

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

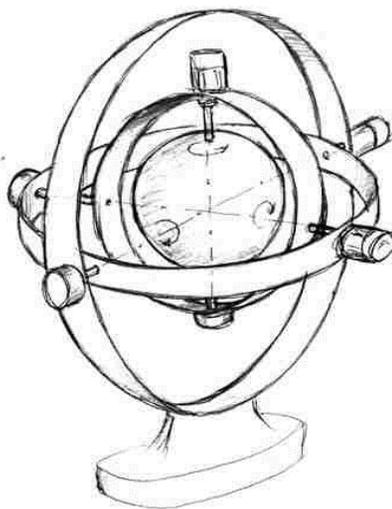
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

О. С. Хабарова, Т. Л. Тураева, Т. В. Дубовицкая,  
С. А. Солдатенко

## **РЕШЕНИЕ РАЗНОУРОВНЕВЫХ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ**

Учебно-методическое пособие



Воронеж 2019

УДК 53(07)  
ББК 22.3я7  
Р47

**Рецензенты:**

кафедра теоретической физики  
Воронежского государственного университета  
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук М. В. Фролов);  
канд. физ.-мат. наук, доцент А. Н. Алмалиев

**Решение разноуровневых задач по физике:** учебно-методическое пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (2,0 Мб) / О. С. Хабарова, Т. Л. Тураева, П47 Т. В. Дубовицкая, С. А. Солдатенко. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв. – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024×768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7731-0820-7

В пособии содержатся основной формульный материал, примеры решения задач и задачи для самостоятельной работы обучающихся.

Издание предназначено для студентов первого и второго курсов всех технических направлений очной и заочной форм обучения.

Ил. 17. Библиогр.: 6 назв.

**УДК 53(07)**  
**ББК 22.3я7**

*Издается по решению учебно-методического совета  
Воронежского государственного технического университета*

ISBN 978-5-7731-0820-7

© Хабарова О. С., Тураева Т. Л., Дубовицкая Т. В.,  
Солдатенко С. А., 2019  
© ФГБОУ ВО «Воронежский государственный  
технический университет», 2019

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса и второго курсов всех технических направлений очного и заочного отделений и будут полезны при закреплении ими отдельных разделов программы курса физики для высших учебных заведений.

В издание вошли задачи по разделам: «Кинематика», «Динамика поступательного движения», «Динамика вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси», «Механические колебания. Волны в упругой среде», «Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов», «Физические основы термодинамики», «Реальные газы и жидкости». Для удобства обучающихся в начале каждого раздела введены базовые формулы и приведены примеры решения некоторых задач. Формулы описаны без подробных пояснений, так как подразумевается, что смысл физических величин студент уже знает.

Задачи систематизированы по темам и распределены по различным уровням сложности. Основной целью практических занятий, домашних заданий и лабораторных работ является осмысление физических явлений и законов. Эта задача может быть решена, если студенты будут решать задания с достаточным пониманием сущности явлений. Это условие выполняется, если предоставить студентам возможность, обучаясь по одной программе, выбирать уровень сложности заданий и изучать физические явления с учетом индивидуальных особенностей и осваивать программу на различных уровнях, не ниже минимального, и постепенно продвигаться по уровням.

# 1. КИНЕМАТИКА

## ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Скорость движения материальной точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt},$$

где  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ;  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ;  $v_z = \frac{dz}{dt}$  – проекции скорости на оси координат.

$$\text{Модуль скорости } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

2. Ускорение  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ .

Нормальная и тангенциальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

$$\text{Модуль ускорения } a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

3. Кинематическое уравнение равномерного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где  $\omega$  – мгновенная угловая скорость.

4. Угловое ускорение  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ .

5. Кинематическое уравнение равнопеременного вращения

$$\varepsilon = \text{const}, \quad \vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} t^2}{2}.$$

6. Связь между линейными и угловыми величинами:

скорость точки линейная  $v = \omega R$ ;

ускорение точки тангенциальное  $a_\tau = \varepsilon R$ ;

ускорение точки нормальное  $a_n = \omega^2 R$ .

## Примеры решения задач

**Пример 1.** Автобус въезжает в поворот с радиусом  $R = 50$  м. Автобус движется по закону  $\xi = A + Bt + Ct^2$ , где  $A = 10$  м,  $B = 10$  м/с,  $C = -0,5$  м/с<sup>2</sup>. Найти: 1) скорость автобуса; 2) ускорения: тангенциальное, нормальное; 3) полное ускорение через 5 секунд; 4) пройденный путь.

**Решение.** Если взять производную от координаты по времени, то найдем зависимость скорости от времени:  $v = B + 2Ct$  и затем вычислим  $v = 5$  м/с.

Если взять производную от скорости по времени, то определим тангенциальное ускорение:  $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2C$ .

Нормальное ускорение определяется по формуле  $a_n = \frac{v^2}{R}$ .

Подставив значения, найдем  $a_\tau = -1$  м/с<sup>2</sup>,  $a_n = 0,5$  м/с<sup>2</sup>.

Полное ускорение является геометрической суммой ускорений  $a_\tau$  и  $a_n$ .  $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$ . Вычислим  $a = 1,12$  м/с<sup>2</sup>.

**Пример 2.** Маховик крутился частотой  $\nu_0 = 10$  с<sup>-1</sup> и начал вращаться равнозамедленно. Затем торможение закончилось и маховик снова начал вращаться равномерно с частотой  $\nu = 6$  с<sup>-1</sup>. Вычислите угловое ускорение и продолжительность торможения, если торможение длилось 50 оборотов.

**Решение.** Угловое ускорение связано с угловой скоростью соотношением

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi.$$

Известно, что  $\varphi = 2\pi N$ ,  $\omega = 2\pi\nu$ , тогда

$$\varepsilon = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{2\varphi} = \frac{\pi(\nu^2 - \nu_0^2)}{N}.$$

Вычислим  $\varepsilon = -4,02$  рад/с<sup>2</sup>.

Определим время торможения по формуле, используя связи между угловыми скоростями и угловым ускорением:

$$\varphi = \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2} = \pi(v_0 + v)t, \text{ получаем } t = 6,25 \text{ с.}$$

## **Задачи для самостоятельного решения**

### **1.1. Прямолинейное движение**

#### **I уровень**

1.1.1. Тело перемещалось сначала в течение времени  $t_1 = 10 \text{ с}$  медленно, со скоростью  $v_1 = 5 \text{ м/с}$ , потом в следующем промежутке времени  $t_2 = 8 \text{ с}$  быстрее, со скоростью  $v_2 = 8 \text{ м/с}$ , и в течение последнего промежутка времени  $t_3 = 6 \text{ с}$  быстро, со скоростью  $v_3 = 20 \text{ м/с}$ . Какой была средняя скорость движения этого тела?

*Ответ:*  $v_{cp} = 9,75 \text{ м/с}$ .

1.1.2. Водитель грузовика  $\frac{3}{4}$  пути проехал со скоростью  $v_1 = 50 \text{ км/ч}$ , затем понял, что опаздывает, и увеличил скорость движения. Последнюю часть пути водитель вел грузовик со скоростью  $v_2 = 70 \text{ км/ч}$ . С какой средней скоростью ехал грузовик?

*Ответ:*  $v_{cp} = 53,85 \text{ км/ч}$ .

1.1.3. Найти скорость относительно берега озера: а) плота, идущего по течению; б) плота, идущего против течения; в) плота, идущего под углом  $\alpha = 90^\circ$  к течению. Скорость течения реки  $1 \text{ м/с}$ , скорость плота относительно воды озера  $2 \text{ м/с}$ .

*Ответ:* а)  $3 \text{ м/с}$ ; б)  $1 \text{ м/с}$ ; в)  $\sqrt{5} \text{ м/с}$ .

1.1.4. Самолет летает между городами, расстояние между которыми  $300 \text{ км}$ , с запада на восток. Вычислить, сколько длится полет, если: а) погода безветренная; б) дует южный

ветер; в) дует западный ветер. Скорость ветра  $u = 10 \text{ м/с}$ , скорость самолета относительно воздуха  $v = 600 \text{ км/ч}$ .

Ответ: а)  $0,5 \text{ ч}$ ; б)  $167,3 \text{ м/с}$ ; в)  $177 \text{ м/с}$ .

1.1.5. На рис. 1.1 представлены четыре случая движения материальной точки А. На рисунке схематически изображены координатная ось, отмечены начальные координаты  $x_0$ , скорость  $v_0$ , ускорение  $a$ . Необходимо записать уравнения движений  $x = f(t)$  точки для каждого из случаев.

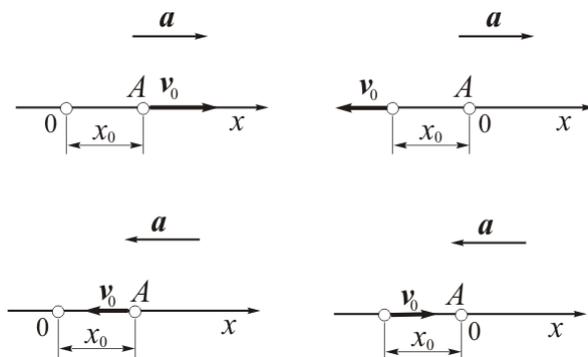


Рис. 1.1

1.1.6. Поезд замедляется в течение двух минут, уменьшает свою скорость от  $40 \text{ км/ч}$  до  $30 \text{ км/ч}$ . Найти, какое расстояние прошел поезд до остановки, а также его ускорение.

Ответ:  $a = -1/12 \text{ км/мин}$ ;  $S = 42 \text{ км}$ .

1.1.7. Поезд начал торможение, имея скорость  $v_0 = 54 \text{ км/ч}$  и ускорение  $a = -0,5 \text{ м/с}^2$ . На каком расстоянии состав остановится и через какое время?

Ответ:  $S = 225 \text{ м}$ ;  $t = 30 \text{ с}$ .

1.1.8. Тело падает с высоты  $h = 1 \text{ км}$  свободно. Исключив трение о воздух, вычислите, сколько пройдет тело при падении: а) за первую секунду; б) за последнюю секунду.

Ответ:  $S_1 = 5 \text{ м}$ ;  $S_{\text{посл}} = 136 \text{ м}$ .

1.1.9. Тело движется по закону  $x = At + Bt^2$ , где  $A = 3 \text{ м/с}$ ,  $B = -0,05 \text{ м/с}^2$ . В некоторый момент времени скорость тела равна нулю. Вычислите в этот момент времени координату и ускорение.

*Ответ:*  $S = 45 \text{ м}$ ;  $a = 0,1 \text{ с}$ .

## II уровень

1.1.10. График зависимости ускорения от времени представлен на рис. 1.2. Если величина начальной скорости равна нулю, то чему равна средняя скорость за 8 с?

*Ответ:*  $2 \text{ м/с}$ .

1.1.11. Уравнение пути для тела выражается такой зависимостью  $s = At + Bt + Ct^2$ , где  $A = 3 \text{ м}$ ,  $B = 2 \text{ м/с}$ ,  $C = 1 \text{ м/с}^2$ . Вычислить среднюю скорость и среднее ускорение тела за первую, вторую и третью секунды движения.

*Ответ:*

а)  $v(1) = 3 \text{ м/с}$ ;  $a(1) = 2 \text{ м/с}^2$ ;

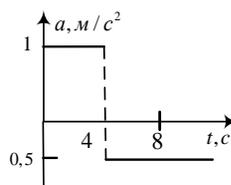
б)  $v(2) = 5 \text{ м/с}$ ;  $a(2) = 2 \text{ м/с}^2$ ;

в)  $v(3) = 7 \text{ м/с}$ ;  $a(3) = 2 \text{ м/с}^2$ .

1.1.12. Равнопеременные движения точек выражаются двумя уравнениями движения:  $x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$ ,  $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$ , где  $A_1 = 20 \text{ м}$ ,  $A_2 = 2 \text{ м}$ ,  $B_2 = B_1 = 2 \text{ м/с}$ ,  $C_1 = -4 \text{ м/с}^2$ ,  $C_2 = 0,5 \text{ м/с}^2$ . Найти момент времени, когда скорости этих точек одинаковые. Вычислить в этот момент времени величины скорости и ускорения для двух точек.

*Ответ:*  $0 \text{ с}$ ;  $2 \text{ м/с}$ ;  $-8 \text{ м/с}^2$ ;  $1 \text{ м/с}^2$ .

1.1.13. Равнопеременные движения точек выражаются двумя уравнениями движения:  $x_1 = A_1 + B_1t^2 + C_1t^3$ ,  $x_2 = A_2 + B_2t^2 + C_2t^3$ , где  $A_1 = 4 \text{ м}$ ,  $B_1 = 8 \text{ м/с}^2$ ,  $C_1 = -16 \text{ м/с}^3$ ,  $A_2 = 2 \text{ м}$ ,  $B_2 = -4 \text{ м/с}^2$ ,  $C_2 = 1 \text{ м/с}^3$ . В какое время ускорения



**Рис. 1.2**

точек будут одинаковы? Найти скорости тел в этот момент времени.

*Ответ:*  $0,235 \text{ с}; 5,1 \text{ м/с}; 0,286 \text{ м/с}$ .

1.1.14. Уравнение пути от времени задано функцией  $s = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$ , где константы равны  $A = 6 \text{ м}$ ,  $B = 3 \text{ м/с}$ ,  $C = 2 \text{ м/с}^2$ ,  $D = 1 \text{ м/с}^3$ . В интервале от  $t_1 = 1 \text{ с}$  до  $t_2 = 4 \text{ с}$  определите: а) среднюю скорость; б) среднее ускорение.

*Ответ:*  $v_{cp} = 28 \text{ м/с}; a_{cp} = 19 \text{ м/с}^2$ .

1.1.15. С обрыва какой высоты упало дерево, если последний метр своего пути оно прошло за время  $t = 0,05 \text{ с}$ ? [6]

*Ответ:*  $21 \text{ м}$ .

1.1.16. Предмет падает с высоты  $h = 1,2 \text{ км}$ . Сколько он пролетит за последнюю секунду?

*Ответ:*  $148,46 \text{ м}$ .

1.1.17. Свободно падающий предмет падает с высоты  $1200 \text{ м}$ . Какое расстояние он будет падать за последнюю секунду? [6]

*Ответ:*  $150 \text{ м}$ .

1.1.18. Определить глубину шахты, если при падении шишки её удар о дно доносится через  $t = 5 \text{ с}$ . Принять скорость звука  $v = 330 \text{ м/с}$ .

*Ответ:*  $107 \text{ м}$ .

1.1.19. С балкона бросили мячик вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0 = 5 \text{ м/с}$ . Через  $t = 3 \text{ с}$  мячик упал на землю. Какова высота балкона над землей и скорость мячика в момент удара о землю? [6]

*Ответ:*  $30 \text{ м}$ .

### III уровень

1.1.20. В течение времени  $\tau$  скорость тела задается уравнением  $v = A + Bt + Ct^2$  ( $0 \leq t \leq \tau$ ). Чему равна средняя скорость этого тела за время  $\tau$ ?

*Ответ:*  $A + \frac{B\tau}{2} + \frac{C\tau^2}{3}$ .

1.1.21. Движение точки происходит по закону  $x = At + Bt^2$ , где  $A = 3 \text{ м/с}$ ,  $B = -0,5 \text{ м/с}^2$ . Чему равна средняя скорость за время от  $t_1 = 1 \text{ с}$  до  $t_2 = 4 \text{ с}$ ?

*Ответ: 0,3 м/с.*

1.1.22. Два тела брошены одновременно – одно вверх, а другое вниз – по вертикали из одной точки. Начальные скорости у обоих тел одинаковые:  $v_0 = 5 \text{ м/с}$ . Определите: а) когда тела встретятся; б) где тела встретятся; в) скорости каждого из тел в точке встречи.

*Ответ: 127 мс; 56 см; 3,75 м/с, 6,25 м/с.*

1.1.23. Ускорение тела растет со временем. Через 10 с от начала наблюдения ускорение равно  $5 \text{ м/с}^2$ . Рассчитайте в конце девятой секунды: а) чему будет равна скорость точки; б) пройденный точкой путь.

*Ответ: 25 м/с; 83,3 м.*

1.1.24. Дети бросают вертикально вверх мячи: первый мяч бросили со скоростью  $20 \text{ м/с}$ , второй мяч с той же скоростью бросили спустя время 1 с. На какой высоте они встретятся?

*Ответ: 19 м.*

1.1.25. Написать уравнение движения мяча, брошенного вверх со скоростью  $v_0 = 10 \text{ м/с}$  с балкона высотой 12,5 м. Вычислите среднюю скорость мяча за все время полета.

*Ответ: 7,77 м/с,  $12,5 + 10t - \frac{10t^2}{2}$ .*

## 1.2. Криволинейное движение

### I уровень

1.2.1. Уравнение движения точки  $r(t) = iAt^3 + jBt^2$ . Найти зависимости  $v(t)$ ,  $a(t)$ .

1.2.2. Точка совершает вращение по окружности радиусом  $R = 4 \text{ м}$ , которое задано уравнением  $\xi = A + Bt + Ct^2$ , где

$A = 10 \text{ м}$ ,  $B = -2 \text{ м/с}$ ,  $C = 1 \text{ м/с}^2$ . Рассчитать тангенциальную составляющую, нормальную составляющую ускорения и полное ускорение точки в момент  $t = 2 \text{ с}$ .

*Ответ:*  $2 \text{ м/с}^2$ ;  $1 \text{ м/с}^2$ ;  $2,24 \text{ м/с}^2$ .

1.2.3. Камень был брошен с балкона горизонтально со скоростью  $v_0 = 15 \text{ м/с}$ . Какая скорость будет у камня через  $t = 2 \text{ с}$  после броска?

*Ответ:*  $25 \text{ м/с}$ .

1.2.4. С катапульты был произведен выстрел камнем со скоростью  $v_0 = 15 \text{ м/с}$  под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Считая трение о воздух пренебрежимо малым, найдите: а) как высоко поднимется камень; б) как далеко улетит камень; в) сколько длится полет камня.

*Ответ:*  $2,87 \text{ м}$ ;  $19,9 \text{ м}$ ;  $1,53 \text{ с}$ .

1.2.5. Тело движется со скоростью  $v = 2 \text{ м/с}$  и с постоянным тангенциальным ускорением  $a_\tau = 0,5 \text{ м/с}^2$  по закруглению траектории с радиусом  $R = 4 \text{ м}$ . Чему равно полное ускорение тела?

*Ответ:*  $1,1 \text{ м/с}^2$ .

1.2.6. Школьники с дерева запустили горизонтально модель самолета. Самолетик упал на лужайку на расстоянии  $s = 40 \text{ м}$  от дерева спустя две секунды. Определить начальную и конечную скорости самолетика.

*Ответ:*  $20 \text{ м/с}$ ;  $28 \text{ м/с}$ .

1.2.7. Как высоко может быть подброшен мяч, если сначала он был брошен к горизонту под углом  $\alpha = 30^\circ$  со скоростью  $v_0 = 15 \text{ м/с}$ . Где он упадет на землю, считая от места броска? Как долго мяч будет в полете?

*Ответ:*  $2,87 \text{ м}$ ;  $19,9 \text{ м}$ ;  $1,53 \text{ с}$ .

## II уровень

1.2.8. Точка движется по траектории, которая задана уравнениями  $x = A_1 t^3$  и  $y = A_2 t$ , где  $A_1 = 1 \text{ м/с}^3$ ,  $A_2 = 2 \text{ м/с}$ . Напишите уравнение траектории, вычислите скорость и полное ускорение точки в момент времени  $t = 0,8 \text{ с}$ .

*Ответ:*  $2,77 \text{ м/с}$ ;  $4,8 \text{ м/с}$ .

1.2.9. Стрелок с вышки высотой  $h = 30 \text{ м}$  произвел горизонтальный выстрел с начальной скоростью  $v_0 = 10 \text{ м/с}$ . Определите: а) уравнение траектории пули; б) скорость пули в момент попадания в землю; в) угол вхождения пули в землю.

*Ответ:*  $26,2 \text{ м/с}$ ;  $67,6^\circ$ .

1.2.10. Движение точки представлено уравнением  $\vec{r}(t) = A(\vec{i} \cos \omega t - \vec{j} \sin \omega t)$ , где  $A = 0,5 \text{ м}$ ,  $\omega = 5 \text{ рад/с}$ . Нарисовать траекторию точки, определить направление движения, модуль скорости  $|\vec{v}|$  и модуль нормального ускорения  $|\vec{a}_n|$ .

*Ответ:*  $v = 2,5 \text{ м/с}$ ;  $a_n = 12,5 \text{ м/с}^2$ .

1.2.11. Нормальное ускорение точки  $a_n = A + Bt + Ct^2$ , где  $A = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $B = 6 \text{ м/с}^3$ ,  $C = 9 \text{ м/с}^4$ , радиус окружности  $R = 4 \text{ м}$ . Найти: 1) тангенциальную составляющую ускорения точки; 2) путь, пройденный точкой за время  $t_1 = 5 \text{ с}$ ; 3) полное ускорение в  $t_2 = 1 \text{ с}$ .

*Ответ:*  $6 \text{ м/с}^2$ ;  $85 \text{ м}$ ;  $17 \text{ м/с}^2$ .

1.2.12. Выстрел произведен горизонтально со скоростью  $v_0 = 15 \text{ м/с}$ . Чему равен радиус кривизны траектории выстреливаемого тела через  $t = 2 \text{ с}$  после начала?

*Ответ:*  $102 \text{ м}$ .

1.2.13. Некоторое тело движется по окружности радиусом  $R = 3 \text{ м}$ . Его тангенциальное ускорение  $a_\tau = 0,5 \text{ м/с}^2$ . Каково полное ускорение тела, если её скорость  $v = 2 \text{ м/с}$ ?

*Ответ:*  $1,42 \text{ м/с}^2$ .

1.2.14. В повороте дороги радиусом  $R=10$  м движется машина. Нормальная составляющая ускорения  $5$  м/с<sup>2</sup>. В некоторый момент времени векторы полного и нормального ускорений образуют угол  $\alpha=60^0$ . Найти скорость машины и её тангенциальную составляющую ускорения.

*Ответ:* 7 м/с; 8,5 м/с<sup>2</sup>.

1.2.15. Шарики вылетают из пинг-понга машины горизонтально со скоростью  $v_x=15$  м/с. Определите нормальное и тангенциальное ускорения через время  $t=1$  с пинг-понг шариков.

*Ответ:* 8,2 м/с<sup>2</sup>; 5,3 м/с<sup>2</sup>.

1.2.16. Спортсмен бросил диск на соревнованиях со скоростью  $v_0=12$  м/с к горизонту под углом  $\alpha=45^0$ , диск упал на стадион на расстоянии  $s$  от линии бросания. С какой высоты  $h$  надо стрелять спортсмену-стрелку в горизонтальном направлении, чтобы при той же начальной скорости пули она попала в место приземления?

*Ответ:* 7,3 м.

1.2.17. Произведён горизонтальный бросок спортивного снаряда со скоростью  $v_0=14,7$  м/с под углом  $\alpha=30^0$  к поверхности земли. Через время  $t=1,25$  с после броска чему будут равны нормальное и тангенциальное ускорения снаряда?

*Ответ:* 9,2 м/с<sup>2</sup>; 3,5 м/с<sup>2</sup>.

1.2.18. Под углом  $\alpha=60^0$  к горизонту брошено тело со скоростью  $v_0=10$  м/с. Рассчитать радиус кривизны  $R$  траектории тела через  $t=1$  с после броска.

*Ответ:* 6,3 м.

1.2.19. На расстоянии  $L$  от стены высотой  $h$  человек бросает баскетбольный мяч. Какова должна быть минимальная скорость этого мяча, чтобы он перелетел стену?

*Ответ:*  $\sqrt{g(h + \sqrt{h^2 + L^2})}$ .

### III уровень

1.2.20. Из положения с координатами  $x_1 = y_1 = 0$  точка движется в координатах  $xу$  со скоростью  $\vec{v} = a\vec{i} + bx\vec{j}$  ( $a, b$  – постоянные,  $\vec{i}, \vec{j}$  – орты осей  $x$  и  $y$ ). Запишите уравнение траектории.

*Ответ:*  $y = bx^2/a$ .

1.2.21. Произведён выстрел из ружья со скоростью  $v_0 = 20$  м/с под углом  $\alpha = 60^\circ$  к вертикали. Определите для патрона в момент времени  $t = 1,5$  с после выстрела: а) нормальную составляющую ускорения; б) тангенциальную составляющую ускорения.

*Ответ:*  $9,47$  м/с<sup>2</sup>;  $2,58$  м/с<sup>2</sup>.

1.2.22. Под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту бросили камень. Найти тангенциальную составляющую ускорения и нормальную составляющую ускорения в начальный момент движения.

*Ответ:*  $4,9$  м/с<sup>2</sup>;  $8,5$  м/с<sup>2</sup>.

1.2.23. Выстрел пули пробил два листа картона, которые закреплены вертикально на расстоянии  $30$  м друг от друга. Дырка на втором листе картона оказалась на  $h = 10$  см ниже, чем на первом. Какова скорость пули, если первый лист она пролетела горизонтально?

*Ответ:*  $210$  м/с.

1.2.24. Орудие расположено у подножия горы с углом наклона к горизонту  $45^\circ$ . Под каким углом  $\alpha$  к горизонту надо расположить ствол орудия, чтобы снаряд достиг склона на максимальной высоте? [6]

*Ответ:*  $3\pi/8$ .

1.2.25. Найдите, под каким углом к горизонту надо бросить яблоко с вершины горы с уклоном  $45^\circ$ , чтобы оно упало на склон на максимальном расстоянии?

*Ответ:*  $\pi/8$ .

1.2.26. Шайба скользит со скоростью  $v_0 = 10 \text{ м/с}$  по гладкому столу, стремясь к его открытому краю. Стенка и опора стола образуют щель шириной  $d = 3 \text{ см}$ . Высота стола  $h = 1,5 \text{ м}$ . Сколько раз абсолютно упруго ударится шайба о боковые поверхности до удара об пол?

*Ответ: 90 раз.*

### 1.3. Вращение тела вокруг неподвижной оси

#### I уровень

1.3.1. Найти циклическую частоту  $\omega$ : а) суточного вращения Земли; б) часовой стрелки; в) минутной стрелки.

*Ответ:  $72,7 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с}$ ;  $145,4 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с}$ ;  $1,74 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с}$ .*

1.3.2. Определите линейную скорость и центростремительное ускорение точек, лежащих на земной поверхности: а) на экваторе; б) на широте Москвы ( $\varphi = 56^\circ$ ). [6]

*Ответ:  $463 \text{ м/с}$ ;  $3,37 \text{ см/с}^2$ ;  $259 \text{ м/с}$ ;  $1,88 \text{ см/с}^2$ .*

1.3.3. На виниловой музыкальной пластинке есть царапины. Если включить проигрыватель и пластинка начнет вращаться, то скорость  $v_1$  первой царапины окажется  $4 \text{ м/с}$ . А царапина, расположенная на  $10 \text{ см}$  ближе к центру, имеет скорость  $v_2 = 2 \text{ м/с}$ . Определить частоту проигрывания пластинки.

*Ответ:  $1,59 \text{ с}^{-1}$ .*

1.3.4. Точильный диск, вращаясь, достиг угловой скорости  $\omega = 20 \text{ рад/с}$  через  $N = 10 \text{ об}$  после начала движения. Чему равно угловое ускорение  $\varepsilon$ ?

*Ответ:  $3,2 \text{ рад/с}^2$ .*

1.3.5. Повозка движется по повороту дороги, имеющей радиус кривизны  $R = 50 \text{ м}$ . Уравнение движения повозки  $\xi = A + Bt + Ct^2$ , где  $\xi$  – криволинейная координата, отсчитанная по дуге окружности,  $A = 10 \text{ м}$ ,  $B = 10 \text{ м/с}$ ,  $C = -0,5 \text{ м/с}^2$ .

Рассчитать скорость, её тангенциальное, нормальное и полное ускорения в момент времени  $t = 5 \text{ с}$ .

*Ответ:*  $5 \text{ м/с}$ ;  $-1 \text{ м/с}^2$ ;  $0,5 \text{ м/с}^2$ ;  $1,12 \text{ м/с}^2$ .

1.3.6. На бобину радиусом  $r = 4 \text{ см}$  намотали леску. Бобина может вращаться около горизонтальной оси. К леске привязали грузило, которое начало разматывать леску с ускорением  $a = 1/3 \text{ м/с}^2$ . Найти угловое ускорение  $\varepsilon$  бобины.

*Ответ:*  $8,3 \text{ рад/с}^2$ .

## II уровень

1.3.7. Диск поворачивает по закону  $\varphi = At^2$ , где  $A = 0,6 \text{ рад/с}^2$ . Через 2 секунды после начала вращения определите: а) угловую скорость; б) угловое ускорение; в) для точки, находящейся на расстоянии  $70 \text{ см}$  от оси вращения, тангенциальное, нормальное и полное ускорения.

*Ответ:*  $2,4 \text{ м/с}$ ;  $1,2 \text{ рад/с}^2$ .

1.3.8. Тело вращается вокруг оси так, что угол поворота меняется по закону  $\varphi = 2\pi\left(at - \frac{bt^2}{2}\right)$ , где  $a > 0$  и  $b > 0$  – постоянные. Найти время  $\tau$ , когда тело остановится, и число его оборотов до остановки.

*Ответ:*  $\frac{a}{b}$ ;  $\frac{a^2}{2b}$ .

1.3.9. Угол поворота резинки, вращающейся на пластинке, от времени  $t$  описывается законом  $\varphi = at^{1/2}$ , где  $a$  – const. Найти средние значения угловых скорости и ускорения резинки за время  $\tau_1$  и  $\tau_2$ .

*Ответ:*  $\bar{\omega} = a(\tau_1 + \tau_2)$ ;  $2a$ .

1.3.10. Вращающаяся точка движется по траектории, уравнение которой задается функцией  $s = A - Bt + Ct^2$ , где  $B = 2 \text{ м/с}$  и  $C = 1 \text{ м/с}^2$ . Найти линейную скорость точки,

ее тангенциальное, нормальное и полное ускорения через время  $t = 3 \text{ с}$  после начала движения.

*Ответ:*  $2 \text{ м/с}^2$ ;  $2 \text{ м/с}^2$ ;  $2,8 \text{ м/с}^2$ .

1.3.11. На бобину радиусом  $r = 4 \text{ см}$  намотали леску. Бобина может вращаться около горизонтальной оси. К леске привязали грузило, которое начало разматывать леску. Грузило за время  $t = 3 \text{ с}$  опустилось на  $1,5 \text{ м}$ . Найти ускорение бобины.

*Ответ:*  $8,33 \text{ рад/с}^2$ .

1.3.12. Диск радиусом  $r = 10 \text{ см}$  крутится с угловым ускорением  $\varepsilon = 0,5 \text{ рад/с}^2$ . Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек диска в конце второй секунды.

*Ответ:*  $5 \text{ м/с}^2$ ;  $10 \text{ м/с}^2$ ;  $11 \text{ м/с}^2$ .

1.3.13. Диск вращается соответственно уравнению  $\varphi = A + Bt + Ct^3$ , где  $A = 3 \text{ рад}$ ,  $B = -1 \text{ рад/с}$ ,  $C = 0,1 \text{ рад/с}^3$ . Его радиус  $r = 20 \text{ см}$ . Чему равно тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек диска для времени  $t = 10 \text{ с}$ ?

*Ответ:*  $1,2 \text{ м/с}^2$ ;  $168,2 \text{ м/с}^2$ ;  $168 \text{ м/с}^2$ .

1.3.14. Крутящаяся шестеренка после выключения станка останавливается из-за трения через время  $\Delta t = 1 \text{ мин}$ . Чему равно угловое ускорение  $\varepsilon$  и число оборотов  $N$  до остановки детали, если сначала она вращалась с частотой  $5 \text{ с}^{-1}$ ?

*Ответ:*  $-0,523 \text{ рад/с}^2$ ;  $150$ .

1.3.15. Точильный диск раскручивается, и через 50 полных оборотов он увеличил частоту с  $\nu_1 = 4 \text{ с}^{-1}$  до  $\nu_2 = 6 \text{ с}^{-1}$ . С каким угловым ускорением вращался диск?

*Ответ:*  $1,26 \text{ рад/с}^2$ .

1.3.16. Каково угловое ускорение колечка, если через  $2 \text{ с}$  после начала вращения вектор полного ускорения точки на его ободке составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с вектором линейной скорости?

*Ответ:*  $0,43 \text{ рад/с}^2$ .

### III уровень

1.3.17. Функция  $v = A + Bt^2$ , где  $A = 0,3 \text{ м/с}^2$ ,  $B = 0,1 \text{ м/с}^3$ , представляет зависимость линейной скорости точек, лежащих по краю диска радиусом  $r = 10 \text{ см}$  от времени. Вектор полного ускорения составляет некий угол с радиусом колеса, который меняется со временем. Найдите величину этого угла через  $3 \text{ с}$  от начала вращения.

*Ответ:*  $4^\circ$ .

1.3.18. Функция  $\varphi = A + Bt^3$ , где  $A = 2 \text{ рад}$ ,  $B = 4 \text{ рад/с}^3$ , представляет собой зависимость угла, на который поворачиваются точки внешнего радиуса цилиндра радиусом  $R = 10 \text{ см}$  от времени. Найдите для точек внешнего радиуса нормальное и тангенциальное ускорения для  $t = 2 \text{ с}$ .

*Ответ:*  $230 \text{ м/с}^2$ ;  $4,8 \text{ м/с}^2$ .

1.3.19. Металлическая болванка диаметром  $50 \text{ мм}$  протачивается на токарном станке. Продольная подача  $h$  резца станка равна  $0,4 \text{ мм}$  за один оборот. Вычислить скорость  $v$  резки, если за время  $\Delta t = 1 \text{ мин}$  протачивается участок длиной  $10 \text{ см}$ .

*Ответ:*  $0,65 \text{ м/с}$ .

1.3.20. Определите, во сколько раз нормальное ускорение вращающейся точки больше ее тангенциального ускорения для времени, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с вектором ее линейной скорости?

*Ответ:*  $0,58$  раз.

1.3.21. Тело участвует в двух вращениях, происходящих со скоростями  $\vec{\omega}_1 = at^2\vec{i}$  и  $\vec{\omega}_2 = at^2\vec{j}$ , где  $a = 1 \text{ рад/с}^2$ . На какой угол  $\varphi$  повернется тело за первые  $3 \text{ с}$ ?

*Ответ:*  $20 \text{ рад}$ .

## 2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Основное уравнение динамики материальной точки и поступательного движения твердого тела

$$m\vec{a} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

где  $\sum_{i=1}^n F_i$  – равнодействующая всех сил, приложенных к телу,

$\vec{P} = m\vec{v}$  – импульс.

2. Координата центра масс  $x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$ .

3. Работа и мощность переменной силы

$$A = \int_{S_1}^{S_2} F_s dS; \quad N = \frac{dA}{dt} = (\vec{F}\vec{v}).$$

4. Связь между силой и потенциальной энергией частицы во внешнем поле сил

$$\vec{F} = -\left( \vec{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right).$$

### Пример решения задач

Каучуковые шары  $m_1 = 2,5 \text{ кг}$  и  $m_2 = 1,5 \text{ кг}$  движутся навстречу друг другу со скоростями  $v_1 = 6 \text{ м/с}$  и  $v_2 = 2 \text{ м/с}$ , затем сталкиваются, слипаясь. Определить часть кинетической энергии, перешедшей во внутреннюю энергию.

**Решение.** Совместная скорость шаров по закону сохранения импульса определится как

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u.$$

Откуда

$$u = (m_1 v_1 - m_2 v_2) / (m_1 + m_2), \quad u = 3 \text{ м/с}.$$

Кинетические энергии шаров до и после удара определим по формулам

$$E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad E_2 = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}.$$

Получим

$$E_1 = 48 \text{ Дж}, \quad E_2 = 18 \text{ Дж}.$$

Запишем закон сохранения энергии для неупругого удара:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + Q,$$

где  $Q$  – количество выделившейся теплоты.

Доля кинетической энергии, пошедшей на увеличение внутренней энергии, равна

$$\frac{Q}{E_1} = 0,6.$$

## ***Задачи для самостоятельного решения***

### **2.1. Законы Ньютона**

#### **І уровень**

2.1.1. Запишите закон изменения силы от времени для бруска массой  $m$ , движущегося так, если функция пройденного пути от времени  $s = A \cos \omega t$ , где  $A$  и  $\omega$  – постоянные.

*Ответ:*  $F(t) = -m A \omega^2 \cos \omega t$ .

2.1.2. Светильник массой 800 г подвешен к нити. Вычислите силу ее натяжения, если нить: а) поднимать вверх с ускорением  $2 \text{ м/с}^2$ ; б) опускать вниз с ускорением  $2 \text{ м/с}^2$ .

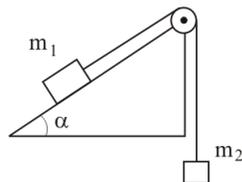
*Ответ:* 9,6 Н; 6,4 Н.

2.1.3. Два груза с разными массами ( $m_1 > m_2$ ) подвешены на невесомой нити, перекинутой через неподвижный невесо-

мый блок. Определите: а) ускорение грузов; б) натяжение нити; в) силу, действующую на ось блока.

$$\text{Ответ: } a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}; T = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}; F = \frac{4m_1m_2g}{m_1 + m_2}.$$

2.1.4. На деревянном клине (см. рисунок), угол  $\alpha$  которого равен  $20^\circ$ , расположили металлические кубики с массами  $m_1 = 200 \text{ г}$ ,  $m_2 = 150 \text{ г}$ . Если нить и неподвижный блок невесомы и трения нет, определите ускорение, с которым будут перемещаться тела, если тело  $m_2$  опускается.



$$\text{Ответ: } 2,3 \text{ м/с}^2.$$

2.1.5. На клин с углом наклона  $\alpha = 20^\circ$  положили кубик массой  $m = 10 \text{ кг}$ . Затем к нему приложили горизонтальную силу  $F = 8 \text{ Н}$ . Определите: а) ускорение бруска; б) силу, с которой он давит на плоскость, если считать, что трения в системе нет.

$$\text{Ответ: } 4,11 \text{ м/с}^2; 89,4 \text{ Н}.$$

2.1.6. Грузовой лифт массой  $m = 800 \text{ кг}$  может перемещаться по вертикальным рельсам без трения. С каким ускорением и куда движется лифт, если сила натяжения подвесного троса равна: а)  $12 \text{ кН}$ ; б)  $6 \text{ кН}$  ?

$$\text{Ответ: } 5,2 \text{ м/с}^2, \text{ поднимается}; 2,3 \text{ м/с}^2, \text{ опускается}.$$

2.1.7. Функция  $s = A - Bt + Ct^2$ , где  $C = 2 \text{ м/с}^2$ , представляет зависимость пройденного телом пути от времени. На тело действует сила  $F = 10 \text{ Н}$  так, что оно движется прямолинейно. Вычислить массу тела.

$$\text{Ответ: } 2,5 \text{ кг}.$$

2.1.8. С высоты  $h = 1,8 \text{ м}$  молот массой  $m = 1 \text{ т}$  падает на тяжёлую металлическую заготовку. Найдите среднее значение силы удара, если он длится  $t = 0,01 \text{ с}$ .

$$\text{Ответ: } 626 \text{ кН}.$$

## II уровень

2.1.9. К динамометру подвешен блок. Каково будет показание динамометра во время движения грузов, привязанных к шнуру, который перекинут через блок, если массы грузов  $m_1 = 1,5 \text{ кг}$  и  $m_2 = 3 \text{ кг}$ ?

*Ответ:* 39,2 Н.

2.1.10. На деревянной наклонной плоскости, которая составляет с горизонтальной поверхностью угол  $\alpha = 30^\circ$  и имеет длину 2 м, лежит тело. Вычислите коэффициент трения тела о клин, если оно соскользнуло с плоскости за время  $t = 2 \text{ с}$ .

*Ответ:* 0,47.

2.1.11. Функция  $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ , где  $C = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $D = -0,2 \text{ м/с}^3$ , описывает движение точки массой  $m = 1 \text{ кг}$  под действием силы  $F$ . Определить в моменты времени  $t_1 = 2 \text{ с}$  и  $t_2 = 5 \text{ с}$  величину этой силы. В какой момент времени сила равна нулю?

*Ответ:* -0,8 Н; 8 Н; 1,67 с.

2.1.12. Функции  $x = A \cos \omega t$ ,  $y = B \sin \omega t$  описывают двухмерное движение тела массой  $m$ .  $A$ ,  $B$  и  $\omega$  – постоянные. Определите модуль силы, действующей на это тело.

*Ответ:*  $F = m\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}$ .

2.1.13. Зависимость радиус-вектора частицы  $\vec{r}$  от времени  $t$  описывается законом  $\vec{r} = a(\cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j})$ , где  $a$ ,  $\omega$  – положительные постоянные. Считая массу частицы известной, найти силу  $\vec{F}$ , действующую на частицу.

*Ответ:*  $F = ma\omega^2$ .

2.1.14. Частица массой  $m$  движется под действием силы  $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \omega t$ . Найдите зависимость радиус-вектора от времени  $\vec{r}(t)$ , если в начальный момент времени  $\vec{r}(0) = 0$  и  $\vec{v}(0) = 0$ .

*Ответ:*  $r(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$ .

2.1.15. На тело массы  $m$ , движущееся в масле со скоростью  $\vec{v}$ , действует сила сопротивления  $\vec{F} = -kv^2\vec{e}$ , где  $k$  – положительная постоянная,  $\vec{e} = \vec{v}/v$ . Начальная скорость тела  $\vec{v}(0) = 0$ . Найти его скорость  $\vec{v}$  в зависимости от времени.

*Ответ:*  $v = \frac{mv_0}{m \pm kt}$ .

2.1.16. На легковую машину  $m = 1000$  кг при перемещении по шоссе действует сила трения  $0,1mg$ . Найти силу тяги от двигателя машины, если она движется с ускорением  $a = 1$  м/с<sup>2</sup> в гору с углом, синус которого равен  $\sin \alpha = 0,04$ .

*Ответ:* 2,37 кН.

2.1.17. Эбонитовый брусок лежит на клине, составляющем с горизонтом угол  $\alpha = 4^\circ$ . Найти: а) при каком коэффициенте трения брусок начнет скользить по клину; б) с каким ускорением будет он скользить, если коэффициент трения  $\mu = 0,03$ ; в) какое время нужно для прохождения пути  $s = 100$  м?

*Ответ:* 0,07; 0,39 м/с; 22,63 с.

2.1.18. На горизонтальной поверхности лежит деревянная доска массой  $m_1 = 2$  кг. Коэффициент трения её о поверхность равен 0,2. На доске находится брусок массой  $m_2 = 8$  кг. Коэффициент трения бруска о доску равен 0,3. К верхнему бруску приложена сила  $F$ . Определить: а) значение силы  $F_1$ , при котором начнется совместное скольжение бруска и доски по поверхности; б) значение силы  $F_2$ , при котором верхний брусок начнет проскальзывать относительно доски.

*Ответ:* 19,6 Н; 39,2 Н.

2.1.19. Рассчитать перегрузку, которую испытывает летчик в самолете, если воздушное судно летит в горизонтальном направлении с ускорением  $a = 20$  м/с<sup>2</sup>.

*Ответ:* 2,27.

2.1.20. Цистерна с цементом движется ускоренно с  $a = 0,7 \text{ м/с}^2$ . Под каким углом к горизонту расположен уровень цемента в цистерне?

*Ответ:  $4^\circ$ .*

2.1.21. Космический мусор вращается с периодом 2 ч. Найти, на какой высоте над поверхностью Земли он находится?

*Ответ: 1,69 Мм.*

2.1.22. Петарда массой  $m = 300 \text{ г}$  при взрыве начинает выбрасывать из сопла газ со скоростью  $u = 200 \text{ м/с}$ . Расход горючей смеси  $\mu = 100 \text{ г/с}$ . Определите, за сколько скорость петарды станет равной  $v = 50 \text{ м/с}$ .

*Ответ: 0,66 м/с.*

### III уровень

2.1.23. Снарядом массой  $m = 10 \text{ кг}$  стреляют со скоростью  $v_0 = 800 \text{ м/с}$  строго вверх. Сила сопротивления воздуха равна  $F = kv$ , где  $k = 0,3 \text{ кг/с}$  – коэффициент пропорциональности. Найти время подъема снаряда до максимума.

*Ответ: 45 с.*

2.1.24. Мотор лодки массой  $m = 400 \text{ кг}$  тянет с силой  $0,2 \text{ кН}$ . Сила сопротивления равна  $F = kv$ , где  $k = 20 \text{ кг/с}$  – коэффициент пропорциональности. Чему равна скорость лодки через  $\Delta t = 20 \text{ с}$ ?

*Ответ: 6,3 м/с.*

2.1.25. В тайгу оленеводам сброшен на парашюте контейнер с вертолета массой  $m = 80 \text{ кг}$ . Сила сопротивления равна  $F = kv$ , где  $k = 10 \text{ кг/с}$  – коэффициент пропорциональности. Через какой промежуток времени скорость контейнера увеличится от нуля до  $0,9$  установившейся скорости?

*Ответ: 18,42 с.*

2.1.26. Телега с зерном начальной массой  $m_0$  начинает ехать за лошастью, которая тянет телегу с силой  $\vec{F} = \text{const}$ .

Через дыру снизу зерно высыпается с постоянной скоростью  $\mu$ . Определите зависимость скорости телеги от времени.

*Ответ:*  $\frac{F}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$ .

2.1.27. На горизонтальной поверхности лежит пластина массой  $M = 1 \text{ кг}$ , а сверху брусок массой  $m = 2 \text{ кг}$ . Какую силу нужно приложить к пластине, чтобы она выскользнула из-под бруска? Коэффициент трения между бруском и пластиной – 0,25, а между пластиной и горизонтальной поверхностью – 0,5.

*Ответ:* 22,5 Н.

## 2.2. Закон сохранения импульса

### I уровень

2.2.1. Найти изменение импульса шара за время от броска до приземления, если шар массой  $m = 5 \text{ кг}$  подкинули под углом  $\alpha = 60^\circ$  к вертикали с начальной скоростью  $v_0 = 20 \text{ м/с}$ .

*Ответ:* 100 кг·м/с.

2.2.2. Резиновый шарик массой  $m = 300 \text{ г}$ , имеющий скорость  $v_0 = 10 \text{ м/с}$ , ударился о стену и упруго отпрыгнул от нее. Какой импульс получила стена, если до удара вектор скорости шарика был под углом  $\alpha = 30^\circ$  к стене?

*Ответ:* 3 кг·м/с.

2.2.3. Шарик массой  $m_1 = 10 \text{ кг}$ , движущийся со скоростью  $v_1 = 4 \text{ м/с}$ , налетает на шарик массой  $m_2 = 4 \text{ кг}$  и скоростью  $v_2 = 12 \text{ м/с}$ . Если произойдет прямой и неупругий удар, найдите скорости шариков после удара: а) маленький шарик нагоняет большой; б) шарики движутся навстречу друг другу.

*Ответ:* 6,3 м/с; -0,57 м/с.

2.2.4. Земснаряд, имеющий массу  $m = 10 \text{ кг}$  и скорость  $v = 200 \text{ м/с}$  в верхней точке траектории, разорвался на две части. Меньшая часть массой  $m_1 = 3 \text{ кг}$  получила скорость

$u_1 = 400 \text{ м/с}$  в прежнем направлении. Найти скорость большей части земснаряда после взрыва.

*Ответ: 144 м/с.*

2.2.5. На полу стоит длинная доска на роликах. На конце доски слева стоит юноша массой  $m = 60 \text{ кг}$ , масса доски  $m = 10 \text{ кг}$ . С какой скоростью будет катиться доска, если юноша пойдет по ней со скоростью  $v = 1 \text{ м/с}$ ?

*Ответ: 0,75 м/с.*

2.2.6. Пуля массой  $m_2 = 5 \text{ г}$  при горизонтальном выстреле из ружья летит со скоростью  $v_2 = 600 \text{ м/с}$ . Какова скорость отдачи ружья массой  $m_1 = 5 \text{ кг}$ ?

*Ответ: 0,6 м/с.*

2.2.7. Белка массой  $m_1 = 1 \text{ кг}$  бежит со скоростью  $v_1 = 1 \text{ м/с}$  и запрыгивает на тележку массой  $m_2 = 0,5 \text{ кг}$ . Какую скорость получит белка с тележкой: а) тележка стояла; б) тележка двигалась со скоростью  $v_2 = 0,5 \text{ м/с}$  сонаправленно с белкой; в) тележка двигалась со скоростью  $v_2 = 0,5 \text{ м/с}$  навстречу белке?

*Ответ: 0,67 м/с; 0,83 м/с; 0,5 м/с.*

## II уровень

2.2.8. Сфера массой  $m = 1 \text{ кг}$  катится по окружности с постоянной скоростью. Чему равно изменение импульса сферы при прохождении четверти окружности радиусом  $r = 1,2 \text{ м}$  за время  $t = 2 \text{ с}$ ?

*Ответ: 1,33 кг·м/с.*

2.2.9. На платформе движущейся скоростью  $v_0 = 3 \text{ км/ч}$  укреплен зенитная пушка. Масса платформы вместе с пушкой  $M = 10 \text{ т}$ . Зенитные снаряды массой  $m = 10 \text{ кг}$  выстреливают из пушки под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту по направлению движения платформы. Определите скорость снаряда относительно

земли, если после одного выстрела скорость платформы уменьшилась в 2 раза .

*Ответ:* 835 м/с.

2.2.10. Две тележки, массы которых связаны соотношением  $m_2 = 2m_1$ , соединены между собой сжатой пружиной, которая связана нитью. При пережигании нити пружина расталкивает тележки в разные стороны. Считая коэффициент трения для обеих тележек о поверхность одинаковым, определите: а)  $v_1/v_2$  – отношение скоростей для тележек; б)  $s_1/s_2$  – отношение путей, пройденных тележками до остановки.

*Ответ:* 2; 4.

2.2.11. На яхте массой  $m = 4,5$  т находится водяная пушка, которая выбрасывает назад относительно судна струю воды со скоростью  $u = 6$  м/с и расходом воды  $\mu = 25$  кг/с . Считая трение яхты о воду малым, определите скорость яхты через  $t = 3$  мин после начала движения.

*Ответ:* 7 м/с.

2.2.12. Тележка массой  $m_1 = 2$  кг движется навстречу другой движущейся тележке массой  $m_2 = 1,5$  кг и неупруго соударяется с ней. Скорости тележек перед столкновением равны  $v_1 = 1$  м/с и  $v_2 = 2$  м/с . Какое время будут двигаться тележки вместе, если коэффициент трения  $\mu = 0,05$  ?

*Ответ:* 0,58 с.

2.2.13. При  $\beta$ -распаде покоящегося первоначально нейтрона образуются протон, электрон и нейтрино. Импульсы протона и электрона  $p_1$  и  $p_2$ , угол между ними  $\alpha$  . Определите импульс нейтрино.

*Ответ:*  $\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \alpha}$ .

### III уровень

2.2.14. Два человека неподвижно стоят на очень скользком льду напротив друг друга. Их массы  $m_1 = 80 \text{ кг}$  и  $m_2 = 50 \text{ кг}$ . Между ними натянут легкий трос, который они держат за концы. Один из них начинает тянуть трос к себе, укорачивая его со скоростью  $v = 1 \text{ м/с}$ . С какими скоростями относительно льда станут перемещаться люди?

*Ответ:*  $0,385 \text{ м/с}$ ;  $0,615 \text{ м/с}$ .

2.2.15. Три лодки с одинаковыми массами  $m$  идут одна за другой с одинаковой скоростью  $v$ . Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью  $u$  относительно лодки грузы массой  $m_1$ . Найти скорости лодок после переброски грузов. [6]

*Ответ:*  $v_1 = \frac{Mv + m(v + u)}{M + m}$ ;  $v_2 = v$ ;  $v_3 = \frac{Mv + m(v - u)}{M + m}$ .

2.2.16. Первый шар, летящий со скоростью  $v$ , ударяется в покоящийся второй шар с массой в 3 раза больше массы налетающего. Найти скорости шаров после столкновения, если угол между линией, соединяющей центры шаров, и скоростью налетающего шара до удара равен  $60^\circ$ . Удар абсолютно упругий, трения нет. [6]

*Ответ:*  $v_1 = \frac{v\sqrt{13}}{4}$ ;  $v_2 = \frac{v}{4}$ .

2.2.17. Имеется система трех тел. Импульсы двух из них в некоторый момент времени в системе центра масс  $\vec{p}_1 = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$  и  $\vec{p}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ . Найти импульс  $\vec{p}_3$  третьего тела в тот же момент времени.

*Ответ:*  $\vec{p}_3 = -8\vec{i} + 1\vec{j} - 5\vec{k}$ .

## 2.3. Работа и энергия

### I уровень

2.3.1. С каким ускорением поднимали груз массой  $m = 2 \text{ кг}$  на высоту  $h = 1 \text{ м}$ , если была совершена работа  $A = 78,5 \text{ Дж}$ ?

*Ответ:*  $29,45 \text{ м/с}^2$ .

2.3.2. Какую работу надо совершить, чтобы движущееся тело массой  $m = 2 \text{ кг}$  смогло: а) увеличить скорость от  $v_1 = 2 \text{ м/с}$  до  $v_2 = 5 \text{ м/с}$ ; б) остановиться при начальной скорости  $v_0 = 8 \text{ м/с}$ ?

*Ответ:*  $21 \text{ Дж}$ ;  $-64 \text{ Дж}$ .

2.3.3. Насос с полезной мощностью  $N$  используют для откачки минеральной воды с глубины  $h$ . Определите массу жидкости, поднятой за время  $t$ , если КПД насоса равен  $\eta$ .

*Ответ:*  $m = \eta N t / gh$ .

2.3.4. При действии силы  $F$  вагонетка массой  $m = 400 \text{ кг}$  приобрела скорость  $v = 2 \text{ м/с}$  и прошла путь  $s = 5 \text{ м}$ . Определите работу силы  $F$ . Коэффициент трения  $\mu = 0,01$ .

*Ответ:*  $998 \text{ Дж}$ .

2.3.5. Лошадь тянет сани массой  $m = 100 \text{ кг}$  в горку. Какую работу совершит лошадь, если подняться надо по склону горы длиной  $L = 2 \text{ м}$ , с углом наклона  $\alpha = 30^\circ$ , с коэффициентом трения  $\mu = 0,1$  и груз движется с ускорением  $a = 1 \text{ м/с}^2$ ?

*Ответ:*  $1350 \text{ Дж}$ .

2.3.6. Какое количество тепла выделяется при неупругом центральном ударе двух шаров, если шар массой  $m_1 = 3 \text{ кг}$  катился со скоростью  $v = 4 \text{ м/с}$  и ударился в такой же неподвижный шар?

*Ответ:*  $12 \text{ Дж}$ .

2.3.7. Два шара массами  $m_1 = 2 \text{ кг}$  и  $m_2 = 3 \text{ кг}$  движутся со скоростями соответственно  $v_1 = 8 \text{ м/с}$  и  $v_2 = 4 \text{ м/с}$ . Чему равно увеличение внутренней энергии шаров при неупругом столкновении: а) меньший шар нагоняет больший; б) шары движутся навстречу друг другу.

*Ответ: 9,6 Дж; 86,4 Дж.*

## II уровень

2.3.8. Спортивную гранату школьник на уроке физкультуры бросает под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Найти, чему равны механические энергии (кинетическая и потенциальная) у гранаты в верхней точке траектории. Начальная кинетическая энергия гранаты равна  $20 \text{ Дж}$ . Сопротивления воздуха нет.

*Ответ: 15 Дж.*

2.3.9. Модель планера массой  $1 \text{ кг}$  запустили с балкона параллельно земле со скоростью  $v_0 = 20 \text{ м/с}$ . Планер находился в полете время  $t = 3 \text{ с}$  до падения. Какую кинетическую энергию имел самолетик в момент удара о землю? Трение о воздух считать малым.

*Ответ: 632 Дж.*

2.3.10. При игре в керлинг спортсмены пускают по льду гранитные «камни». Какую работу совершает керлингист массой  $m_2 = 60 \text{ кг}$ , если при толкании вперед «камня» массой  $m_1 = 5 \text{ кг}$ , он из-за отдачи откатывается назад со скоростью  $v_2 = 1 \text{ м/с}$ ?

*Ответ: 390 Дж.*

2.3.11. Крупная шрапнель массой  $m = 10 \text{ г}$  приобрела в процессе выстрела скорость  $v = 600 \text{ м/с}$  и попала в подвешенный маятник массой  $M = 5 \text{ кг}$ . На какую высоту  $h$  поднялся маятник, если шрапнель в нем застряла?

*Ответ: 0,0734.*

2.3.12. Шар массой  $m_1 = 2 \text{ кг}$  сталкивает неподвижный шар массой  $m_2 = 8 \text{ кг}$ . Импульс  $p_1$  первого шара равен  $10 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ . Удар считать упругим и центральным. Определить: а) кинетические энергии шаров после удара; б) импульсы шаров после удара.

*Ответ:*  $9 \text{ Дж}; 16 \text{ Дж}; -6 \text{ кг} \cdot \text{м/с}; 16 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ .

2.3.13. Камень массой  $m = 10 \text{ кг}$  падает с высоты  $h = 0,5 \text{ м}$  на пружинные весы с пружиной жесткостью  $k = 30 \text{ Н/см}$ . Определите, на какое расстояние сместится пружина.

*Ответ:*  $0,22 \text{ м}$ .

2.3.14. Некоторая точка массой  $m = 20 \text{ г}$  движется по окружности радиусом  $R = 10 \text{ см}$  с постоянным тангенциальным ускорением. Сразу после пятого оборота кинетическая энергия точки стала равной  $6,3 \text{ мДж}$ . Найдите тангенциальное ускорение точки.

*Ответ:*  $0,1 \text{ м/с}$ .

2.3.15. Какова работа, совершаемая на пути  $S = 12 \text{ м}$ , если сила равномерно возрастала от  $F_1 = 10 \text{ Н}$  в начале пути до  $F_2 = 46 \text{ Н}$  в конце пути.

*Ответ:*  $336 \text{ Дж}$ .

2.3.16. Известна зависимость модуля скорости частицы от времени  $v = \sqrt{(at)^2 + (bt^2)^2 + (ct^3)^2}$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – постоянные. Найти мощность  $P(t)$  от силы, действующей на частицу.

*Ответ:*  $m(a^2t + 2b^2t^3 + 3c^2t^5)$ .

2.3.17. Тангенциальное ускорение частицы, движущейся по криволинейной траектории, изменяется с расстоянием  $S$  вдоль траектории от  $S_0 = 0$  по закону  $a_\tau = A \cdot S$ , где  $A$  – постоянная. Масса частицы равна  $m$ . Чему равна работа сил, действующих на частицу, совершенная на пути  $S$ ?

*Ответ:*  $A_{\text{сил}} = \frac{mA}{2} S^2$ .

### III уровень

2.3.18. Тяжёлый молот массой  $m_1 = 500 \text{ кг}$  падает на сваю массой  $m_2 = 100 \text{ кг}$ . Найти КПД удара молота, если удар неупругий. Изменением потенциальной энергии сваи при углублении ее пренебречь.

*Ответ: 0,833.*

2.3.19. Элементарная частица массой  $m_1 = 10^{-24} \text{ г}$  имеет кинетическую энергию, равную  $E_1 = 9 \text{ нДж}$ . При упругом столкновении с покоящейся частицей массой  $m_2 = 4 \cdot 10^{-24} \text{ г}$  она передаёт ей кинетическую энергию  $E_2 = 5 \text{ нДж}$ . Определить угол  $\alpha$ , на который отклонится элементарная частица от своего первоначального направления.

*Ответ:  $144^\circ$ .*

2.3.20. Прыгун с высоты  $h = 12 \text{ м}$  падает на батут. Не учитывая массу батута, определите, во сколько раз наибольшая сила давления прыгуна на батут больше его силы тяжести, если прогиб батута под действием силы тяжести прыгуна  $x_0 = 15 \text{ см}$ .

*Ответ: 13,69.*

2.3.21. Определите, при каких значениях  $r$  максимальные значения принимают: а) потенциальная энергия тела; б) сила, действующая на тело, если зависимость потенциальной энергии тела в центральном силовом поле от расстояния  $r$  до центра поля задается функцией  $E_n(r) = A/r^2 - B/r$ , где  $A = 6 \text{ мкДж} \cdot \text{м}^2$ ,  $B = 0,3 \text{ мДж} \cdot \text{м}$ .

*Ответ: 4 см; 6 см.*

2.3.22. Потенциальная энергия частицы  $U(x, y, z) = a(x/y - y/z)$ , где  $A, B, C$  – постоянные. Найти: а) силу  $\vec{F}$ , действующую на частицу; б) происходящее при этом приращение кинетической энергии частицы.

*Ответ:  $\vec{F} = a \left[ -\frac{1}{y} \vec{i} + \left( \frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} \right) \vec{j} - \frac{y}{z^2} \vec{k} \right]$ ;  $-\frac{a}{3}$ .*

### 3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

#### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Основное уравнение для вращательного движения твердого тела

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad M_z = J\varepsilon_z,$$

где  $J$  – момент инерции тела;  $L = J\omega$  – момент импульса;  $M$  – момент внешних сил.

2. Момент инерции

$$J = \int r^2 dm.$$

Если плотность тела одинакова по всему объему, то

$$dm = \rho dV \text{ и } J = \rho \int r^2 dV,$$

где  $V$  – объем тела.

3. Теорема Штейнера

$$J = J_0 + ma^2,$$

где  $a$  – расстояние между осями;  $m$  – масса тела.

4. Момент импульса вращающегося тела относительно оси

$$L = J\omega.$$

5. Закон сохранения момента импульса

$$\sum_{i=1}^n Li = \text{const}.$$

6. Работа постоянного момента силы  $M$ , действующего на вращающееся тело:

$$A = M\varphi,$$

где  $\varphi$  – угол поворота тела.

7. Кинетическая энергия и работа при вращении тела

$$T = \frac{J\omega^2}{2}, \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi.$$

8. Аналогия между формулами поступательного и вращательного движения.

### Поступательное движение

$$v = v_0 + at$$

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

$$A = \int_0^s F_s ds$$

### Вращательное движение

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$T = \frac{J\omega^2}{2}$$

$$A = \int_0^\varphi M_z d\varphi$$

## Примеры решения задач

**Пример 1.** Цилиндр массой  $m_1 = 10 \text{ кг}$  расположен горизонтально и может вращаться. К одному из концов шнура прикрепили груз массой  $m_2 = 2 \text{ кг}$ , а второй намотали на цилиндр. С каким ускорением будет опускаться груз, когда шнур начнет разматываться?

**Решение.** Ускорение груза равно тангенциальному ускорению точек вала и связано соотношением  $a = \varepsilon r$ , где  $r$  – радиус вала.

Угловое ускорение вала найдем из уравнения динамики вращающегося тела:  $\varepsilon = \frac{M}{J}$ , где  $M$  – вращающий цилиндр момента сил, действующий на вал;  $J$  – момент инерции цилиндра.

Момент инерции цилиндра относительно геометрической оси равен

$$J = \frac{1}{2} m_1 r^2.$$

Вращающий момент, действующий на цилиндр, равен

$$M = Tr.$$

Силу натяжения шнура найдем из второго закона Ньютона. Равнодействующая двух сил: силы тяжести и силы натяжения заставляют груз двигаться равноускоренно.

$$m_2 g - T = m_2 a, \text{ откуда } T = m_2 (g - a).$$

Окончательно получаем для момента сил

$$M = m_2 (g - a) r.$$

Найдем угловое ускорение вала:  $\varepsilon = \frac{2m_2(g-a)}{m_1 r}$ . Подста-

вив это выражение в первую формулу, найдем

$$a = \frac{2m_2 g}{m_1 + m_2} = 2,8 \text{ м/с}^2.$$

**Пример 2.** Человек вращается по инерции, стоя в центре скамьи Жуковского. Начальная частота вращения  $\nu_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$ . Момент инерции человека относительно оси вращения равен  $1,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . В вытянутых своих руках человек держит по гире массой  $m = 2 \text{ кг}$  каждая. Расстояние между гириями  $l_1 = 1,6 \text{ м}$ . Вычислить частоту вращения скамьи с человеком, когда он опустит руки и расстояние между гириями станет равным  $l_2 = 0,4 \text{ м}$ . Моментом инерции скамьи пренебречь.

**Решение.** Система «человек-скамья» замкнута, значит, момент импульса системы сохраняется:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2,$$

где  $I_1$  и  $\omega_1$  – момент инерции тела человека и угловая скорость скамьи и человека с вытянутыми руками;  $I_2$  и  $\omega_2$  – момент инерции тела человека и угловая скорость скамьи и человека с опущенными руками. Отсюда  $\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1$ .

Выразив в этом уравнении угловые скорости через частоты  $\omega = 2\pi\nu$  и сократив на  $2\pi$ , получим  $\nu_2 = \frac{I_1}{I_2} \nu_1$ .

Момент инерции гирь можно определить по формуле  $I = mr^2$ . Следовательно,  $I_1 = I_0 + 2m(l_1/2)^2$  и  $I_2 = I_0 + 2m(l_2/2)^2$ .

Подставив полученные выражения, получим  $\nu_2 = 1,18 \text{ с}^{-1}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

#### 3.1. Момент инерции

##### I уровень

3.1.1. Два идентичных шара очень малого радиуса массой  $m = 10 \text{ г}$  соединяют стержнем длиной  $l = 20 \text{ см}$ . Вычислить момент инерции  $J$  системы относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню. Стержень считать невесомым.

Ответ:  $0,0002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

3.1.2. Шары разной массы  $m$  и  $2m$  ( $m = 10 \text{ г}$ ) соединены стержнем длиной  $40 \text{ см}$  так, как показано на рис. 3.1, а, б. Вычислить моменты инерции системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец в случаях а и б. Стержень считать невесомым, размеры шаров малы.

Ответ:  $0,00036 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; 0,00024 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

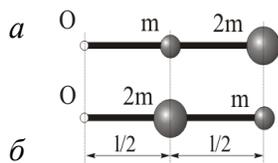


Рис. 3.1

3.1.3. Рассчитать момент инерции  $J$  тонкого стержня длиной 30 см и массой  $m = 100$  г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: а) его конец; б) его середину; в) точку, отстоящую от конца стержня на  $1/3$  его длины.

Ответ:  $0,003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $0,00075 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $0,001 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

3.1.4. Чему равен момент инерции  $J$  тонкого стержня длиной 60 см и массой  $m = 100$  г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку стержня, отстоящую от середины на расстояние  $a = 20$  см? [6]

Ответ:  $0,004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

3.1.5. Радиус цилиндра  $r = 10$  см, а масса  $m = 800$  г. Рассчитать момент инерции  $J$  диска относительно оси, проходящей через середину одного радиуса перпендикулярно плоскости диска. [6]

Ответ:  $0,006 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

3.1.6. Рассчитайте момент инерции  $J$  однородного стержня, если его длина 50 см и масса  $m = 360$  г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: а) конец стержня; б) точку, отстоящую от конца стержня на  $1/6$  его длины. [6]

Ответ:  $0,03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $0,0175 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

## II уровень

3.1.7. Определить моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  для некоторых молекул (рис. 3.2): а)  $H_2O$  ( $d = 0,097$  нм,  $\alpha = 104^\circ 30'$ ); б)  $SO_2$  ( $d = 0,145$  нм,  $\alpha = 124^\circ$ ), проходящих через центр инерции молекулы (ось  $z$  перпендикулярна плоскости  $xy$ ). Межъядерное расстояние  $AB$  равно  $d$ , валентный угол  $\alpha$ .

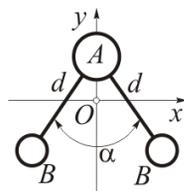


Рис. 3.2

Ответ: а)  $1,05 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $1,96 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $3,01 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  
 б)  $1,27 \cdot 10^{-46} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $8,7 \cdot 10^{-46} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $9,97 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

3.1.8. Проволоку линейной плотности  $\tau = 0,1 \text{ кг/м}$  согнули в виде прямоугольника со стороной  $a = 12 \text{ см}$  и  $b = 16 \text{ см}$ . Рассчитайте момент инерции фигуры  $J$  относительно оси в плоскости прямоугольника и проходящей через середины малых сторон.

Ответ:  $0,0014 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

3.1.9. Железные спицы  $AB$  и  $CD$  массами  $m_1 = 900 \text{ г}$ ,  $m_2 = 400 \text{ г}$  и длинами  $l_1 = 40 \text{ см}$ ,  $l_2 = 40 \text{ см}$  спаяны как на рис. 3.3. Определить момент инерции  $J$  системы относительно оси  $OO'$ , проходящей через конец спицы  $AB$ .

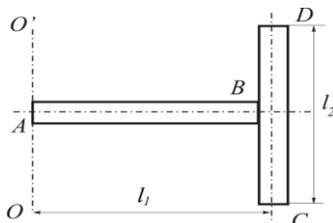


Рис. 3.3

Ответ:  $0,048 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $0,064 \text{ кг} \cdot \text{м}$ ;  $0,112 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

3.1.10. Проволоку согнули в виде равностороннего треугольника со стороной  $a = 10 \text{ см}$ . Рассчитайте момент инерции фигуры  $J$  относительно: а) оси, лежащей в плоскости фигуры и проходящий через его вершину параллельно противоположной стороне; б) оси, совпадающей со стороной треугольника.

Ответ:  $\frac{5}{12} ma^2$ ;  $\frac{1}{6} ma^2$ .

3.1.11. Маленькие металлические шарики массами  $m$  и  $2m$  приварены на концах тонкого однородного стержня длиной  $l$  и массой  $3m$ . Определить момент инерции  $J$  этой системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку  $O$ , лежащую на оси стержня.

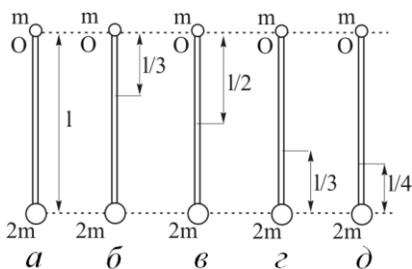


Рис. 3.4

Вычисления выполнить для случаев  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , изображенных на рис. 3.4. Если длина  $l = 1 \text{ м}$ , масса  $m = 0,1 \text{ кг}$ . Шарики рассматривать как материальные точки.

*Ответ:*

а)  $3ml^2 = 0,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ; б)  $\frac{4}{3}ml^2 = 0,13 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;

в)  $ml^2 = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ; г)  $ml^2 = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ; д)  $\frac{8}{9}ml^2 = 0,11 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

3.1.12. Рассчитать момент инерции кольца диаметром  $D = 40 \text{ см}$  и массой  $m = 0,1 \text{ кг}$  относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр. [5]

*Ответ:*  $0,002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

3.1.13. Имеется прямоугольная пластина массой  $m = 800 \text{ г}$ . Рассчитать момент инерции однородной относительно оси, совпадающей с одной из ее сторон, если длина другой стороны равна  $40 \text{ см}$ .

*Ответ:*  $0,043 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

3.1.14. Имеется пластина со сторонами  $a = 10 \text{ см}$  и  $b = 20 \text{ см}$  с поверхностной плотностью  $\sigma = 1,2 \text{ кг} / \text{м}^2$ . Чему равен ее момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс пластины параллельно стороне  $b = 20 \text{ см}$ ?

*Ответ:*  $0,043 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

### III уровень

3.1.15. В однородном тонком цилиндре массой  $m = 1 \text{ кг}$  и радиусом  $r = 30 \text{ см}$  сделано круглое отверстие диаметром  $d = 20 \text{ см}$ , его центр находится на расстоянии  $15 \text{ см}$  от оси цилиндра. Найти момент инерции относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости цилиндра через его центр.

*Ответ:*  $0,042 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

3.1.16. Выведите формулу для момента инерции сплошного шара радиусом  $R$  и массой  $m$  относительно оси, проходящей через его центр масс.

*Ответ:*  $2mR^2 / 5$ .

3.1.17. Выведите формулу для момента инерции полого цилиндра относительно оси, совпадающей с его осью симметрии. Масса его равна  $m$ , внутренний радиус  $r$ , внешний  $R$ .

Ответ:  $\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$ .

### 3.2. Основное уравнение динамики вращательного движения

#### I уровень

3.2.1. Спица длиной  $L = 1$  м может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ , как показано на рис. 3.5. Спицу отвели от вертикали на угол  $\alpha$  и отпустили. Определить для начального момента времени угловое ускорение стержня. Вычисления произвести когда: 1)  $L = 0$ ,  $\alpha = \pi/2$ ; 2)  $L = l/3$ ,  $\alpha = \pi/3$ .

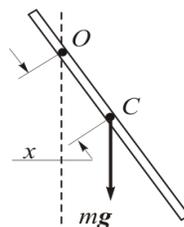


Рис. 3.5

Ответ:  $14,7 \text{ рад/с}^2$ ;  $12,7 \text{ рад/с}^2$ .

3.2.2. Определить вращающий момент  $M$  тонкого однородного стержня длиной  $50$  см и массой  $m = 400$  г, когда он вращается с угловым ускорением  $\varepsilon = 3 \text{ рад/с}^2$  около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину.

Ответ:  $0,025 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

3.2.3. Сила  $F = 98,1 \text{ Н}$  приложена к ободу диска радиусом  $R = 0,2$  м по касательной, и под ее действием диск начал вращаться с угловым ускорением  $\varepsilon = 100 \text{ рад/с}^2$ . Найти массу диска, если в системе действует момент сил трения  $M_{тр} = 4,9 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Ответ:  $7,36 \text{ кг}$ .

3.2.4. Зависимость угловой скорости  $\omega$  вращения диска радиусом  $R = 0,2$  м и массой  $m = 5$  кг от времени дается уравнением  $\omega = A + Bt$ , где  $B = 8 \text{ рад/с}^2$ . Найти касательную силу  $F$ , приложенную к ободу диска, при условии, что он

вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости. Трения нет.

*Ответ: 4 Н.*

3.2.5. На катушку, представляющую однородный цилиндр радиусом  $R = 0,5 \text{ м}$  и массой  $m_1 = 9 \text{ кг}$ , намотан шнур, к концу которого привязан груз массой  $m_2 = 2 \text{ кг}$ . Найти ускорение груза спустя время  $t = 4 \text{ с}$ .

*Ответ:  $2,04 \text{ м/с}^2$ .*

3.2.6. К ободу однородного диска массой  $m = 10 \text{ кг}$  приложена по касательной сила  $F = 30 \text{ Н}$ . Чему равна кинетическая энергия диска через  $t = 4 \text{ с}$  от начала вращения?

*Ответ: 1440 Дж.*

3.2.7. На большую деревянную катушку радиусом  $R = 0,5 \text{ м}$  намотан шнур, и к нему привязан груз массой  $m = 10 \text{ кг}$ . Найти момент инерции катушки, если известно, что груз опускается с ускорением  $a = 2 \text{ м/с}^2$ .

*Ответ:  $9,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .*

## II уровень

3.2.8. Однородный диск отклонили на угол  $\sigma$  и отпустили. Он начал свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку  $O$ , находящуюся на расстоянии  $a$  от центра диска. Радиус диска  $R = 10 \text{ см}$ . Определить для начального момента времени угловое и тангенциальное ускорения точки  $B$ , находящейся на диске на расстоянии  $b$  от центра диска. Вычисления выполнить для следующих случаев: 1)  $a = R$ ,  $b = R/2$ ,  $\alpha = \pi/2$ ; 2)  $a = R/2$ ,  $b = R$ ,  $\alpha = \pi/6$ .

*Ответ: 1)  $65,3 \text{ рад/с}^2$ ;  $9,8 \text{ м/с}^2$ . 2)  $32,7 \text{ рад/с}^2$ ;  $4,9 \text{ м/с}^2$ .*

3.2.9. Маховик и шкив радиусом  $R = 5 \text{ см}$  насажены на горизонтальную ось. К шнуру привязали груз массой  $m = 0,4 \text{ кг}$  и намотали на шкив. Груз равноускоренно опустил-

ся на  $s = 1,8 \text{ м}$  за время  $t = 3 \text{ с}$ . Определить момент инерции маховика. Массой шкива пренебречь.

*Ответ:*  $0,0235 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

3.2.10. Железный цилиндр  $m = 100 \text{ кг}$  и радиусом  $R = 5 \text{ см}$  вращался с частотой  $\nu = 8 \text{ с}^{-1}$ . К его поверхности прижали тормозную колодку с силой  $F = 40 \text{ Н}$ , и цилиндр начал тормозить. Его остановка произошла через  $t = 10 \text{ с}$ . Определить коэффициент трения  $\mu$ .

*Ответ:*  $0,31$ .

3.2.11. Через блок в форме диска перекинута мягкая проволока, к концам которой привязали грузики массой  $m_1 = 100 \text{ г}$  и  $m_2 = 110 \text{ г}$ . С каким ускорением будут двигаться грузики, если масса блока равна  $400 \text{ г}$ ? Трения нет.

*Ответ:*  $0,24 \text{ м/с}^2$ .

3.2.12. Диск радиуса  $R$  и массы  $m$  имеет возможность крутиться вокруг неподвижной оси. На диск намотана нить, к концу которой приложена постоянная сила  $\vec{F}$ , в результате чего диск начинает раскручиваться (рис. 3.6). Найти кинетическую энергию диска после того, как он совершил один оборот.

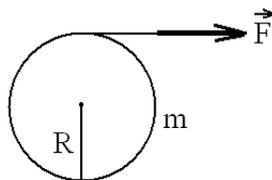


Рис. 3.6

*Ответ:*  $2\pi RF$ .

3.2.13. Шар радиусом  $R = 10 \text{ см}$  и массой  $m = 5 \text{ кг}$  вращается по закону:  $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$  ( $B = 2 \text{ рад/с}^2$ ,  $C = -0,5 \text{ рад/с}^3$ ). Определите момент сил для  $t = 3 \text{ с}$ .

*Ответ:*  $-0,1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

3.2.14. К концам длинной нити подвесили грузы массами  $m_1 = 0,3 \text{ кг}$  и  $m_2 = 0,5 \text{ кг}$  и перекинули нить через блок-диск массой  $m = 0,2 \text{ кг}$ . Определить силы натяжения  $T_1$  и  $T_2$  шнура по обе стороны блока во время движения грузов.

*Ответ:*  $3,53 \text{ Н}; 3,92 \text{ Н}$ .

### III уровень

3.2.15. Шар массой  $m=10$  кг и радиусом  $R=20$  см вращается. Функция вращения для угла шара от времени имеет вид  $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ , где  $B=4$  рад/с<sup>2</sup>,  $C=-1$  рад/с<sup>3</sup>. Найти функцию зависимости момента сил, действующего на шар, от времени. Определить момент сил  $M$  через время  $t=2$  с.

*Ответ:*  $M(t)=1,28-0,96t; -0,64$  Н·м.

3.2.16. Диск катится с горки без скольжения, найдите для центра диска линейное ускорение. Поверхность горки образует угол  $\alpha$  с горизонтом.

*Ответ:*  $a = \frac{2}{3} g \cdot \sin \alpha$ .

3.2.17. На тяжелый барабан, вращающийся вокруг горизонтальной оси, намотан канат, по которому лезет вверх ленивец массой  $M$ . Определить ускорение ленивца относительно шнура, если его скорость относительно земли постоянна. Момент инерции барабана равен  $J$ , его радиус  $R$ .

*Ответ:*  $\frac{mgR^2}{J}$ .

3.2.18. К потолку лифта, движущегося вверх с ускорением  $a$ , прикреплена тонкая невесомая нить. Другой конец прикреплен к цилиндру массы  $m$ . Найти ускорение цилиндра относительно лифта и силу натяжения нити.

*Ответ:*  $a = \frac{(g - a)}{2}; T = \frac{m(g - a)}{2}$ .

### 3.3. Закон сохранения момента импульса. Работа

#### I уровень

3.3.1. Тонкий стержень массой  $m_1=0,2$  кг и длиной 1 м способен вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$  (рис. 3.7). Кусочек жевательной резинки массой  $m_2=10$  г, который летел горизонтально со скоростью

$v = 10 \text{ м/с}$ , прилип к стержню в его верхней части с краю стержня. Определить угловую скорость  $\omega$  стержня и линейную скорость нижнего конца стержня в начальный момент времени. Вычисления выполнить для следующих значений расстояния между точками  $O$  и точкой попадания жевательной резинки: а)  $l/2$ ; б)  $l/3$ ; в)  $l/4$ .

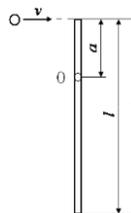


Рис. 3.7

Ответ:

а)  $\omega(l/2) = 2,6 \text{ рад/с}$ ;  $v(l/2) = 1,3 \text{ м/с}$ ;

б)  $\omega(l/3) = 1,4 \text{ рад/с}$ ;  $v(l/3) = 0,95 \text{ м/с}$ ;

в)  $\omega(l/4) = 0,83 \text{ рад/с}$ ;  $v(l/4) = 0,63 \text{ м/с}$ .

3.3.2. Прямой лом длиной  $1 \text{ м}$  повесили за один из концов. Если нижний конец лома при прохождении положения равновесия имел скорость  $v = 5 \text{ м/с}$ , то на какой угол его отклоняли?

Ответ:  $81^\circ$ .

3.3.3. Вращающаяся дисковая подставка массой  $m = 25 \text{ кг}$  и радиусом  $R = 0,8 \text{ м}$  вращается с частотой  $\nu = 18 \text{ мин}^{-1}$ . Определите частоту ее вращения, если в ее центре встанет мужчина и будет держать грузы в разведенных в разные стороны руках. Если он опустит руки вниз, то уменьшит свой момент инерции от  $J_1 = 3,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  до  $J_2 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Ответ:  $23 \text{ мин}^{-1}$ .

3.3.4. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках стержень, расположенный вертикально по оси вращения скамейки (длина стержня  $l = 2,4 \text{ м}$  и масса  $m = 8 \text{ кг}$ ). Скамья с человеком вращается с частотой  $\nu_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ . С какой частотой  $\nu_2$  будет вращаться скамья с человеком, если он расположит стержень горизонтально? Суммарный момент инерции человека и скамьи равен  $6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Ответ:  $0,61 \text{ с}^{-1}$ .

3.3.5. Если шнур длиной  $1\text{ м}$  и грузиком на конце массой  $m = 100\text{ г}$  начать вращать в горизонтальной плоскости, то частота вращения будет  $\nu_1 = 1\text{ с}^{-1}$ . Если шнур укоротится до  $0,5\text{ м}$ , то с какой частотой  $\nu_2$  будет при этом вращаться грузик? Какую работу совершит внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

*Ответ:*  $4\text{ с}^{-1}$ ;  $5,92\text{ Дж}$ .

3.3.6. Шар и цилиндр одинаковой массы, изготовленные из одного материала, катятся без скольжения с одной и той же скоростью. Вычислите отношение кинетических энергий шара и сплошного цилиндра.

*Ответ:*  $1,07$ .

3.3.7. Катящийся полый цилиндр ударяется о стену и откатывается от нее обратно. Скорость цилиндра до удара о стену  $\nu_1 = 1,4\text{ м/с}$ , после удара  $\nu_1' = 1\text{ м/с}$ . Масса цилиндра  $m = 0,5\text{ кг}$ . Определите количество выделившейся теплоты, если проскальзывания цилиндра не было.

*Ответ:*  $0,48\text{ Дж}$ .

3.3.8. Детская юла начала останавливаться, начиная с частоты  $\nu = 600\text{ об/мин}$ . Через  $N = 50\text{ оборотов}$  игрушка останавливается, силы торможения при этом совершили работу  $A = 31,4\text{ Дж}$ . Определите момент сил  $M$  торможения.

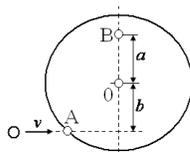
*Ответ:*  $0,1\text{ Н}\cdot\text{м}$ .

3.3.9. С высоты  $h = 1\text{ м}$  по наклонной плоскости без проскальзывания скатывается шарик. Вычислить линейную скорость его центра масс шара.

*Ответ:*  $1,2\text{ м/с}$ .

## II уровень

3.3.10. Пластиковый диск массой  $m_1 = 0,2\text{ кг}$  и радиусом  $R = 20\text{ см}$  может свободно вращаться вокруг оси через точку  $O$ , как на рис. 3.8. Ось перпендикулярна



**Рис. 3.8**

плоскости фигуры. В точку  $A$  на границе фигуры попадает кусочек жевательной резинки, летящий горизонтально со скоростью  $v=10\text{ м/с}$ , который пристает к диску. Масса кусочка равна  $m_2=10\text{ г}$ . Рассчитать угловую скорость  $\omega$  диска и линейную скорость точки  $B$  на диске в начальный момент времени. Вычисления выполнить для следующих значений  $a$  и  $b$ : а)  $a=b=R$ ; б)  $a=R/2, b=R$ ; в)  $a=2R/3, b=R/2$ ; г)  $a=R/3, b=2R/3$ .

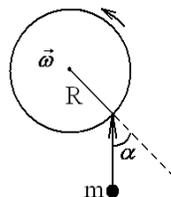
*Ответ:*

а)  $\omega(R)=4,545\text{ рад/с}; v(R)=0,909\text{ м/с};$

б)  $\omega(R)=2,273\text{ рад/с}; v(R)=0,455\text{ м/с};$

в)  $\omega(R)=3,03\text{ рад/с}; v(R)=0,303\text{ м/с};$

г)  $\omega(R)=1,515\text{ рад/с}; v(R)=0,202\text{ м/с}.$



**Рис. 3.9**

3.3.11. В поверхность планеты в плоскости экватора массой  $M$  и радиусом  $R$  врежется метеорит массой  $m$ , летящий со скоростью  $\vec{v}$  под углом  $\alpha$ , как на рис. 3.9. На сколько изменится угловая скорость планеты вследствие падения метеорита?

*Ответ:*  $\Delta\omega = 5mv \cdot \sin \alpha / 2MR.$

3.3.12. Спортсмен стоит на скамье Жуковского и ловит мяч массой  $m=0,4\text{ кг}$ , который летит в горизонтальном направлении со скоростью  $v=20\text{ м/с}$ . Мяч пролетает на расстоянии  $r=0,8\text{ м}$  от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью станет вращаться система после того, как спортсмен поймал мяч, если общий момент инерции спортсмена и скамьи равен  $J=6\text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ?

*Ответ:*  $1,02\text{ рад/с}.$

3.3.13. На краю гладкой горизонтальной платформы в форме диска радиусом  $R=2\text{ м}$  стоит мальчик массой  $m_1=80\text{ кг}$ . Масса платформы  $m_2=240\text{ кг}$ . Найти, с какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если мальчик будет идти вдоль ее края со скоростью  $v=2\text{ м/с}$  относительно платформы? Трения нет.

*Ответ:*  $0,4\text{ рад/с}.$

3.3.14. Горизонтальный диск радиусом  $R = 1 \text{ м}$  вращается с частотой  $\nu_1 = 6 \text{ мин}^{-1}$ . На краю стоит человек, масса которого  $m = 80 \text{ кг}$ . С какой частотой  $\nu$  будет вращаться диск, если человек перейдет в его середину? Момент инерции платформы  $J = 120 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

*Ответ:*  $10 \text{ мин}^{-1}$ .

3.3.15. Шар массой  $m = 1 \text{ кг}$  катится к стене без скольжения, ударяется о неё и сразу откатывает. Скорость шара до удара о стенку  $v = 10 \text{ см/с}$ , после удара  $u = 8 \text{ см/с}$ . Какое количество теплоты выделится при ударе шара?

*Ответ:*  $0,0252 \text{ Дж}$ .

3.3.16. Диск диаметром  $D = 60 \text{ см}$  и массой  $m = 1 \text{ кг}$ , который вращается вокруг оси, проходящей через центр перпендикулярно его плоскости, с частотой  $\nu = 20 \text{ об/с}$  надо остановить. Какую работу надо совершить для остановки?

*Ответ:*  $354,95 \text{ Дж}$ .

3.3.17. Определить линейные скорости центров шара, диска и обруча, скатывающихся без начальной скорости и без скольжения с горки высотой  $h = 0,5 \text{ м}$ . [5]

*Ответ:*  $v_{ш} = 2,65 \text{ м/с}$ ;  $v_{д} = 2,65 \text{ м/с}$ ;  $v_{о} = 2,21 \text{ м/с}$ .

3.3.18. Детская юла, вращаясь равномерно, уменьшило за время  $t = 1 \text{ мин}$  частоту вращения от  $\nu_1 = 300 \text{ об/мин}$  до  $\nu_2 = 180 \text{ об/мин}$ . Момент инерции юлы  $J = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Найти угловое ускорение юлы, работу сил торможения и число оборотов, сделанных за время  $t = 1 \text{ мин}$ .

*Ответ:*  $0,21 \text{ рад/с}^2$ ;  $633,02 \text{ Дж}$ ;  $240 \text{ оборотов}$ .

3.3.19. Велосипедное колесо вращается с частотой  $\nu = 900 \text{ об/мин}$ . После включения тормоза колесо сделало до остановки  $N = 75 \text{ оборотов}$ . Работа сил торможения  $A = 44,4 \text{ Дж}$ . Найти момент инерции колеса и момент сил торможения.

*Ответ:*  $0,01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $0,094 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

3.3.20. Сколько времени будет скатываться без скольжения кольцо с горки длиной  $2\text{ м}$  и высотой  $h = 10\text{ см}$ ?

*Ответ:*  $4\text{ с}$ .

3.3.21. Кинетическая энергия вращающегося маховика равна  $1\text{ кДж}$ . На маховик действовал тормозящий момент, и он начал вращаться равнозамедленно и, сделал  $N = 80\text{ оборотов}$ , остановился. Определить момент силы торможения.

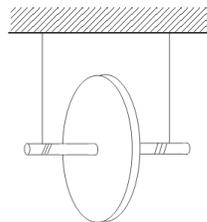
*Ответ:*  $2\text{ Н}\cdot\text{м}$ .

### III уровень

3.3.22. Стержень длиной  $15\text{ см}$ , поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорости будет иметь в конце падения: а) его середина; б) верхний его конец? Считать, что нижний конец карандаша не проскальзывает.

*Ответ:*  $\omega_c = \omega_k = 14\text{ рад/с}$ ;  $v_c = 1,05\text{ м/с}$ ;  $v_k = 2,1\text{ м/с}$ .

3.3.23. Маятник Максвелла, представляющий собой массивный диск радиусом  $R$  и массой  $m$ , туго насаженный на ось радиусом  $r$ , которая подвешивается на двух предварительно намотанных на нее нитях, применяется для демонстрации законов сохранения. Когда маятник отпускают, то он совершает движение вверх-вниз в вертикальной плоскости при вращении диска вокруг оси.



**Рис. 3.10**

Не учитывая силы сопротивления и момент инерции оси, определите: а) ускорение поступательного движения маятника; б) силу натяжения нити (рис. 3.10).

*Ответ:* 
$$a = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{4r^2}}; T = \frac{mgR^2}{2(2r^2 + R^2)}.$$

3.3.24. Однородный шар радиусом  $r = 20\text{ см}$  скатывается без скольжения с вершины сферы радиусом  $R = 50\text{ см}$ . Вычис-

лите угловую скорость шара в момент отрыва от поверхности сферы.

*Ответ: 10 рад/с.*

3.3.25. Тяжёлый диск массой  $m = 50 \text{ кг}$  и радиусом  $r = 20 \text{ см}$  был раскручен до частоты вращения  $\nu_1 = 480 \text{ мин}^{-1}$  и затем отпущен. Из-за трения маховик остановился. Найти момент сил трения для двух случаев: а) маховик остановился через  $t = 50 \text{ с}$ ; б) маховик до полной остановки сделал  $N = 200$  оборотов.

*Ответ:  $-1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $-1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .*

3.3.26. Шарик скользит без трения по внутренней поверхности конуса. Высоты  $h_1$  и  $h_2$  в точках наименьшего и наибольшего подъема даны. Найти скорости шарика в этих точках.

*Ответ:  $v_1 = h_2 \sqrt{\frac{2g}{h_1 + h_2}}$ ;  $v_2 = h_1 \sqrt{\frac{2g}{h_1 + h_2}}$ .*

## 4. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки и его решение

$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $x$  – координата колеблющейся точки;  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  – собственная частота колебаний;  $m$  – масса точки;  $k$  – коэффициент упругой либо квазиупругой силы.

2. Сложение двух колебаний с одинаковыми направлениями и частотами. Результирующее колебание: его амплитуда и фаза

$$A_2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

### 3. Физический маятник, период колебания

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

где  $J$  – момент инерции маятника относительно оси колебаний;

$L = \frac{J}{ml}$  – приведенная длина физического маятника;  $l$  – расстояние от центра масс маятника до оси колебаний.

4. Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение и его решение

4. Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение и его решение

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $\beta = \frac{r}{2m}$  – коэффициент затухания;  $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}$  –

круговая частота затухающих колебаний в момент времени  $t$ ;

$A = A_0 e^{-\beta t}$  – амплитуда колебаний в момент времени  $t$ .

### 5. Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T.$$

### 6. Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e,$$

где  $A(t)$  и  $A(t+T)$  – амплитуды двух следующих друг за другом колебаний через период;  $N_e$  – число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в  $e = 2,73$  раз.

### 7. Резонансная частота колебания

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{(\omega_0^2 - 2\beta^2)}.$$

### 8. Резонансная амплитуда колебания

$$A_{\text{рез}} = f_0 / (2\beta \sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}).$$

## Примеры решения задач

**Пример 1.** Тонкая палка массой  $m_3 = 400 \text{ г}$  колеблется около горизонтальной оси, перпендикулярной палке, ось проходит через ее центр масс. Длина палки  $l = 1 \text{ м}$ . На ее концах помещены маленькие грузики массами  $m_1 = 200 \text{ г}$  и  $m_2 = 300 \text{ г}$  соответственно. Чему равен период колебаний палки?

**Решение.** Запишем формулу для периода физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

где  $L = \frac{J}{ml_c}$  – приведенная длина физического маятника;

$l_c$  – расстояние от центра масс системы до оси колебаний.

Момент инерции системы есть сумма моментов инерции отдельных элементов системы  $J = J_1 + J_2 + J_3$ .

Вычислим моменты инерций грузиков на концах палки

$$J_1 = m_1(l/2)^2, J_2 = m_2(l/2)^2.$$

Ось проходит через середину палки, отсюда

$$J_3 = \frac{1}{12} m_3 l^2.$$

Подставим полученные выражения

$$J = \frac{1}{12} l^2 (3m_1 + 3m_2 + m_3), J = 0,158 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Вычислим всю массу системы

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 0,9 \text{ кг}.$$

Определим расстояние  $l_c$  как координату центра масс:

$$l_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1(-l/2) + m_2(l/2) + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(m_2 - m_1)l}{2(m_1 + m_2 + m_3)} = \\ = \frac{(m_2 - m_1)l}{2m} = 5,55 \text{ см.}$$

Окончательно

$$T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{0,158 / (0,9 \cdot 10 \cdot 5,55 \cdot 10^{-2})} = 11,2 \text{ с.}$$

**Пример 2.** Определите коэффициент сопротивления  $r$ , если тело массой  $0,1 \text{ кг}$  колеблется с затуханием. За  $\tau = 1 \text{ мин}$  тело уменьшило свою энергию на  $40 \%$ .

**Решение.** Коэффициент затухания и коэффициент сопротивления связаны зависимостью

$$\beta = r / 2m.$$

Энергия и амплитуда, соответственно, равны

$$E = mA^2\omega^2 / 2, \quad A = A_0 e^{-\beta t}.$$

Найдем отношение энергий через время  $\tau$ :

$$\frac{E(t)}{E(t+\tau)} = e^{2\beta t}.$$

По условию

$$e^{2\beta t} = \frac{1}{0,6}.$$

Прологарифмируем обе части равенства

$$\beta = \frac{1}{2\tau} \ln(1/0,6).$$

Окончательно коэффициент сопротивления равен

$$r = \frac{2m}{2\tau} \ln 1/0,6 = \frac{m}{\tau} \ln 1/0,6 = 8,51 \cdot 10^4 \text{ кг/с.}$$

## Задачи для самостоятельного решения

### 4.1. Кинематика гармонических колебаний. Сложение колебаний

#### I уровень

4.1.1. Уравнение колебаний точки имеет вид  $x = A \cos \omega(t + \tau)$ , где  $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2 \text{ с}$ . Определите:

а) период  $T$ ; б) начальную фазу  $\varphi$  колебаний. [6]

Ответ: а)  $T = 2 \text{ с}$ ; б)  $\varphi = 0, 2\pi$ .

4.1.2. Уравнение гармонических колебаний некой величины имеет вид  $s = 0,02 \cos(6\pi t + \pi/3) \text{ м}$ . Вычислите:

а) амплитуду колебаний; б) циклическую частоту; в) частоту колебаний; г) период колебаний. [5]

Ответ: а)  $A = 0,02 \text{ м}$ ; б)  $\omega = 6\pi \text{ с}^{-1}$ ; в)  $\nu = 3 \text{ Гц}$ ; г)  $T = 0,33 \text{ с}$ .

4.1.3. Запишите уравнение гармонического колебательно-го движения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой  $A = 8 \text{ см}$ , если за  $t = 1 \text{ мин}$  совершается  $n = 120$  колебаний. Начальная фаза колебаний –  $45^\circ$ . [5]

Ответ:  $x = 8 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ .

4.1.4. Точка колеблется по закону  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ , где  $A = 4 \text{ см}$ . Найдите начальную фазу колебания, если:

а)  $x(0) = 2 \text{ см}$  и  $x(0)' < 0$ ; б)  $x(0) = 2\sqrt{3} \text{ см}$  и  $x'(0) > 0$ ;

в)  $x(0) = -2\sqrt{2} \text{ см}$  и  $x(0)' < 0$ .

Ответ: а)  $5\pi/6$ ; б)  $\pi/3$ ; в)  $5\pi/4$ .

4.1.5. Вычислите амплитуду и начальную фазу колебания, возникающего при сложении двух колебаний одинакового направления и периода. Найдите уравнение результирующего колебания:  $x_1 = A_1 \sin \omega t$  и  $x_2 = A_2 \sin \omega(t + \tau)$ , где

$A_1 = A_2 = 1 \text{ см}$ ;  $\varphi = \pi \text{ с}^{-1}$ ;  $\tau = 0,5 \text{ с}$ . [6]

Ответ:  $x(t) = 0,014 \sin(\pi t + \pi/4)$ .

4.1.6. Найдите уравнение траектории точки при сложении двух перпендикулярных колебаний, выражаемых уравнениями  $x = A_1 \sin \omega t$  и  $y = A_2 \cos \omega(t + \tau)$ , где  $A_1 = 2$  см,  $A_2 = 1$  см,  $\omega = \pi$  с<sup>-1</sup>,  $\tau = 0,5$  с. [6]

*Ответ:*  $y = -\frac{1}{2}x$ .

4.1.7. Найдите уравнение траектории точки, если точка совершает сразу два колебания по перпендикулярным направлениям, которые выражаются зависимостями  $x = A_1 \cos \omega t$  и  $y = A_2 \cos \omega(t + \tau)$ , где  $A_1 = 4$  см,  $A_2 = 8$  см,  $\omega = \pi$  с<sup>-1</sup>,  $\tau = 1$  с. [6]

*Ответ:*  $y = -2x$ .

## II уровень

4.1.8. Если точка совершает колебания с амплитудой  $A = 3$  см и угловой частотой  $\omega = \pi/2$  с<sup>-1</sup>, то чему равен максимум ее скорости?

*Ответ:* 4,71 см/с.

4.1.9. Материальная точка колеблется. Амплитуда её скорости – 10 см/с, её максимальное ускорение – 100 см/с<sup>2</sup>. Вычислите угловую частоту колебаний, период и амплитуду. Запишите уравнение колебаний, если начальная фаза нулевая.

*Ответ:*  $\omega = 10$  рад/с;  $T = 0,628$  с;  $A = 1$  см;  $x = 0,01 \cos 10t$ .

4.1.10. Имеются два камертона, их частоты колебаний соответственно равны  $\nu_1 = 440$  Гц и  $\nu_2 = 404,5$  Гц. Найдите период биений, если они зазвучат одинаково.

*Ответ:* 2 с.

## III уровень

4.1.11. Материальная точка совершает колебания по синусоидальному закону  $x = A \sin \omega t$ . В момент времени  $t_1$  координата  $x_1$  точки равна 5 см. Когда фаза колебаний увеличилась в два раза, координата  $x_2$  оказалась равной 8 см. Определите амплитуду этого колебания. [6]

*Ответ:* 8,3 см.

4.1.12. Материальная точка совершает колебания по косинусоидальному закону  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ . В определенный момент времени координата точки  $5 \text{ см}$ , её скорость  $20 \text{ см/с}$ , а ускорение отрицательно и равно  $-80 \text{ см/с}^2$ . Найдите амплитуду  $A$ , угловую частоту  $\omega$ , период колебаний и фазу колебаний в этот момент времени. [6]

*Ответ:*  $A = 7,02 \text{ см}; \omega = 4 \text{ с}^{-1}; T = 1,57 \text{ с}; \omega t + \varphi = \pi/4$ .

4.1.13. Точка колеблется во взаимно перпендикулярных направлениях, выражаемых уравнениями  $x = A_1 \cos \omega t$  и  $y = A_2 \sin 0,5 \omega t$ , где  $A_1 = 2 \text{ см}$ ,  $A_2 = 3 \text{ см}$ . Найдите уравнение траектории точки. [6]

*Ответ:*  $y = \sqrt{0,00045(1-50x)}$ , парабола.

## 4.2. Динамика гармонических колебаний. Маятники

### I уровень

4.2.1. Легкая пружинка с жесткостью  $k = 25 \text{ Н/м}$  совершает колебания. Тело какой массой надо подвесить к пружинке, чтобы за одну минуту произошло 25 колебаний?

*Ответ:*  $3,65 \text{ кг}$ .

4.2.2. Небольшое тело массой  $m = 50 \text{ г}$  совершает колебания по закону  $x = A \cos \omega t$ , где  $A = 10 \text{ см}$ ,  $\omega = 5 \text{ с}^{-1}$ . Какая сила действует на тело в положении максимального смещения?

*Ответ:*  $-125 \text{ мН}$ .

4.2.3. На пружину подвешено компактное тело массой  $m = 250 \text{ г}$ . Оно колеблется с периодом  $T = 1 \text{ с}$ . Определите жесткость пружины.

*Ответ:*  $9,87 \text{ Н/м}$ .

4.2.4. В лифте установили нитяной маятник, нить которого длиной в  $1 \text{ м}$ . Лифт движется равноускоренно с ускорением  $a = 2,5 \text{ м/с}^2$ . С каким периодом колеблется маятник?

*Ответ:*  $1,79 \text{ с}$ .

4.2.5. Физический маятник – это тонкий стержень длиной  $l$ , массой  $m$ , колеблющийся вокруг оси, проходящей через край стержня. Стержень отклонили на угол  $\alpha = 90^\circ$  и отпустили. Найти угловое ускорение стержня при углах  $\alpha_1 = 90^\circ$  и  $\alpha_2 = 0^\circ$ .

*Ответ:* при  $\alpha_1 = 90^\circ$   $\beta_1 = 0$ ; при  $\alpha_2 = 0^\circ$   $\beta_2 = 0$ .

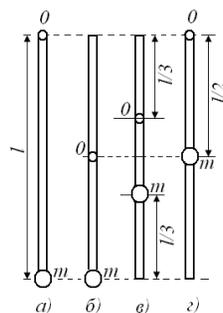
4.2.6. Физический маятник – это тонкий стержень длиной  $l$ , массой  $m$ , колеблющийся относительно горизонтальной оси, проходящей на расстоянии  $d = l/3$  от одного из концов. Найдите приведенную длину и период колебаний этого маятника.

*Ответ:* 0,5.

4.2.7. Грузики одинаковой массы помещены на концах тонкого стержня длиной 30 см. Стержень и грузики совершают колебания около оси, которая проходит через точку, отстоящую на  $d = 10$  см от одного из концов стержня. Найдите приведенную длину и период колебаний этой системы. Считать сам стержень очень легким.

*Ответ:*  $L = 0,2$  м;  $T = 0,9$  с.

4.2.8. Физический маятник – это тонкий стержень длиной  $l$ , массой  $m$  с укрепленным на нем маленьким шариком массой  $m$ . Маятник колеблется около горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ . Найдите период гармонических колебаний маятника для случаев *а*, *б*, *в*, *г*, изображенных на рис. 4.1. Длина стержня равна 1 м. [б]



**Рис. 4.1**

*Ответ:*

$$a) T_a = \frac{8}{3} \pi \sqrt{\frac{l}{2g}} = 1,89 \text{ с}; \quad б) T_b = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 1,64 \text{ с};$$

$$в) T_v = \frac{4}{3} \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1,34 \text{ с}; \quad г) T_g = \pi \sqrt{\frac{7l}{3g}} = 1,53 \text{ с}.$$

## II уровень

4.2.9. Тело колеблется гармонически  $x = A \cos \varphi t$ . Найдите силу  $F$ , которая возвращает тело в положение равновесия в момент времени  $t = 1$  с, а также его полную механическую энергию, если максимальное смещение 20 см, а циклическая частота  $2\pi/3$  с<sup>-1</sup>. Масса тела 10 г.

Ответ:  $F = 4,39$  Н;  $E = 877$  Дж.

4.2.10. Найдите максимальные значения: а) возвращающей силы; б) кинетической энергии, если небольшой грузик массой  $m = 10$  г колеблется по закону  $x = 0,1 \cos(4\pi t + \pi/4)$ , м.

Ответ: а)  $F = 0,158$  Н; б)  $T = 7,89$  Дж.

4.2.11. Тело колеблется по закону  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Чему равна полная энергия тела массой  $m$ ? [5]

Ответ:  $E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$ .

4.2.12. На спице длиной  $l = 30$  см укреплены два одинаковых шара: один – в середине спицы, а другой – на одном из концов спицы. Спица колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный край спицы. Определить приведенную длину и период колебания системы. Спицу считать легкой. [6]

Ответ:  $L = \frac{5}{6}L = 0,25$  м;  $T = 2\pi\sqrt{\frac{5L}{6g}} = 1$  с.

4.2.13. Кольцо подвешено на вбитом в стену гвозде параллельно стене. Диаметр кольца 60 см. Найдите период колебаний кольца. [6]

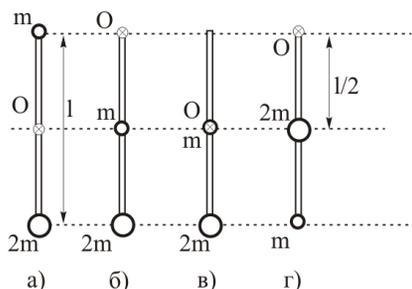
Ответ:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{D}{g}} = 1,55$  с.

4.2.14. Математический (нитяной) маятник длиной  $l_1 = 40$  см и физический маятник из тонкой спицы длиной  $l_2 = 60$  см колеблются с одним и тем же периодом около

одной горизонтальной оси. Вычислите расстояние от центра масс спицы до оси колебаний. [6]

*Ответ: 10 см.*

4.2.15. Если на тонком стержне длиной  $l=1\text{ м}$ , массой  $m$  укрепить два шарика массами  $m$  и  $2m$ , то такой маятник сможет совершать колебания около горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ . Найдите частоту колебаний этого физического маятника для случаев *a*, *б*, *в*, *г*, изображенных на рис. 4.2.



**Рис. 4.2**

*Ответ:*

$$a) v_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{5l}} = 0,386 \text{ Гц}; \quad б) v_б = \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{g}{31l}} = 0,537 \text{ Гц};$$

$$в) v_в = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3g}{7l}} = 0,653 \text{ Гц}; \quad г) v_г = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{15g}{11l}} = 0,582 \text{ Гц}.$$

4.2.16. На горизонтальном гладком столе лежит невесомая пружина жесткостью  $k=900\text{ Н/м}$ , на одном конце пружины припаян шар массой  $M=4\text{ кг}$ , другой конец закреплен. Шар по столу может скользить без трения. Пуля массой  $m=10\text{ г}$ , летящая со скоростью  $v_0=600\text{ м/с}$  вдоль пружины, попала в шар и застряла. Найдите: а) амплитуду колебаний шара; б) период колебаний шара. Трением о воздух пренебречь. [5]

*Ответ: а)  $A=10\text{ см}$ ;  $T=0,419\text{ с}$ .*

4.2.17. Тонкая спица длиной  $l=60\text{ см}$  может свободно колебаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через верхний конец. Систему отклонили на угол  $\alpha=0,01\text{ рад}$  и в момент времени  $t=0$  отпустили. Определите период колебаний спицы и запишите функцию колебания угла от времени  $\alpha(t)$ . Колебания считать малыми. [5]

*Ответ:  $T=1,27\text{ с}$ ;  $\alpha(t)=0,01\cos 1,57\pi t$ .*

### III уровень

4.2.18. Из сплошного диска радиусом  $R = 20$  см вырезали круг радиусом  $r = 10$  см, так, как показано на рис. 4.3. Получившаяся деталь колеблется относительно горизонтальной оси  $O$ , в точке касания окружности внешней поверхности с внутренней окружностью. Найти период колебаний этого маятника.

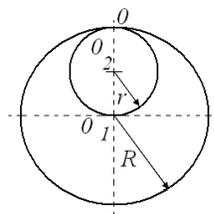


Рис. 4.3

*Ответ:*  $T = 1,14$  с.

4.2.19. Полая трубочка (ареометр) массой  $m = 50$  г и диаметром  $d = 1$  см погружена в воду, в результате погружения возникли гармонические колебания. Найти период колебаний.

*Ответ:*  $T = 1,6$  с.

4.2.20. На весы массой  $M$ , которые висят на пружине с жесткостью  $k$ , с высоты  $h$  роняют тело массой  $m$ . При ударе тело прилипает к дну чаши весов и система начинает совершать колебания. Найдите амплитуду возникших колебаний.

*Ответ:*  $A = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{2m^2 gh}{(m+M)k}}$ .

4.2.21. На верхнем конце короткого стержня ( $l = 30$  см,  $m = 50$  г) припаян маленький шарик ( $m' = 40$  г), а на нижнем закреплен большой шар ( $R = 5$  см,  $M = 100$  г). С каким периодом будет колебаться эта система около горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$  в центре стержня?

*Ответ:*  $T = 1,24$  с.

4.2.22. Два сплошных медных квадрата со стороной  $a$  подвешены на нитях, как показано на рис. 4.4. Расстояние от точек подвеса до верхних сторон квадрата равно  $a$ . Найти отношение периодов колебаний квадратов в вертикальной плоскости. Колебания считать малыми.

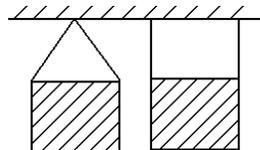


Рис. 4.4

$$\text{Ответ: } \frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{29a}{18g}}}{2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}} = \sqrt{\frac{29}{18}} = 1,27.$$

### 4.3. Затухающие и вынужденные колебания

#### Гуровень

4.3.1. Маятник совершает колебания, колебания с течением времени затухают. За время  $t_1 = 5$  мин максимальное смещение от положения равновесия уменьшилось в два раза. За какое время  $t_2$ , от начала наблюдения, амплитуда уменьшится в восемь раз?

*Ответ:  $t = 15$  мин.*

4.3.2. Маятник совершает колебания, колебания с течением времени затухают. За время  $t = 8$  мин амплитуда затухающих колебаний маятника уменьшилась в три раза. Чему равен коэффициент затухания  $\beta$ ?

*Ответ:  $\beta = 0,0023 \text{ с}^{-1}$ .*

4.3.3. Маятник совершает колебания, колебания с течением времени затухают, его логарифмический декремент равен  $\theta = 0,2$ . Как уменьшится амплитуда колебаний за один период?

*Ответ: в 1,22 раза.*

4.3.4. Маятник совершает колебания, колебания с течением времени затухают, его амплитуда за время  $t = 1$  мин уменьшилась в два раза. Как уменьшится амплитуда за время  $t = 3$  мин?

*Ответ: в 8 раз.*

## II уровень

4.3.5. Маятник длиной 1 м совершает колебания, которые с течением времени затухают, амплитуда колебаний маятника за 10 мин уменьшилась вдвое. Чему равен логарифмический декремент этого колебания?

*Ответ:* 0,0023.

4.3.6. Маятник совершает колебания, колебания с течением времени затухают, логарифмический декремент маятника равен  $\theta = 0,003$ . Сколько полных колебаний должен осуществить такой маятник, чтобы амплитуда его колебаний уменьшилась вдвое?

*Ответ:*  $N = 231$ .

4.3.7. Точечный объект массой  $m = 5 \text{ г}$  колеблется с затуханием так, что за время  $t = 50 \text{ с}$  потерял 0,6 части энергии. Чему равен коэффициент сопротивления этого колебания?

*Ответ:*  $r = 9,16 \cdot 10^{-5} (\text{кг} / \text{с})$ .

4.3.8. Математический маятник длиной  $l = 24,7 \text{ см}$  совершает колебания, которые со временем затухают, логарифмический декремент затухания равен  $\theta = 1$ . Через какое время энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза?

*Ответ:*  $t = 1,12 \text{ с}$ .

4.3.9. Железнодорожный вагон массой  $m = 80 \text{ т}$  имеет четыре рессоры. Рессоры конструкционно оснащены пружинами, жесткость каждой пружины равна  $500 \text{ кН} / \text{м}$ . Длина рельса на железной дороге  $l = 12,8 \text{ м}$ . При какой скорости вагон войдет в состояние резонанса при прохождении им стыков рельс?

*Ответ:*  $v = 10,2 \text{ м} / \text{с}$ .

4.3.10. Система колеблется с частотой  $\nu = 1000 \text{ Гц}$ . Если принять колебания затухающими, то чему равна  $\nu_0$  собственная частота колебаний? Известно, что резонанс наступил при частоте  $\nu_{\text{рез}} = 998 \text{ Гц}$ .

*Ответ:*  $\nu_0 = 1,002 \text{ кГц}$ .

### III уровень

4.3.11. Система колеблется затухающе, период собственных колебаний  $T_0 = 1$  с, ее логарифмический декремент затухания  $\theta = 0,628$ . Вычислите период затухающих колебаний.

*Ответ: 1,005 с.*

4.3.12. Найти число полных колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в  $n = 2$  раза. Логарифмический декремент затуханий  $\theta = 0,01$ .

*Ответ: 34.*

4.3.13. Период собственных колебаний пружинного маятника равен  $0,55$  с. В вязкой среде период  $T$  того же маятника стал равным  $0,56$  с. Найти резонансную частоту колебаний.

*Ответ:  $1,753$  с<sup>-1</sup>.*

4.3.14. По грунтовой дороге прошел трактор, оставив следы в виде ряда углублений, находящихся на расстоянии  $l = 30$  см друг от друга. По этой же дороге ехала коляска, имеющая две рессоры, каждая из которых прогнулась на  $x_0 = 2$  см под действием груза массой  $m_0 = 1$  кг. С какой скоростью катили коляску, если от толчков на углублениях трактора она попала в резонанс? Масса коляски  $M = 10$  кг.

*Ответ:  $0,4727$  м/с.*

## 5. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Количество вещества

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где  $N_A$  – постоянная Авогадро, равная  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

2. Молярная масса

$$M = \frac{m}{\nu}.$$

3. Уравнение Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

4. Закон Дальтона для смеси газов

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n,$$

где  $p_i$  – парциальное давление компонента смеси;  $p$  – давление смеси.

6. Концентрация частиц однородной системы

$$n = \frac{N}{V},$$

где  $V$  – объем системы.

7. Основное уравнение МКТ

$$p = \frac{2}{3} n E_k,$$

где  $E_k$  – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

8. Энергия поступательного движения молекулы

$$E = \frac{3}{2} kT.$$

9. Энергия вращательного движения

$$E_{\text{вр}} = \frac{i-3}{2} kT,$$

где  $i$  – число степеней свободы молекулы.

10. Зависимость давления от концентрации и температуры

$$p = nkT.$$

11. Среднеквадратичная скорость молекул

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

12. Распределение Больцмана (распределение частиц в силовом поле)

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}},$$

где  $U$  – потенциальная энергия частиц;  $k$  – постоянная Больцмана.

13. Барометрическая формула (распределение давления в однородном поле силы тяжести)

$$p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}},$$

где  $p_0$  – давление на нулевом уровне;  $h$  – координата точки по отношению к нулевому уровню.

14. Распределение Максвелла (распределение молекул по скоростям)

$$dN(v) = Nf(v)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m v^2}{2kT}} v^2 dv.$$

15. Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{1}{d^2 \pi n \sqrt{2}}.$$

16. Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{1}{3} \rho v_{cp} l_{cp}.$$

17. Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3} v_{cp} l_{cp}.$$

## Задачи для самостоятельного решения

### 5.1. Законы идеальных газов. Смеси газов

#### I уровень

5.1.1. Найти молярную массу: 1) воды; 2) углекислого газа  $\text{CO}_2$ ; 3) поваренной соли  $\text{NaCl}$ .

*Ответ:*  $18 \cdot 10^{-3}$  кг / моль;  $44 \cdot 10^{-3}$  кг / моль;  $58 \cdot 10^{-3}$  кг / моль.

5.1.2. Найти массы молекул: 1)  $\text{H}_2\text{O}$ ; 2)  $\text{CO}_2$ ; 3)  $\text{NaCl}$ .

*Ответ:*  $3 \cdot 10^{-26}$  кг;  $9,75 \cdot 10^{-26}$  кг;  $7,33 \cdot 10^{-26}$  кг.

5.1.3. Найти молярную массу серной кислоты  $\text{H}_2\text{SO}_4$ .

*Ответ:*  $98 \cdot 10^{-3}$  кг / моль.

5.1.4. Сосуд объемом 5 л наполнен кислородом, масса которого 20 г. Определить концентрацию молекул в сосуде.

*Ответ:*  $7,52 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>.

5.1.5. Определите число атомов в 1 кг  $\text{H}_2$  и массу одного атома водорода.

*Ответ:*  $3,01 \cdot 10^{26}$ ;  $3,32 \cdot 10^{-27}$  кг.

5.1.6. В канистре объемом 5 л при нормальных условиях закачали азот. Определите: 1) количество вещества; 2) концентрацию молекул азота в сосуде.

*Ответ:* 0,233 моль;  $2,69 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>.

5.1.7. Азот массой 7 г находится под давлением  $p = 0,1$  МПа и при температуре  $T_1 = 290$  К. Вследствие изобарного нагревания азот занял объем 10 л. Определите: 1) объем  $V_1$  газа до расширения; 2) температуру  $T_2$  газа после расширения.

*Ответ:*  $6,02 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>; 481 К.

5.1.8. В трубу с воздухом длиной 1,6 м, закрытую с одного края, поместили поршень площадью  $200$  см<sup>2</sup> со стороны открытого конца. Найти силу, которая будет действовать на поршень, если он остановится на расстоянии 10 см от дна.

Первоначально воздух был при нормальном атмосферном давлении, поршень двигали медленно.

*Ответ: 32,3 кН.*

5.1.9. В вертикально расположенном цилиндре с площадью основания  $0,2 \text{ м}^2$  под легким поршнем, скользящим без трения, находится  $500 \text{ л}$  воздуха. На сколько опустится поршень, если на него положить груз массой  $100 \text{ кг}$ ? Атмосферное давление  $100 \text{ кПа}$ .

*Ответ: 12 см.*

5.1.10. Газ при  $27^\circ \text{C}$  занимает объем  $V$ . До какой температуры его следует изобарно охладить, чтобы объем стал равным  $0,75V$ ?

*Ответ: 225 К.*

5.1.11. Газ находится под давлением  $100 \text{ кПа}$  и при температуре  $27^\circ \text{C}$ . Насколько изменится его давление при изохорном нагревании до  $30^\circ \text{C}$ ?

*Ответ: 10 кПа.*

5.1.12. Определенная масса идеального газа испытывает сначала изобарное нагревание, а затем после изотермического сжатия и изохорного охлаждения возвращается в исходное состояние. Изобразить эти процессы в координатах  $(P, V)$  и  $(P, T)$ .

## II уровень

5.1.13. Водородом наполнили емкость  $3 \text{ л}$ . Плотность газа в этой емкости  $6,65 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$ . Определить количество вещества водорода.

*Ответ:  $9,97 \cdot 10^{-3}$  моль.*

5.1.14. Применяя модель жидкости для ртути, как соприкасающиеся друг с другом шарики, определить размер диаметра атомов ртути ( $M_{\text{Hg}} = 200 \text{ г/моль}$ ). Плотность ртути  $13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

*Ответ: 0,290 нм.*

5.1.15. Определить среднее расстояние между центрами молекул водяных паров при нормальных условиях.

*Ответ: 33,3 нм.*

5.1.16. Какое число частиц находится в единице массы парообразного йода, степень диссоциации которого составляет 0,5?  $M_{\text{йода}} = 254 \text{ г/моль}$ .

*Ответ:  $3,56 \cdot 10^{24}$ .*

5.1.17. На летних кухнях садовых участков используют переносные газовые баллоны объемом  $0,2 \text{ м}^3$ . Дачник решил дозаправить баллон, чтобы хватило до конца дачного сезона, хотя там еще оставался газ лета. До докачки в баллоне оставался газ под давлением  $10^5 \text{ Па}$  при температуре  $290 \text{ К}$ . После заправки баллона давление увеличилось до  $3 \cdot 10^5 \text{ Па}$  и температура баллона поднялась до  $320 \text{ К}$ . На сколько увеличилось число молекул в газовом баллоне после дозаправки?

*Ответ:  $8,6 \cdot 10^{23}$ .*

5.1.18. В аэростат объемом  $800 \text{ м}^3$  при атмосферном давлении был закачан водород при температуре  $273 \text{ К}$ . Подъемной силы оказалось недостаточно, потому газ подогрели до  $293 \text{ К}$ . Считать аэростат нерастяжимым, снизу аэростата есть отверстие для выравнивания давлений с окружающей средой. Насколько изменится подъемная сила аэростата?

*Ответ: 642 Н.*

5.1.19. В газовом термометре, устроенном из шара и прикрепленной к нему горизонтальной стеклянной трубки поперечного сечения  $0,1 \text{ см}^2$  капля ртути, помещенная в трубку, отделяет шар от окружающей среды. При температуре  $293 \text{ К}$  ртуть располагается на расстоянии  $30 \text{ см}$  от шара, при температуре  $278 \text{ К}$  – на расстоянии  $50 \text{ см}$ . Найти объем шара.

*Ответ:  $106 \text{ см}^3$ .*

5.1.20. Определить плотность насыщенного водяного пара в воздухе при температуре  $300 \text{ К}$ . Давление насыщенного водяного пара при этой температуре равно  $3,55 \text{ кПа}$ .

*Ответ:  $2,56 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3$ .*

5.1.21. Найти число молекул в  $1 \text{ см}^3$  при давлении  $1,010^{-11} \text{ мм рт. ст.}$  и температуре  $15^{\circ} \text{C}$ .

*Ответ:  $0,34 \cdot 10^6$ .*

5.1.22. В баллонах вместимостью  $20 \text{ л}$  и  $44 \text{ л}$  содержится газ. Давление в первом баллоне –  $2,4 \text{ МПа}$ , во втором –  $1,6 \text{ МПа}$ . Определить общее давление газа после соединения баллонов, если температура газа осталась прежней.

*Ответ:  $1,88 \text{ МПа}$ .*

5.1.23. Найти плотность газовой смеси водорода и кислорода, если их массовые доли в смеси равны соответственно  $1/9$  и  $8/9$ . Давление смеси равно  $100 \text{ кПа}$ , температура –  $300 \text{ К}$ .

*Ответ:  $0,481 \text{ кг/м}^3$ .*

5.1.24. Сухой воздух состоит в основном из кислорода и азота. Если пренебречь остальными составляющими частями воздуха, то можно считать, что массовые доли кислорода и азота соответственно равны  $0,232$  и  $0,768$ . Определить молярную массу воздуха.

*Ответ:  $28,9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .*

5.1.25. Баллон вместимостью  $30 \text{ л}$  содержит смесь водорода и гелия при температуре  $300 \text{ К}$  и давлении  $828 \text{ кПа}$ . Масса смеси равна  $24 \text{ г}$ . Определить их массы.

*Ответ:  $16 \text{ г}; 8 \text{ г}$ .*

5.1.26. В сосуде объемом  $5 \text{ л}$  находится азот массой  $1,4 \text{ г}$  при температуре  $1800 \text{ К}$ . Найти давление газа, если при этой температуре  $30 \%$  молекул диссоциировано на атомы.

*Ответ:  $5577,6 \text{ Па}$ .*

5.1.27. Определить молярную массу смеси газов, состоящей из  $10 \text{ г}$  кислорода и  $10 \text{ г}$  азота, которые занимают объем  $20 \text{ л}$  при температуре  $150^{\circ} \text{C}$ .

*Ответ:  $\sim 30 \text{ г/моль}$ .*

### III уровень

5.1.28. Если газ перегреть, то часть молекул может диссоциировать на атомы. Степень диссоциации азота равна 0,3 в сосуде объемом 1,12 л при нормальных физических условиях и нагревания до некоторой температуры. Определить количество вещества азота до нагревания, молекулярного азота после нагревания, атомарного азота после нагревания.

*Ответ:* 50 ммоль, 35 ммоль, 30 ммоль.

5.1.29. Баллон емкостью  $V$ , заполненный газом при давлении  $P$  и температуре  $T$ , взвешивается. Его вес оказывается равным  $F$ . Затем из баллона откачивают газ, пока давление не упадет до  $P_1$  при той же температуре  $T$ . Вес баллона при этом оказывается равным  $F_1$ . Определить из этих данных плотность газа при нормальных условиях: давлении  $P_0$  и температуре  $T_0$ .

*Ответ:*  $P_0 T / T_0 g V$ .

5.1.30. Оболочка аэростата вместимостью  $1600 \text{ м}^3$ , находящегося на поверхности земли, на  $k = 7/8$  наполнена водородом при давлении  $P_1 = 100 \text{ кПа}$  и температуре  $T_1 = 290 \text{ К}$ . Аэростат подняли на некоторую высоту, где давление  $P_2 = 80 \text{ кПа}$  и температура  $T_2 = 280 \text{ К}$ . Определить массу водорода, вышедшего из оболочки при его подъеме.

*Ответ:* 6,16 кг.

5.1.31. Баллон вместимостью 5 л содержит смесь газов гелия и водорода при давлении 600 кПа. Масса смеси – 4 г, массовая доля гелия – 0,6. Определить температуру смеси.

*Ответ:* 259 К.

5.1.32. Емкость разделена на две равные части неподвижной перегородкой. В левую половину емкости поместили смесь аргона и водорода при давлении  $1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , в правой части – вакуум. Через перегородку может проходить только водород. После окончания процесса диффузии давление слева перего-

родки оказалось равным  $10^5 \text{ Па}$ . Определите отношение масс аргона и водорода в смеси, которая была первоначально в левой части емкости. Температура за все время наблюдения не изменялась.

*Ответ: 10.*

## 5.2. Основное уравнение МКТ. Энергия молекул

### I уровень

5.2.1. В сосуде вместимостью 12 л находится газ, число молекул которого  $1,44 \cdot 10^{18}$ . Определить концентрацию газа.

*Ответ:  $1,2 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ .*

5.2.2. Идеальный газ находится при нормальных условиях в закрытом сосуде. Определить концентрацию молекул газа.

*Ответ:  $2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ .*

5.2.3. Концентрация молекул водорода в сосуде объемом 3 л равна  $2 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$ . Определить количество вещества.

*Ответ:  $9,97 \cdot 10^{-9}$  моль.*

5.2.4. Концентрация молекул идеального газа равна  $10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Вычислить давление идеального газа при двух значениях его температуры: 1)  $T = 3 \text{ К}$ ; 2)  $T = 1 \text{ кК}$ .

*Ответ: 414 Па, 138 кПа.*

5.2.5. Давление газа равно  $1 \text{ мПа}$ , концентрация его молекул  $10^{10} \text{ см}^{-3}$ . Определить: 1) температуру газа; 2) среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул.

*Ответ: 7025 кК,  $1,5 \cdot 10^{-19}$  Дж.*

5.2.6. Концентрация молекул идеального газа равна  $10^{13} \text{ см}^{-3}$ . Если давление газа  $0,1 \text{ Па}$ , то чему равна средняя энергия поступательного движения молекул газа?

*Ответ:  $1,5 \cdot 10^{-20}$  Дж.*

5.2.7. Найти отношение средних квадратичных скоростей гелия и азота при одинаковых температурах.

*Ответ: 2,65.*

5.2.8. До какой температуры надо нагреть гелий, чтобы средняя квадратичная скорость атомов гелия стала равна второй космической скорости  $11,2 \text{ км/с}$ ?

*Ответ:*  $20,1 \text{ К}$ .

5.2.9. Молекула азота упруго ударяется о стенку сосуда под углом  $60^\circ$  к нормали стенки. Молекула летела со скоростью  $500 \text{ м/с}$ . Вычислить изменение импульса молекулы.

*Ответ:*  $5,6 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$ .

5.2.10. Под каким давлением находится в баллоне кислород, если емкость его  $5 \text{ л}$ , а средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул кислорода  $6 \text{ кДж}$ ?

*Ответ:*  $8 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

## II уровень

5.2.11. В баллоны равных объемов закачали разные газы, но равной массы: в первый – водород, во второй – кислород. Найти отношение концентраций этих газов.

*Ответ:*  $16$ .

5.2.12. Идеальный газ массой  $58,5 \text{ г}$ , концентрация молекул которого равна  $2,2 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}$ , закачан в колбу объемом  $5 \text{ л}$ . Чему равна его молярная масса?

*Ответ:*  $0,032 \text{ кг/моль}$ .

5.2.13. Вычислить концентрацию молекул кислорода массой  $1 \text{ г}$  в сосуде объемом  $1 \text{ л}$ .

*Ответ:*  $1,88 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ .

5.2.14. Из бака с газом объемом  $100 \text{ см}^3$  произошла утечка, количество молекул газа уменьшилось на  $10^{20}$  молекул. Температура бака  $300 \text{ К}$ . На сколько понизится давление газа в баке из-за утечки?

*Ответ:*  $4,14 \text{ кПа}$ .

5.2.15. Определить количество вещества молекул газа, содержащегося в колбе вместимостью  $240 \text{ см}^3$  при температуре  $290 \text{ К}$  и давлении  $50 \text{ кПа}$ .

*Ответ:*  $4,98 \text{ ммоль}$ .

5.2.16. Под каким давлением находится в баллоне кислород, если емкость баллона 5 л, а средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул равна 6 кДж?

*Ответ:*  $8 \cdot 10^5$  Па.

5.2.17. Некий газ плотностью 0,01 кг/м<sup>3</sup> закачан в баллон, средняя квадратичная скорость молекул газа составляет 480 м/с. Определите давление в баллоне.

*Ответ:* 768 Па.

5.2.18. При какой температуре молекулы кислорода имеют такую же среднеквадратичную скорость, как молекулы водорода при температуре 100 К?

*Ответ:* 1,6 кК.

5.2.19. Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа в баллоне объемом 4 л, если в баллоне содержится газ массой 0,6 г и под давлением 200 кПа.

*Ответ:* 2 км/с.

5.2.20. Движение в воздухе пылинок массой  $10^{-10}$  похоже на движение очень крупных молекул. Если температура окружающего воздуха равна 300 К, то чему равна средняя квадратичная скорость пылинок?

*Ответ:* 352 мкм/с.

5.2.21. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях равна 480 м/с. Сколько молекул содержит 1 г этого газа?

*Ответ:*  $2,04 \cdot 10^{22}$ .

5.2.22. Два одинаковых баллона содержат одинаковое число молекул азота. Затем их соединили краном. В первом сосуде средняя квадратичная скорость молекул – 400 м/с, а во втором – 500 м/с. Чему будет равна скорость, если открыть кран?

*Ответ:* 453 м/с.

5.2.23. Определить среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы водяного пара при температуре 600 К.

*Ответ:*  $1,24 \cdot 10^{-20}$  Дж.

5.2.24. Определить кинетическую энергию вращательного движения молекулы азота при температуре  $1 \text{ К}$ .

*Ответ:*  $13,8 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$ .

### III уровень

5.2.25. Чему равно количество кислорода, находящегося в баллоне, и его давление, если кинетическая энергия поступательного движения его молекул  $2 \cdot 10^3 \text{ Дж}$ , а средняя квадратичная скорость молекул  $10^3 \text{ м/с}$ ? Объем баллона  $0,01 \text{ м}^3$ .

*Ответ:*  $4 \cdot 10^3$ ;  $1,33 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

5.2.26. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям  $f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \mathcal{G}^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$ , найдите формулу наиболее вероятной скорости.

*Ответ:*  $\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$ .

5.2.27. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям  $f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \mathcal{G}^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$ , найдите формулу средней арифметической скорости.

*Ответ:*  $\sqrt{\frac{8kT}{m_0}}$ .

## 5.3. Элементы статистической физики

### I уровень

5.3.1. Пушинки одуванчика имеют массу  $10^{-18} \text{ г}$ . Если принять температуру воздуха равной  $300 \text{ К}$ , то во сколько раз различаются концентрации семян одуванчика при их нахождении на высотах с разницей в  $10 \text{ м}$ ?

*Ответ:*  $e^{23,6}$  раза.

5.3.2. Если температура воздуха на вершине горы  $10^{\circ}\text{C}$  и давление воздуха равно 60 % от давления на уровне моря, то чему равна высота горы?

*Ответ:* 4,22 км.

5.3.3. Какое давление от давления на уровне моря испытывает шахтер на глубине 1 км, если температура в шахте везде одинакова и равна  $22^{\circ}\text{C}$ ? Давление воздуха на уровне моря равно  $p_0$ , ускорение свободного падения постоянно и равно  $g$ ?

*Ответ:*  $1,12p_0$ .

5.3.4. Какое давление действует на аэронавта на высоте 100 м, если на поверхности земли оно равно 100 кПа? Температура воздуха равна 290 К и не меняется с высотой.

*Ответ:* 1,18 кПа.

5.3.5. Самолет летит в аварийном режиме из-за отказа высотомера. Пилот на приборной доске фиксирует давление 90 кПа и температуру 290 К. На какой высоте летит судно, если на земле барометр показывал давление 100 кПа? Принять, что температура не изменяется с высотой.

*Ответ:* 885 м.

5.3.6. Высотомер в самолете неисправен, и летчик внимательно следит за показаниями барометра. Барометр некоторое время показывает одинаковое давление 80 кПа, поэтому летчик думает, что высота полета постоянна. Однако температура воздуха упала на 1 К. На сколько «ошибается» высотомер самолета? Давление поверхности земли 100 кПа.

*Ответ:* 6,5 м.

5.3.7. Число столкновений одной молекулы кислорода при температуре  $0^{\circ}\text{C}$  за 1 с равно  $3,7 \cdot 10^9$ . Чему равна средняя длина свободного пробега этого газа?

*Ответ:* 115 нм.

## II уровень

5.3.8. Вычислить наиболее вероятную, среднюю и среднеквадратичную скорости молекул газа, плотность которого при нормальном атмосферном давлении  $1,00 \text{ г/л}$ .

*Ответ:*  $447,2 \text{ м/с}$ ;  $504,8 \text{ м/с}$ ;  $547,7 \text{ м/с}$ .

5.3.9. При какой температуре среднеквадратичная скорость молекул кислорода больше наиболее вероятной скорости на  $100 \text{ м/с}$ ?

*Ответ:*  $381 \text{ К}$ .

5.3.10. Вычислите относительное число молекул идеального газа, скорости которых лежат в диапазоне  $[0; 0,01v_{\text{вер}}]$ .

*Ответ:*  $7,52 \cdot 10^{-7}$ .

5.3.11. Водород находится при нормальных условиях и занимает объем  $1 \text{ см}^3$ . Определить число молекул в этом объеме, обладающих скоростями меньше значения  $1 \text{ м/с}$ .

*Ответ:*  $6,0 \cdot 10^9$ .

5.3.12. Какая часть молекул кислорода при  $0^\circ\text{C}$  имеет скорости в интервале  $[100 \text{ м/с}; 110 \text{ м/с}]$ ?

*Ответ:*  $0,4 \%$ .

5.3.13. Разница между двумя эквипотенциальными уровнями однородного гравитационного поля напряженностью  $0,2 \text{ мкН/кг}$  составляет  $10 \text{ м}$ . В нем распределены тождественные частицы массой  $10^{-12} \text{ г}$  каждая. Определить отношение концентрации частиц на этих уровнях. Температуру считать везде одинаковой и равной  $290 \text{ К}$ .

*Ответ:*  $1,65$ .

5.3.14. Взвесь пушинок, масса каждой из которых равна  $1 \cdot 10^{-18} \text{ кг}$ , распределена между высотами  $0 \text{ м}$  и  $1 \text{ м}$ . Отношение концентраций пушинок в этих уровнях –  $0,787$ . Температура воздуха везде постоянна и равна  $300 \text{ К}$ . Определить число Авогадро по этим значениям.

*Ответ:*  $5,97 \cdot 10^{23}$ .

5.3.15. Высоко в горах на уровне 3250 м температура постоянна и равна  $5^{\circ}\text{C}$ . Найти давление воздуха на этой высоте, если давление воздуха на уровне моря  $101,3 \text{ кПа}$ . Молярная масса воздуха равна  $0,029 \text{ кг / моль}$ .

*Ответ:* 67915 Па.

5.3.16. Имеется высокий бак с кислородом температурой  $27^{\circ}\text{C}$ . Найти высоту над поверхностью земли, где плотность кислорода станет меньше на 1 %.

*Ответ:* 80 м.

5.3.17. Вблизи поверхности земли отношение концентраций кислорода и азота в воздухе составляет 0,268. Полагая температуру атмосферы не зависящей от высоты и равной  $0^{\circ}\text{C}$ , определить это отношение на высоте 10 км.

*Ответ:* 0,225.

5.3.18. Ротор центрифуги вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Используя функцию распределения Больцмана, установить распределение концентрации  $n$  частиц массой  $m$ , находящихся в роторе центрифуги, как функцию расстояния  $r$  от оси вращения  $n$ .

*Ответ:*  $n = n_0 e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}$ .

5.3.19. Сколько молекул воздуха можно закачать в стеклянную сферу, чтобы молекулы не сталкивались друг с другом? Диаметр молекулы воздуха равен  $0,3 \text{ нм}$ , диаметр сферы –  $15 \text{ см}$ .

*Ответ:*  $1,7 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ .

5.3.20. При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул водорода равна  $2,5 \text{ см}$ , если температура газа равна  $67^{\circ}\text{C}$ ? Диаметр молекулы водорода –  $0,28 \text{ нм}$ .

*Ответ:* 0,539 Па.

5.3.21. Определите среднюю продолжительность свободного пробега молекул водорода при температуре  $27^{\circ}\text{C}$  и давлении  $0,5 \text{ кПа}$ . Диаметр молекулы водорода –  $0,28 \text{ нм}$ .

*Ответ:* 13,3 нс.

5.3.22. Найти среднюю длину свободного пробега молекул азота при условии, что его динамическая вязкость  $17 \text{ мкПа}\cdot\text{с}$ .

*Ответ:* 90 нм.

5.3.23. Вычислить коэффициент диффузии кислорода при нормальных условиях. Диаметр молекулы кислорода – 0,36 нм.

*Ответ:*  $9,18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

### III уровень

5.3.24. В центрифуге находится некоторый газ при температуре  $271 \text{ К}$ . Ротор центрифуги радиусом  $0,4 \text{ м}$  вращается с угловой скоростью  $500 \text{ рад}/\text{с}$ . Определить относительную молекулярную массу газа, если давление у стенки ротора в  $2,1$  раза больше давления в его центре.

*Ответ:* 84, криптон.

5.3.25. На сколько процентов изменится наиболее вероятное значение импульса молекул идеального газа при изменении температуры на  $1\%$ ?

*Ответ:*  $0,5\%$ .

5.3.26. Найти зависимость среднего числа столкновений молекулы идеального газа в  $1 \text{ с}$  от давления при следующих процессах: 1) изохорном; 2) изотермическом.

*Ответ:*  $p^{1/2}$ ;  $p$ .

5.3.27. Найти зависимость теплопроводности от давления при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорном.

*Ответ:*  $0$ ;  $p^{1/2}$ .

## 6. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Молярные теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно равны

$$C_v = \frac{iR}{2}; C_p = \frac{(i+2)R}{2},$$

где  $i$  – число степеней свободы;  $R$  – молярная газовая постоянная.

## 2. Уравнение Майера

$$C_p - C_v = R.$$

## 3. Показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}. \text{ Или } \gamma = \frac{i+2}{i}.$$

4. Работа, совершаемая газом при изменении его объема в общем случае:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

## 5. Работа, совершаемая газом в частных случаях:

а) при изобарном процессе  $A = p(V_2 - V_1)$ ;

б) при изотермическом процессе  $A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ ;

в) при адиабатном процессе  $A = \frac{m}{M} C_v (T_1 - T_2)$ .

## 6. Уравнение Пуассона

$$pV^\gamma = const.$$

## 7. Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A.$$

## 8. КПД цикла, КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

## Задачи для самостоятельного решения

### I уровень

6.1.1. Вычислите удельные теплоемкости  $c_v$  и  $c_p$  газов:

1) гелия; 2) водорода; 3) углекислого газа.

*Ответ:*

1)  $3,12 \text{ кДж/кгК}$  и  $5,19 \text{ кДж/кгК}$  ;

2)  $10,4 \text{ кДж/кгК}$  и  $14,6 \text{ кДж/кгК}$  ;

3)  $567 \text{ Дж/кгК}$  и  $756 \text{ Дж/кгК}$  .

6.1.2. Азот массой  $10 \text{ г}$  находится при температуре  $290 \text{ К}$  . Определите: 1) среднюю кинетическую энергию одной молекулы; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения всех молекул азота. Газ считать идеальным.

*Ответ:*  $E_{cp} = 10^{-20} \text{ Дж}$ ;  $E_{вр} = 860 \text{ Дж}$ .

6.1.3. Чему равно давление одноатомного газа, занимающего объем  $2 \text{ л}$  , если известно, что его внутренняя энергия равна  $300 \text{ Дж}$  ?

*Ответ:*  $10^5 \text{ Па}$ .

6.1.4. Для изобарного нагревания  $800 \text{ моль}$  одноатомного идеального газа на  $\Delta T = 500 \text{ К}$  газу сообщили количество теплоты  $9,4 \text{ МДж}$  . Определить работу газа и приращение его внутренней энергии.

*Ответ:*  $9,4 \text{ МДж}$ ,  $6,1 \text{ МДж}$ ,  $3,3 \text{ МДж}$ .

6.1.5. Азот массой  $5 \text{ кг}$  , нагретый на  $150 \text{ К}$  , сохранил неизменный объем. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу; 2) изменение внутренней энергии; 3) совершенную газом работу.

*Ответ:*  $556 \text{ кДж}$ ,  $556 \text{ кДж}$ ,  $0$ .

6.1.6. При изохорном нагревании кислорода объемом  $50 \text{ л}$  давление газа изменилось на  $\Delta p = 0,5 \text{ МПа}$  . Найти количество теплоты, сообщенное газу.

*Ответ:*  $62,5 \text{ Дж}$ .

6.1.7. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 70 % количества теплоты, полученного от нагревателя, отдает холодильнику. Количество теплоты, получаемое от нагревателя, равно 5 кДж. Определите: 1) термический КПД цикла; 2) работу, совершенную при полном цикле.

*Ответ: 30 %, 1,5 кДж.*

## II уровень

6.1.8. Газ, занимавший объем 12 л под давлением 100 кПа, был изобарно нагрет от температуры 300 К до температуры 400 К. Определить работу расширения газа.

*Ответ: 400 Дж.*

6.1.9. Какая работа совершается при изотермическом расширении водорода массой 5 г, взятого при температуре 290 К, если объем газа увеличивается в 3 раза?

*Ответ: 662 кДж.*

6.1.10. Азот массой 2 г, имевший температуру 300 К, был сжат адиабатно так, что его объем уменьшился в 10 раз. Определить работу сжатия.

*Ответ: 674 Дж.*

6.1.11. Разность удельных теплоемкостей  $c_p - c_v$  некоторого двухатомного газа равна 260 Дж / кг·К. Найти молярную массу газа и его удельные теплоемкости  $c_p$  и  $c_v$ .

*Ответ: 0,032 кг/моль.*

6.1.12. Каковы удельные теплоемкости  $c_p$  и  $c_v$  смеси газов, содержащей кислород массой 10 г и азот массой 20 г?

*Ответ: 715 Дж/кг·К.*

6.1.13. Определить удельную теплоемкость  $c_v$  смеси ксенона и кислорода, если количество вещества газов в смеси одинаково.

*Ответ: 204 Дж/кг·К.*

6.1.14. Какая доля количества теплоты, подводимого к идеальному газу при изобарном процессе, расходуется на увеличение внутренней энергии газа и какая доля на работу, если газ двухатомный?

*Ответ: 0,71; 0,29.*

6.1.15. Водород массой 10 г нагрели на 200 К, причем газу передано количество теплоты 40 кДж. Найти изменение внутренней энергии газа и совершенную им работу.

*Ответ: 20,8 кДж; 19,2 кДж.*

6.1.16. Какое количество теплоты выделится, если азот массой 1 г, взятый при температуре 280 К под давлением 0,1 МПа, изотермически сжать до давления 1 МПа?

*Ответ: 191 Дж.*

6.1.17. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя в 4 раза выше температуры охладителя. Какую долю количества теплоты, получаемого за один цикл от нагревателя, газ отдает охладителю?

*Ответ:  $\frac{1}{4}$ .*

6.1.18. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, совершает работу за один цикл 37 кДж. При этом она забирает теплоту от тела с температурой 263 К и передает ее телу с температурой 290 К. Найти КПД цикла, количество теплоты, отнятое у первого тела, и количество теплоты, переданное второму телу.

*Ответ: 9,3 %; 360 кДж; 397 кДж.*

6.1.19. В результате изохорного нагревания водорода массой 1 г давление газа увеличилось в 2 раза. Определить изменение энтропии газа.

*Ответ: 7,2 Дж/К.*

6.1.20. Азот массой 28 г адиабатно расширили в 2 раза, а затем изобарно сжали до первоначального объема. Определите изменение энтропии в ходе указанных процессов.

*Ответ: -20,2 Дж / К.*

6.1.21. Кусок льда массой  $200 \text{ г}$ , взятый при температуре  $-10^{\circ}\text{C}$ , был нагрет до температуры  $0^{\circ}\text{C}$  и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до температуры  $10^{\circ}\text{C}$ . Определить изменение энтропии в ходе указанных процессов.

*Ответ:*  $291 \text{ Дж} / \text{K}$ .

### III уровень

6.1.22. Определите показатель адиабаты для смеси газов, содержащей гелий массой  $8 \text{ г}$  и водород массой  $2 \text{ г}$ .

*Ответ:*  $1,55$ .

6.1.23. Некоторый газ массой  $1 \text{ кг}$  находится при температуре  $300 \text{ K}$  и под давлением  $p_1 = 0,5 \text{ МПа}$ . В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в  $2$  раза. Работа, затраченная на сжатие:  $A = -432 \text{ кДж}$ . Определите: 1) какой это газ; 2) первоначальный объем газа.

*Ответ:* гелий;  $1,25 \text{ м}^3 / \text{кг}$ .

6.1.24. Кислород, занимающий при давлении  $p_1 = 1 \text{ МПа}$  объем  $5 \text{ л}$ , расширяется в  $3$  раза. Определите конечное давление и работу, совершенную газом. Рассмотрите следующие процессы: 1) изобарный; 2) изотермический; 3) адиабатный.

*Ответ:*

1)  $1 \text{ МПа}$ ,  $10 \text{ кДж}$ ;

2)  $0,33 \text{ МПа}$ ,  $5,5 \text{ кДж}$ ;

3)  $0,21 \text{ МПа}$ ,  $4,63 \text{ кДж}$ .

6.1.25. Азот занимает объем  $2 \text{ м}^3$  и находится под давлением  $10^5 \text{ Па}$ . Газ нагревают, причем нагрев ведут сначала при постоянном объеме до давления  $p_2 = 5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , а затем при постоянном давлении – до объема  $4 \text{ м}^3$ . Масса азота  $3 \text{ кг}$ . Газ идеальный. Определить: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) совершенную им работу; 3) количество тепла, переданное газу.

*Ответ:*  $5 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ ;  $1,01 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ ;  $6,01 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ .

6.1.26. Тепловая машина Карно, имеющая КПД 40 %, начинает использоваться при тех же условиях, но как холодильная машина. Найти величину холодильного коэффициента и количество теплоты, которое эта машина может перенести за один цикл от холодильника к нагревателю, если к ней за каждый цикл подводится механическая работа, равная 200 Дж?

*Ответ: 1,5.*

6.1.27. Идеальный газ в тепловом двигателе совершает цикл из изобарного, адиабатного и изотермического процессов. При изобарном процессе температура увеличилась от  $T_1 = 300 \text{ K}$  до  $T_2 = 600 \text{ K}$ . Чему равен КПД теплового двигателя?

*Ответ: 30,7 %.*

## 7. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ЖИДКОСТИ

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT.$$

2. Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольного количества вещества газа

$$\left(p + \frac{v^2 a}{V^2}\right)(V - vb) = vRT,$$

где  $a$  и  $b$  – постоянные Ван-дер-Ваальса.

3. Внутренняя энергия реального газа

$$U = v \left( C_v T - \frac{a}{V_m} \right).$$

4. Коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma = \frac{F}{l}.$$

5. Уравнение Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости в общем случае

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

6. Число Рейнольдса

$$R_e = \frac{\rho v d}{\eta}.$$

### *Задачи для самостоятельного решения*

#### **I уровень**

7.1.1. В закрытом сосуде объемом  $0,5 \text{ м}^3$  находится количество  $0,6 \text{ кмоль}$  углекислого газа при давлении  $3 \text{ МПа}$ . Пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса, найти, во сколько раз надо увеличить температуру газа, чтобы давление газа увеличилось вдвое ( $a = 0,361 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2$ ,  $b = 4,28 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$ ).

*Ответ: 1,85.*

7.1.2. Криптон, содержащий количество вещества  $1 \text{ моль}$ , находится при температуре  $300 \text{ К}$  в объеме  $0,2 \text{ л}$ . Определить относительную погрешность, которая будет допущена при вычислении давления, если вместо уравнения Ван-дер-Ваальса воспользоваться уравнением Менделеева – Клапейрона.

*Ответ: 0,272.*

7.1.3. Кислород массой  $100 \text{ г}$  расширяется от объема  $5 \text{ л}$  до объема  $10 \text{ л}$ . Определите работу межмолекулярных сил притяжения при этом расширении. Поправку примите равной  $0,136 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2$ .

*Ответ: 133 Дж.*

7.1.4. Углекислый газ массой  $88 \text{ г}$  занимает при температуре  $290 \text{ К}$  объем  $1000 \text{ см}^3$ . Определите внутреннюю энергию газа, если: 1) газ идеальный; 2) газ реальный ( $a = 0,361 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2$ ).

*Ответ: 14,5 кДж; 13 кДж.*

7.1.5. В банке объемом 1 л закачали 10 г азота. Найти, на сколько понизится температура газа, если потом его выпустить в пустой баллон объемом 10 л ( $a = 0,135 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2$ ).

*Ответ:* -20,9 К.

7.1.6. В сосуд объемом 10 дм<sup>3</sup> поставили блюдце, содержащее 1 г воды. После этого сосуд герметически закрыли и оставили при температуре 20<sup>0</sup>С, при которой давление насыщенного пара 2,33 кПа. Какая часть воды испарится?

*Ответ:* 0,17.

7.1.7. В замкнутом объеме 1 м<sup>3</sup> относительная влажность воздуха 0,6 при температуре 20<sup>0</sup>С. Какая масса воды должна испариться в этот объем, чтобы пар стал насыщенным?

*Ответ:* 6,8 г.

## II уровень

7.1.8. Для нагревания металлического шарика массой 10 г от 20 до 50<sup>0</sup>С затратили количество теплоты, равное 62,5 Дж. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, определите молярную массу материала шарика.

*Ответ:* 0,119 кг/моль.

7.1.9. Кольцо внутренним диаметром 25 мм и внешним диаметром 26 мм подвешено на пружине и соприкасается с поверхностью жидкости. Жесткость пружины  $9,8 \cdot 10^{-7} \text{ Н} / \text{м}$ . При опускании поверхности жидкости кольцо оторвалось от нее при растяжении пружины на 5,3 мм. Найти поверхностное натяжение жидкости.

*Ответ:* 0,032 Н/м.

7.1.10. При плавлении нижнего конца вертикально подвешенной свинцовой проволоки ( $\rho = 11,3 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$ ) диаметром 1 мм образовалось 20 капель свинца. На сколько укоротилась проволока? Поверхностное натяжение жидкого свинца

равно  $0,47 \text{ Н/м}$ . Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным диаметру проволоки.

*Ответ:* 34 см.

7.1.11. Две капли воды радиусом 1 мм каждая слились в одну большую каплю. Определите уменьшение поверхностной энергии при этом слиянии, если поверхностное натяжение воды  $73 \text{ мН/м}$ .

*Ответ:* 378 нДж.

### III уровень

7.1.12. Давление воздуха внутри мыльного пузыря на  $200 \text{ Па}$  больше атмосферного. Определить диаметр пузыря. Поверхностное натяжение мыльного раствора  $40 \text{ мН/м}$ .

*Ответ:* 1,6 мм.

7.1.13. Найти изобарический коэффициент объемного расширения газа Ван-дер-Ваальса при заданных  $V$ ,  $T$  и поправках  $a$  и  $b$ .

*Ответ:*  $\frac{1}{T}$ .

7.1.14. Два моля кислорода, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, адиабатически расширились в пустоту от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ . Заданы критические параметры кислорода  $T_k$  и  $V_k$ . Определить, какое количество теплоты нужно подвести к газу, чтобы после расширения газ вернулся к начальной температуре, оставаясь в объеме  $V_2$ .

*Ответ:*  $\Delta Q = \frac{9}{8} n^2 R V_k T_k \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$ .

7.1.15. Найти изменение энтропии при смешивании произвольного количества двух газов, находящихся в теплоизолированном объеме и первоначально разделенных перегородкой. При данных  $p_0$  и  $T_0$  они близки по своим свойствам к идеальному газу.

*Ответ:*  $\Delta S > 0$  max при  $\alpha = 1/2$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для реализации дифференцированного подхода прежде всего необходим отбор и грамотное структурирование учебных задач. Структурирование необходимо проводить таким образом, чтобы задания позволяли продвигаться студенту от имеющегося уровня освоения компетенций к его потенциальному уровню в соответствии с личностными возможностями или прирастать умениями внутри выбранного уровня. При осуществлении такого подхода сразу очевидна динамика или её отсутствие у обучающихся, а также минимизируются претензии у студента к преподавателю в связи с оценкой его персональных достижений.

Все разработанные задания в каждой теме были распределены по трём уровням сложности. Первый уровень сложности задач соответствует узнаванию законов, применению законов в знакомой учебной ситуации. Второй уровень соответствует глубокому пониманию сущности используемых физических законов, способности их правильного применения в стандартных учебных задачах. Третий уровень определяет умение студента применять физические законы для проектирования собственных задач, с их помощью ставить перед собой новые образовательные цели. При самостоятельной работе над домашним заданием каждый студент может выбрать задания, которые соответствуют его уровню подготовленности на текущем этапе. Такой подход позволяет мотивировать студента любого уровня подготовки и даже увлечь физикой. Постепенно продвигаясь в банке заданий от одного уровня к следующему, обучающиеся начинают более активно участвовать в учебно-познавательной деятельности.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – СПб: СпецЛит, 2002. – 327 с.
2. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 432 с.
3. Савельев И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – Т. 1. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 11-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 560 с.
5. Трофимова Т. И. Сборник задач по физике с решениями / Т. И. Трофимова, З. Г. Павлова. – М.: Высш. шк., 2004. – 591 с.
6. Чертов А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М.: Интеграл Пресс, 1997. – 544 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |           |
|--|-----------|
| ВВЕДЕНИЕ .....   | 3         |
| <b>1. КИНЕМАТИКА</b> .....   | <b>4</b>  |
| Примеры решения задач.....   | 5         |
| Задачи для самостоятельного решения.....   | 6         |
| 1.1. Прямолинейное движение.....   | 6         |
| I уровень.....   | 6         |
| II уровень .....   | 8         |
| III уровень .....  | 9         |
| 1.2. Криволинейное движение .....  | 10        |
| I уровень.....   | 10        |
| II уровень .....   | 12        |
| III уровень .....  | 14        |
| 1.3. Вращение тела вокруг неподвижной оси.....   | 15        |
| I уровень.....   | 15        |
| II уровень .....   | 16        |
| III уровень .....  | 18        |
| <b>2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ</b> .....  | <b>19</b> |
| Пример решения задач.....  | 19        |
| Задачи для самостоятельного решения.....   | 20        |
| 2.1. Законы Ньютона.....   | 20        |
| I уровень.....   | 20        |
| II уровень .....   | 22        |
| III уровень .....  | 24        |
| 2.2. Закон сохранения импульса .....   | 25        |
| I уровень.....   | 25        |
| II уровень .....   | 26        |
| III уровень .....  | 28        |
| 2.3. Работа и энергия.....   | 29        |
| I уровень.....   | 29        |
| II уровень .....   | 30        |
| III уровень .....  | 32        |
| <b>3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ</b><br><b>ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ</b> ..... | <b>33</b> |
| Примеры решения задач.....   | 34        |
| Задачи для самостоятельного решения.....   | 36        |
| 3.1. Момент инерции.....   | 36        |
| I уровень.....   | 36        |

|   |           |
|---|-----------|
| II уровень .....  | 37        |
| III уровень .....   | 39        |
| 3.2. Основное уравнение динамики вращательного движения .....   | 40        |
| I уровень .....   | 40        |
| II уровень .....  | 41        |
| III уровень .....   | 43        |
| 3.3. Закон сохранения момента импульса. Работа .....            | 43        |
| I уровень .....   | 43        |
| II уровень .....  | 45        |
| III уровень .....   | 48        |
| <b>4. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ .....</b>   | <b>49</b> |
| Примеры решения задач .....                                     | 51        |
| Задачи для самостоятельного решения .....                       | 53        |
| 4.1. Кинематика гармонических колебаний. ....                   | 53        |
| Сложение колебаний .....  | 53        |
| I уровень .....   | 53        |
| II уровень .....  | 54        |
| III уровень .....   | 54        |
| 4.2. Динамика гармонических колебаний. Маятники .....           | 55        |
| I уровень .....   | 55        |
| II уровень .....  | 57        |
| III уровень .....   | 59        |
| 4.3. Затухающие и вынужденные колебания .....                   | 60        |
| I уровень .....   | 60        |
| II уровень .....  | 61        |
| III уровень .....   | 62        |
| <b>5. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ .....</b> | <b>62</b> |
| Задачи для самостоятельного решения .....                       | 65        |
| 5.1. Законы идеальных газов. Смеси газов .....                  | 65        |
| I уровень .....   | 65        |
| II уровень .....  | 66        |
| III уровень .....   | 69        |
| 5.2. Основное уравнение МКТ. Энергия молекул .....              | 70        |
| I уровень .....   | 70        |
| II уровень .....  | 71        |
| III уровень .....   | 73        |

|   |           |
|---|-----------|
| 5.3. Элементы статистической физики.....        | 73        |
| I уровень.....                                  | 73        |
| II уровень .....                                | 75        |
| III уровень .....                               | 77        |
| <b>6. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ .....</b> | <b>77</b> |
| Задачи для самостоятельного решения.....        | 79        |
| I уровень.....                                  | 79        |
| II уровень .....                                | 80        |
| III уровень .....                               | 82        |
| <b>7. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ЖИДКОСТИ .....</b>        | <b>83</b> |
| Задачи для самостоятельного решения.....        | 84        |
| I уровень.....                                  | 84        |
| II уровень .....                                | 85        |
| III уровень .....                               | 86        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>                         | <b>87</b> |
| <b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....</b>            | <b>88</b> |

*Учебное издание*

**Хабарова** Ольга Сергеевна  
**Тураева** Татьяна Леонидовна  
**Дубовицкая** Татьяна Викторовна  
**Солдатенко** Сергей Анатольевич

**РЕШЕНИЕ РАЗНОУРОВНЕВЫХ ЗАДАЧ  
ПО ФИЗИКЕ**

Учебно-методическое пособие

Редактор Сахарова Д. О.

Подписано к изданию 19.11.2019.  
Объем данных 2,0 Мб.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический  
университет»

394026 Воронеж, Московский проспект, 14