ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра «высшей математики и физико-математического моделирования»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 4

Составители: Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов

Мет. 4. rar	178 К ,байт	14.10.2008	уч.-изд. 1,9 л.
(название файла)	(объем файла)	(дата)	(объем издания)

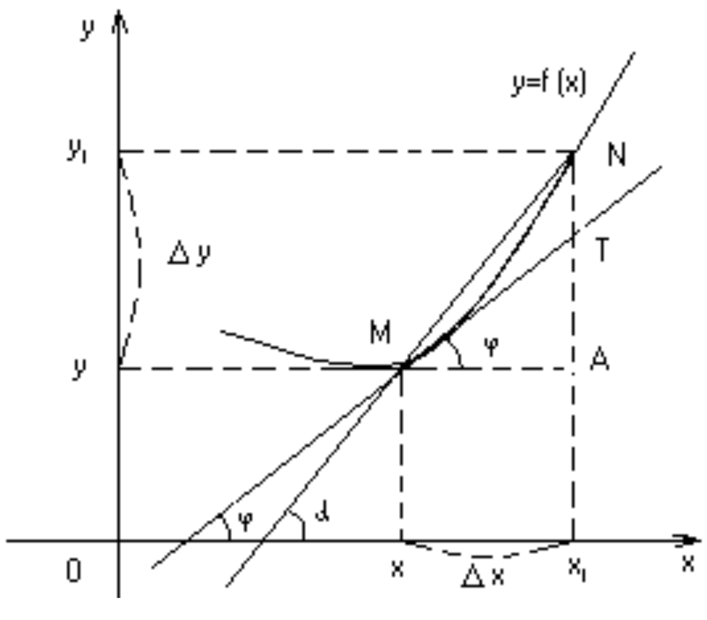
ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

Кафедра «высшей математики и
физико-математического моделирования»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 4



Воронеж 2008

Составители: ст. преп. Г.Ф. Федотенко, канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов,
канд. физ.-мат. наук А.В. Купцов
УДК 517

Методические указания для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 « Управление и информатика в технических системах»,140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов»,140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения. Ч. 5/ ГОУВПО Воронежский государственный технический университет»; сост. Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж, 2008. 35 с.

Методические указания для выполнения типовых расчетов содержат теоретический материал, рекомендуемую литературу по выполнению типовых расчетов, примеры решения задач типового расчета. Предназначены для студентов первого курса первого семестра.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Мет. 5.rar»

Ил. 13. Библиогр.: 5 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, ст.преп. Н.А. Борщ

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

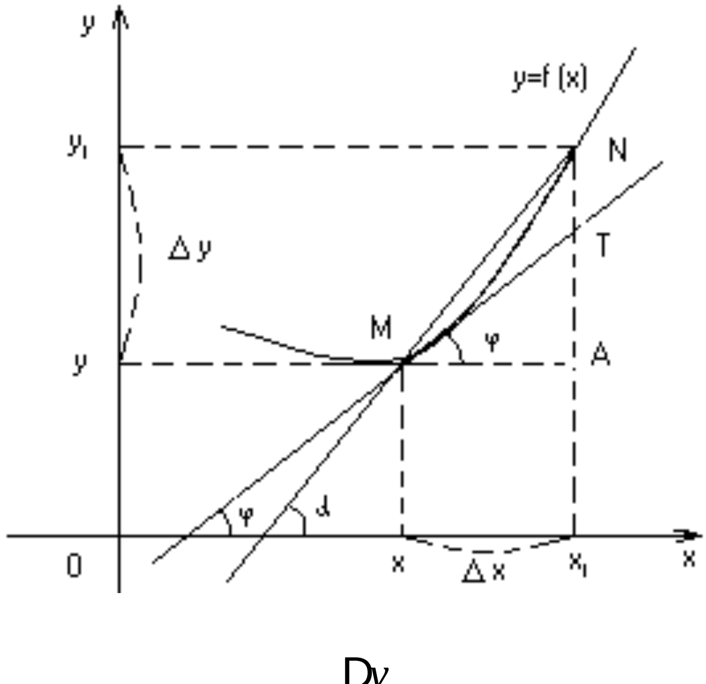
ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых задач типового расчета по теме: “Дифференцирование”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Если x и x_1 – значения аргумента x, а $y=f(x)$ и $y=f(x_1)$ - соответственно значения функции $y=f(x)$, $\Delta x = x_1 - x$ то называется приращением аргумента x на отрезке $[x;\, x_1]$, а

$\Delta y = y_1 - y$ (или $\Delta y = y_1 - y = f(x+\Delta x) - f(x)$) называется приращением функции на том же отрезке $[x;\, x_1]$, (см. рисунок), где $\Delta x = MA, \Delta y = AN, dy = TA$).



Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$ называется средней скоростью изменения функции $y=f(x)$ на отрезке $[x, x+\Delta x]$.

Производной функции *y=f(x)* в точке *x* называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx , когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

если этот предел существует.

Геометрический смысл производной**:** $y'=tg\varphi$ - угловой коэффициент касательной *MT* к графику функции *y=f(x)* в точке *x* (рис. 1).

Физический смысл производной $y'=f'(x_0)$ - мгновенная скорость, т.е. скорость изменения функции в данный момент x_0. Таким образом, быстрота протекания физических, химических и других процессов выражается с помощью производной.

Функция, имеющая конечную производную, называется дифференцируемой. Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Основные правила дифференцирования.

Если $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ - функции, имеющие производные, *c*- постоянная величина, то:

1) $(c)'=0$ (c=const);
2) $(x)'=1$;
3) $(cu)'=c(u)'$;
4) $(u\pm v)'=(u)'\pm(v)'$;
5) $(u\cdot v)'=(u)'v+(v)'u$;
6) $(u\cdot v)'=(u)'v+(v)'u$;

7) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{(u)'\cdot v-(v)'\cdot u}{v^2}$.

2. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ - дифференцируемые функции своих аргументов, то производная *<u>сложной функции</u>* $y = f[\varphi(x)]$ существует и равна произведению производной данной функции y по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной *x:* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, или $y'_x = f'_u \cdot \varphi'_x$, или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Это правило распространяется на из любого конечного числа дифференцируемых функций.

<u>Таблица производных основных элементарных функций.</u>

Пусть $y = f[\varphi(u)]$, где $u = u(x)$. Тогда:

1) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ (n - любое число);

2) $(\sqrt{x})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;

3) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ $(a>0, a \neq 1)$;

4) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

5) $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$;

6) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

7) $(\sin u)' = (\cos u) \cdot u'$;

8) $(\cos u)' = -(\sin u) \cdot u'$;

9) $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2(u)}$;

10) $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2(u)}$

11) $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$,$(|u| < 1)$;

12) $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $(|u| < 1)$;

13) $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

14) $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

15) $(shu)' = chu \cdot u'$;

16) $(chu)' = shu \cdot u'$;

17) $(thu)' = \dfrac{u'}{ch^2(u)}$;

18) $(cthu)' = \dfrac{u'}{sh^2(u)}$.

Замечание. Гиперболические функции определены так:

1) $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус

2) $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ -гиперболический косинус

3) $thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$ -гиперболический тангенс

4) $thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$ -гиперболический котангенс

Для гиперболический функций имеют место формулы, аналогичные фомулам для тригонометрических функций. Основные формулы:

$ch^2x - sh^2x = 1; ch^2x + sh^2x = ch(2x)$; $sh(2x) = 2 \cdot shx \cdot chx$;

$thx = \dfrac{shx}{chx}$, $cthx = \dfrac{chx}{shx}$; и т.д.

<u>Примеры дифференцирования сложной функции.</u>

Пример 1.

Найти y', если $y'=sin^3(x/4)$.

Решение. Это сложная функция промежуточным первым аргументом $u= sin(x/4)$ и $t=x/4$. Данную функцию можно представить в виде: $y=u^3$, где $u=sin(t)$; $t=x/4$.
Дифференцируя, получаем:

$$y'_x = (u^3)'_u \cdot u'_t \cdot t'_x = 3u^2 \cdot u'_t \cdot t'_x = 3u^2 \cdot u'_t \cdot t'_x =$$

$$3(\sin^2(x/4) \cdot (\sin t)'_t \cdot (x/4)'_x = 3 \cdot \sin^2(x/4) \cdot \cos(x/4) \cdot (1/4) .$$

Пример 2.

Найти y', если $y = ln(arctg\sqrt{x})$.

Решение. Это сложная функция с промежуточным аргументом $u=arctg\sqrt{x}$. Дифференцируя последовательно, имеем:

$$y' = (\ln u)' \cdot u'_x = (1/u)(arctg\sqrt{x}) = \frac{1}{arctg\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})' =$$

$$= \frac{1}{arctg\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Пример 3.

Найти y', если $y = x^2 \cdot 3^{tg^4(x^5 - 2x)}$

Решение. Данная функция представляет собой произведение двух функций, одна из которых является сложной функцией; при дифференцировании последней сначала находим производную от показательной функции 3^u, где $u=tg^4(x^5-2x)$, затем от степенной функции $u=tg^4v$, причем за промежуточный аргумент принимается tgv, далее находим производную $(tgv)'=v'/cos^2(v)$, где $v=x^5-2x$. Последовательно дифференцируя ,при подробной записи будем иметь

$$y'=(x^2)'\cdot 3^{tg^4(x^5-2x)}+x^2\cdot(3^{tg^4(x^5-2x)})'=$$

$$=2x3^{tg^4(x^5-2x)}+\frac{x^2 3^{tg^{4(x^5-2x)}}4\ln 3\cdot tg^3(x^5-2x)}{\cos^2(x^5-2x)}(5x^4-2).$$

Примеры решения некоторых задач из типового расчета.

Задание 1.

Найти производные следующих функций:

Пример 1.

$$y=\frac{3x^6+4x^4-x^2-2}{15\sqrt{1+x^2}}$$

Решение.

$$y'=\frac{(18x^5+16x^3-2x)\sqrt{1+x^2}-\dfrac{(3x^6+4x^4-x^2-2)x}{\sqrt{1+x^2}}}{15(\sqrt{1+x^2})^2}=$$

$$=\frac{(18x^5+16x^3-2x)(1+x^2)-(3x^6+4x^4-x^2-2)x}{15(\sqrt{1+x^2})^3}=$$

$$= \frac{x^3(1+x^2)}{(\sqrt{1+x^2})^3} = = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ответ: $= \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$.

Пример 2.

$$y = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}$$

Решение.

$$y' = \left(\frac{e^{x^2}}{1+x^2}\right)' = \frac{e^{x^2}\,2x(1+x^2) - e^{x^2}\,2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^3e^{x^2}}{(1+x^2)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{2x^3e^{x^2}}{(1+x^2)^2}$.

Пример 3.

$$y = \ln(\ln^2(\ln^3 x)).$$

Решение.

$$y' = \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot (\ln^2(\ln^3 x))' =$$

$$= \frac{2\ln(\ln^3 x)}{(\ln^2(\ln^3 x)) \cdot \ln^3 x} \cdot (\ln^3 x)' = = \frac{2\ln(\ln^3 x) \cdot 3\ln^2 x}{x \cdot (\ln^2(\ln^3 x)) \cdot \ln^3 x} =$$

$$= \frac{6}{x \cdot \ln(\ln^3 x) \cdot \ln x}.$$

Ответ: $\dfrac{6}{x\cdot\ln(\ln^3 x)\cdot\ln x}$.

Пример 4.

$$y = tg\sqrt{\cos(1/3)} + \frac{\sin^2(31x)}{31\cos(62x)}$$

Решение.

Так как $(tg\sqrt{\cos(1/3)})' = 0$, то получим

$$y' = \frac{62\sin 31x\cdot\cos 31x\cdot\cos 62x - \sin^2 31x\cdot(-62\sin 62x)}{31\cdot\cos^2 62x} =$$

$$= \frac{\sin 62x}{\cos^2 62x}.$$

В примерах часто используются формулы:

sin2x=2sinx cosx, sin^2*x=(1-cos(2x))/2, cos*^{2}*x=(1+cos(2x))/2.*

Ответ: $\dfrac{\sin 62x}{\cos^2 62x}$.

Пример 5.

y=arctg((tg(x/2)+1)/2)

Решение.

$$y' = \frac{1}{1+(tg(x/2)+1)^2/4}\cdot\frac{1}{\cos^2(x/2)}\cdot\frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{3+2\cos x+\sin x}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{3+2\cos x+\sin x}$.

Пример 6

y=(2/3)cth(x)-(1/3)ch(x)/sh^3*x*

Решение.

$$y'=\frac{2}{3}\cdot(cth(x))'-\frac{1}{3}\cdot\frac{(chx)'\cdot sh^3x-chx\cdot(sh^3x)'}{sh^6x}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-1}{sh^2x}\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{sh^4x-chx\cdot3sh^2x\cdot chx}{sh^6x}=\frac{ch2x}{sh^4x}.$$

Ответ: $\dfrac{ch2x}{sh^4x}$.

Пример 7.

$$y=arcsin(e^{-2x})+ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})$$

Решение.

$$y'=\frac{-2e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-4x}}}+\frac{1}{(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})}\cdot\frac{4e^{4x}}{2\sqrt{e^{4x}-1}}.$$

Ответ: $\dfrac{-2\cdot(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1}-e^{4x})}{(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e^{4x}-1}}$.

Пример 8.

$$y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1-x}{1+x}.$$

Решение.

$$y'=\frac{(\arcsin x)'\cdot\sqrt{1-x^2}-\arcsin x\cdot(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2}-\frac{1}{(1-x^2)}=$$

$$=\frac{1-\arcsin x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{-x\cdot\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Ответ: $\dfrac{-x\cdot\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

Пример 9.

$$y=\sqrt{\frac{tgx+\sqrt{2tgx}+1}{tgx-\sqrt{2tgx}+1}}$$

Решение.

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{tgx-\sqrt{2tgx}+1}{tgx+\sqrt{2tgx}+1}}\times$$

$$\times\left(\frac{\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sqrt{tgx}\times\cos^2 x}\right)\times(tgx+\sqrt{2tgx}+1)}{(tgx-\sqrt{2tgx}+1)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sqrt{tgx}\times\cos^2 x}\right)\times(tgx-\sqrt{2tgx}+1)}{(tgx-\sqrt{2tgx}+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2tgx}+1}{2\cos x}.$$

Здесь воспользовались формулой $tg^2x+1=1/cos^2x$ и сделали элементарные алгебраические преобразования.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2tgx}+1}{2\cos x}$.

3. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Пусть $y = f(x)$ - уравнение плоской кривой, $M_0(x_0, y_0)$ - точка, лежащая на этой кривой, так что $y_0 = f(x_0)$.

Уравнение касательной к данной кривой $y = f(x)$, проходящей через точку касания M_0 кривой, имеет вид:

$$y = y_0 + f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

где $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к данной кривой, проходящей через точку M_0. Иначе говоря, где $f'(x_0) = tg\varphi$, φ - угол между касательной к кривой, проведенный через точку M_0, и промежуточным направлением оси абсцисс.

Нормалью к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется перпендикуляр к касательной, проведенный через точку касания. Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 имеет вид: $y = y_0 - (1/f'(x_0))\cdot(x - x_0)$.

Задание 2.

Пример 1.

Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=x^3+2x$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Найдем производную данной функции и ее значение при $x_0=1$, $y'=3x^2+2$, $y'(x_0)=y'(1)=3+2=5$. Угловой коэффициент касательной $k_1 = f'(x_0) = 5$. Вычислим значение функции при $x_0=1$: $y_0 = f(x_0) = 1+2 = 3$. Следовательно, $M_0(1{,}3)$ - точка касания и уравнение касательной будет $y=3+5(x-1)$, или $5x-y-2=0$; а уравнение нормали

$y=3-(1/5)(x-1)$, или $x+5y-16=0$, где угловой коэффициент нормали $k_2=-1/k_1$, так как условием перпендикулярности двух прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2\ x+b_2$ является соотношение: $k_1\ k_2=-1$.
Ответ: $5x-y-2=0$, $x+5y-16=0$.

Пример 2.

Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=6x^{3/2-}(16/3)x^{1/4}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение . Находим производную $y^{/}$ и ее значение при $x_0=1$: $y^{/}=2x^{-2/3-}(4/3)x^{-3/4}$, $y^{1}\ (1)=2^{-}(4/3)=2/3$. Вычисляем значение функции при $x_0=1$: $y(1)=6-16/3=2/$.

Запишем уравнение касательной $y=2/3+(2/3)(x-1)$, или $2x-3y=0$. И уравнение нормали $y=2/3-(3/2)(x-1)$, или $3x+6y-13=0$.

Ответ: $2x-3y=0$, $3x+6y-13=0$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Дифференциалом (первого порядка) функции $y=f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения $\Delta x=dx$ независимой переменной x. Дифференциал функции равен произведению ее производной y' на дифференциал независимой переменной $dy=y'\cdot dx$.

Отсюда $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то дифференциал dy функции $y=f(x)$ и приращение Δy функции приближенно равны между собой $\Delta y\approx dy$, ибо по определению $\Delta y=y'\cdot dx+\varepsilon\Delta x$ или $\Delta y=dy+\varepsilon\Delta x$, где $\varepsilon\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Иными словами, разность между приращением Δy и дифференциалом dy функции есть бесконечно малая высшего порядка. Поэтому при $f(x) \neq 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1$, т.е. приращение функции и ее дифференциал – эквивалентные бесконечно малые. Следовательно, $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\cdot\Delta x$, откуда имеем $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$. Последняя формула часто используется в приближенных вычислениях, т.к. позволяет по известному значению функции и ее производной в точке x найти приближенно значение функции в точке $x+\Delta x$.

Например, вычислить приближенно arctg1,02, заменяя приращение функции дифференциалом.

Решение. Формула $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$ применительно к данной функции $f(x)=arctg\,x$ перепишем в виде:

$$arctg(x+\Delta x) \approx arctg x + \frac{1}{1+x^2}\cdot\Delta x, \text{ где } f'(x) = 1/(1+x^2).$$

У нас $x+\Delta x = 1{,}02$; $x=1$; $\Delta x = 0{,}02$. Подставляя эти значения в формулу, получим

$$arctg1{,}02 \approx arctg1 + \frac{1}{1+1^2}\cdot 0{,}02 = \pi/4 + 0{,}01 \approx 0{,}795.$$

Следовательно $arctg1{,}02 \approx 0{,}795$.

Задание 3.

Найти дифференциал dy.

$$y = x\sqrt{x^2-1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$$

Решение. Имеем

$$dy = y'(x_0)\cdot dx = \left(x\sqrt{x^2-1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)'dx.$$

Находим

$$y' = \sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Следовательно, $dy = \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} \cdot dx.$

Ответ: $\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} \cdot$

Задание 4.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1{,}012$.

Решение. Применим формулу

$y(x_0+\Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\cdot\Delta x$.

У нас $x_0=1$, $\Delta x = 0{,}012$,

т.к. $\Delta x = x - x_0 = 1 - 0{,}012 = 0.012$,

$$y' = ((x^3+7x)^{1/3})' = (1/3)\cdot(x^3+7x)^{-2/3}\cdot(3x^2+7).$$

При $x_0=1$ имеем $y_0 = y(x_0) = y(1) = \sqrt[3]{1^3+7\cdot1} = 2$.

$y'(x_0) = y'(1) = (1/3)\cdot(1^3+7\cdot1)^{-2/3}\cdot(31^2+7) = 5/6.$

Дифференциал функции в точке $x_0=1$ равен

$dy = y'(x_0)\cdot dx = y'(x_0)\cdot\Delta x = (5/6)\cdot 0{,}012 = 0{,}01.$

Искомое значение функции

$y(1{,}012) \approx y(1) + dy(1) = 2 + 0{,}01 = 2{,}01.$

Ответ: 2,01.

5. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е.

$(\ln y)' = y'/y = f'(x)/f(x)$.

Применение предварительного логарифмирования по основанию e функции иногда упрощает процесс нахождения ее производной. Сначала надо прологарифмировать данную функцию: $\ln y = \ln x$, затем взять производные от обеих частей равенства: $(\ln y)' = (\ln x)'$ и найти y' из полученного уравнения.

Например, Пусть требуется найти производную от степенно-показательной функции $y = u^v$, где $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ - функции аргумента x. Логарифмируя обе части исходного равенства, получим $\ln y = v \ln u$ (по свойству логарифма: $\ln(x^m) = m \ln x.$).

Дифференцируя последнее равенство по x, имеем
$y'/y = v' \ln u + v \cdot u'/u.$

Умножая обе части равенства на y и заменяя затем y через u^v, окончательно получаем $y' = y(v' \ln u + v \cdot u'/u)$, или после очевидных преобразований:

$y' = u^v v' \ln u + v \cdot u' u^{v-1}$

Пример 1.

Найти y'. если $y = x^{\cos x}$.

Решение. Логарифмируя, получим: $\ln y = \cos x \ln x$.

Дифференцируем обе части получим равенства по x: $(\ln y)' = (\cos x \ln x)'$, или $y'/y = -\sin x \cdot \ln x + (\cos x)/x.$

Отсюда

$y' = y \cdot (-\sin x \cdot \ln x + (\cos x)/x)$ или

$y' = x^{\cos x} \cdot (-\sin x \cdot \ln x + (\cos x)/x)$.

<u>*Замечание.*</u> Во многих случаях оказывается выгодным, прежде чем дифференцировать заданную функцию, взять ее логарифм, определить затем производную от этого логарифма и по производной от логарифма отыскать производ-

ную от заданной функции. Это так называемый прием *логарифмического дифференцирования.*
К этому приему удобно прибегать при дифференцировании: а) Произведения нескольких функций; б) дроби, числитель и знаменатель которой содержат произведения; в) выражений, содержащих корни из дробей. К нему прибегают всегда при дифференцировании функции вида $y=\varphi(x)^{\psi(x)}$, т.е. когда и основание степени, и показатель степени есть функции от x.

Пример 2.

Найти y', если $y=\sqrt[5]{x^2}\cdot\frac{1-x^2}{2+x}\cdot\arcsin x$..

Решение. Применяем прием логарифмического дифференцирования:

$$\ln y = 0{,}4\cdot\ln x+\ln(1-x^2)-\ln(2+x)+\ln(\arcsin x)$$

Далее находим

$$y'/y=\frac{0{,}4}{x}-\frac{2x}{1-x^2}-\frac{1}{2+x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}$$

Откуда получаем

$$y'=y\left(\frac{0{,}4}{x}-\frac{2x}{1-x^2}-\frac{1}{2+x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}\right),$$

где y заменяем на заданное его выражение.

Задание 5.

Найти производную функции $y=x^{e^x}\cdot x^9$

Решение. Имеем $y'=(x^{e^x})'\cdot x^9+x^{e^x}\cdot 9x^8$.

Обозначим $\varphi(x)=x^{e^x}$ и найдем $\varphi'(x)$ при помощи логарифмического дифференцирования: $\ln\varphi(x)=e^x\ln x$;

дифференцируем по x, $\varphi'(x)/\varphi(x) = e^x \ln x + e^x / x$,откуда

$\varphi'(x) = (e^x \ln x + e^x / x) \cdot x^{e^x}$.

Тогда

$$y' = e^x(\ln x + 1/x) \cdot x^{e^x} \cdot x^9 + x^{e^x} \cdot 9x^8 =$$

$$= (e^x \cdot \ln x \cdot x^9 + 10x^8)x^{e^x}.$$

6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть функция y аргумента x задана при помощи параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

где t параметр, причем каждому значению соответствует только по одному значению x и y. В механике эти уравнения называются уравнениями движения точки, т.е. линия которую описывает на плоскости движущаяся точка.

Например, функция, заданная параметрически

$$\begin{cases} x = 2t - 4t^2 \\ y = t - 2t^2 \end{cases}.$$

Представляет собой на плоскости прямую, ибо исключив параметр t из этих уравнений, получим $y=x/2$. Однако, практически исключение параметра t из уравнений часто задача трудная, порой просто неразрешимая. Если функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - дифференцируемые и $\psi(t) \neq 0$, то производная функции, заданной параметрически, вычисляется по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Или в других обозначениях

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_{t(t)}}{j'_t(t)}=g(t)\,.$$

Вторую производную от y по x находим, дифференцируя последнее соотношение

$$y''_{xx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(g(t))}{j'_t(t)}=\frac{d(g(t))}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dg}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'_t}{x'_t}$$

Задание 6.

Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически.

Пример 1.

$$\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\ y=\sqrt{1+t^2}-\ln(1+\sqrt{1+t^2})+\ln t \end{cases}$$

Решение. Находим y'_t и x'_t и полученные выражения подставляем в формулу:

$$x'_t=\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\times\left(1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,$$

$$y'_t=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{t}{(1+\sqrt{1+t^2})\sqrt{1+t^2}}+\frac{1}{t}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,.$$

Получаем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1}{t}$$

Ответ: *1/t*.

Пример 2.

$$\begin{cases} x = e^{\sec^2 t} \\ y = tgt \ln\cos t + tgt - t \end{cases}$$

Решение. Учитывая, что $\sec t = 1/\cos t$, имеем

$$x_t^/ = e^{\sec^2 t} \cdot 2 \cdot \sec t \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} = e^{\sec^2 t} \cdot \frac{2 \cdot \sin t}{\cos^3 t},$$

$$y_t^/ = \frac{\ln\cos t}{\cos^2 t} + tg^2 t + \frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \frac{\ln\cos t1}{\cos^2 t}.$$

Тогда $y_x^/ = \dfrac{y_t^/}{x_t^/} = \dfrac{(\ln\cos t)\cdot\cos^3 t}{2\cdot e^{\sec^2 t}\cdot\sin t\cdot\cos^2 t} = \dfrac{(\ln\cos t)\cdot ctgt}{2\cdot e^{\sec^2 t}}$.

Ответ: $\dfrac{(\ln\cos t)\cdot ctgt}{2\cdot e^{\sec^2 t}}$.

Задание 7.

Составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра *t=0*, если

$$\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$$

Решение. Последовательно находим: $x_0=2e^0=2$; $y_0=e^{-0}=1$,

$$x_t^/ = 2e^t, \; y_t^/ = -e^{-t}, \; y_x^/ = \frac{y_t^/}{x_t^/} = \frac{-e^{-t}}{2e^t} = -0{,}5e^{-2t},$$

$$x_t^/(0) = 2e^0 = 2, \; y_t^/(0) = -e^0 = -1, \; y_x^/(t=0) = -0{,}5, M_0(2,1).$$

<u>Способ 1.</u> Как известно, если кривая задана в явном виде *y=f(x)*, то уравнения касательной и нормали в точке $M_0(x_0,y_0)$. имеют соответственно вид:

$$y = y_0 + y'(x_0)\cdot(x - x_0), \; y = y_0 - (1/y'(x_0))\cdot(x - x_0).$$

где $y_0=f(x_0)$, $(y_0)^/=(f(x_0))^/$. Поэтому, напишем уравнения касательной и нормали к исходной кривой в точке касания $M_0(2,1)$ при $t=0$ соответственно: $y=1-0,5(x-2)$, или $y=-0,5x+2$, или $x+2y-4=0$ - уравнения касательной; $y=1+(1/0,5)(x-2)$, или $y=2x-3$, или $2x-y-3=0$ - уравнения нормали.

Способ 2. Если кривая задана в параметрическом виде, то уравнения касательной и нормали в точке $M_0(x_0,y_0)$ при $t=t_0$ можно найти по следующим формулам соответственно вид:

$$\frac{y-y_0}{y_t^{/}}=\frac{x-x_0}{x_t^{/}}, \text{ или } \quad y=y_0+\frac{y_t^{/}}{x_t^{/}}\cdot(x-x_0)$$

и $$\frac{y-y_0}{-x_t^{/}}=\frac{x-x_0}{y_t^{/}}, \text{ где } y_t^{/}=y_t^{/}(t_0),\ x_t^{/}=x_t^{/}(t_0).$$

Тогда уравнения касательной и нормали к исходной кривой в точке $M_0(2;1)$ при $t_0=0$ будут соответственного вида:

$\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{x-2}{2}$, или $y=-(1/2)x+2$, или $x+2y-4=0$ - касательная;

$2(x-2)+(-1)(y-1)=0$, или $2x-y-3=0$ - нормаль.

Ответ: $x+2y-4=0$; $2x-y-3=0$.

Задание 8.

Найти производную второго порядка $y_{xx}^{//}$ от функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x=\ln t \\ y=arctgt \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем исходные равенства по t:

$$x_t^{/}=1/t\ ,\ y_t^{/}=1/(1+t^2)\ ,\ y_x^{/}=\frac{y_t^{/}}{x_t^{/}}=\frac{t}{1+t^2}.$$

Находим вторую производную по формуле: $y_{xx}^{//}$, т.к.

$$y''_{xx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(g(t))}{\varphi'_t(t)}=\frac{d(g(t))}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dg}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'_t}{x'_t}$$

У нас *g(t)=t/(1+t²)*, следовательно, $g'_t(t)=-t^2/(1+t^2)^2$.

Тогда $y''_{xx}=\dfrac{-t^2}{(1+t^2)^2\times(1/t)}=\dfrac{-t^3}{(1+t^2)^2}$.

Ответ: $\dfrac{-t^3}{(1+t^2)^2}$.

7. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФОРМУЛА ЛЕЙБНИЦА

Производной второго порядка функции *y=f(x)* называется производная от ее производной $y''_{xx}=(y'_x)'_x$ или $y''_{xx}=\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Механический смысл второй производной**:** если $f'(x)$ истолковывается как скорость некоторого процесса, то $f''(x)$ характеризует ускорение того же самого процесса.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и других порядков:

$$y^{(3)}_{x^3}=f'''(x)=(y''_{xx})'_x=\frac{d^3y}{dx^3},\ y^{(4)}_{x^4}=f^{(4)}(x)=(y^{(3)}_{x^3})'_x=\frac{d^4y}{dx^4},\ldots$$

Вообще, производной *n*-го порядка**,** или *n*-ой производной от функции называется производная от ее *(n-1)*-го порядка.

$$y^{(n)}_{x^n}=f^{(n)}(x)=(y^{(n-1)}_{x^{n-1}})'_x=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

На практике, находя несколько последовательных производных, иногда удается найти закон, т.е. закономерность их образования, и, считая, что эта закономерность выполняется для производной любого порядка, составить общую формулу для n-ой производной (заметим, что нулевая производная означает саму функцию). Приведем формулы производных *n*-го порядка от нескольких основных элементарных функций.

Задание 9.

Вычислить производные *n*-го порядка:

Пример 1.

Пусть $y=x^{m-1}$. Тогда $y_x^{/}=m\cdot x^{m-1}$,

$y_{xx}^{//}=m\cdot(m-1)x^{m-2},\ldots$

$y_{x^n}^{(n)}=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.

Пример 2.

Пусть $y=(ax+b)^m$.

Тогда $y^{(n)}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$.

Пример 3. Пусть $y=a^x$.

Тогда $y_x^{/}=a^x\cdot\ln a,\ y_{xx}^{//}=a^x\cdot\ln^2 a,\ \ldots,y_{x^n}^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a.$

Пример 4.

Пусть $y=lnx$.

Тогда $y_x^{/}=1/x,\ y_{xx}^{//}=-x^{-2},\ldots$, заметив закономерность образования последующих производных, можно записать $y_{x^n}^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot x^{-n}$.

Например, $y^{(15)}=(-1)^{14}\cdot 14!\cdot x^{-15}$.

Пример 5.

Пусть $y=1/x$.

Тогда $y_x^{/}=-1/x^2,\ y_{xx}^{//}=2/x^3,\ \ldots,y_{x^n}^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot x^{-n-1}$.

Пример 6.

Пусть $y=1/(ax+b)$.

Тогда

$$y_x^{/}=-a/(ax+b)^2,\; y_{xx}^{//}=a^2\cdot 2!/(ax+b)^3,\;\ldots,$$

$$y_{x^n}^{(n)}=(-1)^n a^n\cdot n!/(ax+b)^{n+1}.$$

Пример 7.

Пусть $y=\sin x$,

Тогда

$$y_x^{/}=\cos x,\; y_{xx}^{//}=-\sin x=\sin(x+\pi),\;\ldots,\; y_{x^n}^{(n)}=\sin(x+n\cdot\pi/2).$$

Пример 8.

Пусть $y=\cos x$,

Тогда $y_{x^n}^{(n)}=\cos(x+n\cdot\pi/2)$.

При нахождении производной n-го порядка от произведения двух функций *u(x)* и *v(x)* целесообразно применять формулу Лейбница:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)}+\ldots+uv^{(n)}.$$

Коэффициенты в этой формуле те же, что и в разложении бинома Ньютона

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^m a^{n-m}b^m+\ldots+b^n$$

где биноминальные коэффициенты $C_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}$ в формуле равноотстоящие от концов, равны между собой: $C_n^0=C_n^n=1$, причем $C_n^1=C_n^{n-1}=n;\, C_n^2=C_n^{n-2}=\dfrac{n(n-1)}{2!}$ и т.д.

Пример 9.

Найти $y^{(5)}$ для функции $y=x^6e^{3x}$.

Решение. Применяем формулу Лейбница, полагая $u=x^6$, $v=e^{3x}$, для случая n=5:

$$(uv)^{(5)} = u^{(5)}v + nu^{(4)}v' + \frac{5\cdot 4}{2!}u^{(3)}v^{(2)} + \ldots + uv^{(5)}$$

Находим первые пять последовательных производных от каждого из сомножителей отдельно:

$u'=6x^5$, $u''=30x^4$, $u^{(3)}=120x^3$, $u^{(4)}=360x^2$, $u^{(5)}=720x$,
$v'=3e^{3x}$, $v''=9e^{3x}$, $v^{(3)}=3^3e^{3x}$, $v^{(4)}=3^4e^{3x}$ $v^{(5)}=3^5e^{3x}$.

Подставляя эти производные в формулу Лейбница, получаем

$$y^{(5)} = (x^6e^{3x})^{(5)} = 720xe^{3x} + 5\cdot 360x^2\cdot 3e^{3x} + 10\cdot 120x^3\cdot 9e^{3x} +$$
$$+10\cdot 30\cdot 27\cdot e^{3x} + 5\cdot 6\cdot x^5\cdot 81e^{3x} + 3^5x^6e^{3x}.$$

Задание 10.

Найти производную n-го порядка $y=3^{2x+5}$

Решение. Воспользуемся тем, что $y^{(n)}_{x^n} = a^x\cdot\ln^n a$;у нас $a=3$.

Последовательно находим $y'_x = 3^{2x+5}\cdot 2\cdot\ln 3$,

$y''_{xx} = 3^{2x+5}\cdot 2^2\cdot\ln^2 3, \ldots, y^{(n)}_{x^n} = 3^{2x+5}\cdot 2^n\cdot\ln^n 3$.

Ответ: $3^{2x+5}\cdot 2^n\cdot\ln^n 3$.

Задание 11.

Найти производную указанного порядка.

$y = \dfrac{\ln(2x+5)}{2x+5}$. $y^{(3)}$-?

Решение. Воспользуемся формулой Лейбница для случая $n=3$:

Полагая $u = \dfrac{1}{2x+5}$, $v = \ln(2x+5)$, находим

$$(uv)^{(3)} = u^{(3)}v + 3u^{//}v' + \frac{3\cdot 2}{2!}u^{/}v^{//} + uv^{(3)},$$

где $u' = \dfrac{-2}{(2x+5)^2}$, $u'' = \dfrac{8}{(2x+5)^3}$, $u''' = \dfrac{-48}{(2x+5)^4}$,

$v' = 2/(2x+5)$, $v'' = -4/(2x+5)^2$, $v''' = 16/(2x+5)^3$.

Подставляем в формулу найденные производные и сами функции

$$y''' = \left(\frac{1}{2x+5}\cdot\ln(2x+5)\right)^{(3)} = \frac{-48}{(2x+5)^4}\cdot\ln(2x+5) +$$

$$+\frac{3\cdot 8}{(2x+5)^3}\cdot\frac{2}{2x+5} + \frac{3\cdot 2}{2\cdot(2x+5)^2}\cdot\frac{4}{(2x+5)^2} +$$

$$+\frac{1}{2x+5}\cdot\frac{16}{(2x+5)^3}\cdot = \frac{4\cdot(19-12\cdot\ln(2x+5))}{(2x+5)^4}$$

Ответ: $\dfrac{4\cdot(19-12\cdot\ln(2x+5))}{(2x+5)^4}$.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ

Задание 12.

Пример 1.

Показать, что функция $y = -\sqrt{x^4 - x^2}$ удовлетворяет уравнению: $xyy^{/} - y^2 = x^4$

Решение. 1) Находим $y^{/}$: $y' = (-\sqrt{x^4 - x^2})' = \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

2) Подставляем данную функцию y и ее производную $y^{/}$ в исходное уравнение:

$$x\cdot(-\sqrt{x^4 - x^2})\cdot\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} - (x^4 - x^2) = x^4$$

Преобразуя, получим $x^4 = x^4$- получили тождество.

Следовательно, данная функция y является решением исходного уравнения.

Ответ: Функция y удовлетворяет уравнению.

Пример 2.

Показать, что функция $y = tg(\ln(3x)$ удовлетворяет уравнению: $(1+y^2)dx=xdy$

Решение. Находим:

$$dy = (tg(\ln(3x))' dx = \frac{dx}{x\cos^2(\ln(3x))}.$$

Подставляем в исходное уравнение данную функцию и ее дифференциал:

$$(1+tg^2(ln(3x))dx=\frac{dx}{\cos^2(\ln(3x))}.$$

Получим тождество, т.е. верное равенство. Согласно формуле из тригонометрии $1+tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$, где $a = \ln(3x)$.

Ответ: функция удовлетворяет уравнению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам выполнить типовой расчет по вышеуказанной теме курса математики, а также предоставляет студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической и теоретической части курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. М.: Наука, 1972. Т.1. 429 с.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов Т.Я. Кожевникова – М.: «Оникс 21 век» «Мир и образование», 2003. Ч. 1.
3. Мантуров О.В. Курс высшей математики. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной /О.В. Мантуров, Н.М. Матвеев. М., 2003.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)/ Л.А. Кузнецов.М.: Высш. шк., 2007.204 с.
5. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов /В.С. Шипачев. М., 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 4

Составители: Федотенко Галина Федоровна,
Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Купцов Андрей Валериевич

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.10. 2008.
Уч.-изд. л. 1,9 «С»

ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14