin(1+3x)\,dx$;

4) $\int \sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx$;

5) $\int x^2e^{-x}\,dx$;

6) $\int (x+1)\ln x\,dx$;

7) $\int \frac{x+5}{x^3+x^2}\,dx$;

8) $\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}\,dx$;

9) $\int \frac{x-1}{3x^2-2x-4}\,dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}+5}\,dx$;

12) $\int \frac{dx}{5-\cos^2 x}$;

13) $\int \frac{1}{ctg^2 x}\,dx$;

14) $\int \cos 3x\cdot\cos 2x\,dx$.

2. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\,dx$; 2) $\int\limits_1^{2} \frac{2x-1}{x^2+7}\,dx$.

3. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+16}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

4. $y=x^2$, $y=5x-4$.

5. $\rho=3\cos 2\varphi$.

6. $y=x-x^2$, $y=0$, (OX).

7. $y=x^{\frac{3}{2}}$ от $x=0$ до $x=3$.

8. $x=2\cos t$, $y=2\sin t$.

9. Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение конического кургана, радиус основания которого $R=3м$, а высота $H=4м$, из однородного строительного материала плотностью $\delta=3{,}5\,кг/м^3$.

Вариант 18

1. 1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}dx$;

2) $\int \frac{1}{2+5x}dx$;

3) $\int e^{2-3x}dx$;

4) $\int \frac{1}{(\arcsin^2 x)\sqrt{1-x^2}}dx$;

5) $\int x^2 \cos x\, dx$;

6) $\int (x^2+4x+2)\ln x\, dx$;

7) $\int \frac{x+1}{x^3-8}dx$;

8) $\int \frac{x^2+1}{x^2+x+1}dx$;

9) $\int \frac{x}{x^2-2x+10}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+11}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}dx$;

12) $\int \frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}$;

13) $\int \cos^3 4x\, dx$;

14) $\int \sin 4x \cdot \sin 2x\, dx$.

2. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}dx$;   2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x-3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. 1) $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x-1)^2}dx$;   2) $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt[3]{1-x^5}}dx$.

4. $y=\frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2}$, $y=2x$.

5. $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$.

6. $y=2-x^2$, $y=x^2$, (OX).

7. $y=x^{\frac{3}{2}}$ от $x=1$ до $x=4$.

8. $\rho=6(1-\cos\varphi)$.

9. Вычислить силу давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что его основание 9*м*, высота 13*м*, верхнее основание параллельно поверхности воды и находится на глубине 4*м*. Плотность $\delta=1{,}5\ кг/м^3$.

Вариант 19

1. 1) $\int \cos\left(\frac{9}{2}x+4\right)dx$;

2) $\int \frac{1}{2-7x}dx$;

3) $\int x^5 e^{2-3x^6}dx$;

4) $\int \frac{arctg^2 5x}{1+25x^2}dx$;

5) $\int x\sin(5x+3)\, dx$;

6) $\int \arccos 2x\, dx$;

7) $\int \frac{4x^2-2}{x^4-x^2}dx$;

8) $\int \frac{x^4+1}{x^4+5x^2+4}dx$;

9) $\int \frac{3x+8}{x^2-4x+8}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}dx$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt[6]{x}+1}dx$;

12) $\int \frac{dx}{5\cos^2 x+3\sin^2 x}$;

13) $\int \sin^2 5x\, dx$;

14) $\int \sin 8x \cdot \cos 2x\, dx$.

2. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot \sin x\, dx$;   2) $\int_0^{\ln 4} \frac{e^x}{e^x+6}dx$.

3. 1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{6x^2-5x+1}dx$;   2) $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx$.

4. $y=x^2$, $y=6-x$.

5. $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$.

6. $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$, (OX).

7. $y=1-\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{4}$.

8. $\rho=6\sin\varphi$.

9. Определить путь, пройденный телом за 6 секунд с начала движения, если скорость тела определяется формулой $v=\frac{t^3}{3}+2t-1$ *м/с*.

Вариант 20

1. 1) $\int \cos^8 x \cdot \sin x\, dx$;

2) $\int \frac{1+x}{5+x^2}\, dx$;

3) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$;

4) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

5) $\int \cos(\ln x)\, dx$;

6) $\int arctg\, 2x\, dx$;

7) $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)}\, dx$;

8) $\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}\, dx$;

9) $\int \frac{1}{2x^2-3x-6}\, dx$;

10) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-16x+70}}\, dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\, dx$;

12) $\int \frac{1}{7+4\cos x+4\sin x}\, dx$;

13) $\int \sin^4 9x\, dx$;

14) $\int \sin 6x \cdot \cos 8x\, dx$.

2. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x\, dx$;

2) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\, dx$.

3. 1) $\int_0^{+\infty} x e^{-3x}\, dx$;

2) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[7]{1-3x}}$.

4. $y = x^2 - \frac{2}{3}x$, $y = \frac{4}{3}x$.

5. $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$.

6. $xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$, (OX).

7. $y = \frac{3}{2}\sqrt{(3-x)^3}$ от $x = 0$ до $x = 2$.

8. $\rho = 4\cos\varphi$.

9. Определить работу A, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму полушара радиусом $R = 3{,}5\, м$, если плотность воды $\delta = 1{,}3\, кг/м^3$.

Вариант 21

1. 1) $\int \frac{ctgx+1}{\sin^2 x}\, dx$;

2) $\int \frac{1-x}{\sqrt{3+x^2}}\, dx$;

3) $\int e^{2x+5}\, dx$;

4) $\int x^3 \sin(x^4)\, dx$;

5) $\int \ln(x^2+1)\, dx$;

6) $\int (1+2x)\cdot \cos 2x\, dx$;

7) $\int \frac{8x}{(x^2+6x+5)(x+3)}\, dx$;

8) $\int \frac{6x^4}{(x^2-x)(x+2)}\, dx$;

9) $\int \frac{x+3}{\sqrt{8+4x-x^2}}\, dx$;

10) $\int \frac{1}{x^2+5x+9}\, dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}-6}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$;

12) $\int \frac{1}{\cos x - 3\sin x}\, dx$;

13) $\int \sin^2 2x \cos x\, dx$;

14) $\int \sin 7x \cdot \sin 5x\, dx$.

2. 1) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$;

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$.

3. 1) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{(4+x^2)^5}}\, dx$;

2) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}+3\right)} dx}{x^2}$.

4. $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

5. $\rho = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$.

6. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (OX).

7. $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ от $x = 0$ до $x = 1$.

8. $\rho = 3\cos^3 \frac{\varphi}{3}$.

9. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на *0,04 м*, если известно, что сила, растягивающая пружину на $x\, м$, равна $F(x) = kx$, где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от упругости пружины, и что для растяжения пружины на *0,01 м* необходима сила *21Н*.

Вариант 22

1. 1) $\int \sin\left(\frac{5}{12}x+3\right)dx$;

2) $\int \frac{1}{2x+5}dx$;

3) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx$;

4) $\int \frac{x-3}{x^2-8}dx$;

5) $\int (4x+5)\cos x\,dx$;

6) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$;

7) $\int \frac{1}{(x+5)(x+1)^2}dx$;

8) $\int \frac{x^3+3x+2}{x^2+1}dx$;

9) $\int \frac{x-2}{x^2-4x-8}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}dx$;

12) $\int \frac{1}{3\cos x-4\sin x}dx$;

13) $\int \cos^3 4x\,dx$;

14) $\int \cos 7x\cdot\sin 5x\,dx$.

2. 1) $\int_0^1 x^2 e^{x^3+1}dx$;

2) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+8}}$.

3. 1) $\int_0^{+\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}dx$;

2) $\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

4. $y=2x^2$, $y=8x-6$.

5. $x=3\cos t$, $y=3\sin t$.

6. $y=8x-2x^2$, $y=2x$, (OX).

7. $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$.

8. $\rho=8(1-\cos\varphi)$.

9. Материальная точка движется со скоростью $v=t\cdot 3^{-0,05t}$ *м/с*. Какой путь она пройдет за первые 2 *сек* после начала движения?

Вариант 23

1. 1) $\int \cos\left(\frac{10}{9}x+4\right)dx$;

2) $\int \frac{1}{2+5x}dx$;

3) $\int tg\,2x\,dx$;

4) $\int \frac{\arcsin^3 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx$;

5) $\int x\,arctg\,x\,dx$;

6) $\int (x^2+1)e^x dx$;

7) $\int \frac{4x^2+2}{x^4+4x^2}dx$;

8) $\int \frac{2x^5-2x+1}{1-x^4}dx$;

9) $\int \frac{2x+1}{x^2-8x+5}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x-9}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}dx$;

12) $\int \frac{dx}{5\cos x+3\sin x}$;

13) $\int \sin^2 4x\,dx$;

14) $\int \sin 8x\cdot\cos 2x\,dx$.

2. 1) $\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2-1}}dx$;

2) $\int_0^1 \frac{3x+4}{x^2+6}dx$.

3. 1) $\int_0^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}dx$;

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$.

4. $y=3x^2$, $y=18-15x$.

5. $\rho=2\sin\varphi$.

6. $y=3x-3x^2$, $y=0$, (OX).

7. $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{4}$.

8. $x=3\cos t$, $y=3\sin t$.

9. Скорость движения тела $v=5te^{-t^2}$ *м/с*. Какой путь пройдет тело от начала движения до полной остановки?

Вариант 24

1. 1) $\int \cos^3 x \cdot \sin x \, dx$;

2) $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} dx$;

3) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;

4) $\int \frac{\sqrt[4]{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

5) $\int \cos(\ln x) \, dx$;

6) $\int arctg \, x \, dx$;

7) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8} dx$;

8) $\int \frac{2x^5-2x^3-x^2}{1-x^4} dx$;

9) $\int \frac{1}{x^2-3x-6} dx$;

10) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-10x+5}} dx$;

11) $\int \frac{1}{3+\sqrt{x}} dx$;

12) $\int \frac{1}{7+\cos x+5\sin x} dx$;

13) $\int \sin^4 2x \, dx$;

14) $\int \sin 6x \cdot \cos 10x \, dx$.

2. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x \, dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2} dx$.

3. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{4+x^4} dx$; 2) $\int\limits_{\frac{1}{5}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-5x}}$.

4. $y = 4x^2 + x$, $y = 5x$.

5. $\rho = 5\varphi$ (один виток спирали Архимеда и полярная ось).

6. $y = 8 - x^2$, $y = x^2$, (OX).

7. $y = \frac{3}{2}\sqrt{(3-x)^3}$ от $x = 0$ до $x = 2$.

8. $\rho = 6\cos^3 \frac{\varphi}{3}$.

9. Найти массу земной атмосферы, полагая, что ее плотность ρ меняется с увеличением высоты по закону $\rho = \rho_0 e^{-ah}$, где h – расстояние от поверхности Земли до рассматриваемой точки (Земля считается шаром радиуса R).

Вариант 25

1. 1) $\int 2x\sqrt{x^2-5} \, dx$;

2) $\int \frac{5}{1+6x} dx$;

3) $\int \sin(5-3x) \, dx$;

4) $\int \frac{1}{(1+x^2) \, arctg^2 x} dx$;

5) $\int x \cos(2x+1) \, dx$;

6) $\int (x^2+3x+1) \ln x \, dx$;

7) $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2} dx$;

8) $\int \frac{x^3}{x^2+2x+1} dx$;

9) $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x-4} dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2} dx$;

12) $\int \frac{dx}{5\cos x - 2\sin x}$;

13) $\int \frac{1}{tg^3 x} dx$;

14) $\int \cos 3x \cdot \cos 5x \, dx$.

2. 1) $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} dx$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{2x-5}{x^2+1} dx$.

3. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+16)^3}} dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{1}{7}} \frac{dx}{\sqrt[5]{1-7x}}$.

4. $y = x^2 - \frac{x}{2}$, $y = \frac{3}{2}x$.

5. $\rho = 1 - \cos\varphi$.

6. $y = 6x - x^2$, $y = 0$, (OX).

7. $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ от $x = 1$ до $x = e$.

8. $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

9. Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение конического кургана, радиус основания которого $R = 1{,}5\,м$, а высота $H = 2{,}5\,м$, из однородного строительного материала плотностью $\delta = 2\,кг/м^3$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление (для втузов). Т.1./ Н.С. Пискунов. – М.: ИНТЕГРАЛ–ПРЕСС, 2002. – 540 с.

2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука. – 2003г. – 416 с.

3. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч.1. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова.– М.: Издательский дом «ОНИКС 21 Век»: Мир и Образование, 2003. – 304 с.

4. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике. / В.С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 2003. – 304 с.

СОДЕРЖАНИЕ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания и контрольные задания к типовому расчету №3 по курсу математики для студентов 1-го курса.

Составители: Владимир Сергеевич Муштенко
Леонид Витальевич Стенюхин
Валерия Константиновна Евченко

Редактор Акритова Е.В.

Подписано в печать 30.11.2010. Формат 60x84 1/16. Уч.-изд.л.2,8. Усл.-печ. л. 2,9.
Бумага писчая. Тираж 800 экз. Заказ № 652.

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии издательства учебной литературы и учебно-методических пособий Воронежского государственного архитектурно-строительного университета
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84