МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

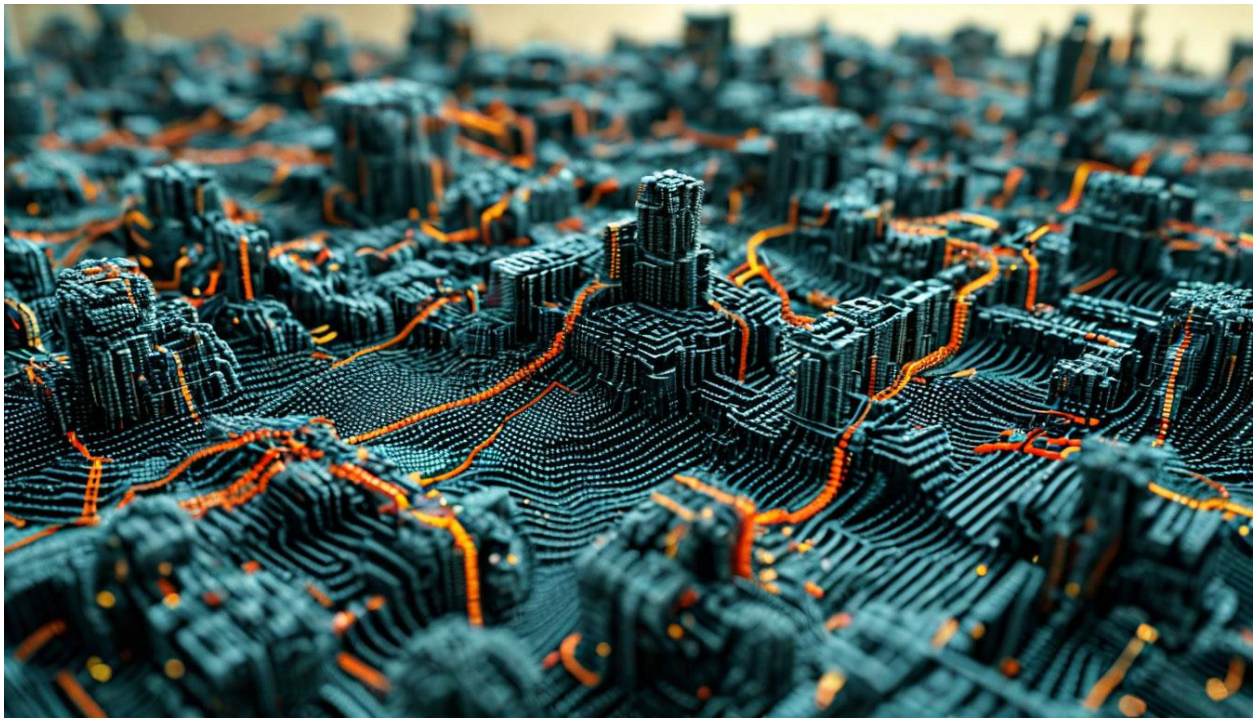
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»
Строительно-политехнический колледж
Кафедра экономической безопасности

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению практических занятий
для обучающихся по направлению
38.02.03 Операционная деятельность в логистике



Воронеж 2025

УДК 330.131.7:658.512(075.8)
ББК 65.9(2)26:65.29я7

*Составители канд. экон. наук Н.Н. Макаров, д-р. экон. наук С.В. Амелин*: методические указания к выполнению практических работ для обучающихся по направлению 38.02.03 Операционная деятельность в логистике / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Н. Н. Макаров, С.В. Амелин. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2025.- 30 с.

Методические указания содержат порядок и рекомендации по выполнению практических работ «Моделирование логистических систем».

Предназначены для обучающихся по направлению 38.02.03 Операционная деятельность в логистике.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле М.У. Моделирование ЛС.pdf.

Табл. 6. Библиогр.: 6 назв.

**УДК 330.131.7:658.512(075.8)**
**ББК 65.9(2)26:65.29я7**

***Рецензент*** – К.С Кривякин, канд. экон. наук, проф. Кафедры экономической безопасности ВГТУ

*Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета*

## Введение

Целью изучения дисциплины «Моделирование логистических систем» является освоение студентами, обучающимися по программе среднего профессионального образования современных базовых знаний в области информационного обеспечения и на этой основе – овладение специальной терминологией и приобретение практических навыков моделирования логистических систем в деятельности организаций.

Изучение дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих общих и профессиональных компетенций:

ПК 4.1. Планировать работу элементов логистической системы;

ПК 4.3. Составлять программу и осуществлять мониторинг показателей работы на уровне подразделения (участка) логистической системы;

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекста;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Материал изложен в пяти практических работах, полностью охватывающих программу курса «Моделирование логистических систем», снабжен комплексом заданий.

## Практическое занятие № 1.
## Решение задач линейного программирования графическим методом

*Графическим методом* решается стандартная задача линейного программирования:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le\ge b_i, \qquad i = \overline{1,m}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0$$

При решении задач линейного программирования возможны следующие случаи:

1. Случай единственного решения.

На рисунке 1 точкой минимума является точка А, а точкой максимума - точка В.

2. Случай бесконечного множества решений (альтернативный оптимум). На рисунке 2 максимум достигается во всех точках отрезка ВС.

3. Случай неограниченности целевой функции. На рисунке 3 точки максимума не существует.

4. Случай несовместности.

На рисунке 4 – случай отсутствия решения, так как область допустимых значений является пустым множеством.

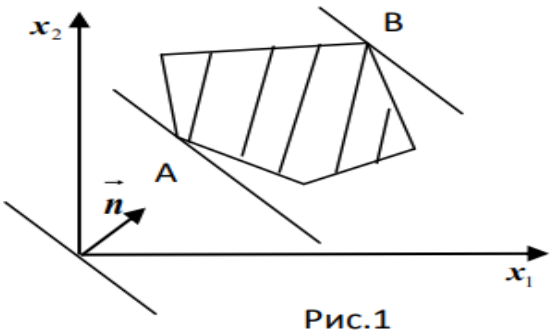


Рис.1

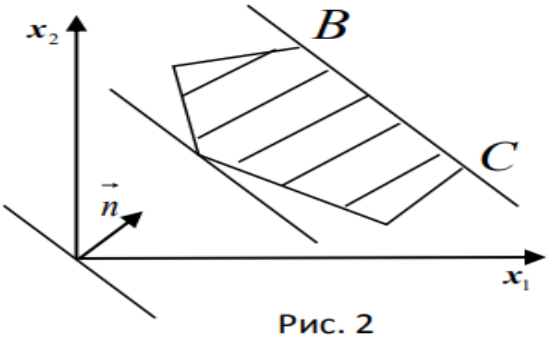


Рис. 2

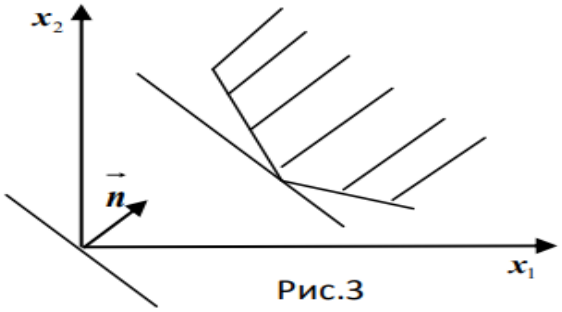


Рис.3

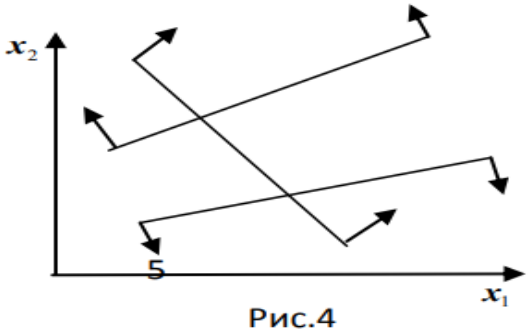


Рис.4

**Пример.** Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \geq 20 \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -27 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 63 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 23 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Строим прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств:

$$4x_1 + 6x_2 = 20 \quad (1)$$

$$2x_1 - 5x_2 = -27 \quad (2)$$

$$7x_1 + 5x_2 = 63 \quad (3)$$

$$3x_1 - 2x_2 = 23 \quad (4)$$

Каждое ограничение-неравенство определяет координатную полуплоскость. В зависимости от знака неравенств при помощи двух стрелок укажем требуемые полуплоскости.

В результате пересечения всех полуплоскостей находим многоугольник решений (шестиугольник *ABCDEF*).

Построим линию уровня целевой функции, проходящую через начало координат $2x_1 + x_2 = 0$, и градиент целевой функции $n(2,1)$.

Передвигая линию уровня вдоль градиента параллельно самой себе, находим точки экстремума. Минимум целевой функции достигается в точке *A*, а максимум в точке *D*.

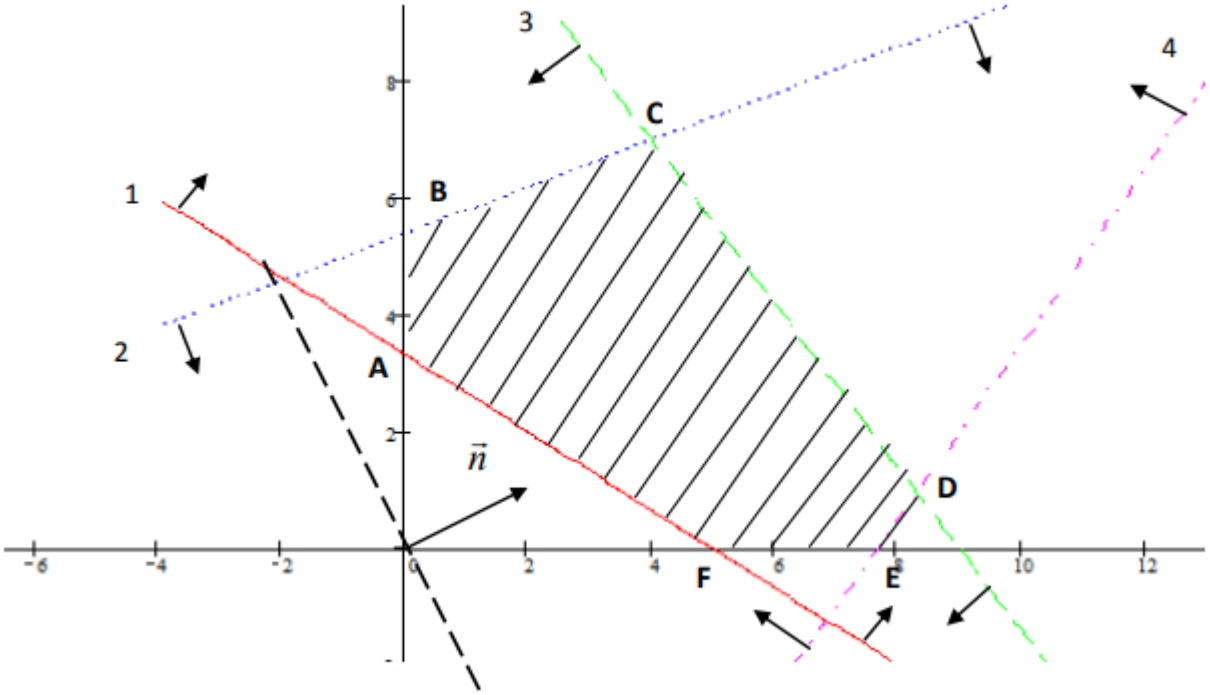



Рис. 5 – Решение задачи графическим способом

Определим координаты точек максимума и минимума целевой функции и вычислим их значения в найденных точках.

Точка минимума лежит на пересечении прямой (1) и прямой, лежащей на оси $x_2$, которая имеет уравнение $x_1 = 0$:

$$\min: \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 20 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{20 - 4x_1}{6} \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3{,}33 \end{cases}$$

Точка максимума лежит на пересечении прямых (3) и (4):

$$\max: \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 = 63 \\ 3x_1 - 2x_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 - \dfrac{5}{7}x_2 \\ 3\cdot(9 - \dfrac{5}{7}x_2) - 2x_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 - \dfrac{5}{7}x_2 \\ \dfrac{29}{7}x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8{,}31 \\ x_2 = 0{,}97 \end{cases}$$

Минимальное значение целевой функции:

$Z_{\min} = 2 \cdot 0 + 3{,}33 = 3{,}33$.

Максимальное значение целевой функции:

$Z_{\max} = 2 \cdot 8{,}31 + 0{,}97 = 17{,}59$.

Отчет по работе должен содержать

1. Название и цель работы.
2. Постановку задачи.
3. Блок-схему модели.
4. Исходные данные для моделирования и результаты модельных экспериментов.
5. Выводы по лабораторной работе.

## Практическое занятие № 2.
## Решение задач методом динамического программирования

Между пунктами 1 и 14 необходимо построить автомобильную дорогу. Трасса может пройти через некоторые населенные пункты. Стоимость всех участков данной трассы между конкретными населенными пунктами представлена в таблице 1. Требуется определить, как можно построить автодорогу так, чтобы расходы на ее строительство оказались минимальными.

Кроме того, рассчитать расходы на строительство при условии, что трасса пройдет через 10 пункт.

Таблица 1

| Ветки | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-2 | 1-3 | 2-4 | 2-5 | 2-6 | 3-4 | 3-5 | 3-6 | 3-7 | 4-8 | 4-9 | 5-8 | 5-9 |
| 5 | 6 | 6 | 14 | 16 | 18 | 18 | 5 | 2 | 12 | 6 | 10 | |

Продолжение таблицы 1

| Ветки | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5-10 | 6-8 | 6-9 | 6-10 | 7-9 | 7-10 | 8-11 | 8-12 | 8-13 | 9-11 | 9-12 |
| 17 | 7 | 13 | 4 | 15 | 12 | 15 | 13 | 11 | 7 | 10 |

Продолжение таблицы 1

| Ветки | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9-12 | 9-13 | 10-11 | 10-12 | 10-13 | 11-14 | 12-14 | 13-14 | А |
| 10 | 4 | 10 | 6 | 1 | 5 | 12 | | 10 |

Решение:

Формулировка условия задачи предполагает графическое представление предложенной автомобильной дороги. Вычертим сеть (рис. 1), обозначив каждый пункт кружочком, связь между населенными пунктами представим в виде отрезка, соединяющего кружочки, а стоимость каждого участка пути запишем над отрезком.

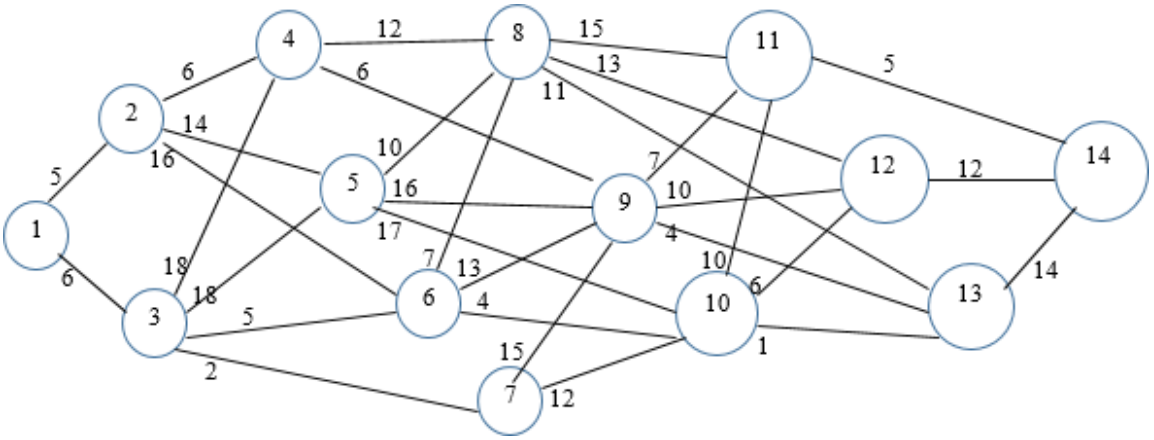



Рис. 6 – Графическое решение задачи динамического программирования

В построенной сети необходимо среди всех представленных маршрутов выбрать тот, стоимость которого будет минимальной. Можно просчитать стоимость каждого маршрута на данной сети и выбрать тот, чья стоимость окажется наименьшей, но такое решение будет громоздким и требует большого объема вычислений.

При пошаговом решении задачи постепенно отбрасываются заведомо невыгодные варианты.

Решение задачи следует начинать с того пункта, про который что-либо известно из условий. В данной задаче необходимо так провести решение, чтобы в последнем пункте 14 не осталось средств для дальнейшего продвижения, но и отрицательного значения в этом пункте быть не должно. А значит, в 14 пункте должно оказаться только значение 0 ден.ед.

Продвигаемся слева направо всегда к последнему пункту.

Для того чтобы построить участок пути от 13 до 14 пункта потребуется, чтобы в пункте 13 имелось 14 ден.ед. Для построения участка от 12 до 14 необходимо в 12 иметь 12 ден.ед., а в 11 пункте 5 ден.ед.

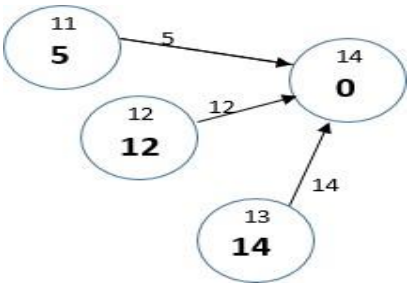



Рис. 7 – Предпоследний шаг при решении задачи

Для этих пунктов решение может быть проведено однозначно, а, следовательно, находясь в любом из пунктов 11, 12, 13 продвижение возможно в пункт 14 только по одной ветке. Те значения стоимости, которые должны оказаться в пунктах 11, 12, 13 к предпоследнему шагу отразим на сети (рис.7).

Рассмотрим возможность продвижения из пункта 10. До конечного пункта 14 из пункта 10 можно добраться через пункты 11, 12 и 13. При этом, двигаясь маршрутом 10-13-14 в пункте 10 необходимо иметь 1+14=15 ден.ед., по маршруту 10-12-14 в пункте 10 должно быть 6+12=18 ден.ед., а для маршрута 10-11-14 нужно в пункте 10 иметь 10+5=15 ден.ед. Так как поставлена задача найти маршрут минимальной стоимости, то оптимальное значение в пункте 10 соответствует минимальному среди найденных стоимостей, т.е. min{1+14, 6+12, 10+5}=15. Ветки, соответствующие минимальным значениям выделяем стрелками (рис.3).

На этом же шаге рассматриваем стоимость пути из пунктов 9 и 8 до пункта 14, так как переход к 14 пункту из 8 и 9 осуществляется также, как и из

10 пункта через пункты 11, 12 и 13, информация о которых уже получена (рис.8).

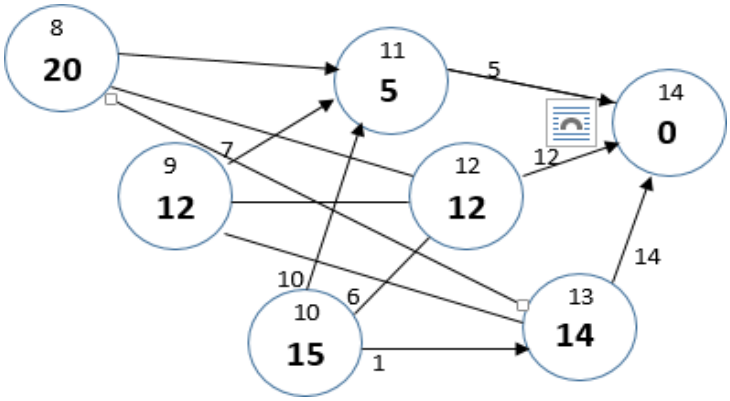



Рис.8. – Фрагмент решения задачи динамического программирования

Для пункта 9 приходится выбирать минимальную среди сумм 4+14, что соответствует переходу через 13 пункт, 10+12 - переход через пункт 12 и 7+5 переход через 11 пункт. В результате из 9 пункта целесообразнее всего двигаться в пункт 11, а количество средств, которые необходимо иметь в 9 пункте составляет 12 ден.ед.

Для пункта 8 минимально возможное количество средств, которое позволит построить автодорогу из этого населенного пункта до конечного составляет 20 ден.ед. Переход предстоит осуществлять через 11 пункт (выделено стрелкой). Переходы через 12 и 13 пункты обойдутся дороже, а именно 13+12 и 11+14, т.е. 25 ден.ед. Эти участки пути не выделяются.

Рассматриваем пункт 7. Его связь с конечным 14 пунктом происходит через пункты 9 и 10, информация о которых нами уже найдена на предыдущем шаге. Поэтому нет необходимости просматривать решение от пункта 7 до конечного пункта 14, достаточно принять решение на промежуточном шаге: 7-9 или 7-10. Для того чтобы удалось построить дорогу на участке пути 7-9 требуется 15 ден.ед., согласно условию задачи, и, кроме того после строительства должно остаться 12 ден.ед. для продолжения работ после 9 пункта, а значит в пункте 7 должно быть 27 ден.ед. При строительстве ветки 7-10 тратится 12 ден.ед., а остается 15 в пункте 10, т.е. в пункте 7 должно быть 12+15=27 ден.ед. Итак, движение из 7 пункта может быть осуществлено как в пункт 9 так и в пункт 10, при этом количество средств в 7 пункте составляет 27 ден.ед.

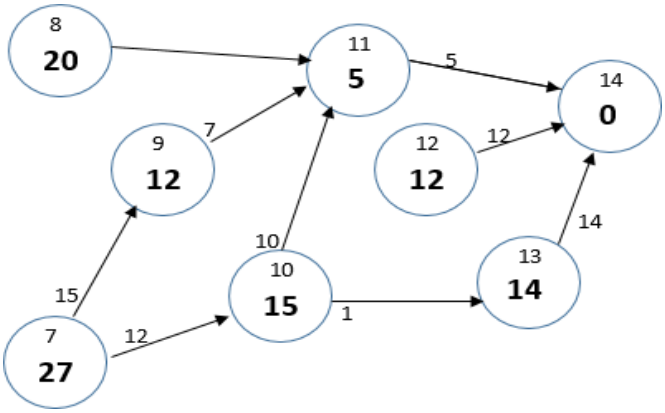



Рис. 9 – Продолжение решения задачи

Для расчета стоимости всех необходимых работ из пункта 6 до пункта 14 достаточно принять оптимальное решение при выборе маршрута из точки 6 в пункты 8, 9 и 10, и найти минимальное среди чисел, полученных в результате нахождения сумм {4+15, 13+12, 7+20}. Минимальная стоимость всех работ в пункте 6 составляет 19 ден.ед.

Аналогичные расчеты проводим для пункта 5. Для перехода 5-8 требуется 10+20=30 ден.ед.в пункте 5, переход 5-9 предполагает наличие 16+12=28 ден.ед. в пункте 5, а стоимость перехода 5-10 составляет 17+15=32 ден.ед. Минимум {10+20, 16+12, 17+15}=28, а переход осуществляем через 9 пункт.

Пункт 4 непосредственно связан только с двумя пунктами: 8 и 9. Поэтому для расчета средств в пункте 4 выбрать минимальное нужно из двух чисел 12+20=32 – переход из пункта 4 в пункт 8 или 6+12=18 – переход из 4 в 9.

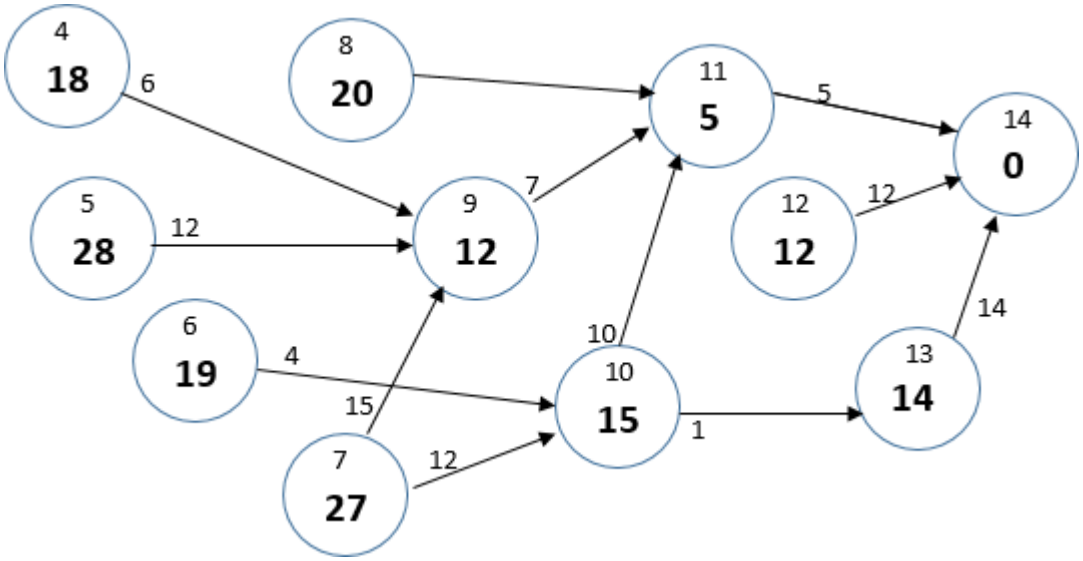
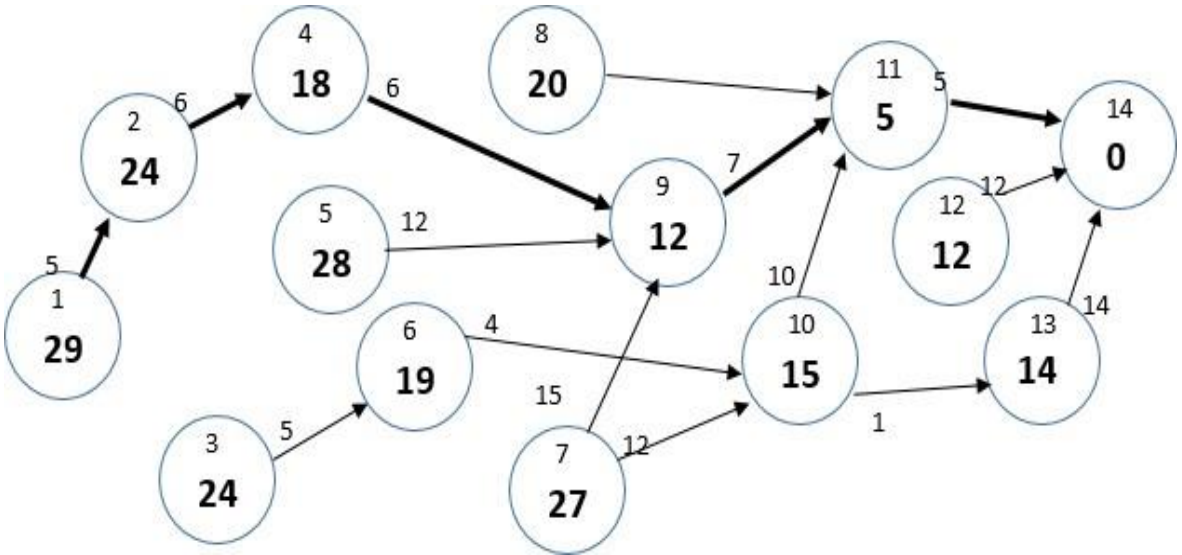



Рис. 10 – Продолжение решения задачи

Уже на этом шаге замечаем, что пункты 8 и 12 в условиях данной задачи не выгодные. Автодорога не пройдет через эти пункты, они дороже по сравнению с рядом расположенными с ними пунктами.

Расчет для пункта 3, как минимума из чисел {18+18, 18+28, 5+19, 2+27}=24 ден.ед. позволяет утверждать, что переход стоит осуществлять через пункт 6. Из пункта 2 оптимальный переход будет осуществлен через пункт 4 и количество средств, необходимых в пункте 2 составляет min{6+18, 14+28, 16+19}=24 ден.ед.

Для пункта 1 необходимо выбрать минимальное среди 24+5 и 24+6, что



составляет 29 ден.ед., а маршрут следует проложить через пункт 2 (рис.11).

Рис. 11 – Графическое изображение полного решения задачи.

Сведем графическое решение представленной задачи в таблицу 2, указав в каждом пункте минимально возможное значение.

Таблица 2

| | |
|---|---|
| пункт 14 | =0 |
| пункт 13 | =14 |
| пункт 12 | =12 |
| пункт 11 | =5 |
| пункт 10 | =min{1+14, 6+12, 10+5}=15 |
| пункт 9 | =min{4+14, 10+12, 7+5}=12 |
| пункт 8 | =min{15+5, 13+12, 11+14}=20 |
| пункт 7 | =min{12+15, 15+12}=27 |
| пункт 6 | =min{4+15, 13+12, 7+20}=19 |
| пункт 5 | =min{10+20, 16+12, 17+15}=28 |
| пункт 4 | =min{12+20, 6+12}=18 |
| пункт 3 | =min{18+18, 18+28, 5+19, 2+27}=24 |
| пункт 2 | =min{6+18, 14+28, 16+19}=24 |
| пункт 1 | =min{24+5, 24+6}=29 |

Минимальная стоимость трассы 29 ден.ед. Автотрасса должна пройти по пунктам: 1-2-4-9-11-14, на схеме найденный оптимальный путь выделен жирными стрелками.

1. Найдем трассу минимальной стоимости и саму ее стоимость, если линия должна пройти через заданный пункт 10.

Изобразим схему, удалив из нее пункты, не связанные с пунктом 10 и проведем аналогичные расчеты, начиная с последнего пункта (рис.12).

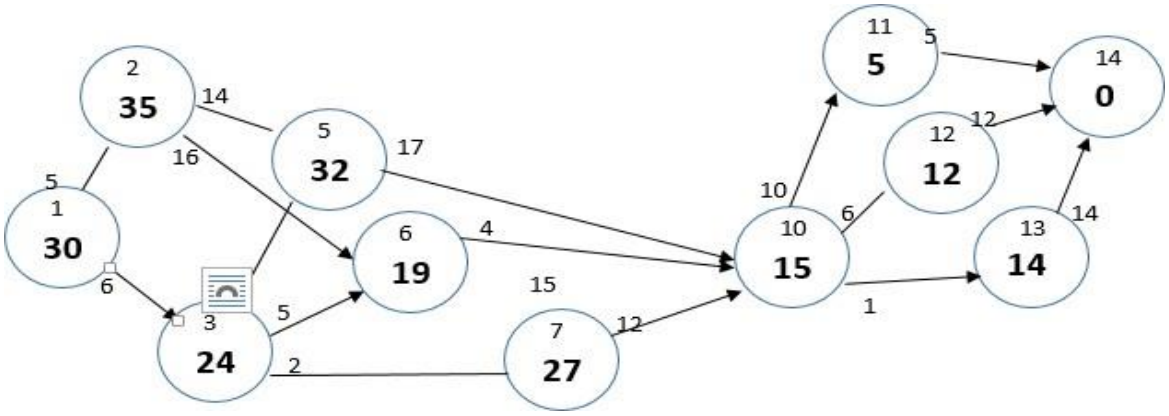



Рис. 12. – Графическое решение задачи, в случае прохождения трассы через п.10.

Таблица 2

| | |
|---|---|
| пункт 14 | =0 |
| пункт 13 | =14 |
| пункт 12 | =12 |
| пункт 11 | =5 |
| пункт 10 | =min{1+14, 6+12, 10+5}=15 |
| пункт 7 | =min{12+15}=27 |
| пункт 6 | =min{4+15}=19 |
| пункт 5 | =min{17+15}=32 |
| пункт 3 | =min{18+32, 5+19, 2+27}=24 |
| пункт 2 | =min{14+32, 16+19}=35 |
| пункт 1 | =min{35+5, 24+6}=30 |

Минимальная стоимость трассы, проходящей через 10 пункт 30 ден.ед.

Двигаясь по веткам со стрелками определяем, что в данном случае задача имеет два решения, а именно, из пункта 10 можно двигаться по маршруту 10-11 или 10-13. Автомобильная дорога должна пройти по пунктам: 1-3-6-10-11-14 или 1-3-6-10-13-14.

Рассмотрим табличный способ решения задачи динамического программирования. Для этого условия задачи необходимо задать в табличном виде. Примером таких задач может быть задача о распределении ресурсов или бюджета между предприятиями или между различными отделами одного предприятия. При этом размеры вложения в каждый объект должны быть

известны и результат этих вложений также даны по условию задачи. Обычно, распределение вложений и результат от них удобно задать в виде таблицы.

Отчет по работе должен содержать

6. Название и цель работы.
7. Постановку задачи.
8. Блок-схему модели.
9. Исходные данные для моделирования и результаты модельных экспериментов.
10. Выводы по лабораторной работе.

## Практическое занятие № 3.
## Оптимизация логистических систем графовыми методами

Успешное управление фирмой предполагает, что ее руководители и специалисты должны иметь представление о методах календарного планирования выполнения комплекса работ, контроля за ходом и сроками их выполнения и регулирования возникающих отклонений путем перераспределения ресурсов. Для этого следует подробно описать последовательность взаимосвязанных работ, выполнение которых необходимо для достижения поставленной цели.

Объектом управления в системе сетевого планирования и управления (СПУ) является коллектив исполнителей, располагающий определенными материальными и денежными ресурсами и выполняющий комплекс работ, направленный на достижение конечного результата в установленные сроки.

*Система СПУ позволяет:*

1. Составлять календарный план реализации комплекса работ;
2. Выявлять и мобилизовать резервы времени, трудовые, материальные и денежные ресурсы;
3. Повышать эффективность управления, прогнозируя и предупреждая возможные срывы в ходе выполнения работ;

Система СПУ включает следующие основные этапы:

1. Выявление работ, которые необходимо провести, составление их подробного перечня и установление их последовательности и связи между ними;
2. Построение сетевого графика на основе выявленной очередности выполнения работ;

3. Учет имеющихся ресурсов, установление количественных оценок по каждой работе (например, время выполнения, количество исполнителей);

4. Расчет параметров сетевого графика;

5. Анализ и оптимизация сетевого графика (для ускорения выполнения работ производится необходимое перераспределение ресурсов);

6. Использование сетевого графика как основного инструмента управления ходом работ.

Сетевая модель и ее основные элементы

Сетевая модель – это математическое описание календарного плана выполнения комплекса взаимосвязанных работ. Графическое изображение сетевой модели имеет форму сети и называется сетевым графиком.

Допустим, перед фирмой стоит задача реконструкции помещения. Перечень работ представлен в табл. 3.

Таблица 3

Данные для планирования работ по реконструкции

| Работа | Продолжи-тельность (ч.) | Непосред- ственно предшест-вующие работы | Код работы |
|---|---|---|---|
| А. Разработка проекта реконструкции офиса | 5 | - | 1-2 |
| Б. Перевод персонала во временное поме- щение | 3 | А | 2-5 |
| В. Демонтаж обору- дования и отправка во временное помещение | 8 | А | 2-3 |
| Г. Покупка и доставка материалов для ре-монта | 4 | А | 2-4 |
| Д. Покупка и доставка нового оборудования | 7 | Б, В | 5-7 |
| Е. Ремонт внутренних помещений | 12 | В, Г | 6-7 |
| Ж. Высыхание краски | 10 | Е | 7-8 |
| З. Ремонт здания с внешней стороны | 10 | Г | 4-9 |
| И. Реализация старого оборудования и мон- таж нового | 13 | Д, Ж | 8-9 |
| К. Перевоз персонала в помещение офиса | 2 | З, И | 9-10 |

Основными элементами сетевой модели являются *событие* и *работа*. *Работа* – это любое действие (процесс или связь), приводящее к определенному результату – событию.

С позиций теории графов сетевая модель представляет собой связный ориентированный граф с вершинами – событиями и направленными дугами (рёбрами) – работами.

Различают следующие виды работ:

1. *Действительная* работа, т.е. протяженный во времени активный процесс, требующий затрат ресурсов.

2. *Ожидание*, т.е. протяженный во времени пассивный процесс, не требующий затрат трудовых ресурсов (твердение бетона, остывание металла, высыхание краски).

3. *Фиктивная* работа (зависимость) – это логическая связь между событиями, не требующая затрат труда, материальных ресурсов и времени.

Эта работа указывает, что возможность выполнения од- ной работы непосредственно зависит от результатов другой и продолжительность ее равна нулю (рис. 13).

Действительная работа и ожидание изображаются на сетевом графике сплошной стрелкой, а фиктивная – штриховой. Количественные временные оценки ставят над стрелкой, а количество исполнителей – под стрелкой.

В условиях определённости время выполнения работ детерминированное и определяется на основе нормативов.

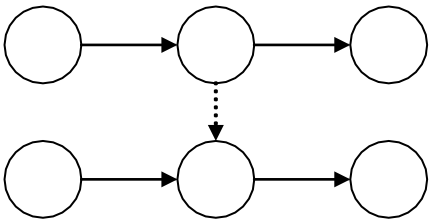


Рис. 13 - Фиктивная (логическая) работа (5-7)

*Событие* – это момент завершения одной или нескольких работ и может быть моментом начала одной или нескольких следующих работ. Событие обозначается кружком, внутри которого ставится номер события (рис. 14).

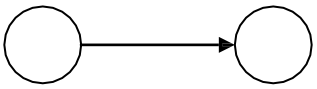


Рис. 14 - Обозначение событий

Событие ***i***, с которого начинается работа, называется *предшествующим* данной работе. Событие ***j***, которое является результатом производственной работы, называется *последующим.* Первоначальное событие, отражающее начало выполнения комплекса работ, называется *исходным.* Событие, отражающее конечную цель комплекса работ и не имеющее выходящих из него работ, называ- ется *завершающим.* В сетевом графике обычно только одно начальное событие и одно конечное (завершающее). В *упорядоченном* сетевом графике нумерация событий соответствует порядку очередности их свершения.

***Правила построения сетевых графиков***

При создании сложного объекта сетевой график строят по частям, а затем их объединяют (сшивают). Построение и объединение осуществляется по следующим правилам:

1. Сеть строится от исходного события к завершающему, направление стрелок – слева направо.
2. Длина и наклон стрелок (в немасштабном графике) значения не имеют, но все они должны быть однонаправлены – от предшествующего события (с меньшим номером) к последующему событию (с большим номером).
3. В сети не должно быть замкнутых контуров, т.е. цепочек работ, возвращающихся к одному из предшествующих событий или соединяющих событие само с собой (рис. 15).

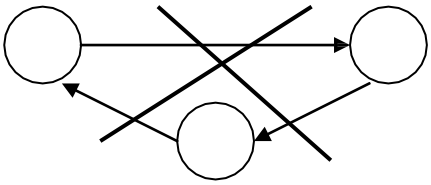


Рис. 15 - Замкнутый контур

4. По возможности не следует допускать пересечения стрелок. Иногда, для того чтобы избежать этого, некоторые события и работы смещаются вверх или вниз (рис. 16).

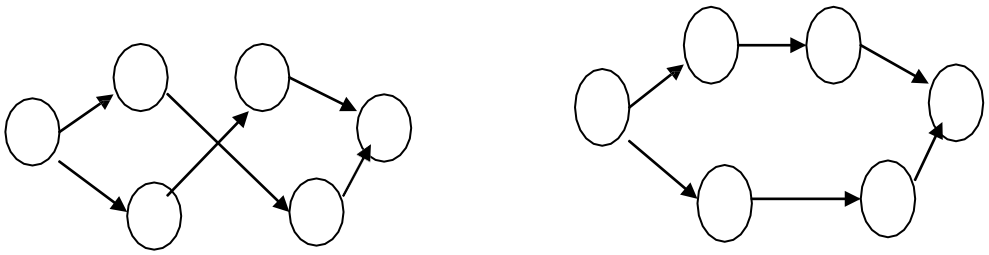


Рис. 16 - Вариант “разворачивания” графика

5. Два события могут быть соединены только одной работой. Для изображения параллельных работ вводится промежуточное событие и дополнительная фиктивная работа (рис. 17).

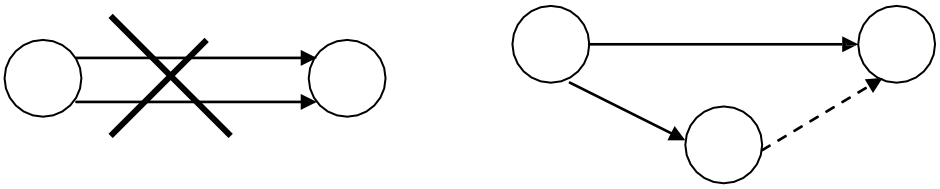


Рис. 17 - Введение в график фиктивной работы

В сети не должно быть, кроме одного исходного, висячих - хвостовых событий, т.е. событий, в которые не входит ни одна работа (рис. 18).

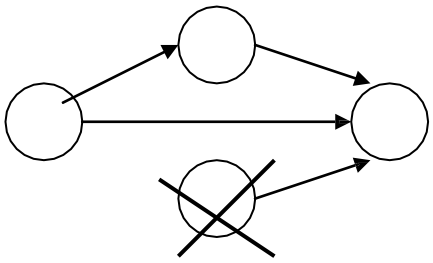


Рис. 18- Хвостовое событие

6. В сети не должно быть, кроме одного завершающего, висячих - тупиковых - событий, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа (рис. 19).

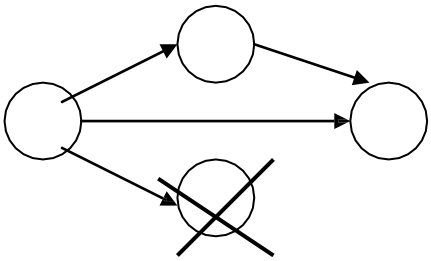


Рис. 19 - Тупиковое событие

***Понятие пути***

*Путь* – это любая непрерывная последовательность (цепь) работ, приводящая от одного события к другому, в которой последующее событие каждой работы является предшествующим для следующей за ней работы и в

которой каждая работа встречается только один раз.

*Полный путь* – это любой путь сети, начало которого совпадает с исходным событием, а конец – с завершающим. Самый продолжительный из полных путей называется *критическим*. Длительность критического пути определяет время, за которое можно выполнить комплекс работ.

Найдем критический путь для представленной выше сети. Запишем все полные пути и определим их продолжительность.

Критический путь пройдет через события 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10.

Критический путь выделяется на графике утолщенными стрелками. Для сокращения продолжительности всего комплекса работ в первую очередь стараются уменьшить время выполнения тех работ, которые лежат на критическом пути.

***Расчет временных параметров работ***

*Ранний срок начала работы* $t_{PHij}$ совпадает с ранним сроком свершения предшествующего работе события $t_{Pi}$:

$$t_{PHij} = t_{Pi}. \qquad (1.1)$$

*Поздний срок окрнчания работы* $t_{ПОij}$ совпадает с поздним сроком свершения последующего за работой события $t_{Пj}$:

$$t_{ПОij} = t_{Пj}. \qquad (1.2)$$

*Ранний срок окончания работы* $t_{POij}$:

$$t_{POij} = t_{Pi} + t_{ij} \qquad (1.3)$$

*Поздний срок начала работы* $t_{ПHij}$:

$$t_{ПHij} = t_{Пj} - t_{ij} \ . \qquad (1.4)$$

*Полный резерв времени работы* $R_{Пij}$ показывает, на- сколько можно увеличить время выполнения данной работы или насколько можно передвинуть на более поздний срок на- чало работы, не изменяя окончательного срока выполнения комплекса работ:

$$R_{Пij} = t_{Пj} - t_{Pi} - t_{ij}. \qquad (1.5)$$

*Частный резерв времени работы* ($R_{Чij}$) – это часть полно- го резерва, на которую можно увеличить время завершения работы, уложившись в допустимо поздний срок ее окончания:

$$R_{Чij} = t_{nj} - t_{ni} - t_{ij}\ , \qquad R_{Чij} = R_{Пij} - R_i\ . \qquad (1.6)$$

*Свободный резерв времени работы* $R_{Cij}$ – это часть полно- го резерва, на которую можно увеличить время завершения работы, уложившись в ранний срок свершения ее последую- щего события:

$$R_{Cij} = t_{Pj} - t_{Pi} - t_{ij}\ , \qquad R_{Cij} = R_{Пij} - R_j\ . \qquad (1.7)$$

*Независимый резерв времени работы* $R_{Hij}$ – это часть пол- ного резерва, которая используется на увеличение продолжи- тельности только данной работы, при этом все предшествую- щие работы могут заканчиваться в свои поздние сроки, а все последующие – в ранние:

$$R_{Hij} = t_{Pj} - t_{Пi} - t_{ij}\ ,\quad R_{Hij} = R_{Пij} - R_i - R_j\ . \qquad (1.8)$$

Использование независимого резерва не влияет на вели- чину резерва времени других работ.

Частные случаи при расчете резервов:

1. Если на критическом пути лежит событие i, то из выражения (1.9) следует

$$R_i = 0;\ R_{Пij} = R_{Чij}\ . \qquad (1.9)$$

2. Если на критическом пути лежит событие j, то из выражения (1.10) следует

$$R_j = 0;\ R_{Пij} = R_{Cij}\ . \qquad (1.10)$$

3. Если на критическом пути лежат и событие i и событие j, но сама работа не принадлежит критическому пути, то для этой работы все резервы равны (1.11)

$$R_i = 0;\ R_j = 0;\ R_{Пij} = R_{Чij} = R_{Cij} = R_{Hij}. \qquad (1.11)$$

Результаты расчета временных параметров работ представлены в табл. 4.

Таблица 4

Временные параметры работ

| Код работы ***i - j*** | Длительность работы, $t_{ij}$ | Сроки работы | | | | Резервы времени | | | | Коэф. загруженно- сти, $K_З$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $t_{рн}$ | $t_{ро}$ | $t_{пн}$ | $t_{по}$ | $R_П$ | $R_Ч$ | $R_С$ | $R_Н$ | |
| 1 – 2 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 – 3 | 8 | 5 | 13 | 15 | 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 – 4 | 4 | 5 | 9 | 9 | 13 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0,5 |
| 2 – 5 | 3 | 5 | 8 | 25 | 28 | 20 | 20 | 5 | 5 | 0,13 |
| 3 – 5 | 0 | 13 | 13 | 18 | 18 | 15 | 15 | 0 | 0 | 0 |
| 3 – 6 | 0 | 13 | 13 | 13 | 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 – 6 | 0 | 9 | 9 | 13 | 13 | 4 | 0 | 4 | 0 | 0 |
| 4 – 9 | 10 | 9 | 19 | 38 | 48 | 29 | 25 | 29 | 25 | 0,26 |
| 5 – 8 | 7 | 13 | 20 | 18 | 25 | 15 | 0 | 15 | 0 | 0,32 |
| 6 – 7 | 12 | 13 | 25 | 13 | 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 7 – 8 | 10 | 25 | 35 | 25 | 35 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 8 – 9 | 13 | 35 | 48 | 35 | 48 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9– 10 | 2 | 48 | 50 | 48 | 50 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Отчет по работе должен содержать

11. Название и цель работы.
12. Постановку задачи.
13. Блок-схему модели.
14. Исходные данные для моделирования и результаты модельных экспериментов.
15. Выводы по лабораторной работе.

## Практическое занятие № 4.
## Решение задач массового обслуживания

*Цель работы*: закрепление на практике теоретических знаний о построении моделей систем массового обслуживания с одним прибором и очередью. Моделирование процесса поступления клиентов (заявок на обслуживание) и процесса обслуживания.

Сколько раз, придя в банк, в магазин или на почту и увидев там несколько очередей, вы становились в одну из них и обнаруживали, что именно эта очередь совершенно не сдвигается с места из-за какого-то недотепы, стоящего впереди? Очереди нас раздражают: мы, несомненно, тратим страшно много времени на ожидание обслуживания.

Один из способов избежать несколько очередей состоит в том, чтобы иметь только одну очередь, из которой клиенты поступают на обслуживание по принципу "первым пришел - первым обслужен". Эта система сейчас принята во многих банковских и почтовых отделениях по всему миру.

*Постановка задачи*. Предположим, что мы имеем дело именно с такой ситуацией, скажем, в банке с одним или более клерков, обслуживающих очередь клиентов. Эта очередь единая для всех клиентов, и обслуживаются они по принципу "первым пришел - первым обслужен". Как правило, клиенты приходят не через строго определенные интервалы. Если в среднем за час придут 10 клиентов, или 1 клиент за 6 минут, то это, разумеется не означает, что каждые 6 минут обязательно появляется по одному клиенту. Разность между моментами прихода двух последовательных клиентов (между моментами поступления) называется интервалом между поступлениями. Это - случайная величина, не зависящая от длины очереди.

Для моделирования моментов поступления клиентов можно использовать персональный компьютер. Метод, при помощи которого генерируются эти случайные величины, называется методом Монте-Карло. Продемонстрируем его на следующем примере. Если известно, что каждые 6 минут в среднем приходит один клиент, то в течение любого заданного одноминутного интервала клиент может появиться приблизительно с вероятностью 1/6. Таким образом, каждую "минуту" наш компьютер выбирает случайное число между

0 и 1 и проверяет, меньше ли оно 1/6. Если да, то клиент пришел, в противном случае клиента нет.

Вот как выглядит распечатка первых нескольких минут моделируемого процесса:

Таблица 5

| Время, мин | Случайное число RND | Меньше 1/6 ? | Момент поступления клиента |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,21273 | нет | |
| 2 | 0,10601 | да | 2 |
| 3 | 0,31993 | нет | |
| 4 | 0,65851 | нет | |
| 5 | 0,66965 | нет | |
| 6 | 0,97381 | нет | |
| 7 | 0,59476 | нет | |
| 8 | 0,50985 | нет | |
| 9 | 0,42101 | нет | |
| 10 | 0,52048 | нет | |
| 11 | 0,09276 | да | 11 |
| … | … | … | … |

Модель поступления клиентов I имитирует моменты поступления клиентов в течение заданного промежутка времени (например, 60 мин.). Предполагается, что в среднем каждые 6 минут приходит новый клиент, иначе говоря, скорость, с которой появляются клиенты, равна 1/6 клиента в минуту (в процессе моделирования могут быть заданы и другие значения скорости поступления клиентов).

Имея дело с такой моделью, как "Поступление клиентов I", следует быть внимательным. Как быть, если в сред- нем поступает 1 клиент в минуту? Просто приравнять значение скорости единице нельзя. Если только,

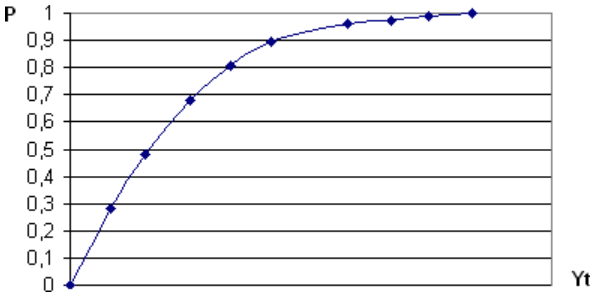
конечно, вы не хотите рассмотреть ситуацию, когда каждую минуту приходит ровно по одному клиенту, которая малоправдоподобна. Чтобы выйти из этого затруднения, следует уменьшить временной интервал и рассмотреть, например, 1/10 мин. Теперь вероятность того, что за одну десятую минуты поступит один клиент, равна приблизительно 1/10. Лучше выбирать как можно меньший интервал, но тогда больше вычислений необходимо будет проделать. В модели "Поступление клиентов II" эти соображения учтены.

Временной интервал делится на 10 до тех пор, пока вероятность поступления клиента за этот интервал не станет меньше или равна 1/10.

Существует и другой подход, при котором скорость вычислений увеличивается. Для определения интервалов между поступлениями клиентов мы используем случайные числа. Предположим, что клиенты появляются с некоторой скоростью CAR. Это число не может быть целым. Оказывается, вероятность того, что интервал между поступлениями меньше или равен Y, задается формулой 1-EXP(-CAR•Y).

Например, имеется вероятность 0.632 того, что клиент придет в течение интервала 1/CAR после поступления предыдущего клиента (т.е. в 63.2 % случаев). Подразумевается, что за интервал 1/CAR приходит один клиент в среднем, а не регулярно. На рис. 2 представлен график 1-EXP(- CAR•Y) для различных значений Y.

Из графика видно, что вероятность того, что интервал между поступлениями нулевой, равна нулю. Вероятность же того, что интервал между поступлениями меньше некоего очень большого числа, равен приблизительно единице.




1/CAR

Рис.20 - График вероятности для различных интервалов поступления клиентов

Приведенное выше выражение называется вероятностной функцией распределения или функцией накопленных вероятностей. Она основывается на пуассоновском распределении для моментов поступления клиентов. Это означает, что клиенты появляются случайным образом, но с фиксированной вероятностью поступления в некотором малом интервале.

Компьютер может моделировать моменты поступления клиентов при помощи упомянутой выше формулы. Необходимо обратить внимание, что 1-EXP(-CAR•Y) - число, заключенное между 0 и 1. Момент поступления клиента можно получить, выбрав случайное число RND (между 0 и 1), вычислив 1-RND и затем сравнив результат с 1-EXP(-CAR•Y). Простые алгебраические преобразования приводят к следующим уравнениям:

$$1\text{-}EXP(-CAR \bullet Y)=1\text{-}RND,\ EXP(-CAR \bullet Y)=RND,$$

$$-CAR \bullet Y = \ln(RND),$$

$$Y = -\ln(RND)/CAR.$$

Таким образом, интервал между поступлениями Y вычисляется через случайное число RND по следующей формуле:

$$Y = -\ln(RND)/CAR.$$

Предположим, например, что CAR=1/6. Ниже представлены результаты моделирования первых нескольких моментов поступления клиентов:

Таблица 6

| Случайное число RND | Интервал между поступлениями -ln(RND)/CAR | Момент поступления клиента |
|---|---|---|
| 0.81785 | 1.21 | 1.21 |
| 0.18753 | 10.04 | 11.25 |
| 0.54975 | 3.59 | 14.84 |
| 0.38481 | 5.73 | 20.57 |
| 0.05226 | 17.71 | 38.28 |
| 0.23964 | 8.57 | 46.85 |
| 0.69152 | 2.21 | 49.06 |
| 0.56127 | 3.47 | 52.53 |
| 0.79813 | 1.35 | 53.88 |
| 0.81238 | 1.25 | 55.13 |
| ... | ... | ... |

В модели "Поступление клиентов III" по только что упомянутой формуле моделируется поступление клиентов за некоторый период времени (например, равный 60 мин.). Скорость поступления можно задать равной 1/6. Или, при необходимости, можно задать другую длину периода моделирования и скорость поступления.

Для модели "Поступление клиентов I", при 60 - минут- ном интервале моделирования, необходимо 60 случайных чисел, для модели II - около 600, а модель III обходится всего 10 случайными числами.

Клиенты не появляются регулярно через заданный интервал, так же и клерки не обслуживают их за определенный отрезок времени. Время обслуживания для каждого клиента своё. Эти времена задаются формулой, аналогичной выражению для интервалов между поступлениями клиентов. Так, если CSR есть скорость обслуживания клиента одним клерком (среднее число клиентов, которое может обслужить один клерк в единицу времени), то вероятность того, что клиент будет обслужен за время Y, есть 1-EXP(-CSR•Y). В таких случаях говорят, что время обслуживания клиентов имеет показательное (экспоненциальное) распределение. Смоделировать время обслуживания клиентов можно точно так же, как и моменты между их поступлениями, заменив в соответствующих моделях скорость поступления CAR на скорость обслуживания CSR.

Порядок проведения работы.

1. Изучение студентами исходных положений и постановки задачи моделирования системы массового обслуживания
2. Разбиение студенческой подгруппы на бригады и получение ими исходного задания для моделирования
3. Моделирование производится с помощью программ "TMOI" ("Поступление клиентов") и "TMOIV" ("Обслуживание клиентов"), реализованных на ПЭВМ в комплексе про- грамм для учебного процесса "PRIMA".
4. Результаты моделирования по программе "TMOI" являются исходными данными для модели "TMOIV".
5. Анализ результатов моделирования должен быть отражен в выводах по лабораторной работе.

Отчет по работе должен содержать

16. Название и цель работы.
17. Постановку задачи на моделирование системы массового обслуживания.
18. Блок-схему модели.
19. Исходные данные для моделирования и результаты модельных экспериментов.
20. Выводы по лабораторной работе, включающие анализ полученных результатов моделирования поступления клиентов (заявок на обслуживание) и моделирования процесса обслуживания клиентов, анализ загруженности обслуживающего прибора и очереди на обслуживание.

## Практическое занятие № 5.
## Моделирование логистических систем с использованием теории массового обслуживания

*Цель работы*: закрепление на практике теоретических положений построения моделей многоканальных систем массового обслуживания с очередью, ознакомление с постановкой задачи и алгоритмом моделирования. Анализ и интерпретация результатов моделирования.

Можно объединить оба процесса - поступления и обслуживания клиентов (заявок), рассмотренные в предыдущей работе. Промоделируем такую ситуацию, когда имеется одна очередь и один или несколько клерков. Подобная модель помогает разобраться в любой аналогичной ситуации из реальной производственно-экономической практики и принять решение при минимальных затратах и без излишнего риска, возникающего при работе с настоящими клиентами и клерками.

*Постановка задачи*. Модель Обслуживание в банке имитирует одну неделю работы банка, операции в котором производят один или несколько клерков. Рабочая неделя состоит из 6 дней по 360 мин (6 часов) в каждом. Банк работает с 10.00 до 16.00 часов. Имеется одна общая очередь клиентов, которые обслуживаются по правилу "первым пришел - первым обслужен". Клиенты появляются со скоростью, например, 24 клиента в час, а на обслуживание каждого клиента у клерка уходит в среднем 10 мин. При необходимости смоделировать другое деловое учреждение или производственно- экономическую систему эти скорости можно изменить.

Перед прогоном модели необходимо задать количество клерков на каждый день. Моделируемое банковское учреждение невелико и в нем не должна образовываться слишком длинная очередь. Необходимо задать также максимально допустимую длину очереди (наибольшее количество клиентов, стоящих в очереди, исключая тех, что находятся на обслуживании). Затем модель будет выдавать "поминутный" отчет о работе банка. В конце каждого дня подводится итог за день и повторяются итоги всех предыдущих дней. Эта информация содержит число клерков, максимальную длину очереди, число потерянных клиентов из-за того, что очередь была переполнена, и среднее время из 360 мин, которое клерк был занят обслуживанием. Последняя цифра дает информацию о загруженности клерка работой.

Для упрощения модели предполагается, что у клерков нет перерывов на обед и прочие нужды. Кроме того, по прошествии 360 мин все клиенты в

очереди за исключением тех, кого уже начали обслуживать, считаются потерянными. Их число включается в общее число потерянных клиентов. Возможны такие ситуации, когда клерк оказывается в среднем занятым более 360 мин и продолжает обслуживать какого- либо клиента непосредственно после закрытия банка.

Необходимо провести серию экспериментов, чтобы выяснить, какое количество клерков будет оптимальным для моделируемого банковского учреждения.

Порядок выполнения работы

1. Изучение студентами исходных положений и постановки задачи на проведение моделирования деятельности банковского учреждения и алгоритма модели по представленной блок-схеме
2. Разбиение студенческой подгруппы на бригады и получение ими исходного задания для моделирования многоканальной системы массового обслуживания
3. Проведение модельного эксперимента с помощью программы "Модель обслуживания в банке", реализованной на ПЭВМ в комплексе программ для учебного процесса "PRIMA"
4. Проведение серии экспериментов до получения оптимальной загруженности клерков банковского учреждения
5. Анализ результатов моделирования

Отчет по работе должен содержать

1. Название и цель работы.
2. Постановку задачи на проведение эксперимента на модели.
3. Блок-схему модели.
4. Исходные данные для моделирования и результаты экспериментов на модели.
5. Анализ полученных результатов моделирования.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Панов, С. А. Моделирование логистических систем : учебное пособие / С. А. Панов. — Дубна : Государственный университет «Дубна», 2018. — 205 с. — ISBN 978-5-89847-541-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/154497

2. Арефьев, И. Б. Моделирование логистических систем : учебное пособие / И. Б. Арефьев, Е. К. Коровяковский. — Санкт-Петербург : ПГУПС, 2022. — 61 с. — ISBN 978-5-7641-1687-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/222482

3. Гарипова, Г. Р. Моделирование логистических систем : учебное пособие / Г. Р. Гарипова. — Казань : КНИТУ, 2022. — 96 с. — ISBN 978-5-7882-3212-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/412286

4. Горев, А. Э. Теория транспортных процессов и систем: учебник для среднего профессионального образования / А. Э. Горев. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 193 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-13578-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/471089

5. Шевалдина, О. Я. Математика в экономике : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. Я. Шевалдина. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 194 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04877-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/514716

6. Красс, М. С. Математика в экономике. Базовый курс : учебник для среднего профессионального образования / М. С. Красс. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 471 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-9134-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/507471

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1 4
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2 7
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3 14
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4 21
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5 26
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 28
СОДЕРЖАНИЕ 29

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению практических работ
для обучающихся по направлению
38.02.03 Операционная деятельность в логистике

Составители:
Макаров Николай Николаевич
Амелин Станислав Витальевич

В авторской редакции

Компьютерный набор Макаров Н.Н.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14