

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический
университет»

Кафедра технологии машиностроения

69 - 2015

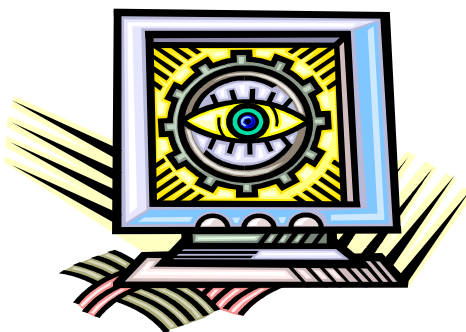
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

и варианты заданий

к выполнению контрольной работы
по дисциплине

«Основы математического моделирования»
для студентов направления

15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств»
заочной формы обучения



Воронеж 2015

Составитель канд. техн. наук А.В. Перова

УДК 519.868+621.01

Методические указания и варианты заданий к выполнению контрольной работы по дисциплине «Основы математического моделирования» для студентов направления 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» заочной формы обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А.В. Перова. Воронеж, 2015. 25 с.

Методические указания включают краткие теоретические сведения по целям и задачам дисциплины «Основы математического моделирования», варианты, методику и порядок выполнения контрольной работы, снабжены перечнем рекомендуемой литературы и конкретными примерами моделирования с использованием численных, аналитических, имитационных моделей.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе MS Word XP и содержатся в файле Контрольная работаОММ_бакалавры.doc.

Табл. 5. Ил. 12. Библиогр.: 7 назв.

Рецензент д-р техн. наук, профессор Е.В. Смоленцев
Ответственный за выпуск зав. кафедрой профессор
И.Т. Коптев

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

© ФГБОУ ВПО
«Воронежский государственный
технический университет», 2015

ВВЕДЕНИЕ

Цель преподавания дисциплины - приобретение навыков разработки и использования математических моделей для описания, исследования и оптимизации процессов в машиностроении.

«Основы математического моделирования» - направления 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств». Она является теоретической базой для изучения курсов «Математическое моделирование в машиностроении», «Системы конечно-элементного анализа (CAE-системы)», «САПР в машиностроении (CAD/CAM/CAE-системы)», «Компьютерные технологии в машиностроении» и «Компьютерное управление технологическими системами».

Изучение данной дисциплины осложняется отсутствием учебников и учебных пособий, отвечающих требованиям программы и включающих все темы курса.

Контрольная работа студентами заочной формы обучения выполняется с целью лучшего усвоения дисциплины. Работа должна помочь студенту изучить теоретический материал, продемонстрировать умение применять основные теоретические положения к решению конкретных практических задач. Вопросы контрольной работы охватывают важнейшие основные разделы курса.

1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Объём и содержание контрольной работы соответствуют рабочей программе курса "Основы математического моделирования". Контрольная работа содержит два задания. Номера вариантов заданий выбираются согласно двум последним цифрам шифра студенческого билета из таблицы 1.

Таблица 1

Предпоследняя цифра X соответствует номеру 1, 3, 5, 7, 9	Предпоследняя цифра X соответствует номеру 0, 2, 4, 6, 8
X0 – вариант 1	X0 – вариант 11
X1 – вариант 2	X1 – вариант 12
X2 – вариант 3	X2 – вариант 13
X3 – вариант 4	X3 – вариант 14
X4 – вариант 5	X4 – вариант 15
X5 – вариант 6	X5 – вариант 16
X6 – вариант 7	X6 – вариант 17
X7 – вариант 8	X7 – вариант 18
X8 – вариант 9	X8 – вариант 19
X9 – вариант 10	X9 – вариант 20

2. ЗАДАНИЕ 1

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Теоретические сведения

Линейное программирование - область математического программирования, посвященная теории и методам решения экстремальных задач, характеризующихся линейной зависимостью между переменными.

Линейное программирование возникло в связи с рассмотрением задач нахождения наивыгоднейших вариантов различных производственных решений. В этих задачах имеется большая свобода изменения различных параметров и ряд ограничительных условий. Требуется найти такие значения параметров, которые (с определенной точки зрения) были бы наилучшими. К таким задачам относятся задачи нахождения наиболее рациональных способов использования сырья и материалов, получения максимальной прибыли, повышения эф-

В самом общем виде задачу линейного программирования можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1; \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m. \end{cases}$$

Особенностью данной задачи является то, что число уравнений m меньше числа неизвестных n ($m < n$).

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

Решение системы уравнений, в которой число переменных n больше числа уравнений m , можно найти, если $n - m$ каких-либо переменных положить равными нулю. Тогда полученную при этом систему уравнений можно решить обычными методами алгебры. Найденное при этом решение называют базисным, а не равные нулю m переменных - базисными. Остальные $n - m$ переменных называют свободными переменными. Однако среди базисных решений будут такие, которые дадут отрицательные значения некоторых базисных переменных, что противоречит условию задачи, поэтому такие решения являются недопустимыми. При нахождении минимального значения целевой

функции необходимо из допустимых базисных решений выбрать такое, которое функцию обращает в минимум.

В настоящее время разработаны рациональные способы перебора базисных решений, которые позволяют рассматривать не все допустимые базисные решения, а их минимальное число. Наиболее распространенными методами такого перебора являются так называемый симплекс-метод и табличный метод.

Существо симплекс-метода состоит в следующем.

1. Находят какое-либо допустимое базисное решение. Его можно найти, приняв какие-либо $n - m$ переменных за свободные, приравняв их к нулю и решив полученную систему уравнений. Если при этом некоторые из базисных переменных окажутся отрицательными, то нужно выбрать другие свободные переменные, т.е. перейти к новому базису.

2. Проверяют, не достигнут ли уже максимум (минимум) целевой функции при найденном допустимом базисном решении.

3. Если оптимальное решение не найдено, то ищут новое допустимое базисное решение, но не любое, а такое, которое увеличивает (уменьшает) значение целевой функции.

При пользовании табличным методом удобно ввести специальную форму записи уравнений и целевой функции в виде матрицы коэффициентов при свободных переменных. Решение задачи линейного программирования табличным методом заключается в нахождении на первом этапе какого-либо допустимого базисного решения, которое в общем случае не является оптимальным, и преобразовании первоначальной матрицы коэффициентов с целью перехода к лучшему базисному решению.

Для более полного представления о задаче линейного программирования дают ее геометрическую интерпретацию. Проводят геометрическое построение прямых или плоскостей (в зависимости от числа уравнений и неизвестных), соответствующих каждому уравнению системы, вершины образовавшейся фигуры будут соответствовать набору допустимых базисных решений.

Варианты задания 1

Предприятие может выпустить три вида продукции: Π_1 , Π_2 , Π_3 . Для выпуска продукции требуются ресурсы трех видов: трудовые, станочное оборудование и полуфабрикаты. Объемы и нормы расхода ресурсов приведены в условных величинах в табл. 2, цифровые значения - в табл. 3.

Таблица 2

Наименование ресурса	Вид продукции			Объем ресурса
	П ₁	П ₂	П ₃	
	Расход ресурса на единицу продукции			
Трудовые ресурсы, чел-ч	a ₁	a ₂	a ₃	a
Станочное оборудование, станкосмены	b ₁	b ₂	b ₃	b
Полуфабрикаты, кг	c ₁	c ₂	c ₃	c
Прибыль с единицы продукции, руб.	p ₁	p ₂	p ₃	max
Выпуск, шт.	x ₁	x ₂	x ₃	

Таблица 3

№ вар	a_1	a_2	a_3	a	b_1	b_2	b_3	b	c_1	c_2	c_3	c	p_1	p_2	p_3
1	8	5	7	280	6	7	4	480	9	6	5	360	8	7	5
2	15	18	9	420	6	4	4	360	4	5	8	540	90	80	90
3	3	3	2	360	2	4	3	240	6	9	8	180	24	25	18
4	6	8	9	360	1	3	2	240	3	2	3	180	18	12	15
5	2	5	6	240	3	7	7	420	4	4	2	300	12	18	16
6	2	4	2	120	6	5	1	280	7	7	4	300	16	12	18
7	15	8	6	420	9	7	9	120	6	9	9	240	12	18	20
8	10	12	6	200	4	8	9	200	9	8	6	420	20	12	18
9	8	5	2	120	2	4	7	150	4	3	8	180	3	6	7
10	8	5	2	120	7	2	4	180	4	3	9	150	12	16	20
11	2	4	3	180	6	9	8	240	1	3	2	180	12	15	25
12	3	1	2	60	4	3	2	90	9	8	3	150	45	75	60
13	2	2	1	120	2	6	5	420	7	3	7	240	18	16	12
14	3	7	7	420	2	2	1	120	2	4	2	120	20	10	15
15	12	9	7	240	6	9	9	120	8	4	8	200	18	20	12
16	14	12	8	420	9	7	9	240	9	8	8	120	16	20	24
17	12	13	8	250	9	8	8	300	8	7	9	350	12	15	18
18	16	8	9	240	4	1	8	120	6	9	8	180	24	18	30
19	15	25	9	400	9	8	9	350	5	8	9	300	30	20	25
20	4	3	1	60	1	5	2	50	6	2	8	100	10	12	18

Требуется найти, сколько и какого вида продукции необходимо выпускать, чтобы план был оптимальным по критерию прибыли, т.е. таким, при котором получаемая прибыль была бы максимальной.

Пример решение задач линейного программирования с использованием средств Excel

Пример Требуется определить, в каком количестве необходимо выпускать продукцию четырех типов Прод1, Прод2, Прод3, Прод4 для изготовления которой требуются ресурсы трех видов: трудовые ресурсы, сырье, финансы. Нормы расхода ресурсов каждого вида для выпуска единицы продукции, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, приведены в табл. 4. Количество расходуемых ресурсов не должно превышать имеющихся запасов.

Данная задача относится к задаче планирования при ограничениях на ресурсы, распределительного типа.

Таблица 4

Ресурсы	Виды продукции				Запасы ресурсов
	Прод.1	Прод.2	Прод.3	Прод.4	
Трудовые	3	1	2	4	440
Сырье	1	8	6	2	200
Финансы	1	4	7	2	320
Прибыль	7	3	6	12	

Математическая модель для решения данной задачи будет иметь следующий вид:

$$F=7x_1+3x_2+6x_3+12x_4 \rightarrow \max;$$

$$3x_1+x_2+2x_3+4x_4 \leq 440;$$

$$x_1+8x_2+6x_3+2x_4 \leq 200;$$

$$x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 \leq 320;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Рассмотрим последовательность работ при решении этой задачи средствами Excel.

Форма для ввода условий данной задачи может иметь следующий вид:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				переменные				
2	имя	прод1	прод2	прод3	прод4			
3	значение							
4	нижн.гр.							
5	верхн.гр.							
6	коэф. в цф						ЦФ	направление
7				ограничения				
8	вид				левая часть	знак	правая часть	
9	трудовые							
10	сырье							
11	финансы							

Рис. 1

Весь текст на рис.1 (и в дальнейшем) является комментарием и на решение задачи не влияет. Далее необходимо ввести в сформированную форму исходные данные (коэффициенты в целевой функции и ограничениях, а также направление оптимизации целевой функции и знаки ограничений (рис.2)

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
2	имя	прод1	прод2	прод3	прод4			
3	значение							
4	нижн.гр.							
5	верхн.гр.							
6	коэф. в цф	7	3	6	12			max
7				ограничения				
8	вид					левая часть	знак	правая часть
9	трудовые	3	1	2	4		<=	440
10	сырье	1	8	6	2		<=	200
11	финансы	1	4	7	2		<=	320

Рис.2

При этом ячейки В3:Е3 являются изменяемыми и в них будут заноситься значения переменных.

Ввод функциональных зависимостей для целевой функции и ограничений осуществляется с использованием **Мастера функций**. Для этого необходимо активизировать требуемую ячейку (F6) и вызвать **Мастер функций**. В левой части появившегося диалогового окна нужно выбрать категорию функции **Математическая**, а в правом окне выделить функцию СУММПРОИЗВ и нажать клавишу **ОК**. Затем на экране отобразится диалоговое окно второго шага (рис.3), где требуется ввести как первый (В\$3:Е\$3), так и второй массивы (В6:Е6). При вводе первого массива используются абсолютные ссылки на ячейки, при вводе второго - относительные, что в дальнейшем будет удобно при копировании формул. Во все окна адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышью по ячейкам, адреса которых необходимо ввести.

СУММПРОИЗВ

Массив1: = {0;0;0;0}

Массив2: = {0;0;0;0}

Массив3: = массив

= 0

Возвращает сумму произведений соответствующих элементов массивов.

Массив2: массив1;массив2;... от 2 до 30 массивов, чьи компоненты нужно перемножить а затем сложить. Все массивы должны иметь одну и ту же размерность.

Значение: 0

ОК Отмена

Рис. 3

Зависимости для левых частей ограничений вводятся аналогично. При этом необходимо лишь менять адреса ячеек. Для ускорения и удобства ввода можно скопировать содержимое ячейки F6 в ячейки F9, F10 и F11 (при этом все относительные ссылки изменятся автоматически).

Окончательная таблица с исходными данными представлена на рис.4 (для наглядности выбран режим представления формул, который использовать не обязательно).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	.			переменные				
2	имя	прод1	прод2	прод3	прод4			
3	значение							
4	нижн.гр.							
5	верхн.гр.							
6	коэф. в цф	7	3	6	12	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B6:E6)	макс	
7				ограничения				
8	вид				левая часть		знак	пр. ч
9	трудовые	3	1	2	4	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B9:E9)	<=	440
10	сырье	1	8	6	2	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B10:E10)	<=	200
11	финансы	1	4	7	2	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B11:E11)	<=	320

Рис. 4

После окончания ввода исходных данных осуществляется вызов программы **Поиск решения**. Для этого необходимо выбрать в меню пункт **Сервис**, а в нем – **Поиск решения**, в

результате чего на экране появится окно поиска решения (рис.5).

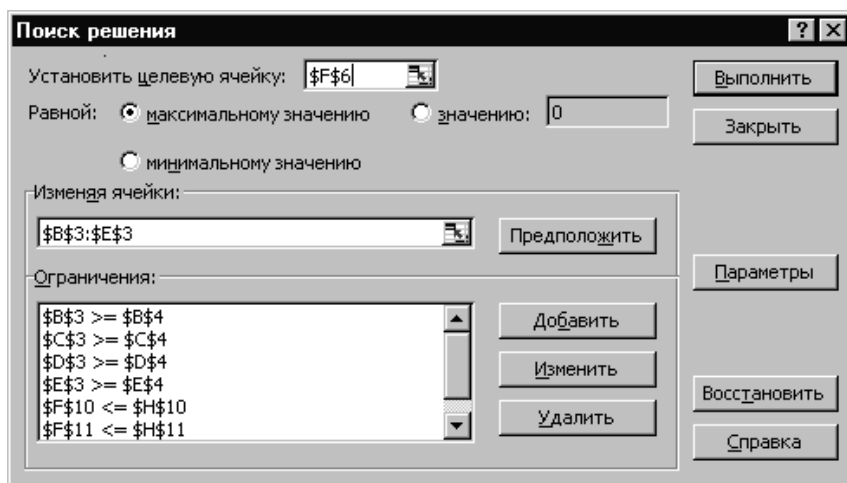


Рис.5

В окне **Установить целевую ячейку** требуется ввести имя ячейки, в которую введена зависимость для целевой функции (в данном случае F6). В качестве направления оптимизации выбирается максимизация. В окне **Изменяя ячейки** вводятся адреса ячеек, соответствующих варьируемым переменным задачи (B3:E3). Далее необходимо ввести ограничения. Для добавления ограничений выбирается пункт **Добавить**, после чего появляется окно добавления ограничений (рис.6)

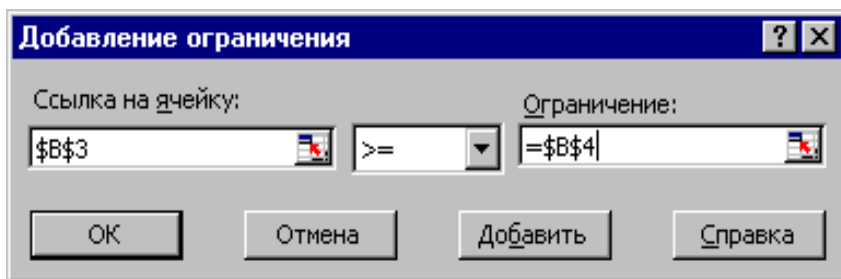


Рис.6

Вводятся граничные условия для переменных (Прод1 - Прод4) ≥ 0 : $B3 \geq B4$, $C3 \geq C4$, $D3 \geq D4$, $E3 \geq E4$ (нулевые значения ячеек B4-E4 можно не устанавливать). Ограничения можно также ввести в виде $B3 \geq 0$, $C3 \geq 0$, $D3 \geq 0$, $E3 \geq 0$. Затем вводятся ограничения на ресурсы: $F9 \leq H9$, $F10 \leq H10$, $F11 \leq H11$. Ограничения вводят последовательно. Сначала выбирается пункт **Добавить**, далее в появившихся диалоговых окнах вводится левая часть, знак и правая часть каждого ограничения. После ввода последнего ограничения и нажатия **ОК** произойдет возврат в окно **Поиск решения**.

Заполненная в результате ввода ограничений форма поиска решений представлена на рис.10. Решение задачи производится сразу же после ввода данных, когда на экране находится диалоговое окно **Поиск решения**. Перед началом решения необходимо установить параметры решения, для чего в окне поиска решения выбрать команду **параметры**. Диалоговое окно параметров поиска решения представлено на рис. 7.

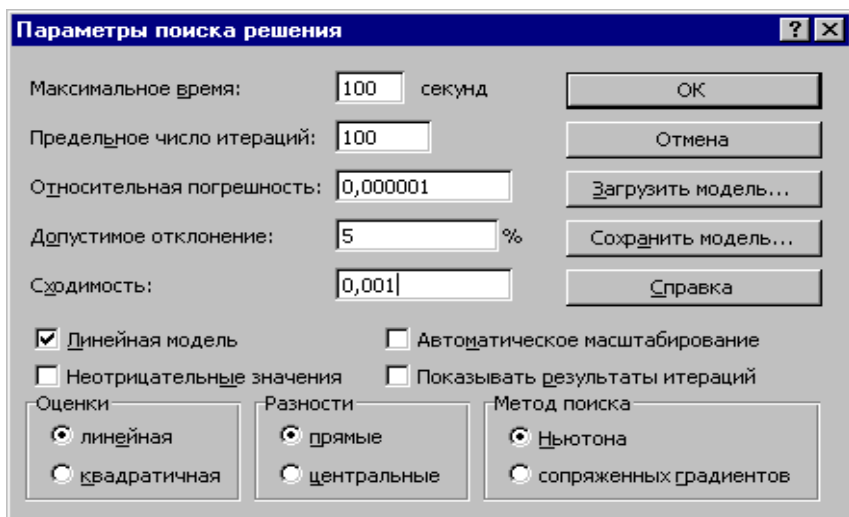


Рис.7

С помощью команд, находящихся в этом диалоговом окне, можно вводить условия для решения задач оптимизации всех классов. Рассмотрим наиболее важные команды, применяемые при решении конкретных задач. Команды, используемые по умолчанию, подходят для решения большей части практических задач.

Максимальное время

Служит для назначения времени в секундах, выделяемого на поиск решения задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32767 с (более 9 часов!). Значение 100, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства задач.

Предельное число итераций

Служит для назначения числа итераций. Используемое по умолчанию число 100 подходит для решения большинства задач.

Относительная погрешность

Используется для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 (нуля) до 1. Низкая точность соответствует

введенному числу, содержащему меньшее количество десятичных знаков, чем число, используемое по умолчанию с например, 0,0001. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Допустимое отклонение

Используется для задания допуска на отклонение от оптимального решения, если множество значений влияющей ячейки ограничено множеством целых чисел. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Сходимость

Когда относительное изменение значения в целевой ячейке за последние пять итераций становится меньше числа, указанного в поле **Сходимость**, поиск прекращается. Сходимость применяется только к нелинейным задачам, условием служит дробь из интервала от 0 (нуля) до 1. Лучшую сходимость характеризует большее количество десятичных знаков. Лучшая сходимость требует больше времени на поиск оптимального решения.

Линейная модель

Используется для решения линейной задачи оптимизации или линейной аппроксимации нелинейной задачи.

Показывать результаты итераций

Используется для приостановки поиска решения для просмотра результатов отдельных итераций.

Автоматическое масштабирование

Служит для включения автоматической нормализации входных и выходных значений, качественно различающихся по величине, например, максимизация прибыли в процентах по отношению к вложениям, исчисляемым в миллионах рублей.

Значения не отрицательны

Позволяет установить нулевую нижнюю границу для тех влияющих ячеек, для которых она не была указана в поле **Ограничение** диалогового окна **Добавить ограничение**.

Остальные команды будут рассмотрены позже при изучении соответствующих классов задач.

Для решения задачи линейного программирования необходимо установить флажок **Линейная модель** в окне **Параметры поиска решения**, что обеспечит использование симплексного метода. Далее после выбора **ОК** произойдет возврат в окно **Поиск решения**. Запуск процесса решения задачи осуществляется командой **Выполнить**.

Решение задачи занимает несколько секунд, после чего на экране появляется диалоговое окно **Результаты поиска решения**. При решении рассматриваемой задачи производственного планирования в окне появится сообщение о том, что решение найдено. В данном окне предоставляется возможность или сохранить найденное решение во влияющих ячейках модели, или восстановить исходные данные. Для этого необходимо отметить нужный пункт.

Результирующие значения всех переменных записываются в ячейки В3-Е3 исходной задачи. Соответствующее значение целевой функции заносится в ячейку F6, а значения левых частей ограничений – в ячейки F9-F11. Таблица с результатами решения задачи представлена на рис. 8.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			переменные					
2	имя	прод1	прод2	прод3	прод4			
3	значение	40	0	0	80			
4	нижн.гр.							
5	верхн.гр.							
6	коэф. в цф	7	3	6	12	1240	макс	
7			ограничения					
8	вид					левая часть	знак	правая часть
9	трудо-вые	3	1	2	4	440	<=	440
10	сырье	1	8	6	2	200	<=	200
11	финансы	1	4	7	2	200	<=	320

Рис.8

Рис. 8 показывает, что в оптимальном решении

Прод1 = В3 = 40;

Прод2 = С3 = 0;

Прод3 = D3 = 0;

Прод4 = E3 = 80.

При этом максимальная прибыль будет составлять $F6 = 1240$, а количество использованных ресурсов равно:

трудовых = F9 = 440,
сырья = F10 = 200,
финансов = F11 = 200.

Однако решение задачи находится не всегда. Если условия задачи несовместны, на экране появится надпись - **Поиск не может найти подходящего решения.** Если целевая функция не ограничена, то в окне результатов поиска решения появится сообщение: **Значения целевой функции не сходятся.**

Кроме этого, из окна **Результаты поиска решения** возможно создание отчётов трех типов: по результатам, устойчивости и пределам, каждый из которых записывается на отдельном листе. Отчеты используются при анализе полученного оптимального решения. Рассмотрим более подробно их содержание.

Отчет по результатам (рис. 9) состоит из трех таблиц.

В таблице 1 (**целевая ячейка**) приведены сведения о целевой функции, в столбце "Исходно" - указывается значение целевой функции до вычислений, "Результат" - указывается значение целевой функции после вычислений.

Таблица 2 (**изменяемые ячейки**) содержит сведения о значениях искомых переменных, до и после решения задачи.

Таблица 3 (**ограничения**) показывает результаты оптимального решения для ограничений и для граничных условий. Здесь в графе "Формула" приведены зависимости, которые были введены в диалоговом окне "Поиск решения"); в графе "Разница" показано количество неиспользованного ресурса. Если ресурс используется полностью, то в графе "Состояние" указывается *связанное*; при неполном использовании ресурса в этой графе указывается *не связан*.

Отчет по устойчивости (рис. 10) состоит из двух таблиц.

В таблице 1 (**изменяемые ячейки**) приводятся следующие значения для переменных:

- результат решения задачи;

- редуцированная стоимость, т.е. дополнительные двойственные переменные v_j , которые показывают, насколько изменится целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение;

- коэффициенты целевой функции;

- предельные значения приращения коэффициентов Δc_j целевой функции при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
\$F\$6	коэф. в цф	1240	1240

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
\$B\$3	значение прод1	40	40
\$C\$3	значение прод2	0	0
\$D\$3	значение прод3	0	0
\$E\$3	значение прод4	80	80

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница
\$F\$10	сырье левая часть	200	\$F\$10<=\$H\$10	связанное	0
\$F\$11	финансы левая часть	200	\$F\$11<=\$H\$11	не связан.	120
\$F\$9	трудовые левая часть	440	\$F\$9<=\$H\$9	связанное	0
\$E\$3	значение прод4	80	\$E\$3>=\$E\$4	не связан.	80
\$B\$3	значение прод1	40	\$B\$3>=\$B\$4	не связан.	40
\$C\$3	значение прод2	0	\$C\$3>=\$C\$4	связанное	0
\$D\$3	значение прод3	0	\$D\$3>=\$D\$4	связанное	0

Рис.9

В таблице 2 (**ограничения**) приводятся аналогичные значения для ограничений:

- величины использованных ресурсов;

- теневые цены, т.е. двойственные оценки u_i , которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу;

- значения приращения ресурсов Δb_i , при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$3	значение прод1	40	0	7	2	1
\$C\$3	значение прод2	0	-30	2,999999999	30	1E+30
\$D\$3	значение прод3	0	-20	6,000000001	20	1E+30
\$E\$3	значение прод4	80	0	12	2	2,5

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$F\$10	сырье левая часть	200	4	200	20	53,33333333
\$F\$11	финансы левая часть	200	0	320	1E+30	120
\$F\$9	трудовые левая часть	440	1	440	160	40

Рис. 10

Отчет по пределам (рис.11) показывает, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения:

- рассматриваются значения x_j в оптимальном решении;
- рассматриваются нижние пределы изменения значений x_j .

Кроме этого, в отчете указаны значения целевой функции при выпуске данного типа продукции на нижнем пределе. Далее приводятся верхние пределы изменения x_j и значения целевой функции при выпуске продукции, вошедшей в оптимальное решение на верхних пределах.

Целевое		
Ячейка	Имя	значение
\$F\$6	коэф. в цф	1240

Изменяемое			Целевой		Целевой	
Ячейка	Имя	значение	Нижний предел	результат	Верхний предел	результат
\$B\$3	значение прод1	40	0	960	40	1240
\$C\$3	значение прод2	0	0	1240	0	1240
\$D\$3	значение прод3	0	0	1240	0	1240
\$E\$3	значение прод4	80	0	280	80	1240

Рис. 11

3. ЗАДАНИЕ 2

ЭТАПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Теоретические сведения

При исследовании любой системы посредством математического моделирования возможно наличие многих альтернативных вариантов моделей. Каждая из них в чем-то лучше остальных, а чем-то хуже. Поэтому процесс разработки наилучшего, как правило компромиссного варианта модели, достаточно сложен. Системный подход предполагает наличие следующих этапов создания модели.

1. Синтез модели – создание возможных ее вариантов.

Различают

а) структурный синтез – разработка структуры модели: ее общего вида (например, в виде многочлена, или другой функции), определение числа параметров и т. п.

б) параметрический синтез – поиск числовых значений параметров модели либо на основании справочных данных, либо исходя из условия максимального совпадения результатов, найденных по модели, с экспериментальными.

2. Анализ модели – определение качества синтезированного варианта по критериям:

а) универсальности – полноты отображаемых свойств объекта;

б) точности – степени совпадения реальных данных с предсказанными моделью;

в) адекватности – способности правильно отображать свойства объекта;

г) экономичности – затрат на разработку и реализацию модели.

3. Выбор и принятие решений – общая оценка полезности вариантов и выбор лучшего.

В процессе перехода от словесного описания к получению результатов исследования модель объекта претерпевает следующие изменения формы своего представления.

Аналитическая модель описания – описание свойств объекта в виде совокупности математических зависимостей.

Модель решения – система математического моделирования соотношений, позволяющих найти решение поставленной задачи. Существует несколько альтернативных типов этой модели:

а) аналитическая модель решения – явное выражение, позволяющее вычислить искомую величину;

б) численная модель – запись решения в виде численных схем, позволяющих найти решение в виде набора чисел;

в) имитационная модель – переложение на язык ЭВМ набора формальных правил функционирования объекта исследования при заданном входном воздействии.

3. Алгоритмическая модель – реализация модели решения в виде алгоритма.

4. Программная модель – реализация алгоритмической модели на языке программирования.

Если при разработке какой-либо из перечисленных форм возникают альтернативные варианты моделей, то появляется необходимость в реализации процедур синтеза, анализа, принятия решения.

Пример задачи моделирования

В качестве примера разберем следующую задачу. Необходимо спроектировать емкость заданного объема V_0 оптимальных размеров: r – радиуса основания и h – высоты, имеющую форму прямого цилиндра с кромкой по периметру верхнего основания заданной высоты h_0 . В качестве критериев оптимальности можно выбрать любой из параметров (или оба одновременно):

$S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$ – площадь поверхности емкости;

$L = 2L_{\text{осн}} + (h + h_0)$ – длина сварного шва.

Т. к. на поверхность затрачивается листовый материал, а при сваривании расходуется электроэнергия, электроды и т. д., то в целях экономии значения обоих критериев должны быть

минимальны. Кроме того, станок на котором будет реализован заказ, позволяет вырезать днище ограниченного радиуса:

$$R_1 < r < R_2.$$

Основные этапы решения задачи

1) Составление аналитической модели описания.

Обозначим Q- выбранный критерий оптимальности (S или L). Возможны два варианта структуры модели.

а) Двухпараметрическая

$$Q(r, h) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$V(r, h) = 0, \quad (2)$$

$$R_1 < r < R_2. \quad (3)$$

Необходимо учитывать условный минимум функции двух переменных.

б) однопараметрическая

$$h = h(r, V_0), \quad (4)$$

подставим в (1) получим

$$Q(r, h(r, V_0)) \rightarrow \min. \quad (5)$$

Требуется найти минимум функции одной переменной на отрезке.

Проверим анализ каждого варианта. Очевидно, что вторая модель лучше с позиций критерия экономичности, если существует аналитическое решение уравнения (2) в виде (4). В этом случае выбрать надо модель описания (б), т. к. по остальным критериям обе модели эквивалентны. В противном случае надо остановиться на модели (а). В предлагаемой задаче решение (4) существует, поэтому в дальнейшем рассматривается однопараметрическая модель. Для параметрического синтеза модели описания надо в выражения (3) – (5) при конкретном критерии оптимальности подставлять указанные в вариантах задания значения V_0, h_0, R_1, R_2 .

2) Разработка модели принятия решения. Минимум функции, как известно, достигается в стационарной точке, т. е. где

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

Возможны следующие варианты:

1) Стационарная точка принадлежит интервалу $[R_1, R_2]$ и аналитическое решение уравнения (6) существует. В этом случае необходимо применять аналитическую модель решения, т. к. с точки зрения точности и экономичности она лучше.

2) Стационарная точка принадлежит интервалу $[R_1, R_2]$ и аналитического решения уравнения (6) не существует, или не приемлемо с позиции критерия экономичности. В этом случае необходимо применять численную модель решения.

3) Стационарная точка не принадлежит интервалу $[R_1, R_2]$. Это означает, что как аналитическая, так и численная модели, основанные на уравнении (6), не адекватны объекту моделирования и необходима имитационная модель.

Таким образом, для выбора модели решения необходимо проверить выполнение условия (3). Это можно сделать с помощью леммы Больцмана-Коши: если

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial r} \right|_{r=R_1} < 0 \quad \& \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial r} \right|_{r=R_2} > 0, \quad (7)$$

то на отрезке (3) есть хотя бы одна стационарная точка. Для проверки отношения (7) надо найти производную $\partial Q / \partial R$, вычислить ее значение при $r=R_1$ и $r=R_2$ и определить, знаки полученных значений. Если (7) выполняется, то используется аналитическая или численная модель в зависимости от существования аналитического решения уравнения (6). Если же хотя бы одно из условий не верно, то нужна имитационная модель.

Аналитическая модель представляет собой формулу вида:

$$r_{\text{opt}} = r(V_0, h_0), \quad (8)$$

которая получается, если из уравнения (6) выразить r .

В качестве численной модели решения уравнения (6) предлагается метод Ньютона, применяемый для решения уравнения $f(x)=0$. выбрав некоторое начальное значение $x=x(0)$, по формуле Ньютона

$$x(k+1) = x(k) - f(x(k)) / f'(x(k)) \quad (9)$$

последовательно получают все более точные решения $x(1), x(2), \dots, x(n)$.

Имитационная модель решения представляет собой реализацию метода проб. Для ее применения необходимо в формулу (5) подставлять различные значения g из интервала (3) и из полученных значений критерия q надо выбрать минимальное. Для решения данной задачи приемлемая точность будет достигнута, если взять 10 равноотстоящих точек из интервала $[R_1, R_2]$.

3) Составление алгоритмической модели. Алгоритмы аналитической и имитационной моделей достаточно просты, поэтому приведем только алгоритм численной модели (рис. 12).

4) Программная модель аналитического решения представляет собой запрограммированную формулу (8) для вычисления решения уравнения (6).

В случае численного решения необходимо составить программу по приведенной выше блок-схеме (рис. 12).

При использовании имитационной модели программируется формула (5).

Во все варианты программной модели необходимо включить операторы ввода исходных данных : V_0, h_0, R_1, R_2 , операторы вычисления h и операторы вывода полученного решения – оптимального значения радиуса g , высоты h и минимального значения площади поверхности емкости S или длины сварного шва L в зависимости от варианта задания.

Порядок выполнения задания

1. Исходные данные для задания студент выбирает из таблицы 5 в соответствии с номером варианта (табл. 1).
2. Построить аналитическую модель описания для указанного критерия S или L , записать её в отчёт.
3. Проверить условие (7), результат записать в отчёт
4. В зависимости от (7) и разрешимости уравнения (6) выбрать аналитическую, численную или имитационную мо-

дель решения. Указать в отчёте обоснование выбора. Если необходима аналитическая модель, то записать (8) для конкретного критерия.

5. Составить необходимую алгоритмическую модель, аналогичную рис. 12, записать в отчёт.

6. Составить и отладить необходимую программную модель, записать её текст в отчёт.

7. Получить и записать в отчёт решение задачи: оптимальное r и значение h , найденное по формуле (4), минимального значения площади поверхности емкости S или длины сварного шва L в зависимости от варианта задания.

8. Сделать выводы.

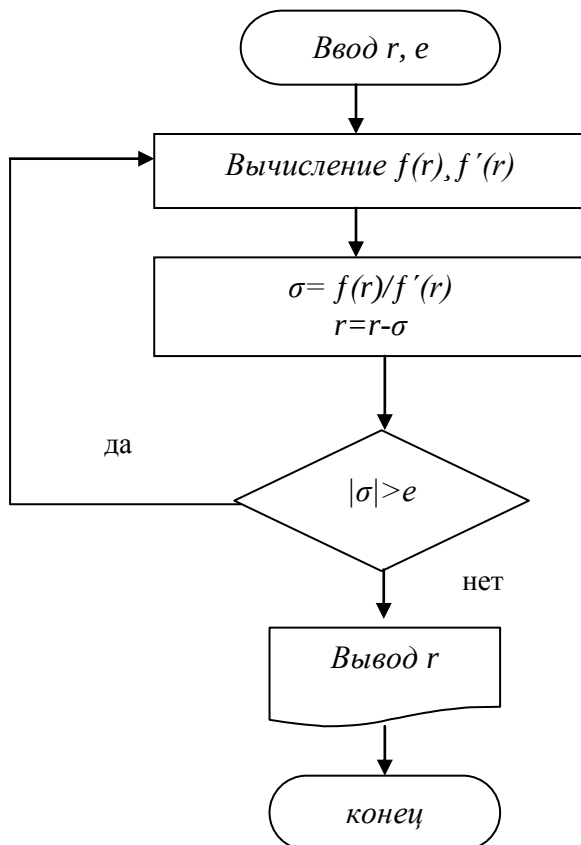


Рис. 12

Таблица 5

№ вари- анта	min	V_0	R1	R2	h_0
1	S	5	0.5	1.5	0.05
2	L	7	0.5	1.5	0.1
3	S	8	1.2	2	0.1
4	L	9	1.2	2	0.15
5	S	10	0.5	1.5	0.15
6	L	11	0.5	1.5	0.05
7	S	12	1.4	2	0.1
8	L	13	1.4	2	0.15
9	S	14	1	1.8	0.25
10	L	5	0.5	0.7	0.1
11	S	10	1.2	2	0.2
12	L	11	0.5	0.8	0.15
13	S	8	0.6	2	0.2
14	L	10	0.5	2	0.3
15	S	12	1.2	2	0.1
16	L	8	0.5	1.5	0.2
17	S	11	0.6	2	0.2
18	L	9	0.5	1.5	0.15
19	S	10	0.5	2	0.1
20	L	8	0.7	2	0.2

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аверченков В.И. Основы математического моделирования технических систем / В.И. Аверченков, В.П. Федоров, М.Л. Хейфец. – Лань, 2011.
2. Аврамчук Е.Ф. Технология системного моделирования / Е.Ф. Аврамчук, А.А. Вавилов, С.В. Емельянов. – М.: Машиностроение, 1988.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология: учеб. пособие для вузов / Е.С. Вентцель. – М.: Дрофа, 2004.
4. Гельман В.Я. Решение математических задач средствами Excel: практикум / В.Я. Гельман. – СПб.: Питер, 2003.
5. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высш. шк., 2002.
6. Сысоев В.В. Системное моделирование: учеб. пособие / В.В. Сысоев. - Воронеж: ВТИ, 1991.
7. Цветков В. Д. Системно-структурное моделирование и автоматизация технологической подготовки производства / В. Д. Цветков. - М.: Энергия, 1975.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	1
1. Общие указания по выполнению контрольной работы.....	1
2. Задание 1. Методы линейного программирования в математическом моделировании технологических процессов.....	2
3. Задание 2. Этапы моделирования.....	17
Библиографический список.....	24

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

и варианты заданий
к выполнению контрольной работы
по дисциплине
«Основы математического моделирования»
для студентов направления
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств»
заочной формы обучения

Составитель
Перова Алла Владимировна

В авторской редакции
Компьютерный набор А.В. Перовой

Подписано к изданию 10.03.2015.
Уч.-изд. л. 1,6 “С”

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14

