197-2023

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям и курсовой работе
для студентов направления 13.04.01
«Теплоэнергетика и теплотехника»
(программа «Промышленная теплоэнергетика»)
всех форм обучения

Воронеж 2023

Министерство науки и высшего образовании
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра теоретической и промышленной теплоэнергетики

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям и курсовой работе
для студентов направления 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»
(программа «Промышленная теплоэнергетика»)
всех форм обучения

Воронеж 2023

УДК 621.3(07)
ББК 31.2я73

Составитель А. А. Надеев

Математическое моделирование в теплоэнергетике: методические указания к практическим занятиям и курсовой работе для студентов направления 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» (программа «Промышленная теплоэнергетика») всех форм обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А. А. Надеев. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2023. – 36 с.

В методических указаниях приведены практические задания и порядок выполнения курсовой работы по дисциплине «Математическое моделирование в теплоэнергетике».

Предназначены для студентов направления подготовки 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» (программа «Промышленная теплоэнергетика») всех форм обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ ПР-КР ММвТЭ.pdf.

Ил. 2. Табл. 5. Библиогр.: 8 назв.

УДК 621.3(07)
ББК 31.2я73

Рецензент – В. В. Портнов, канд. техн. наук, доцент зав. кафедрой теоретической и промышленной теплоэнергетики ВГТУ

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Математическая модель – это относительная истина, отражающая определённые особенности изучаемых явлений. Формализованная на том или ином языке (дифференциальных или разностных уравнений и т.д.) математическая модель отражает определённые свойства реальных процессов и с её помощью можно изучать эти свойства. Математическая модель – это лишь специальный способ описания, позволяющий для анализа использовать формально-логический аппарат математики. Изучение математических моделей является основным методом познания, используемым в фундаментальных и прикладных науках [1].

Любая математическая модель должна адекватно отражать сущность явлений, протекающих в объекте моделирования, и с помощью определённого алгоритма позволять прогнозировать поведение объекта при изменении входных и управляющих параметров. Полная математическая модель включает в себя статическую и динамическую модели, которые отражают поведение объекта в статике и динамике.

Практические задания и курсовая работа по дисциплине «Математическое моделирование в теплоэнергетике», приведённые в данных методических указаниях, предназначены для закрепления обучающимися теоретического материала и получения ими практических навыков по моделированию процессов, протекающих в аппаратах промышленной теплоэнергетики.

Умения и навыки, полученные при выполнении практических заданий и курсовой работы, необходимы при освоении дисциплины «Алгоритмизация и моделирование задач в теплоэнергетике».

1. ВИДЫ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

Теплообменный аппарат (ТОА) – это устройство, предназначенное для передачи теплоты от более нагретых тел к менее нагретым. Тела (среды), обменивающиеся тепловой энергией принято называть теплоносителями. Греющей средой является горячий теплоноситель, нагреваемой средой – холодный теплоноситель.

В промышленности применяется значительное количество теплообменных устройств различных типов. Это смесительные, регенеративные и рекуперативные теплообменники, отличающиеся способом передачи теплоты от одного теплоносителя к другому.

В смесительных ТОА теплообмен между теплоносителями осуществляется путём их смешивания, т.е. путём их непосредственного контакта. Такие теплообменники не получили большого распространения в промышленности.

Регенеративные и рекуперативные теплообменники относятся к аппаратам поверхностного типа, в которых непосредственного контакта между теплоносителями не происходит. Теплообмен в них осуществляется путём теплоотдачи теплоносителей при их контакте с твёрдой поверхностью.

В регенеративных аппаратах теплоносители соприкасаются с одной и той же поверхностью теплообмена, которая аккумулирует (накапливает) теплоту при прохождении греющею теплоносителя и отдаёт её при прохождении холодного.

В рекуперативных теплообменниках:

- теплота от одного теплоносителя к другому передаётся через разделяющую их стенку, то есть посредством теплопередачи;
- теплоносители не смешиваются;
- движение их происходит одновременно.

Одним из наиболее распространённых рекуперативных ТОА являются кожухотрубные теплообменники, в которых один теплоноситель движется в трубах, другой – в межтрубном пространстве. Этот вид аппаратов можно классифицировать по нескольким признакам, основными из которых являются:

1) технологический признак – в зависимости от основного назначения теплообменных устройств: подогреватели; конденсаторы; холодильники;

2) гидравлический признак – в соответствии с агрегатным состоянием теплоносителей: парожидкостные; жидкостно-жидкостные; газо-жидкостные; газо-газовые;

3) схема движения теплоносителей – в зависимости от направления движения и числа потоков теплоносителей: прямоточные; противоточные; с перекрёстным током; со смешанной схемой; однопоточные; двухпоточные и т.д.

2. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

Целью курсовой работы является получение статической и динамической модели объекта моделирования – теплообменного аппарата типа «труба в трубе» – простейшего варианта кожухотрубного аппарата. По приведённой выше классификации он является прямоточным жидкостно-жидкостным подогревателем.

Получение статической модели сводится к нахождению корреляционных и регрессионных соотношений между входными и выходными параметрами объекта. Динамическая модель представляет собой описание объекта с помощью системы дифференциальных уравнений и передаточных функций [2].

Расчётными данными для выполнения курсовой работы являются данные режимных листов (табл. 1), полученные на теплообменном аппарате в рабочих условиях. К ним относятся следующие измеренные параметры (рис. 1): $\theta_{гн}$, $\theta_{хн}$ – соответственно температура горячего и холодного теплоносителя на входе в аппарат, °C; $\theta_{хк}$ – температура холодного теплоносителя на выходе из аппарата, °C; G_x – объёмный расход холодного теплоносителя, м^3/час.

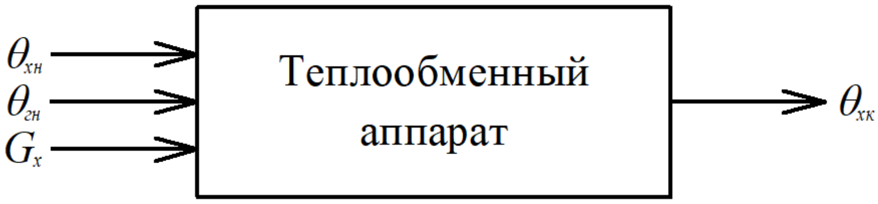

Рис. 1. Схема теплообменного аппарата

Таблица 1

Данные режимных листов теплообменного аппарата

№ измерения	$\theta_{гн}$, °C	$\theta_{хн}$, °C	G_x, м^3/час	$\theta_{хк}$, °C
1				
2				
…				
60				

3. ПОЛУЧЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

Для построения статической модели теплообменного аппарата необходимо найти регрессионные зависимости между входными и выходными параметрами, т.е. $\theta_{хк} = f_1(\theta_{гн})$, $\theta_{хк} = f_2(\theta_{хн})$, $\theta_{хк} = f_3(G_х)$. Затем проводится статистический анализ данных зависимостей и получение уравнения множественной регрессии.

Методика построения статической модели приведена ниже. Для дальнейших расчётов примем для выходного параметра обозначение «Y», для всех входных параметров – «X». Расчёт производится отдельно для каждой зависимости $Y = f(X)$.

3.1. Построение поля корреляции

Пользуясь данными режимных листов строится поле корреляции как зависимость $Y = f(X)$. При этом на полученном рисунке отражается поле, состоящее из N точек, где N – число измерений из режимного листа теплообменного аппарата (табл. 1).

3.2. Получение эмпирической линии регрессии

Линия, «наилучшим» образом выравнивающая зависимость средних значений Y от X, называется линией регрессии, а её аналитическое описание – уравнением регрессии.

Для построения эмпирической линии регрессии весь диапазон изменения входного параметра X на поле корреляции разобьём на равные интервалы, длина которых вычисляется по формуле

$$L = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{k}, \tag{3.1}$$

где $X_{\min}$, $X_{\max}$ – соответственно минимальное и максимальное значение входного параметра X из режимного листа;

k – количество интервалов разбиения.

Примерное количество интервалов можно вычислить по формуле

$$k = 1 + 3{,}322 \cdot \lg(N), \tag{3.2}$$

с округлением до ближайшего целого числа.

При этом число k должно быть таким, чтобы длина интервала L имела не более двух цифр после запятой. Если количество цифр после запятой превышает 2, то количество интервалов k можно выбирать произвольно из диапазона 5-10.

Затем производится вычисление минимального и максимального значений X на каждом интервале (границы интервалов) по формуле

$$X_{\text{int}\,i}^{\max} = X_{\text{int}\,i}^{\min} + L. \tag{3.3}$$

где i – номер интервала.

При этом следует учитывать, что минимальное значение $X_{\text{int}}^{\min}$ на интервале равно максимальному значению предыдущего интервала $X_{\text{int}}^{\max}$. Так для первого интервала $X_{\text{int}1}^{\min} = X_{\min}$, для второго интервала $X_{\text{int}2}^{\min} = X_{\text{int}1}^{\max}$, для третьего интервала $X_{\text{int}3}^{\min} = X_{\text{int}2}^{\max}$ и т.д.

Затем вычисляется среднее значение X на интервале по формуле

$$\bar{X}_{\text{int}} = \frac{X_{\text{int}}^{\min} + X_{\text{int}}^{\max}}{2}. \tag{3.4}$$

После этого в режимном листе выбираются все значения выходного параметра Y, соответствующие значениям X, входящим в соответствующий интервал, и вычисляется среднее значение $\bar{Y}_{\text{int}}$ на интервале:

$$\bar{Y}_{\text{int}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{\text{int}\,i}}{n}, \tag{3.5}$$

где n – количество значений на интервале.

Например, в первый интервал $X_{\text{int}1}^{\min} \ldots X_{\text{int}1}^{\max}$ попали значения входного параметра X_1, X_2 и X_4 из режимной карты (табл. 2). В режимной карте выбираются соответствующие значения Y_1, Y_2 и Y_4. По формуле (3.5) определяется среднее значение $\bar{Y}_{\text{int}}$.

Результаты вычислений заносятся в табл. 2.

Таблица 2

Данные по эмпирической линии регрессии

Номер интервала	Границы интервалов	$\bar{X}_{\text{int}}$	$\bar{Y}_{\text{int}}$
1	$X_{\text{int}1}^{\min} \ldots X_{\text{int}1}^{\max}$	$\bar{X}_{\text{int}1}$	$\bar{Y}_{\text{int}1}$
2	$X_{\text{int}2}^{\min} \ldots X_{\text{int}2}^{\max}$	$\bar{X}_{\text{int}2}$	$\bar{Y}_{\text{int}2}$
…			

Средние значения для каждого интервала откладываются на полученном ранее поле корреляции. Полученные точки последовательно соединяются отрезками и, таким образом, получается эмпирическая линия регрессии $\overline{Y}_{\text{int}} = f\left(\overline{X}_{\text{int}}\right)$.

3.3. Получение зависимостей между выходным и входными параметрами

Для получения статической модели объекта необходимо получить ряд теоретических зависимостей между выходным и входным параметрами в виде линейной, параболической, степенной и гиперболической функций, и затем оценить какая из них описывает искомую зависимость наилучшим образом, т.е. наиболее близка к эмпирической линии регрессии [3].

Расчёт производится отдельно для каждой из зависимостей $\theta_{хк} = f_1\left(\theta_{гн}\right)$, $\theta_{хк} = f_2\left(\theta_{хн}\right)$, $\theta_{хк} = f_3\left(G_x\right)$.

В качестве примера рассмотрим получение экспоненциальной функции вида

$$Y = a \cdot e^{b \cdot X}, \tag{3.6}$$

где a, b – коэффициенты уравнения.

Задача заключается в том, чтобы найти коэффициенты a и b этой кривой. Так как данная зависимость носит нелинейный характер, необходимо её линеаризовать, а затем воспользоваться методом наименьших квадратов для определения коэффициентов.

Для этого сначала прологарифмируем левую и правую части заданной функции. С учётом того, что $\ln(m \cdot n) = \ln m + \ln n$ и $\ln e^m = m$, получим

$$\ln Y = \ln a + b \cdot X. \tag{3.7}$$

Данное уравнение является линейным относительно переменных X и $\ln Y$, поэтому значения b и $\ln a$ можно вычислить при помощи метода наименьших квадратов как для линейной зависимости, подставляя вместо значений Y из табл. 2 их логарифмы. Зная же $\ln a$, можно найти a, используя тождество $m = e^{\ln m}$. Найденные таким образом коэффициенты a и b нужно затем подставить в исходную зависимость (3.6).

Согласно методу наименьших квадратов [4], признаком наилучшей прямой считается минимум суммы квадратов отклонений фактических значений Y, полученных экспериментально, от вычисленных по формуле (3.6). Так как выражение (3.6) было приведено к линейной форме (3.7), система нормальных уравнений для этого случая будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} Y_i - \sum_{i=1}^{N} \left(A + B \cdot X_i \right) = 0; \\ \sum_{i=1}^{N} Y_i \cdot X_i - \sum_{i=1}^{N} \left(A + B \cdot X_i \right) \cdot X_i = 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

или

$$\begin{cases} N \cdot A + B \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i = \sum_{i=1}^{N} Y_i; \\ A \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i + B \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 = \sum_{i=1}^{N} Y_i \cdot X_i, \end{cases} \tag{3.9}$$

где $A = \ln a$, $B = b$.

Коэффициенты A и B вычисляются в этом случае с помощью определителей:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} Y_i & \sum_{i=1}^{N} X_i \\ \sum_{i=1}^{N} Y_i \cdot X_i & \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} X_i \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_i \cdot X_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \right)^2}; \tag{3.10}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} Y_i \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & \sum_{i=1}^{N} Y_i \cdot X_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} X_i \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_i \cdot X_i - \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \right)^2}. \tag{3.11}$$

Коэффициенты A и B также можно определить в программах SMath Studio или Mathcad. Алгоритм метода наименьших квадратов в этих программах можно реализовать также в следующем виде:

1. Ввести команду ORIGIN:=1, которая переназначает координаты векторов, а также столбцы и строки матриц.

2. С помощью панели «Программирование» написать программу, которая имеет вид:

$$\mathrm{lin\_reg}(X,Y):=\left|\begin{array}{l} N \leftarrow \mathrm{length(X)} \\ \left[S1 \leftarrow \sum_{i=1}^{N} X_i \quad S2 \leftarrow \sum_{i=1}^{N} Y_i \quad S3 \leftarrow \sum_{i=1}^{N} (X_i)^2 \quad S4 \leftarrow \sum_{i=1}^{N} (X_i \cdot Y_i)\right] \\ \Delta \leftarrow S3 \cdot N - S1^2 \\ \mathrm{return}\left(\dfrac{S2 \cdot S3 - S1 \cdot S4}{\Delta} \quad \dfrac{S4 \cdot \mathrm{N} - S1 \cdot S2}{\Delta}\right)^{\mathrm{T}} \end{array}\right.$$

$$\mathrm{lin\_reg}(X,\ln(Y)) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Здесь A и B – это числовые значения соответствующих искомых коэффициентов.

3. После этого необходимо вычислить коэффициент a по формуле $a := e^A$ и подставить полученные значения a и b в формулу (3.6).

4. Полученная зависимость выражается в виде $f(X) := a \cdot e^{b \cdot X}$ и отражается на графике вместе с полем корреляции и эмпирической линией регрессии.

Линейная функция

Перед линейной и остальными зависимостями необходимо ввести команду ORIGIN:=1 и задать переменную $N := 60$.

Линейная зависимость имеет вид

$$Y = a_0 + a_1 \cdot X, \tag{3.12}$$

где a, a_1 – коэффициенты уравнения.

Методика вычисления коэффициентов в программах SMath Studio или Mathcad выглядит следующим образом:

1. Ввести уравнение

$$\mathrm{Sol.Lin} := \mathrm{lsolve}\left[\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} X_i \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & \sum_{i=1}^{N} (X_i)^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} Y_i \\ \sum_{i=1}^{N} (X_i \cdot Y_i) \end{bmatrix}\right]$$

$$\text{Sol.Lin} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Здесь a_0 и a_1 – числовые значения искомых коэффициентов.

2. Полученная зависимость выражается в виде $f1(X) := a_0 + a_1 \cdot X$ и отражается на графике вместе с полем корреляции и эмпирической линией регрессии.

Параболическая функция

Параболическая зависимость имеет вид

$$Y = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2, \tag{3.13}$$

где a, a_1, a_2 – коэффициенты уравнения.

Методика вычисления коэффициентов в программах SMath Studio или Mathcad выглядит следующим образом:

1. Ввести уравнение

$$\text{Sol.Par} := \text{lsolve}\left[\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} X_i & \sum_{i=1}^{N} (X_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & \sum_{i=1}^{N} (X_i)^2 & \sum_{i=1}^{N} (X_i)^3 \\ \sum_{i=1}^{N} (X_i)^2 & \sum_{i=1}^{N} (X_i)^3 & \sum_{i=1}^{N} (X_i)^4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} Y_i \\ \sum_{i=1}^{N} (X_i \cdot Y_i) \\ \sum_{i=1}^{N} \left[(X_i)^2 \cdot Y_i\right] \end{bmatrix}\right]$$

$$\text{Sol.Par} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Здесь a_0, a_1 и a_2 – числовые значения искомых коэффициентов.

2. Полученная зависимость выражается в виде $f2(X) := a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2$ и отражается на графике вместе с полем корреляции, эмпирической линией регрессии и линейной зависимостью.

Степенная функция

Степенная зависимость имеет вид

$$Y = a_0 \cdot X^{a_1}, \tag{3.14}$$

где a_0, a_1, – коэффициенты уравнения.

Методика вычисления коэффициентов в программах SMath Studio или Mathcad выглядит следующим образом:

1. Задать переменные $\ln X := \ln(X)$, $\ln Y := \ln(Y)$.

2. Ввести уравнение

$$\mathrm{Sol.St} := \mathrm{lsolve}\left[\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} \ln X_i \\ \sum_{i=1}^{N} \ln X_i & \sum_{i=1}^{N} (\ln X_i)^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} \ln Y_i \\ \sum_{i=1}^{N} (\ln X_i \cdot \ln Y_i) \end{bmatrix}\right] \tag{3.15}$$

$$\mathrm{Sol.St} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

Здесь A_0 и A_1 – числовые значения искомых коэффициентов, причём $a_0 = e^{A_0}$, $a_1 = A_1$.

3. Полученная зависимость выражается в виде $f3(X) := a_0 \cdot X^{a_1}$ и отражается на графике вместе с полем корреляции, эмпирической линией регрессии и полученными зависимостями.

Гиперболическая функция

Гиперболическая зависимость имеет вид

$$Y = a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{X}, \tag{3.16}$$

где a_0, a_1, – коэффициенты уравнения.

Методика вычисления коэффициентов в программах SMath Studio или Mathcad выглядит следующим образом:

1. Задать переменную $\mathrm{inv}\,X := \frac{1}{X}$.

2. Ввести уравнение

$$\text{Sol.Gip} := \text{lsolve}\left[\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} \text{inv}\, X_i \\ \sum_{i=1}^{N} \text{inv}\, X_i & \sum_{i=1}^{N} (\text{inv}\, X_i)^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} Y_i \\ \sum_{i=1}^{N} (\text{inv}\, X_i \cdot Y_i) \end{bmatrix}\right] \quad (3.17)$$

$$\text{Sol.Gip} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

Здесь a_0 и a_1 – числовые значения искомых коэффициентов.

3. Полученная зависимость выражается в виде $f4(X) := a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{X}$ и отражается на графике вместе полем корреляции, эмпирической линией регрессии и полученными зависимостями.

Пример обозначения осей при построении данных графиков в SMath Studio или Mathcad представлен на рис. 2.

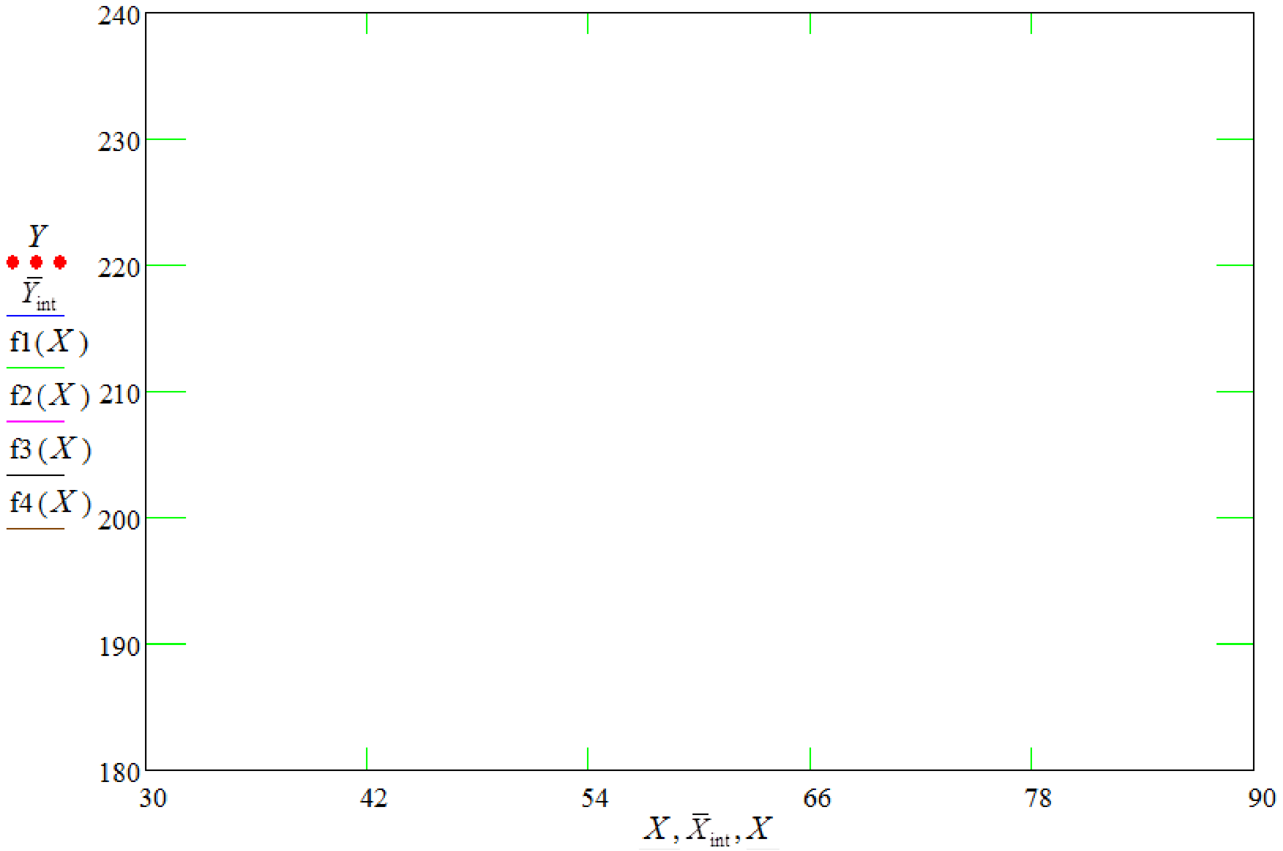

Рис. 2. Поле корреляции, эмпирическая линия регрессии, зависимости выходного и выходных параметров

3.4. Обработка полученных зависимостей

После получения четырёх теоретических зависимостей между выходным и входным параметрами, необходимо установить, какая из них наиболее близка к эмпирической линии регрессии, т.е. наилучшим образом описывает экспериментальные данные (данные режимных листов).

Сравнение полученных зависимостей производится в следующей последовательности:

1) рассчитываются среднеквадратические отклонения для каждой зависимости по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - f\left(X_i\right)\right)^2}{N-1}, \tag{3.18}$$

где $f\left(X\right)$ – соответствующая теоретическая зависимость;

2) производится сравнение полученных среднеквадратических отклонений и выбирается наименьшее из них. Соответствующая зависимость считается наилучшей.

Для оценки тесноты линейной связи (для линейной зависимости) между переменными X и Y вычисляется выборочный коэффициент корреляции R^* по формуле

$$R^* = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})\cdot(Y_i - \overline{Y})}{(N-1)\cdot S_x \cdot S_y}, \tag{3.19}$$

где S_x, S_y – выборочные среднеквадратичные отклонения.

Уравнение (3.19) можно переписать в следующем виде:

$$R^* = \frac{a_1 \cdot S_X}{S_Y} = a_1 \cdot \sqrt{\frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2}}. \tag{3.20}$$

где S_X, S_Y –выборочные среднеквадратические отклонения.

В том случае, если параметр $R^* > 0,75$, то входной параметр X имеет функциональную зависимость с выходным параметром Y и он будет учувствовать в дальнейших расчётах.

В том случае, если параметр $R^* \leq 0,75$, то можно сделать вывод, что входной параметр X не имеет функциональной зависимости с выходным параметром Y и его влиянием на выходной параметр можно пренебречь, т.е. он не будет учувствовать в дальнейших расчётах при определении уравнения множественной регрессии.

Для нелинейных зависимостей (экспоненциальной, параболической и гиперболической) тесноту нелинейной связи между переменными X и Y ($f(X)$) необходимо оценить путём нахождения корреляционного отношения. Корреляционное отношение, как и коэффициент корреляции в линейной регрессии, характеризует тесноту связи между случайными величинами.

Последовательность определения корреляционного отношения следующая:

1. Определяется среднее значение выходного параметра из режимного листа по формуле

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}. \tag{3.21}$$

2. Определяется остаточная дисперсия по формуле

$$D_{ост} = \frac{m \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(f\left(X_i\right) - Y_i \right)^2}{N - k}, \tag{3.22}$$

где m – число повторов опыта при объёме выборки N. Для расчётов принимаем $m = 1$;

k – число коэффициентов в уравнении регрессии. Для параболической зависимости $k = 3$, для степенной и гиперболической зависимостей $k = 2$.

3. Определяется дисперсия модели по формуле

$$D_Y = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(f\left(X_i\right) - M \right)^2}{N - 1}. \tag{3.23}$$

4. Определяется критерий Фишера по формуле

$$F = \frac{D_Y}{D_{ост}}. \tag{3.24}$$

5. Определяется критический критерий Фишера $F_{кр}$, который зависит от уровня значимости, количества измерений и количества коэффициентов в уравнении регрессии. Его можно определить с помощью соответствующих таблиц, приведённых, например в [5], или с помощью программного обеспечения OpenOffice Excel (Microsoft Excel) функции F. ОБР. ПХ, которая используется для определения критических значений F-распределения.

Для определения значения критерия Фишера с помощью OpenOffice Excel (Microsoft Excel) в любую свободную ячейку необходимо ввести команду =F.ОБР.ПХ(вероятность;степени_свободы1;степени_свободы2) или =FРАСПОБР(вероятность;степени_свободы1;степени_свободы2). Значения параметров команды следующие:

а) «вероятность» задаёт уровень значимости q (q = 0,05);

б) «степени_свободы1» задаёт число степеней свободы и определяется по формуле $\nu_1 = N - k$;

в) «степени_свободы2» задаёт число степеней свободы и определяется по формуле $\nu_2 = N - 1$.

6. Производится сравнение критерия Фишера F и критического значения критерия Фишера $F_{кр}$. Если $F \geq F_{кр}$, делается вывод, что полученная модель (зависимость) адекватна рассматриваемому объекту и участвует в определении уравнения множественной регрессии.

Если $F < F_{кр}$ составленная модель считается неадекватной рассматриваемому объекту, и не будет участвовать в дальнейших расчётах.

7. Для зависимостей, прошедших проверку на адекватность, определяется критерий детерминации по формуле

$$R = 1 - \frac{(N-k) \cdot D_{ост}}{(N-1) \cdot D_Y}, \tag{3.25}$$

причём $0 \leq R \leq 1$ – корреляционное отношение. Чем больше R, тем сильнее связь между X и Y ($f(X)$).

Если $R \geq 0{,}75$, то считается, что составленная модель работоспособна. Если $R < 0{,}75$, то модель не работоспособна.

Таким образом, в результате корреляционного и регрессионного анализа, устанавливается влияние входных параметров G_x, $\theta_{гн}$, $\theta_{хн}$, на выходной – $\theta_{хк}$. Если в результате анализа один из данных параметров не оказывает существенного влияния на выходной параметр, то им в дальнейших расчётах пренебрегаем.

3.5. Получение уравнения множественной регрессии

Если необходимо исследовать корреляционную связь между несколькими величинами, то используют уравнение множественной регрессии [6], которое имеет следующий общий вид:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + \ldots + b_i \cdot X_i , \tag{3.26}$$

где b_0, b_1, b_2, b_i – коэффициенты уравнения регрессии;

X_1, X_2, X_i – входные параметры, влияющие на выходную величину.

Например, если все три входных параметра $\theta_{гн}$, G_x, $\theta_{хн}$ оказывают влияние на выходной параметр $\theta_{хк}$, уравнение множественной регрессии будет иметь вид:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3 , \tag{3.27}$$

где под обозначением X_1, X_2, X_3 может быть любой из входных параметров, например, $X_1 = G_x$, $X_2 = \theta_{гн}$, $X_3 = \theta_{хн}$.

Для двух входных величин уравнение (3.26) приобретает вид:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 . \tag{3.28}$$

Для получения уравнения множественной регрессии необходимо перейти от натурального масштаба к безразмерному, проведя нормировку всех значений случайных величин по формулам

$$Y_i^0 = \frac{Y_i - \overline{Y}}{S_Y} ; \tag{3.29}$$

$$X_{1i}^0 = \frac{X_{1i} - \overline{X}_1}{S_{X_1}} ;\; X_{2i}^0 = \frac{X_{2i} - \overline{X}_2}{S_{X_2}} ;\; X_{3i}^0 = \frac{X_{3i} - \overline{X}_3}{S_{X_3}} , \tag{3.30}$$

где $\overline{Y}$, $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$ – средние значения соответствующих параметров по данным режимных листов;

S_Y, S_{X_1}, S_{X_2}, S_{X_3} – среднеквадратические отклонения для соответствующих параметров. Они определяются по следующим формулам

$$S_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}{N-1}}; \qquad (3.31)$$

$$S_{X_1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_{1i} - \bar{X}_1\right)^2}{N-1}}; \; S_{X_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)^2}{N-1}} \; S_{X_3} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_{3i} - \bar{X}_3\right)^2}{N-1}}. \qquad (3.32)$$

Результаты определения безразмерных параметров вводятся в табл. 3.

Таблица 3

Значения безразмерных параметров

№	X_1^0	X_2^0	X_3^0	Y^0
1				
2				
…				
60				

Если какой-либо входной параметр не оказывает существенного влияния на выходной параметр, то в табл. 3 удаляется лишний столбец (X_3^0).

Определяются коэффициенты взаимной корреляции, т.е. влияние параметров друг на друга, по формулам:

$$R_{Y^0 X_n^0} = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i^0 \cdot X_{ni}^0; \qquad (3.33)$$

$$R_{X_n^0 X_m^0} = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_{ni}^0 \cdot X_{mi}^0, \qquad (3.34)$$

где n, m – нижние индексы входных параметров.

Например, в случае влияния двух параметров (уравнение (3.28)) необходимо найти три коэффициента взаимной корреляции:

1) $R_{Y^0 X_1^0}$ – коэффициент взаимного влияния параметров Y и X_1;

2) $R_{Y^0 X_2^0}$ – коэффициент взаимного влияния параметров Y и X_2;

3) $R_{X_1^0 X_2^0}$ – коэффициент взаимного влияния параметров X_1 и X_2.

В случае влияния трёх параметров (уравнение(3.27)) необходимо найти девять коэффициентов взаимной корреляции.

Значения коэффициентов должны лежать в диапазоне от 0 до 1. Чем больше взаимное влияние, тем ближе к единице значение коэффициента. Коэффициент влияния параметра на самого себя всегда равен единице, т.е., например $R_{X_1^0 X_1^0} = 1$. Также следует учитывать, что $R_{Y^0 X_n^0} = R_{X_n^0 Y^0}$ и $R_{X_n^0 X_m^0} = R_{X_m^0 X_n^0}$.

Вычисленные коэффициенты взаимной корреляции для нормированных параметров равны коэффициентам корреляции между переменными, выраженными в натуральном масштабе R_{YX_n}, $R_{X_n X_m}$.

Уравнение регрессии между нормированными переменными не имеет свободного члена и принимает следующий вид, аналогичный (3.26):

$$\hat{Y} = a_1 \cdot X_1^0 + a_2 \cdot X_2^0 + \ldots + a_i \cdot X_i^0 . \qquad (3.35)$$

Коэффициенты уравнения находятся из условия

$$S = \sum_{i=1}^{N} (Y_i^0 - \hat{Y}_i^0)^2 = \min . \qquad (3.36)$$

Условия минимума функции S определяются так же, как в случае зависимости от одной переменной:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 ; \ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0 , \ldots , \ \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0$$

и система нормальных уравнений имеет вид [6]:

$$\begin{cases} a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} (X_{1i}^0)^2 + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} X_{1i}^0 X_{2i}^0 + \ldots + a_k \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} X_{1i}^0 X_{ki}^0 = \sum\limits_{i=1}^{N} X_{1i}^0 Y_i^0 ; \\ a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} X_{2i}^0 X_{1i}^0 + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} \left(X_{2i}^0 \right)^{0,2} + \ldots + a_k \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} X_{2i}^0 X_{ki}^0 = \sum\limits_{i=1}^{N} X_{2i}^0 Y_i^0 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} X_{ki}^0 X_{1i}^0 + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} X_{ki}^0 X_{2i}^0 + \ldots + a_k \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} \left(X_{ki}^0 \right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} X_{ki}^0 Y_i^0 . \end{cases} \qquad (3.37)$$

Умножим левую и правую части уравнений на $1/(N-1)$. В результате при каждом коэффициенте a_j получаем коэффициенты взаимной корреляции R. Принимая во внимание, что $\frac{1}{N-1} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} \left(X_{ji}^0 \right)^2 = S_{X_j^0}^2 = 1$, получаем систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \cdot R_{X_1X_2} + a_3 \cdot R_{X_1X_3} + \ldots + a_k \cdot R_{X_1X_k} = R_{YX_1}; \\ a_1 \cdot R_{X_1X_2} + a_2 + a_3 \cdot R_{X_2X_3} + \ldots + a_k \cdot R_{X_2X_k} = R_{YX_2}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 \cdot R_{X_1X_k} + a_2 \cdot R_{X_kX_2} + a_3 \cdot R_{X_kX_2} + \ldots + a_k = R_{YX_k}. \end{cases} \tag{3.38}$$

Таким образом, для трёх входных величин система нормальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \cdot R_{X_1X_2} + a_3 \cdot R_{X_1X_3} = R_{YX_1}; \\ a_1 \cdot R_{X_1X_2} + a_2 + a_3 \cdot R_{X_2X_3} = R_{YX_2}; \\ a_1 \cdot R_{X_1X_3} + a_2 \cdot R_{X_2X_3} + a_3 = R_{YX_3}. \end{cases} \tag{3.39}$$

Для двух входных величин система нормальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \cdot R_{X_1X_2} = R_{YX_1}; \\ a_1 \cdot R_{X_1X_2} + a_2 = R_{YX_2}. \end{cases} \tag{3.40}$$

Коэффициенты, входящие в уравнения (3.39) или (3.40), можно определить в программах SMath Studio или Mathcad. Для двух входных величин методика выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a1 + a2 \cdot RX1X2 - RYX1 \\ a1 \cdot RX1X2 + a2 - RYX2 \end{pmatrix} \text{solve}, a1, a2 \rightarrow$$

Здесь «solve» – это операция «решить для переменной».

Также данные коэффициенты можно определить следующим образом:

$$\text{Coef} := \text{lsolve}\left[\begin{bmatrix} 1 & RX1X2 \\ RX1X2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} RYX1 \\ RYX2 \end{bmatrix}\right]$$

$$\text{Coef} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Здесь a_1 и a_2 – это числовые значения соответствующих искомых коэффициентов.

Определяется коэффициент множественной корреляции R, который служит показателем силы связи в случае множественной регрессии, причём $0 \le R \le 1$:

$$R = \sqrt{a_1 \cdot R_{YX_1} + a_2 \cdot R_{YX_2} + \ldots + a_i \cdot R_{YX_i}} \,. \tag{3.41}$$

Определяются коэффициенты множественной регрессии в натуральном масштабе из уравнения (3.27) или (3.28) по формулам

$$b_k = a_k \frac{S_Y}{S_{X_k}}; \; b_0 = \overline{Y} - \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot \overline{X}_i \,. \tag{3.42}$$

Затем записывается уравнение множественной регрессии ((3.27) или (3.28)) с полученными коэффициентами, а также аналогичное уравнение с обозначенными параметрами. Например, если $X_1 = G_x$, $X_2 = \theta_{гн}$, то уравнение для двух входных параметров будет иметь вид:

$$\theta_{хн} = b_0 + b_1 \cdot G_x + b_2 \cdot \theta_{гн} \,.$$

3.6. Анализ регрессионной модели

Любой регрессионный анализ включает следующие этапы:

1) формулировка задачи (на этом этапе формируются предварительные гипотезы о зависимости исследуемых процессов объекта);

2) определение зависимых и независимых переменных исследуемого процесса;

3) сбор статистических данных. Данные собираются для каждой из переменных, включённых в регрессионную модель, т.е. заполняются режимные листы исследуемого объекта;

4) формулировка гипотезы о форме связи между параметрами объекта (простая или множественная, линейная или нелинейная);

5) определение функции регрессии (заключается в расчёте численных значений параметров уравнения регрессии);

6) оценка точности регрессионного анализа;

7) интерпретация полученных результатов (оценивается корректность и правдоподобие полученных результатов, работоспособность регрессионной модели).

Порядок выполнения пунктов 1-5 рассмотрен в предыдущих разделах. Порядок оценки адекватности и работоспособности экспериментальной факторной модели (уравнения множественной регрессии) следующий.

1. Определяется среднее значение выходной переменной по формуле

$$\overline{Y} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_i, \tag{3.43}$$

где Y_i – значение функции отклика (выходной переменной) в i-й точке;

N – количество проведённых опытов.

2. Определяется дисперсия модели среднего S_Y^2, характеризующая рассеяние результатов эксперимента относительно $\overline{Y}$ и оценивающая погрешность модели среднего по формуле

$$S_Y^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \overline{Y} \right)^2 \tag{3.44}$$

3. По уравнению регрессии вычисляются предсказываемые значения функции отклика $\hat{Y}_i$ (значения выходной переменной). Для этого в уравнение регрессии подставляют значения нормированных факторов, т.е. входных параметров X_i ($\hat{Y}_i = f\left(X_1, X_2, X_2 \right)$).

Затем определяется остаточная дисперсия $S_{ост}^2$, оценивающая погрешность полученной модели:

$$S_{ост}^2 = \frac{1}{N-k} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \hat{Y}_i \right)^2, \tag{3.45}$$

где k – число коэффициентов в уравнении регрессии.

4. После определения оценок коэффициентов регрессии необходимо проверить гипотезу о значимости коэффициентов b_i. В результате проверки устанавливается статическая значимость или незначимость отличия оценок коэффициентов регрессии от нуля, т.е. проверяется, обусловлено ли отличие b_i от нуля влиянием помех или это отличие не случайно и влияние i-го фактора (входного параметра) существенно. Для проверки используется коэффициент t, вычисляемый по формуле

$$t_i = \frac{b_i}{\sqrt{S^2\{b_i\}}}, \tag{3.46}$$

где $S^2\{b_i\}$ – дисперсия ошибки определения коэффициента b_i.

При вычислении дисперсии $S^2\{b_i\}$ используется остаточная дисперсия $S_{ост}^2$. Уравнение имеет следующий вид:

$$S^2\{b_i\} = \frac{S_{ост}^2}{N}. \qquad (3.47)$$

Если выполняется условие $t_i \geq t_{кр}$, то считается, что коэффициент b_i отличается от нуля не случайно, т.е. коэффициент b_i статистически значим и должен быть сохранен в уравнении множественной регрессии. Значение $t_{кр}$ является табличным значением и определяется для заданного уровня значимости q и числа степеней свободы $v_{зн}$, где $m = 1$, N – число изменений. Если $t_i < t_{кр}$, то коэффициент считается незначимым и его следует отбросить, не включая в искомую модель.

Для q = 0,05 и $v_{зн}$ = 59 (при N = 60) коэффициент $t_{кр}$ = 2,00.

5. Если какой-либо коэффициент b_i исключается из регрессионной модели, необходимо пересчитать коэффициент b_0 (формула (3.42)) и записать второе уравнение множественной регрессии.

Для второго (актуального) уравнения множественной регрессии выполняются пункты 3-5.

6. Оценивается адекватность модели с использованием критерия Фишера.

При определении критерия Фишера принимается нулевая гипотеза о том, что модель среднего достаточно хорошо описывает исследуемый процесс. Поэтому в данном случае критерий Фишера равен отношению дисперсии модели среднего S_Y^2 к остаточной дисперсии $S_{ост}^2$:

$$F = \frac{S_Y^2}{S_{ост}^2}. \qquad (3.48)$$

Регрессионная модель адекватно описывает результаты эксперимента, если значение F больше табличного значения критерия Фишера $F_{кр}$ ($F \geq F_{кр}$), т.е. это означает, что уравнение регрессии описывает результаты эксперимента в $F_{кр}$ раз лучше модели среднего. Тогда нулевая гипотеза отвергается и регрессионная модель считается адекватной. Критерий $F_{кр}$ определяется при q = 0,05; $v_1 = N - k$; $v_2 = N - 1$. Здесь k – число коэффициентов в уравнении регрессии.

7. Осуществляется проверка работоспособности регрессионной модели.

При проведении анализа работоспособности модели используется понятием коэффициента детерминации. Он представляет собой числовую интегральную характеристику точности уравнения регрессии и вычисляется по формуле:

$$R = 1 - \frac{(N-k)\cdot S_{ост}^2}{\left(N-1\right)\cdot S_Y^2}. \qquad (3.49)$$

Модель считается работоспособной, если $R \geq 0{,}75$.

8. Определятся погрешность регрессионной модели.

Вычисляется абсолютная погрешность в каждой точке по формуле

$$\Delta_i = \left|Y_i - \hat{Y}_i\right|. \qquad (3.50)$$

Вычисляется относительная погрешность в каждой точке по формуле

$$\delta_i = \frac{\Delta_i}{Y_i}\cdot 100\ \%. \qquad (3.51)$$

Результаты вычисления заносятся в табл. 4.

Таблица 4

Погрешность модели для каждой точки модели

№ измерения	Δ_i	δ_i, %
1		
2		
…		
60		

Из табл. 4 выписываются значения минимальной и максимальной абсолютной и относительной погрешностей $\Delta_{\min}$, $\Delta_{\max}$, $\delta_{\min}$, $\delta_{\max}$. Затем вычисляется среднее значение относительной погрешности по формуле

$$\overline{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\delta_i}{N}. \qquad (3.52)$$

При математическом моделировании технических систем допустимая средняя относительная погрешность не должна превышать 5 %.

После расчёта необходимо сделать вывод о том, что полученное уравнение регрессии является адекватным, коэффициенты значимо отличаются от нуля, модель работоспособна, погрешность не превышает 5 %.

4. ПОЛУЧЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

4.1. Постановка задачи

Теплообменный аппарат является сложным объектом с распределёнными параметрами. Это значит, что значения регулируемой величины (температуры холодного теплоносителя на выходе из аппарата) в различных точках объекта будет различно. Поэтому такие объекты описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

При выводе уравнений динамики необходимо принять ряд упрощающих модель допущений:

1) количество тепла, которое проходит в направлении потока, как в жидкости, так и в стенке трубы не учитывается;

2) используются средние значения температур по сечению трубопровода, и рассматривается изменение температуры только по направлению потока;

3) такие параметры как теплоёмкость, плотность и коэффициенты теплоотдачи считаются постоянными;

4) механической энергией по сравнению с тепловой энергией и потерями тепла в окружающую среду пренебрегаем.

Рассмотрим теплообменник типа «труба в трубе». В нём протекает процесс теплообмена между двумя жидкостями, протекающими в соосно расположенных трубах – внешней трубе (корпус) и внутренней. Нагреваемой жидкостью является жидкость во внешней трубе.

В представленных ниже уравнениях индекс «1» относится к внутреннему потоку (греющая жидкость), а индекс «2» к внешнему потоку (нагреваемая жидкость). Запишем балансовые уравнения для элементарного объёма жидкости между сечениями 1 и 2 по ходу движения теплоносителей.

Уравнение для потока горячего (греющего) теплоносителя, протекающего в межтрубном пространстве, имеет вид:

$$S_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1 \cdot \frac{d\theta_1}{dt} dx + S_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1 \cdot V_1 \cdot \frac{d\theta_1}{dx} dx = \alpha_1 \cdot \pi \cdot D_в \cdot dx \cdot \left(\theta_1 - \theta_{ст}\right), \qquad (4.1)$$

где α_1 – коэффициент теплоотдачи от греющего теплоносителя к стенке трубы, Вт/(м^2·K);

$D_в$ – внутренний диаметр трубы, м;

$\theta_{ст}$ – температура стенки трубы, °С;

θ_1 – температура горячего теплоносителя, °С;

S_1 – площадь сечения трубного пространства, м^2;

V_1 – скорость горячего теплоносителя, м/с;

ρ_1 – плотность горячего теплоносителя, кг/м^3;

c_1 – удельная теплоёмкость горячего теплоносителя, Дж/(кг·K);
x – длина трубы (теплообменного аппарата), м;
t – время, с.

Скорость горячего теплоносителя вычисляется по формуле

$$V_1 = \frac{G_{\text{м}1}}{S_1 \cdot \rho_1}, \tag{4.2}$$

где $G_{\text{м}1}$ – массовый расход греющего теплоносителя, кг/с.

Первая часть уравнения (4.1) представляет собой тепло, накопленное за промежуток времени dt в элементе Sdx. Вторя часть – поток тепла, проходящий через сечение 1 за промежуток времени dt. Третья часть – приток тепла к нагреваемой жидкости от горячего теплоносителя вследствие теплопередачи через стенку трубы длиной dx за время dt. Следует учитывать, что dx – расстояние между сечениями 1 и 2.

С учётом третьего допущения ($\rho_1 = \text{const}$, $c_1 = \text{const}$), принимая скорость $V_1 = \text{conts}$, разделим уравнение (4.1) на $S_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1 \cdot dx$. Получим уравнение

$$\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{G_{\text{м}1}}{S_1 \cdot \rho_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dx} = \frac{\alpha_1 \cdot \pi \cdot D_{в} \cdot \left(\theta_1 - \theta_{ст}\right)}{S_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1}. \tag{4.3}$$

Введём обозначения $C_1 = \dfrac{G_{\text{м}1}}{S_1 \cdot \rho_1}$ и $C_2 = \dfrac{\alpha_1 \cdot \pi \cdot D_{в}}{S_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1}$. Тогда итоговое уравнение для потока греющего теплоносителя в трубе примет следующий вид:

$$\frac{d\theta_1}{dt} + C_1 \cdot \frac{d\theta_1}{dx} = C_2 \cdot \left(\theta_1 - \theta_{ст}\right). \tag{4.4}$$

Уравнение для стенки трубы имеет вид:

$$\frac{d\theta_{ст}}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot \pi \cdot D_{н}}{K} \cdot \left(\theta_{ст} - \theta_2\right) - \frac{\alpha_1 \cdot \pi \cdot D_{в}}{K} \cdot \left(\theta_1 - \theta_{ст}\right), \tag{4.5}$$

где $K = \pi \cdot D_{в} \cdot \delta_{ст} \cdot \rho_{ст} \cdot c_{ст}$;
θ_2 – температура холодного (нагреваемого) теплоносителя, °C;
$\delta_{ст}$ – толщина стенки трубы, м;
$\rho_{ст}$ – плотность материала трубы, кг/м^3;
$c_{ст}$ – удельная теплоёмкость материала трубы, Дж/(кг·K);
$D_{н}$ – наружный диаметр трубы, м;

α_2 – коэффициент теплоотдачи от стенки трубы к нагреваемому теплоносителю, Вт/(м^2·K).

Введём обозначения $C_3 = \frac{\alpha_2 \cdot \pi \cdot D_н}{K}$, $C_4 = \frac{\alpha_1 \cdot \pi \cdot D_в}{K}$. Тогда итоговое уравнение для стенки трубы примет следующий вид:

$$\frac{d\theta_{ст}}{dt} = C_3 \cdot \left(\theta_{ст} - \theta_2\right) - C_4 \cdot \left(\theta_1 - \theta_{ст}\right). \tag{4.6}$$

Уравнение для потока холодного (нагреваемого) теплоносителя, протекающего в межтрубном пространстве, имеет вид:

$$\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{G_{м2}}{S_2 \cdot \rho_2} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \frac{\alpha_2 \cdot \pi \cdot D_н \cdot \left(\theta_{ст} - \theta_2\right)}{S_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2} \tag{4.7}$$

где $G_{м2}$ – массовый расход нагреваемого теплоносителя, кг/с;

ρ_2 – плотность нагреваемого теплоносителя, кг/м^3;

c_2 – удельная теплоёмкость нагреваемого теплоносителя, Дж/(кг·K);

S_2 – площадь сечения межтрубного пространства, м^2.

Введём обозначения $C_5 = \frac{G_{м2}}{S_2 \cdot \rho_2}$, $C_6 = \frac{\alpha_2 \cdot \pi \cdot D_н}{S_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2}$. Тогда итоговое уравнение для потока нагреваемого теплоносителя примет следующий вид:

$$\frac{d\theta_2}{dt} + C_5 \cdot \frac{d\theta_2}{dx} = C_6 \cdot \left(\theta_{ст} - \theta_2\right). \tag{4.8}$$

Уравнение динамики представляет собой зависимость выходной температуры нагреваемого теплоносителя θ_2 от температуры горячей нефти θ_1 и температур стенок трубы $\theta_{ст}$ и имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{G_{м2}}{S_2 \cdot \rho_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dx} = \\ = \frac{S_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1}{S_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2 \cdot \pi} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{G_{м1} \cdot c_1}{S_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2 \cdot \pi} \cdot \frac{d\theta_1}{dx} + \frac{D_в \cdot \delta \cdot \rho_{ст} \cdot c_{ст}}{S_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2} \cdot \frac{d\theta_{ст}}{dt}.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Пусть $C_7 = \frac{S_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1}{S_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2 \cdot \pi}$, $C_8 = \frac{G_{м1} \cdot c_1}{S_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2 \cdot \pi}$, $C_9 = \frac{D_в \cdot \delta_{ст} \cdot \rho_{ст} \cdot c_{ст}}{S_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2}$.

Тогда итоговое уравнение динамики примет следующий вид:

$$\frac{d\theta_2}{dt}+C_5\cdot\frac{d\theta_2}{dx}=C_7\cdot\frac{d\theta_1}{dt}+C_8\cdot\frac{d\theta_1}{dx}+C_9\cdot\frac{d\theta_{cm}}{dt}. \qquad (4.10)$$

Необходимо определить коэффициенты C_1 - C_9 и записать уравнения (4.4), (4.6), (4.8), (4.10) с учётом этих коэффициентов.

4.2. Исходные данные

В качестве исходных данных для расчёта принимаются следующие значения параметров теплоносителей и геометрические параметры теплообменного аппарата.

Нагреваемый (холодный) теплоноситель – нефть

1. Объёмный расход теплоносителя G_2, м^3/ч равен максимальному значению расхода G_x из режимных листов (табл. 1).

2. Температура на входе в ТОА t_{21}, °С определяется как среднее значение $\theta_{xн}$ из режимных листов.

3. Температура на выходе из ТОА t_{22}, °С определяется как среднее значение $\theta_{xк}$ из режимных листов.

4. Плотность ρ_2, кг/м^3 определяется по формуле

$$\rho_2=\rho_{15}\cdot K_t\cdot K_P, \qquad (4.11)$$

где ρ_{15} – плотность нефти при температуре 15 °С, кг/м^3. Согласно [7] значение ρ_{15} = 827 кг/м^3;

K_t – поправочный коэффициент на изменение температуры нефти;

K_P – поправочный коэффициент на изменение давления нефти. Принимаем $K_P=1$.

Поправочный коэффициент K_t определяется по формуле

$$K_t=\exp\left[-\alpha_{15}\cdot\left(\overline{t_2}-15\right)\cdot\left(1+0,8\cdot\alpha_{15}\cdot\left(\overline{t_2}-15\right)\right)\right], \qquad (4.12)$$

где α_{15} – коэффициент объёмного расширения нефти при температуре 15 °С, 1/°С. Он вычисляется по формуле

$$\alpha_{15}=\frac{613,97226}{\rho_{15}^2}; \qquad (4.13)$$

$\overline{t_2}$ – среднее значение температуры нагреваемого теплоносителя, °С. Значение температуры вычисляется по формуле

$$\overline{t_2} = \frac{t_{21} + t_{22}}{2}. \qquad (4.14)$$

5. Теплоёмкость c_2, Дж/(кг·К) определяется по формуле

$$c_2 = \rho_2^{-0,5} \cdot 10^3 \cdot \left(53,34 + 0,0536 \cdot \overline{t_2}\right). \qquad (4.15)$$

6. Коэффициент теплоотдачи $\alpha_2 = 5,6 \cdot 10^3$ Вт/(м^2·К).

Греющий (горячий) теплоноситель – нефть

1. Объёмный расход теплоносителя G_1, м^3/ч. Значение определяется по формуле $G_1 = G_2 - 45$.

2. Температура на входе в аппарат t_{11}, °С определяется как среднее значение $\theta_{гн}$ из режимных листов.

3. Температура на выходе из аппарата t_{12}, °С.

Значение t_{12} определяется через уравнение теплового баланса между нагреваемым Q_2 и греющим теплоносителем Q_1 без учёта потерь в окружающую среду методом последовательных приближений:

- в первом приближении в качестве расчётной температуры принимается температура на входе в аппарат t_{11};

- вычисляется поправочный коэффициент K_t^I по формуле (4.12) при температуре t_{11};

- вычисляется плотность ρ_1^I по формуле (4.11);

- вычисляется теплоёмкость c_1^I по формуле (4.15) при температуре t_{11} и плотности ρ_1^I;

- определяется количество теплоты, принятое холодным теплоносителем Q_2, Вт по формуле

$$Q_2 = G_{м2} \cdot c_2 \cdot \left(t_{22} - t_{21}\right), \qquad (4.16)$$

где $G_{м2}$ – массовый расход, кг/с. Вычисляется через объёмный расход G_2 при плотности ρ_2;

- вычисляется температура t_{12}^I с учётом равенства $Q_1 = Q_2$ по формуле

$$t_{12}^{I} = t_{11} - \frac{Q_1}{G_{м1}^{I} \cdot c_1^{I}}, \tag{4.17}$$

где $G_{м1}^{I}$ – массовый расход, кг/с. Вычисляется через объёмный расход G_1 при плотности ρ_1^{I};

- во втором приближении в качестве расчётной температуры принимается средняя температура $\overline{t_1}^{II}$, вычисляемая по формуле

$$\overline{t_1}^{II} = \frac{t_{11} + t_{12}^{I}}{2}; \tag{4.18}$$

- вычисляется коэффициент K_t^{II}, плотность ρ_1^{II}, теплоёмкость c_1^{II} при температуре $\overline{t_1}^{II}$, а также массовый расход $G_{м1}^{II}$;

- вычисляется температура t_{12}^{II} по формуле

$$t_{12}^{II} = t_{11} - \frac{Q_1}{G_{м1}^{II} \cdot c_1^{II}}; \tag{4.19}$$

- определяется погрешность приближения δ, % по формуле

$$\delta = \frac{\left| t_{12}^{I} - t_{12}^{II} \right|}{t_{12}^{I}} \cdot 100. \tag{4.20}$$

Если погрешность δ не превышает 5 %, то температура на выходе из аппарата $t_{12} = t_{12}^{II}$. Если $\delta > 5$ % производится третье приближение при средней температуре $\overline{t_1}^{III}$, вычисляемой по формуле

$$\overline{t_1}^{III} = \frac{t_{11} + t_{12}^{II}}{2}. \tag{4.21}$$

4. Плотность ρ_1, кг/м^3 определяется по формуле (4.11), где поправочный коэффициент K_t вычисляется по формуле (4.12) при среднем значении температуры нагреваемого теплоносителя $\overline{t_1}$, °С. Значение температуры вычисляется по формуле

$$\overline{t_1} = \frac{t_{11} + t_{12}}{2}. \tag{4.22}$$

5. Теплоёмкость c_1, Дж/(кг·K) определяется по формуле (4.15) при температуре $\overline{t_1}$ и плотности ρ_1.

6. Коэффициент теплоотдачи $\alpha_1 = 5{,}8 \cdot 10^3$ Вт/(м^2·K).

Параметры теплообменного аппарата

1. Внутренний диаметр корпуса теплообменного аппарата $D_к = 154$ мм.

2. Внутренний диаметр трубы теплообменного аппарата $D_в = 50$ мм.

3. Толщина стенки трубы $\delta_{ст} = 6$ мм.

4. Плотность материала трубы (стали) $\rho_{ст} = 7800$ кг/м^3.

5. Удельная теплоёмкость материала трубы $c_{ст} = 500$ Дж/(кг·K).

Площадь сечения трубного пространства S_1 определяется через диаметр трубы $D_в$.

Площадь сечения межтрубного пространства S_2 определяется по формуле

$$S_2 = \pi \cdot \left[\left(\frac{D_к}{2} \right)^2 - \left(\frac{D_н}{2} \right)^2 \right].$$

5. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

В данном разделе представлены задачи для практических занятий по дисциплине «Математическое моделирование в теплоэнергетике» [8]. Все задачи решаются в программах SMath Studio или Mathcad.

Задание 1. Найти корень уравнения $x^4 - 11 \cdot x^3 + x^2 + x + 0{,}1 = 0$ методом половинного деления.

Задача 2. Найти корень уравнения $x^4 - 11 \cdot x^3 + x^2 + x + 0{,}1 = 0$ методом простой итерации.

Задача 3. Известны значения функции $f(x)$ в некоторых точках, представленных в табл. 5. Найти приближённое выражение функции в виде линейной функции $y = a \cdot x + b$.

Таблица 5

Исходные данные для задач 3, 4, 5

X	1	1,71	2,42	3,13	3,84	4,55	5,26	5,97
Y	12,49	4,76	2,55	1,60	1,11	0,82	0,63	0,5

Задача 4. Для условий задачи 3 найти приближённое выражение функции в виде многочлена второй степени $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Задача 5. Для условий задачи 3 найти приближённое выражение функции в виде степенной функции $y = a \cdot x^m$.

Задача 6. Для условий задачи 3 найти приближённое выражение функции в виде показательной функции $y = k \cdot e^{m \cdot x}$.

Задача 7. Для условий задачи 3 найти приближённое выражение функции в виде логарифмической функции $y = a \cdot \ln x + b$.

Задача 8. Для условий задачи 3 найти приближённое выражение функции в виде логарифмической функции $y = a \cdot \frac{1}{x} + b$.

Задача 9. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $\frac{d}{dx} y(x) = x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$ на отрезке $[1{,}7; 2{,}7]$ при заданном начальном условии $y(1{,}7) = 5{,}3$ и шаге интегрирования $h = 0{,}1$ методом Рунге-Кутты четвёртого порядка с шагом h и $2h$.

Задача 10. Используя метод сеток, решить уравнение теплопроводности (уравнение параболического типа) $\frac{du}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при заданных начальных условиях $u(x,0) = f(x)$, $u(0,t) = \varphi(x)$, $u(0{,}6;t) = \psi(x)$, где $x \in [0; 0{,}6]$.

Решение найти при $h=0{,}1$ для $t\in\left[0;0{,}01\right]$ с четырьмя десятичными знаками, считая $\delta=\dfrac{1}{6}$, $u\left(x,0\right)=3\cdot x\cdot\left(1-x\right)+0{,}12$; $u\left(0,t\right)=2\cdot\left(t+0{,}06\right)$; $u\left(0{,}6;t\right)=0{,}84$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бараков, А. В. Моделирование и алгоритмизация задач теплоэнергетики: учебное пособие / А. В. Бараков, А. А. Надеев, В. И. Ряжских. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2015. – 198 с.

2. Бондарь, А. Г. Математическое моделирование в химической технологии / А. Г. Бондарь. – Киев: «Вища школа», 1973. – 280 с.

3. Шпаков, П. С. Статистическая обработка экспериментальных данных: учебное пособие / П. С. Шпаков, В. Н. Попов. – М.: Горная книга (МГГУ), 2003. – 268 с.

4. Линник, Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Ю. В. Линник. – Л.: Физматгиз, 1962. – 352 с.

5. Каждан, А. Б. Математическое моделирование в геологии и разведке полезных ископаемых: учебное пособие / А. Б. Каждан, О. И. Гуськов, А. А. Шиманский. – М.: «Недра», 1979. – 168 с.

6. Тугашова, Л. Г. Методические указания по выполнению курсовых работ / Л. Г. Тугашова, Н. Н. Алаева, Н. В. Абдулкина. – Альметьевск: Типография АГНИ, 2007.

7. ГОСТ 8.602-2010 Государственная система обеспечения единства измерений. Плотность нефти. Таблицы пересчета. – Введ. 2013–01–01. – М.: Стандартинформ, 2019. – 12 с.

8. Поршнев, С. В. Численные методы на базе Mathcad / С. В. Поршнев, И. В. Беленкова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям и курсовой работе
для студентов направления 13.04.01
«Теплоэнергетика и теплотехника»
(программа «Промышленная теплоэнергетика»)
всех форм обучения

Составитель
Надеев Александр Александрович

Издается в авторской редакции

Компьютерный набор А. А. Надеева

Подписано к изданию 18.10.2023.
Уч.-изд. л. 1,5.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84