

76

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

“ ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ”

Кафедра строительной механики

**РАСЧЁТ
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ
МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Методические указания
к выполнению расчетно-графической работы
по курсу «Строительная механика»
для студентов, обучающихся по направлению
08.03.01 «Строительство» и 08.05.01
«Строительство уникальных зданий и сооружений»

Воронеж 2017

УДК_ 624.072.33(07)

Составитель Р.А. Мухтаров

Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений : метод. указания к выполнению расчетно-графической работы по дисциплине «Строительная механика» для студентов обучающихся по направлению 08.03.01 «**Строительство**» и 08.05.01 «**Строительство уникальных зданий и сооружений**»/ ВГТУ; сост.: Р.А.Мухтаров.- Воронеж, 2017.- 31 с.

Даются указания к расчетно-графической работе по курсу «Строительная механика» для студентов, обучающихся по направлению «**Строительство**» и «**Строительство уникальных зданий и сооружений**» всех форм обучения. Излагается методика расчета статически неопределимой рамы методом перемещений на постоянную нагрузку. Описана техника построения эпюр m_i , q_i во вспомогательных (единичных) состояниях и M_p , Q_p в грузовом состоянии, окончательных эпюр M и Q для статически неопределимой рамы от действия постоянной нагрузки. Рассмотрен пример расчета в объеме, предусмотренном планом выполнения задания, с необходимыми комментариями.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению «**Строительство**» и «**Строительство уникальных зданий и сооружений**».

Ил. 19. Табл. 1 . Библиогр.: 3 назв.

УДК_ 624.072.33(07)

*Печатается по решению научно-методического совета
ВГТУ*

Рецензент - В.А. Козлов, проф., д-р ф.-м. наук, зав. кафедрой теоретической и прикладной механики ВГТУ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по разделу строительной механики «Статика плоских стержневых систем» составлены в соответствии с учебной программой для студентов, обучающихся по направлению «Строительство» и «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Работа предполагает выполнение расчета статически неопределимой рамы на действие постоянной нагрузки.

1. Задание на выполнение расчётной работы

В задании рассматривается статически неопределимая рама, которая рассчитывается на действие постоянной (совокупности распределённых и сосредоточенных сил) нагрузки.

Расчётная схема статически неопределимой рамы, величины равномерно распределённой и сосредоточенной нагрузок, геометрические параметры принимаются в соответствии с данными выдаваемого студенту бланка или по исходным данным приведённым в табл. П.1 к расчётным схемам приложения 1. Данные выбираются в соответствии шифра, который состоит из первых двух букв фамилии, имени и отчества студента. Например, студент Сидоров Антон Васильевич имеет шифр СИАНВА.

Для выполнения работы требуется предварительная проработка теоретической части по соответствующим главам учебников строительной механики и разделам лекций по тому же курсу.

2. Содержание расчётной работы с указаниями по оформлению

По условиям задания в расчетной работе требуется:

Выполнить расчет рамы на заданную постоянную нагрузку

1. Задание

Вычертить в масштабе схему статически неопределимой рамы с действующей на неё постоянной нагрузкой. Выполнить буквенное (или цифровое) обозначение узлов и опор, проставить численные значения размеров, нагрузки, соотношение жёсткостей $E \cdot J_p / E \cdot J_{ст}$. Стержни, заштрихованные косыми чёрточками, имеют бесконечно большую жёсткость ($E \cdot J = \infty$).

Место приложения сосредоточенной нагрузки на стержне принять за узел, а отрезки стержня по разные стороны от нагрузки принять за отдельные стержни.

Здесь и в дальнейшем указать линейный масштаб и масштаб ординат эпюр.

2. Кинематический анализ расчетной схемы рамы:

а) определить степень статической неопределимости системы и выбрать один вариант основной системы метода сил с показанием основных неизвестных X_i ;

б) определить степень кинематической неопределимости рамы, изобразить основную систему метода перемещений с показанием основных неизвестных Z_k , записать систему канонических уравнений метода перемещений, а в виде $\sum r_{ik}Z_k + R_{ip} = 0$.

3. Расчёт рамы на заданную нагрузку.

3.1. Основная система метода перемещений

На чертеже основной системы занумеровать основные неизвестные Z_1, Z_2, \dots, Z_n , а также реакции дополнительно наложенных связей R_1, R_2, \dots, R_n . Написать канонические уравнения метода перемещений в буквенном виде и словесное изложение их механического смысла применительно к конкретным условиям задания, а также истолкование нескольких коэффициентов и свободных членов (например, r_{12}, R_{1p});

3.2. Единичные состояния и эпюры:

3.2.a. Начертить основную систему без нагрузки, в направлении первого основного неизвестного сообщить единичное перемещение $Z_1 = 1$, изобразить стержни в деформированном виде и обозначить реакции наложенных связей r_{11}, r_{21} . Построить соответствующие этому состоянию эпюры m_1 и q_1 с расчётами необходимыми для вычисления ординат и определить коэффициенты при неизвестных канонических уравнений.

Выполнить то же при единичных перемещениях по направлению других основных неизвестных (например, $Z_2 = 1$) и проверить взаимность единичных коэффициентов при неизвестных;

3.3. Основная система под действием нагрузки

Начертить основную систему с нагрузкой (перемещения Z_1, Z_2, \dots отсутствуют) с изображением деформированных стержней и обозначением реакций наложенных связей $R_{1p}, R_{2p}, \dots, R_{ip}$. Построить соответствующие этому состоянию эпюры M_p и Q_p с расчётами необходимыми для вычисления ординат и определить свободные члены канонических уравнений;

3.4. Значения основных неизвестных

Записать систему канонических уравнений в развернутом виде с числовыми значениями коэффициентов при неизвестных и свободных членов. Решая систему уравнений известными методами из курса математики определить значения основных неизвестных и выполнить их проверку с подстановкой в канонические уравнения метода перемещений с оценкой погрешностей.

3.5. Окончательная эпюра изгибающего момента M

$$M = m_1 \cdot Z_1 + \dots + m_i \cdot Z_i + \dots + M_p .$$

Построить окончательную эпюру M с необходимыми расчётами для заданной системы и выполнить проверку равновесия узлов;

3.6. Окончательная эпюра поперечной силы Q

Построить окончательную эпюру Q по данным эпюры M с необходимыми расчётами из равновесия стержней заданной системы;

3.7. Окончательная эпюра продольной силы N

Построить окончательную эпюру N по данным эпюры Q с необходимыми расчётами из равновесия узлов заданной системы;

3.8. Проверка равновесия рамы в целом

Рассмотреть схему рамы с заданной внешней нагрузкой и составляющими опорных реакций, определёнными по эпюрам M , Q , N и произвести проверку равновесия рамы в целом, с помощью уравнений статики.

3. Общие методические указания

При расчёте статически неопределимых систем методом перемещений принимают следующие допущения:

- Пренебрегают влиянием продольных сил на деформации стержней рамы, учитывают лишь деформации изгиба. Ввиду малости перемещений считают, что длина “хорды” проведённая между концами стержня после деформации рамы, равна первоначальной, т.е. длине стержня в недеформированном состоянии. Следовательно, сближение концов стержня при его изгибе (деформации), как от внешней нагрузки, так и от воздействия неизвестных перемещений не учитывают и считаются “несжимаемыми” и “нерастяжимыми”;
- Касательные к изогнутым осям стержней одного узла поворачиваются на один и тот же угол.

При расчёте статически неопределимых систем методом перемещений за лишние неизвестные принимают упругие перемещения - углы поворота узлов и их линейные перемещения, т.к. в стержневых системах (рамах) линейные перемещения и углы поворота концов стержней, жёстко соединённых в узле, равны между собой. Следовательно, деформированный вид системы будет полностью определен, если будут известны все линейные и угловые перемещения узлов системы

$$n = n_{\text{угл}} + n_{\text{лин}}$$

$n_{\text{угл}}$ – число неизвестных углов поворота “жёстких” узлов рамы, которое определяется простым подсчётом соответствующих узлов. “Жёстким” считается узел, в котором концы, по крайней мере, двух из сходящихся в нём стержней жёстко связаны между собой.

Следует отметить, что в число $n_{\text{угл}}$ не включаются узлы, к которым примыкает бесконечно жесткий элемент (изгибная жёсткость $EJ = \infty$, повороты их концов считаются равными нулю, за исключением случая, когда возможен поворот бесконечно жёсткого элемента), опорные узлы, повороты шарнирно прикреплённых концов стержней, а также прогибы и повороты

консолей. Заметим, что для консоли эпюры можно построить сразу как для статически определённой системы.

$n_{\text{лин}}$ - число неизвестных линейных перемещений (связей) жёстких узлов. Для определения $n_{\text{лин}}$ схему данной статически неопределимой системы заменяем её шарнирной схемой путём введения полных шарниров во все “жёсткие” узлы и опорные закрепления. Необходимо ввести в полученную геометрически изменяемую шарнирную схему сооружения стержни - линейные связи, чтобы превратить её в геометрически неизменяемую систему. Перемещения всех узлов такой системы не являются независимыми, т.к. смещение одного из них может вызывать смещения ряда других узлов. Необходимо выделить из них независимые перемещения. Следовательно, число этих стержней, равно числу независимых линейных смещений узлов системы.

Выбор основной системы. В методе перемещений сложная заданная стержневая система превращается в совокупность простейших стержней (однопролётных статически неопределимых балок) путём наложения дополнительных связей - противоположных “шайб” (“плавающие” заделки) на все жёсткие узлы, кроме узлов, к которым примыкают бесконечно жёсткие элементы и линейных связей. Заданная система с наложенными на неё связями становится кинематически неопределимой, и называется **основной системой**. Общее число неизвестных метода перемещений следует назвать степенью кинематической неопределимости заданной системы.

Эпюры для статически неопределимых балок от единичного смещения опор и заданной внешней нагрузки предварительно строят методом сил. Все эпюры сводятся в таблицу метода перемещений. Применение данной таблицы для построения единичной и грузовой эпюры снижает трудоёмкость.

Линейные связи устраняют линейные перемещения узлов системы, а противоположные “шайбы” (“плавающие” заделки) повороты узлов. “Шайба” может свободно перемещаться вместе с узлом, но не может поворачиваться до тех пор, пока ей не сообщён принудительный поворот. Реакция таких связей представляют собой моменты, приложенные в узлах системы.

Таким образом, основная система состоит из отдельных стержней, каждый из которых работает самостоятельно. В основной системе от заданной нагрузки деформируются только те элементы, к которым приложена внешняя нагрузка. Каждый стержень в ОС от внешней нагрузки изгибается независимо от других стержней.

Основные неизвестные метода нумеруются по порядку и подлежат определению. Усилия в наложенных связях нумеруются в соответствии с нумерацией перемещений.

Канонические уравнения. Следует отметить, что в заданной системе противоположных “шайб” и линейных связей нет, следовательно, усилия в наложенных связях должны равняться нулю.

Если полная реакция любой дополнительно введённой связи определённая расчётом в основной системе равняется нулю, т.е. $R_i = 0$, где $i = 1, 2, \dots, k$, то основная (о.с) и заданная (з.с.) системы статически эквивалентны.

Если в методе сил основная и заданная системы кинематически эквивалентны, и разрешающими были кинематические условия $\Delta_i = 0$, то в методе перемещений разрешающими являются статические условия.

Развёртывание условия $R_i = 0$ на основе принципа суперпозиции приводит к каноническому уравнению метода перемещений

$$R_i = 0 \dots \sum r_{ik} \cdot Z_k + R_{ip} = 0$$

r_{ik} -коэффициент уравнений – реакция (усилие) в i – той наложенной связи от единичного перемещения по направлению k – той наложенной связи, т.е. $Z_k = 1$ в основной системе;

$r_{ik} \cdot Z_k$ – реакция (усилие) в i – той наложенной связи от действия основного неизвестного Z_k в основной системе;

R_{ip} – свободный член - усилие в i – той наложенной связи от заданной внешней нагрузки в основной системе.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений. Для вычисления единичных коэффициентов r_{ik} при неизвестных рассматривают единичные вспомогательные состояния, в которых по направлению наложенных связей основной системы сообщаются единичные перемещения и с помощью таблицы метода перемещений строят эпюры m_i, q_i . Рассматривают основную систему под действием заданной внешней нагрузки (сост. “Р”), и по таблице метода перемещений строят эпюры M_p, Q_p , затем определяют свободные члены R_{ip} .

При определении реакций введённых связей (коэффициентов и свободных членов) применяется статический способ, который является основным в методе перемещений и основан на использовании уравнений равновесия.

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введённых связях препятствующих угловому повороту, определяют из условий равновесия в основной системе узлов, отделённые сечениями от всех примыкающих стержней рамы совместно с наложенными на них противоположными “шайбами” в виде $\sum M = 0$. При этом значения изгибающих моментов снимают с соответствующей эпюры изгибающих моментов.

Коэффициенты и свободные члены уравнений, представляющие реактивные усилия во введённых стержневых (линейных) связях определяют из условий равновесия некоторой отсечённой сечениями от всех примыкающих стержней рамы части основной системы, содержащей эти связи. В сечениях показывают поперечную силу, снятую с эпюры поперечной силы.

Положительное направление определяемой реакции, моментной или силовой, совпадает с принятым направлением неизвестного угла поворота или линейного смещения узла.

Окончательная эпюра изгибающих моментов M . На основании принципа суперпозиции эпюра M строится по формуле

$$M = m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + M_p .$$

Окончательная эпюра поперечной силы Q . Строится двумя способами:

а) на основании принципа суперпозиции (в данной работе не рассматривается)

$$Q = q_1 \cdot z_1 + q_2 \cdot z_2 + Q_p ;$$

б) по данным уже построенной окончательной эпюры M , рассматривая равновесие стержней.

Окончательная эпюра продольной силы N . Строится по данным построенной окончательной эпюры Q , рассматривая равновесие узлов.

Проверка правильности построения окончательных эпюр. Статические проверки при расчёте рамы методом перемещений (условия равновесия $\sum M = 0$, $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$) должны выполняться для любого узла, стержня или группы стержней заданной системы. Особое значение приобретает соблюдение условий равновесия, которыми ранее в расчёте основной системы определялась каждая из реакций наложенной связи R_i .

Этими условиями контролируется соблюдение исходных разрешающих статических условий $R_i = 0$, т.е. правильность составления и решения канонических уравнений метода перемещений. Поэтому статические проверки при расчёте методом перемещений являются основными.

После этого проверяют равновесие рамы в целом.

Кинематические проверки здесь обычно опускаются, т.к. условие неразрывности перемещений было выполнено в отдельности для каждого состояния (например, $Z_1 = 1$, и т.д.) и поэтому автоматически выполняется в окончательном решении.

Справочные данные и указания об их использовании

По данным таблицы метода перемещений в работе надо изобразить для каждого состояния основной системы (о.с.) искривлённые очертания всех стержней рамы, эпюры M и Q для них.

Используя справочные данные при построении эпюры M , следует каждый раз согласовывать расположение ординат эпюры с очертанием искривлённого стержня на схеме рамы (ординаты эпюры должны быть отложены со стороны растянутого волокна).

Используя справочные данные при построении эпюры Q , следует каждый раз направлять силы R_A и R_B (по их направлению затем определяются

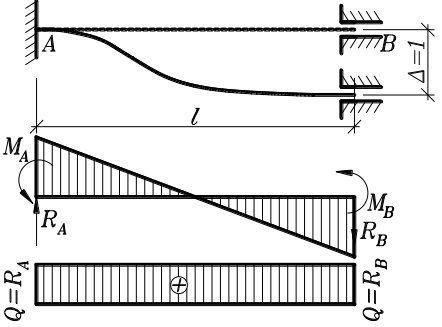
знаки ординат Q) так, чтобы уравновесить ими нагрузку, пары M_A и M_B , приложенные в концевых сечениях стержня согласно уже построенной эпюре M .

В единичных состояниях (нагрузка отсутствует), силы R_A и R_B образуют пару, уравновешивающую пары M_A и M_B . Поэтому, если M_A и M_B , судя по эпюре M , вращают стержень по ходу часовой стрелки, то R_A и R_B должны вращать в обратном направлении, т.е. будут отрицательны, и наоборот.

Таблица

№ п/п	Схема балки и воздействия на неё	Эпюры изгибающих моментов (ординаты отложены со стороны растянутого волокна) и поперечных сил
1		$M_A = -\frac{P \cdot l}{2} \cdot v \cdot (1 - v^2);$ $M_C = \frac{P \cdot l}{2} \cdot u^2 \cdot v \cdot (3 - u);$ $R_A = \frac{P \cdot v}{2} \cdot (3 - v^2);$ $R_B = P \cdot u^2 \cdot [1 + (v/2)] = \frac{P \cdot u^2}{2} \cdot (3 - u);$
2		$M_A = -\frac{q \cdot l^2}{8};$ $R_A = \frac{5 \cdot q \cdot l}{8};$ $R_B = \frac{3 \cdot q \cdot l}{8};$
3		$M_A = -u \cdot v^2 \cdot P \cdot l;$ $M_B = u^2 \cdot v \cdot P \cdot l;$ $M_C = 2 \cdot u^2 \cdot v^2 \cdot P \cdot l;$ $R_A = v^2 \cdot (1 + 2 \cdot u) \cdot P;$ $R_B = u^2 \cdot (1 + 2 \cdot v) \cdot P;$

№ п/п	Схема балки и воздействия на неё	Эпюры изгибающих моментов (ор- динаты отложены со стороны растя- нутого волокна) и поперечных сил
4		$M_A = M_B = -\frac{q \cdot l^2}{12};$ $M_C = \frac{q \cdot l^2}{8};$ $R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2};$
5		$M_A = 3 \cdot E \cdot J / l;$ $R_A = -R_B = -3 \cdot E \cdot J / l^2;$
6		$M_A = -3 \cdot E \cdot J / l^2;$ $R_A = -R_B = 3 \cdot E \cdot J / l^3;$
7		$M_A = 4 \cdot E \cdot J / l;$ $M_B = 2 \cdot E \cdot J / l;$ $R_A = -R_B = -6 \cdot E \cdot J / l^2;$

№ п/п	Схема балки и воздействия на неё	Эпюры изгибающих моментов (ординаты отложены со стороны растянутого волокна) и поперечных сил
8		$M_A = -M_B = -6 \cdot E \cdot J / l^2 ;$ $R_A = -R_B = 12 \cdot E \cdot J / l^3 ;$

4. Пример расчёта с дополнительными методическими указаниями

4.1. Задание

Необходимо построить эпюры M, Q, N в заданной (рис.1) статически неопределимой стержневой системе. Изгибная жесткость $E \cdot J_{\text{риг}} = 3 \cdot E \cdot J_{\text{ст}}$.

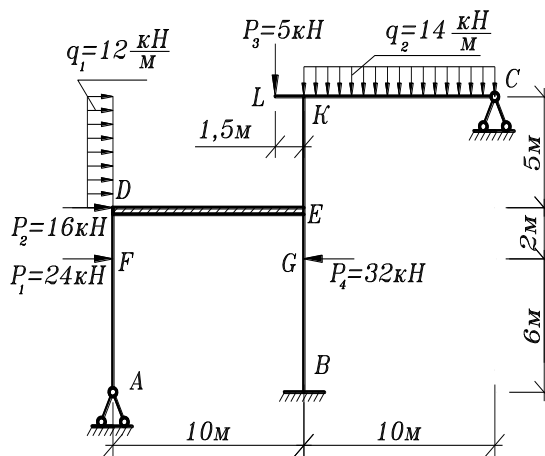


Рис.1.

4.2. Кинематический анализ расчётной схемы рамы

а) Определение степени статической неопределимости системы

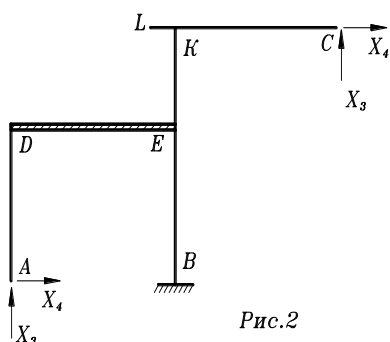


Рис.2

$$L = 3 \cdot K - Ш = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

где K – число замкнутых контуров, образованных стержнями рамы и землёй;

$Ш$ – число простых шарниров.

Рама геометрически неизменяема, имеет четыре избыточных связей, следовательно, четыре раза статически неопределима. Один из вари-

антов основной системы метода сил показан на рис.2.

б) Определение степени кинематической неопределимости системы.

$$n = n_{\text{угл}} + n_{\text{лин}}$$

Из-за бесконечно большой жёсткости ($E \cdot J = \infty$) ригеля DE узлы D и E по его концам не поворачиваются, будет только поворот узла К, т.е. $n_{\text{угл}} = 1$.

Из-за пренебрежения продольными деформациями стержней вертикальные перемещения узлов отсутствуют, возможно, горизонтальное перемещение ригеля DE. Для определения число степеней свободы $n_{\text{лин}}$ создаём шарнирную схему рамы (рис.3)

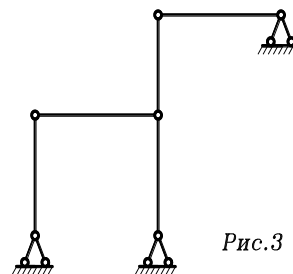
$$n_{\text{лин}} = W = 2 \cdot Y - C - C_0 = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1.$$

Общее число кинематических неизвестных

$$n = n_{\text{угл}} + n_{\text{лин}} = 1 + 1 = 2.$$

Система 2 раза кинематически неопределима.

При расчёте методом сил число неизвестных больше, чем по методу перемещений. Определение коэффициентов δ_{ik} и свободных членов Δ_{ip} так же сложнее чем r_{ik} , R_{ip} . Расчёт методом перемещений в данном случае эффективнее.



4.3. Расчёт рамы на заданную нагрузку

4.3.1. Основная система метода перемещений

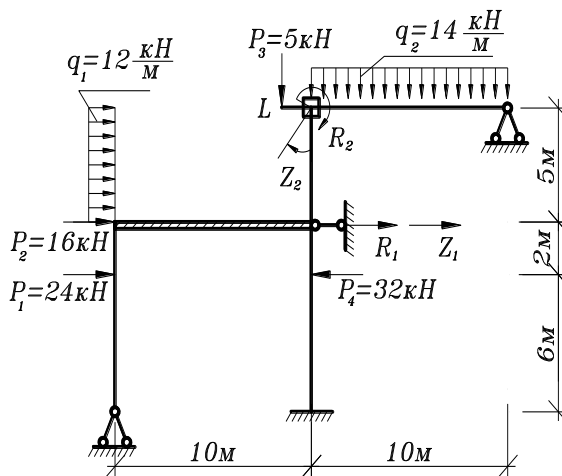


Рис.4.

На чертеже (рис.4) о.с. показаны и занумерованы основные неизвестные метода перемещений Z_1 и Z_2 , нагрузка, реакции наложенных связей R_1 и R_2 . Принятые направления основных неизвестных на схеме считаются положительными. Стержень, наложенный на узел E, фиксирует горизонтальное смещение ригеля DE. При этом возникающая реакция обозначена R_1 и

является силой. Противоповоротная “шайба”, наложенная на узел К фиксирует поворот Z_2 , возникающая реакция является парой и обозначена R_2 .

Канонические уравнения метода перемещений

$$\begin{cases} R_1 = 0 \cdots r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} = 0 \\ R_2 = 0 \cdots r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Механический смысл уравнений:

ур.№1 – полная реактивная сила в первой, наложенной на ригель DE линейной связи, вычисленная в основной системе от совместного действия всех основных неизвестных Z_1, Z_2 и внешней нагрузки равна нулю;

ур.№2 – полная реактивная пара во второй, наложенной на узел К связи (противоповоротной “шайбе”), вычисленная в основной системе от совместного действия всех основных неизвестных Z_1, Z_2 и внешней нагрузки равна нулю.

r_{12} – коэффициент уравнений – реакция (усилие) в первой наложенной связи от единичного перемещения по направлению второй наложенной связи, т.е. $Z_2 = 1$.

R_{1p} – свободный член – реакция (усилие) в первой наложенной связи от заданной внешней нагрузки.

4.3.2. Единичные состояния основной системы и соответствующие эпюры. Определение коэффициентов канонических уравнений

Состояние $Z_1 = 1$ (рис.5)

Задаём единичное перемещение в направлении первого основного неизвестного $Z_1 = 1$. Изображаем стержни в деформированном состоянии и обозначаем реакции в наложенных связях r_{11}, r_{21} . Соответствующие этому состоянию эпюры моментов m_1 и поперечных сил q_1 с вычислением ординат строим с помощью таблицы метода перемещений (рис.5).

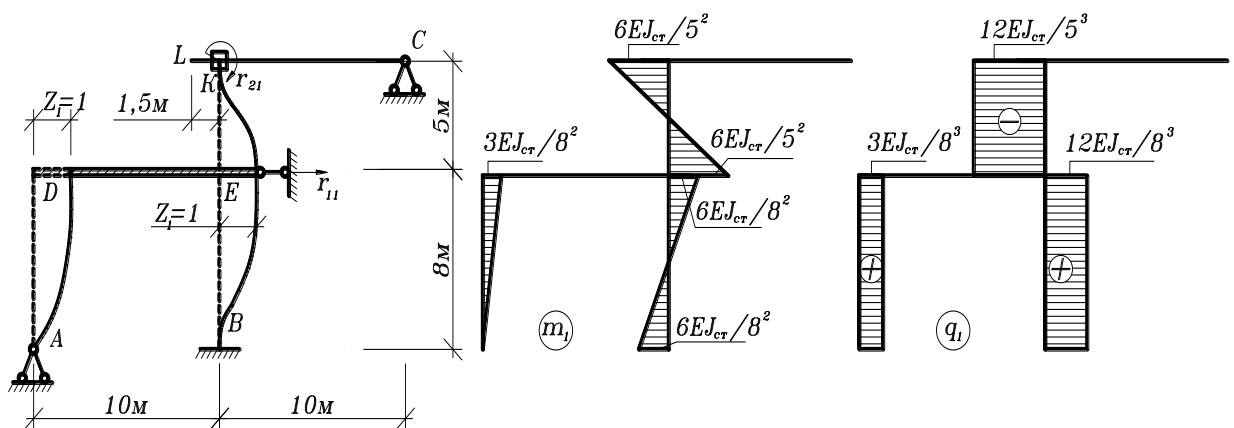


Рис.5

Коэффициент r_{11} определяем из условия равновесия отсечённого ригеля DE

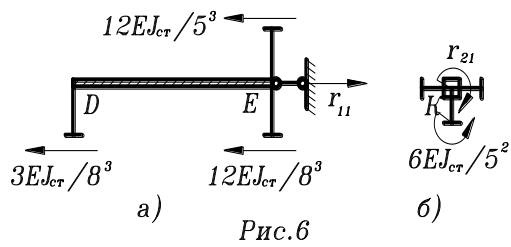


Рис.6

(рис.6,а) с данными эпюры q_1

$$\sum X = 0 \dots r_{11} - 3EJ_{cr}/8^3 - 12EJ_{cr}/8^3 - 12EJ_{cr}/5^3 = 0 \Rightarrow r_{11} = 0,1253EJ_{cr}$$

Коэффициент r_{21} определяем из условия равновесия узла (рис.6,б) К в соответствии с данными эпюры m_1

$$\sum m_K = 0 \dots r_{21} - 6EJ_{cr}/5^2 = 0 \Rightarrow r_{21} = 0,24EJ_{cr}$$

Состояние $Z_2 = 1$ (рис.7)

Задаём единичное перемещение (угол поворота по ходу часовой стрелки) в направлении второго основного неизвестного $Z_2 = 1$. Изображаем стержни в деформированном состоянии и обозначаем реакции в наложенных связях r_{12} , r_{22} . Соответствующие этому состоянию эпюры моментов m_2 и поперечных сил q_2 с вычислением ординат строим с помощью таблицы метода перемещений (рис.7).

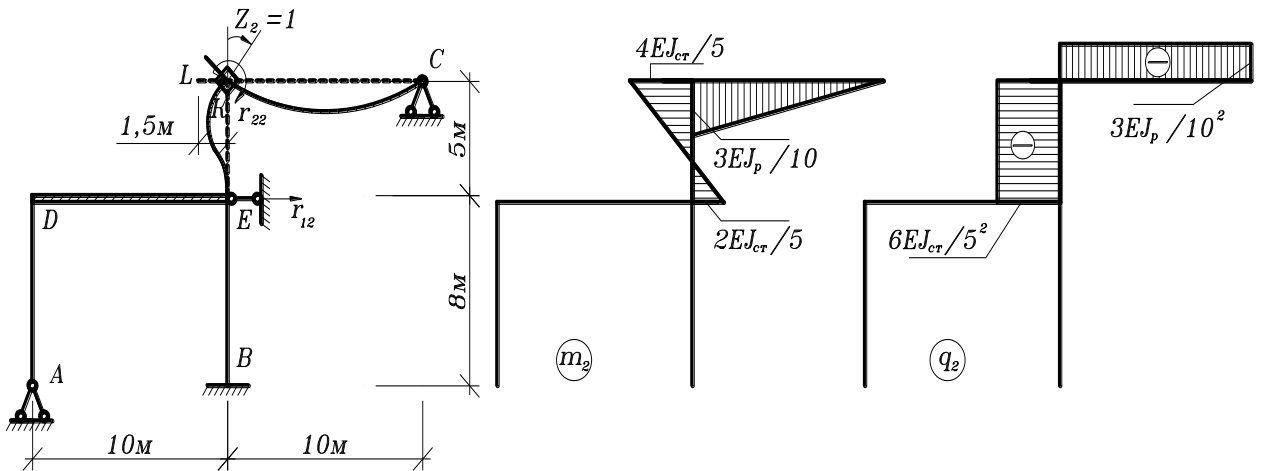


Рис.7

Из условия равновесия отсечённого ригеля DE (рис.8,а) по эпюре q_2 определяем коэффициент r_{12}

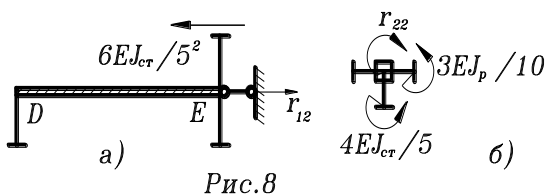


Рис.8

$$\sum X = 0 \dots r_{12} - 6EJ_{cr}/5^2 = 0 \Rightarrow r_{12} = 0,24EJ_{cr};$$

Из условия равновесия узла К (рис.8,б) по данным эпюры m_2 определяем коэффициент r_{22}

$$\sum m_K = 0 \dots r_{22} - 4EJ_{cr}/5 - 3EJ_p/10 = 0 \Rightarrow r_{22} = 1,7EJ_{cr}.$$

На основании теоремы о взаимности побочных единичных коэффициентов (реакций) проверяем условие $r_{ik} = r_{ki}$. Сравнивая, получаем, что равенство выполняется тождественно, т.е. $r_{12} = r_{21} = 0,24EJ_{ст}$.

4.3.3. Основная система под действием нагрузки и соответствующие эпюры. Определение свободных членов канонических уравнений

Состояние "P" (рис.9)

Изображаем стержни в деформированном состоянии под действием внешней нагрузки и обозначаем реакции в наложенных связях R_{1p}, R_{2p} . Соответствующие этому состоянию эпюры моментов M_p и поперечных сил Q_p с вычислением ординат строим с помощью таблицы метода перемещений (рис.9).

Для консоли LK эпюры Q_p и M_p (они окончательные) строят обычными приёмами как для статически определимой консольной балки имеющей жёсткое защемление

$$Q_p = -5 \text{ кН}; M_p = -5 \cdot x; M_p(x = 0) = 0; M_p(x = 1,5 \text{ м}) = -7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

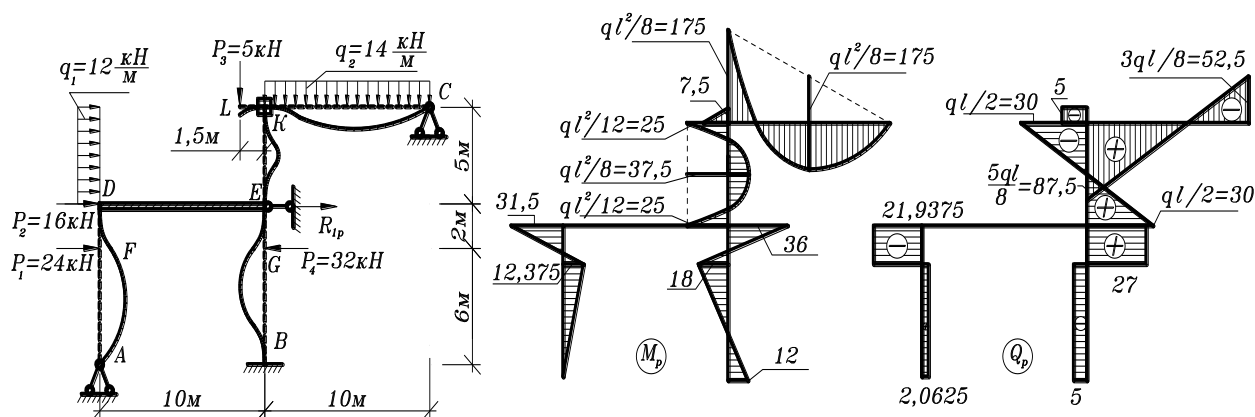


Рис.9

Стержень AD (рис.10)

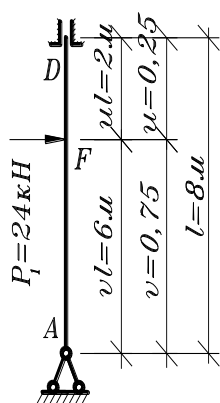


Рис.10

$$M_D = \frac{P \cdot l}{2} \cdot v \cdot (1 - v^2) = \frac{24 \cdot 8}{2} \cdot 0,75 \cdot (1 - 0,75^2) = 31,5 \text{ кНм};$$

$$M_F = \frac{P \cdot l}{2} \cdot u^2 \cdot v \cdot (3 - u) = \frac{24 \cdot 8}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75 \cdot (3 - 0,25) = 12,375 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$R_D = \frac{P \cdot v}{2} \cdot (3 - v^2) = \frac{24 \cdot 0,75}{2} \cdot (3 - 0,75^2) = 21,9375 \text{ кН};$$

$$R_A = \frac{P \cdot u^2}{2} \cdot (3 - u) = \frac{24 \cdot 0,25^2}{2} \cdot (3 - 0,25) = 2,0625 \text{ кН};$$

Стержень BE (рис. 11)

$$M_E = -u \cdot v^2 \cdot P \cdot l = -0,25 \cdot 0,75^2 \cdot 32 \cdot 8 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = u^2 \cdot v \cdot P \cdot l = 0,25^2 \cdot 0,75 \cdot 32 \cdot 8 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_G = 2 \cdot u^2 \cdot v^2 \cdot P \cdot l = 2 \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^2 \cdot 32 \cdot 8 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$R_E = v^2 \cdot (1 + 2 \cdot u) \cdot P = 0,75^2 \cdot (1 + 2 \cdot 0,25) \cdot 32 = 27 \text{ кН};$$

$$R_B = u^2 \cdot (1 + 2 \cdot v) \cdot P = 0,25^2 \cdot (1 + 2 \cdot 0,75) \cdot 32 = 5 \text{ кН}.$$

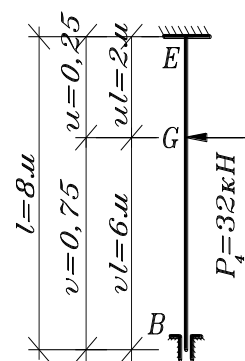


Рис.11

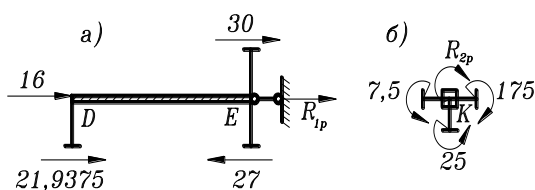


Рис.12

Свободный член R_{1p} вычисляется по эпюре Q_p . Рассматривается равновесие мысленно вырезанного ригеля DE (рис.12,а) под действием сил, показанных в сечениях, отделяющих ригель от примыкающих стержней

$$\sum X = 0 \dots R_{1p} + 16 + 30 + 21,9375 - 27 = 0 \Rightarrow R_{1p} = -40,9375 \text{ кН}.$$

Свободный член R_{2p} определяется по эпюре M_p , при рассмотрении равновесия вырезанного узла К (где установлена противоповоротная “шайба”) (рис.12,б)

$$\sum m_K = 0 \dots R_{2p} + 175 - 25 - 7,5 = 0 \Rightarrow R_{2p} = -142,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

4.3.4. Вычисление основных неизвестных

Вычисленные коэффициенты и свободные члены подставляют в канонические уравнения

$$\begin{cases} 0,1253 \cdot E \cdot J_{ст} \cdot Z_1 + 0,24 \cdot E \cdot J_{ст} \cdot Z_2 - 40,9375 = 0 \\ 0,24 \cdot E \cdot J_{ст} \cdot Z_1 + 1,7 \cdot E \cdot J_{ст} \cdot Z_2 - 142,5 = 0 \end{cases}$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений любыми известными методами, вычисляют значения основных неизвестных

$$Z_2 = 51,672/E \cdot J_{ст}; \quad Z_1 = 227,743/E \cdot J_{ст}.$$

Проверка: ур.1. $0,1253 \cdot 227,743 + 0,24 \cdot 51,672 - 40,9375 = -2 \cdot 10^{-5}$;

$$\text{ур.2. } 0,24 \cdot 227,743 + 1,7 \cdot 51,672 - 142,5 = 7,2 \cdot 10^{-4}.$$

При подстановке значений основных неизвестных в канонические уравнения получаются невязки: $-2 \cdot 10^{-5}$ в ур.№1, $7,2 \cdot 10^{-4}$ в ур.№2. Для их оценки определим погрешности, возможные из-за округления решения (при неблагоприятном сочетании знаков \pm погрешности слагаемых суммируются, поэтому коэффициенты уравнений учитываем по абсолютной величине).

$$\text{Погрешность: ур.1. } 0,05(0,1253+0,24)=1,8265 \cdot 10^{-2} > 2 \cdot 10^{-5};$$

$$\text{ур.2. } 0,05(0,24+1,7)=9,7 \cdot 10^{-2} > 7,2 \cdot 10^{-4}.$$

Полученные невязки находятся в допустимых пределах.

4.3.5. Построение окончательной эпюры изгибающего момента М

Сначала строят вспомогательные (промежуточные) эпюры $m_1 \cdot z_1$ (рис.14, а), $m_2 \cdot z_2$ (рис.14, б). Окончательная эпюра изгибающих моментов М (рис.14, в), строится на основании принципа суперпозиции путём суммирования ординат в узловых сечениях по формуле

$$M = m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + M_p \quad .$$

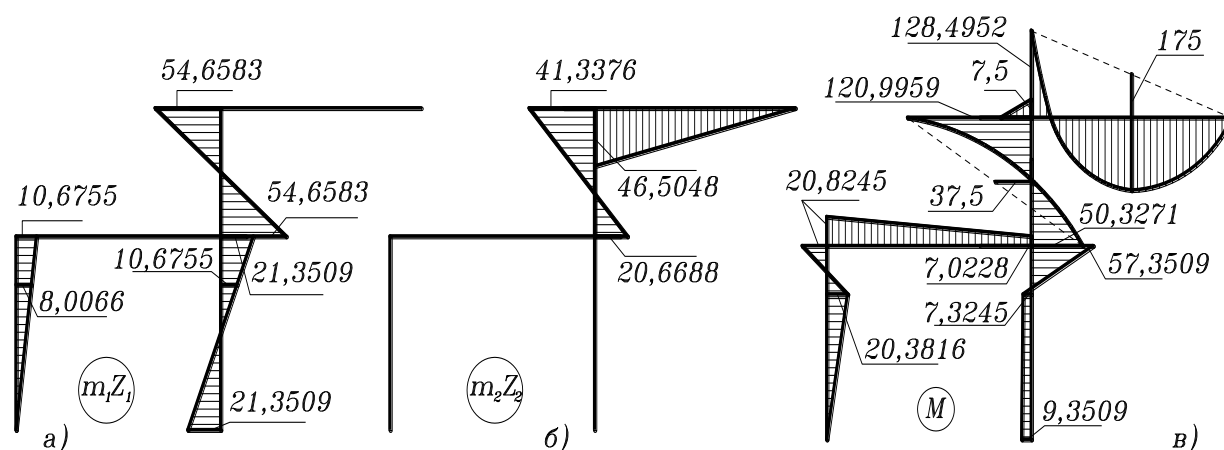


Рис.14

Ординаты М по концам бесконечно-жёсткого стержня DE определяются из условия равновесия узлов D (рис.15,а) и E (рис.15, б). Найденные узловые ординаты М на ненагруженных стержнях соединяются прямой. На нагруженных равномерно распределённой нагрузкой стержнях ЕК и КС узловые ординаты соединяются прямыми (штриховые линии), к которым “подвешиваются” (как на эпюре M_p) соответствующие балочные эпюры параболического очертания от этих нагрузок с ординатами посередине 37,5 кН·м и 175 кН·м соответственно.

Проверка равновесия узлов по окончательной эпюре М (рис.15,а, б, в)

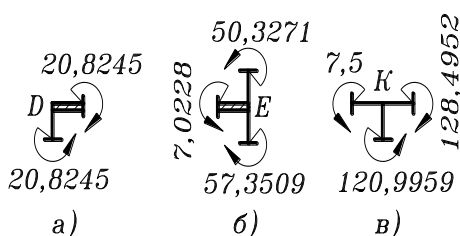


Рис.15

$$\begin{aligned} \sum M_D &= 0 \dots 20,8245 - 20,8245 = 0; \\ \sum M_E &= 0 \dots 57,3509 - 7,0228 - 50,3271 = \\ &= 0,001 \approx 0; \\ \sum M_K &= 0 \dots 128,4952 - 120,9959 - 7,5 = \\ &= -0,0007 \approx 0. \end{aligned}$$

4.3.6. Построение окончательной эпюры поперечной силы Q

Окончательная эпюра поперечной силы Q (рис.17, а) строится по данным эпюры M , где рассматривается равновесие стержней (рис.16) с применением уравнений равновесия.

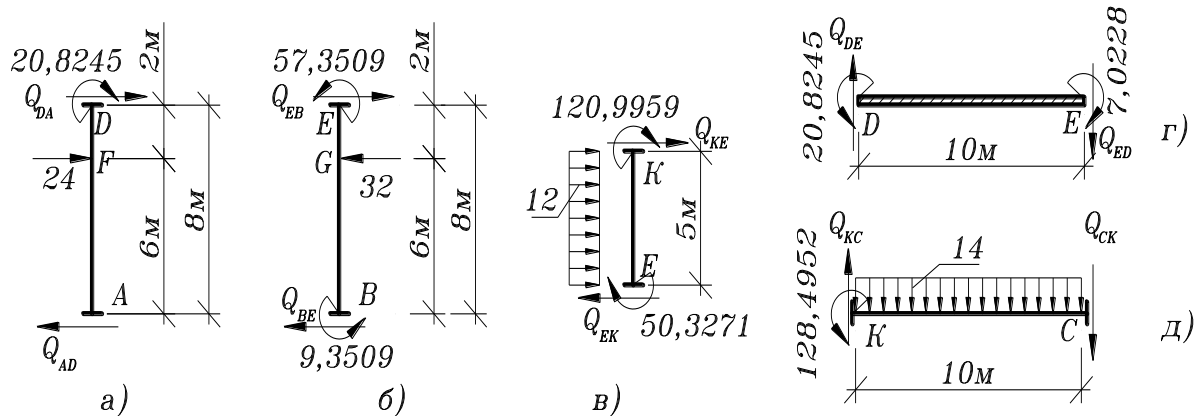


Рис.16

Для нагруженных стержней AD, BE, EK, KC составляются по два уравнения моментов относительно их концов.

Стержень AD (рис.16,а):

$$\sum M_A = 0 \dots Q_{DA} \cdot 8 + 20,8245 + 24 \cdot 6 = 0 \Rightarrow Q_{DA} = -20,603 \text{кН};$$

$$\sum M_D = 0 \dots Q_{AD} \cdot 8 + 20,8245 - 24 \cdot 2 = 0 \Rightarrow Q_{AD} = 3,397 \text{кН};$$

Стержень BE (рис.16,б):

$$\sum M_B = 0 \dots Q_{EB} \cdot 8 - 57,3509 - 9,3509 - 32 \cdot 6 = 0 \Rightarrow Q_{EB} = 32,338 \text{кН};$$

$$\sum M_E = 0 \dots Q_{BE} \cdot 8 - 57,3509 - 9,3509 + 32 \cdot 2 = 0 \Rightarrow Q_{BE} = 0,338 \text{кН};$$

Стержень KE (рис.16,в):

$$\sum M_E = 0 \dots Q_{KE} \cdot 5 + 12 \cdot 5 \cdot 2,5 + 120,9959 + 50,3271 = 0$$

$$\Rightarrow Q_{KE} = -64,265 \text{кН};$$

$$\sum M_K = 0 \dots Q_{EK} \cdot 5 - 12 \cdot 5 \cdot 2,5 + 120,9959 + 50,3271 = 0$$

$$\Rightarrow Q_{EK} = -4,265 \text{кН};$$

Стержень KC (рис.16, д):

$$\sum M_C = 0 \dots Q_{KC} \cdot 5 - 14 \cdot 10 \cdot 5 - 128,4952 = 0 \Rightarrow Q_{KC} = 82,8495 \text{кН};$$

$$\sum M_K = 0 \dots Q_{CK} \cdot 5 + 14 \cdot 10 \cdot 5 - 128,4952 = 0 \Rightarrow Q_{CK} = -57,1505 \text{кН};$$

Для ненагруженного стержня DE, где поперечная сила по концам образует пару, составляется одно уравнение моментов.

Стержень DE (рис.16, г):

$$\sum M_E = 0 \dots Q_{DE} \cdot 10 - 20,8245 + 7,0228 = 0 \Rightarrow Q_{DE} = Q_{ED} = 1,3802 \text{кН};$$

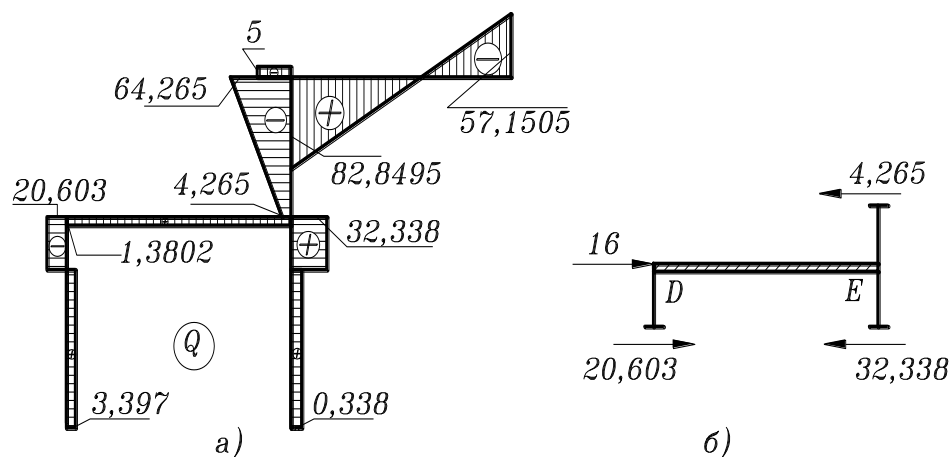


Рис.17

Основная проверка (рис.17, б). Правильность составления и тождественное удовлетворение первого канонического уравнения контролируется условием равновесия $\sum X = 0$ ригеля DE, (ранее этим же уравнением определялись коэффициенты и свободный член указанного уравнения)

$$\sum X = 0 \dots 16 + 20,603 - 32,338 - 4,265 = 0.$$

4.3.7. Построение окончательной эпюры продольной силы N

Окончательная эпюра N (рис.18,г) строится по данным эпюры Q, рассматривая равновесие узлов.

Из условий равновесия стержней (уравнение проекций на ось стержня) убеждаемся, что продольные силы в каждом стержне постоянны, и значения $N_{ki} = N_{ik}$.

Далее используем уравнения равновесия узлов. Начинаем с узла D, где имеем две неизвестных (рис.18, а). С учётом узловой нагрузки и известных поперечных сил получаем:

Узел D (рис.18,а)

$$\sum X = 0 \dots N_{DE} + 16 + 20,603 = 0 \Rightarrow N_{DE} = -36,603 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0 \dots -N_{DA} - 1,3802 = 0 \Rightarrow N_{DA} = -1,3802 \text{ кН};$$

Для консоли LK продольная сила $N_{KL} = 0$, т.к. на торце L нет нагрузки вдоль оси стержня ($N_{KL} = N_{LK} = 0$);

Узел K (рис.18,б)

$$\sum X = 0 \dots N_{KC} + 64,265 = 0 \Rightarrow N_{KC} = -64,265 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0 \dots -N_{KE} - 82,8495 - 5 = 0 \Rightarrow N_{KE} = -87,8495 \text{ кН};$$

Далее из тех же уравнений для узла E с учётом уже известных продольных и поперечных сил, получаем

Узел E (рис.18,в)

$$\sum X = 0 \dots -N_{ED} - 4,265 - 32,338 = 0 \Rightarrow N_{ED} = -36,603 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0 \dots -N_{EB} + N_{EK} + 1,3802 = 0 \Rightarrow N_{EB} = -86,4693 \text{ кН};$$

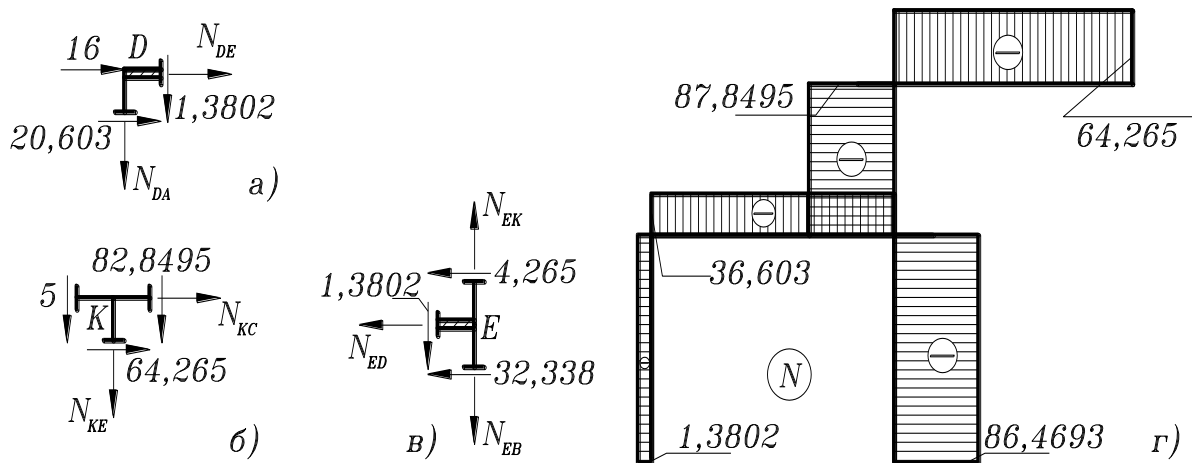


Рис.18

4.3.8. Проверка равновесия рамы в целом

Рассматриваем схему рамы с заданной внешней нагрузкой и опорными реакциями, определёнными по значениям ординат окончательных эпюр M, Q, N в опорных сечениях (рис.19).

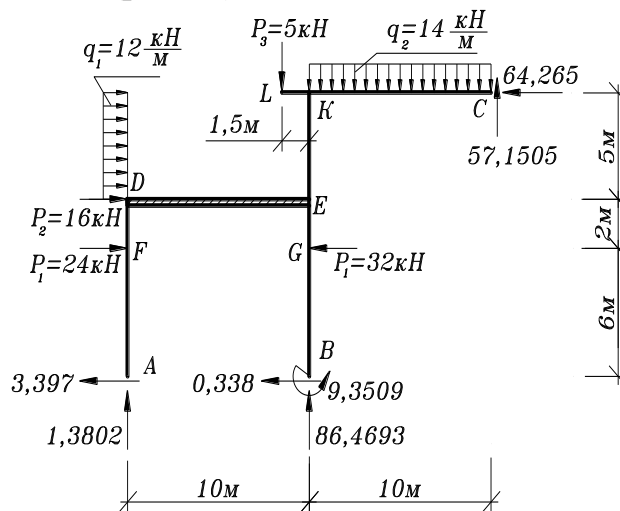


Рис.19.

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 \dots 24+16+12 \cdot 5-32-3,397-0,338-64,265=100-100=0; \\ \sum Y &= 0 \dots 1,3802+86,4693+57,1505-5-14 \cdot 10=145-145=0; \\ \sum M_B &= 0 \dots 1,3802 \cdot 10+24 \cdot 6+16 \cdot 8+12 \cdot 5 \cdot 10,5-9,3509-32 \cdot 6-5 \cdot 1,5+14 \cdot 10 \cdot 5- \\ &-57,1505 \cdot 10-64,265 \cdot 13=13,802+144+128+630-9,3509-192-7,5+700- \\ &-571,505-835,445=1615,802-1615,8009=0,0011 \approx 0. \end{aligned}$$

Погрешность составляет

$$\delta = \frac{0,0011}{1615,8009} \cdot 100\% = 6,8 \cdot 10^{-5} < 1\% .$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие два вида перемещений принимаются за основные неизвестные метода перемещений? Как определяется их количество - степень кинематической неопределимости?
2. Какое значение имеет для определения количества неизвестных линейных перемещений (горизонтальных или вертикальных) допущение о “нерастяжимости” стержней рамы (ригелей и стоек)?
3. Какое значение имеет для определения количества неизвестных угловых перемещений допущение о “бесконечной жёсткости” при изгибе некоторых стержней?
4. В чём особенность расчёта рамы методом перемещений в которой все основные неизвестные – угловые перемещения (“рамы с несмещаемыми узлами” или “несвободной рамы”)?
5. Приведите пример рамы, при расчёте которой методом перемещений все основные неизвестные – линейные перемещения.
6. Как образуется основная система при расчёте рамы методом перемещений? Как определяется количество дополнительно вводимых воображаемых связей? В каких случаях, и какого вида связи вводятся?
7. Как изменяется степень статической неопределённости рам при преобразовании её в основную систему метода перемещений?
8. Какие “табличные” данные, и для каких задач используются в процессе расчёта рамы методом перемещений? Обратите внимание на разные размерности ординат в различных задачах.
9. В каких случаях необходимы ординаты только для эпюр M , а в каких случаях – также и ординаты для эпюр Q ?
10. Как изображается очертание изогнутой оси стержня с двумя защемлёнными концами при действии поперечной нагрузки, и при заданном повороте одного конца? Обратите внимание на расположение точек перегиба и на положение касательных к кривой на концах стержня.
11. То же для стержня с одним защемлённым, а другим шарнирно опёртым концом; то же для консольного стержня.
12. Как изображается очертание изогнутой оси стержня с двумя защемлёнными концами при симметричном повороте обоих концов? То же при антисимметричном повороте?
13. Какое очертание имеет эпюры M для задач, названных в п.11 и п.12? Как связано расположение ординат эпюры M на разных участках с кривизной изогнутой оси?
14. Какое очертание имеют эпюры Q для тех же задач? Как определяются знаки и значения ординат Q по данным эпюры M ?
15. В чём состоят условия эквивалентности основной системы метода перемещений и заданной системы? Как записываются эти условия? Как запи-

- сываются в общем виде вытекающие из этих условий канонические уравнения метода перемещений (КУМП)?
16. Как формулируется механический смысл КУМП применительно к случаям наложения дополнительных связей против вращения узлов (противоповоротных “шайб” или “плавающих заделок”)?
 17. Как формулируется механический смысл КУМП в общем виде?
 18. Каков механический смысл отдельных слагаемых левой части КУМП (свободного члена, члена с неизвестными)?
 19. Каков механический смысл любого коэффициента КУМП (r_{ki})? Что означает первый индекс и что второй – в его обозначении?
 20. Откуда следует свойство взаимности побочных коэффициентов КУМП ($r_{ki} = r_{ik}$)? Как оно используется при расчёте?
 21. Как определяются реактивные пары “шайб”, образующие коэффициенты и свободные члены КУМП?
 22. Как определяются реактивные силы стержней, образующие коэффициенты и свободные члены КУМП?
 23. Как учитываются в расчёте размеры поперечных сечений стержней рамы? Как учитываются свойства материала?
 24. Как выполняется построение окончательной эпюры M после нахождения основных неизвестных?
 25. В чём особенность составления КУМП при расчёте на изменение температуры? То же при расчёте на заданное смещение опор.
 26. Чем отличается построение окончательных эпюр M при расчёте на изменение температуры по методу перемещений и по методу сил? То же при расчёте на смещение опор.
 27. Какие проверки являются основными при расчёте методом перемещений (контролируется составление и решение КУМП)? В каких случаях они могут быть выполнены целиком по эпюре M , а когда требуют построения также и эпюры Q ?
 28. Как выполняется при расчёте методом перемещений построение окончательных эпюр Q и N ?
 29. В чём особенность основных неизвестных метода перемещений, определяемых при расчёте на антисимметричную нагрузку?
 30. В чём особенности приёмов образования основной системы в этих случаях? В чём особенности определения коэффициентов свободных членов?
 31. В чём особенности эпюр M , Q , N , построенных при расчёте рамы на симметричную и антисимметричную нагрузку?
 32. В каких случаях расчёт рамы проще выполняется методом перемещений, и в каких методом сил?
 33. Можно ли при расчёте симметричной рамы на антисимметричную составляющую нагрузки использовать один метод, при расчёте на симметричную составляющую другой метод? Как называется такой способ расчёта? Когда следует его применять? Как получить окончательные эпюры?

34. Можно ли применять при расчёте основную систему, образованную путём одновременного удаления связей и наложения других связей? Когда это приводит к упрощению расчёта? Что принимается в этом случае за основные неизвестные? Как формулируются условия эквивалентности основной и заданной системы? Как называется такой способ расчёта? Кто его автор?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дарков, А.В. Строительная механика / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников – М.: Высшая школа, 1986. – 606 с.
2. Расчёт статически неопределимой рамы методом перемещений: методические указания по курсу “Строительная механика”/ Воронеж, инж.-строит.инс.-тут; Сост.: Р.И. Мальцев. Воронеж, 1993, 23с.
3. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Часть II. Статически неопределимые системы/ Учебное пособие. Изд-во Ассоциации строительных вузов (АСВ), Москва, 2000, 464с.

СОДЕРЖАНИЕ

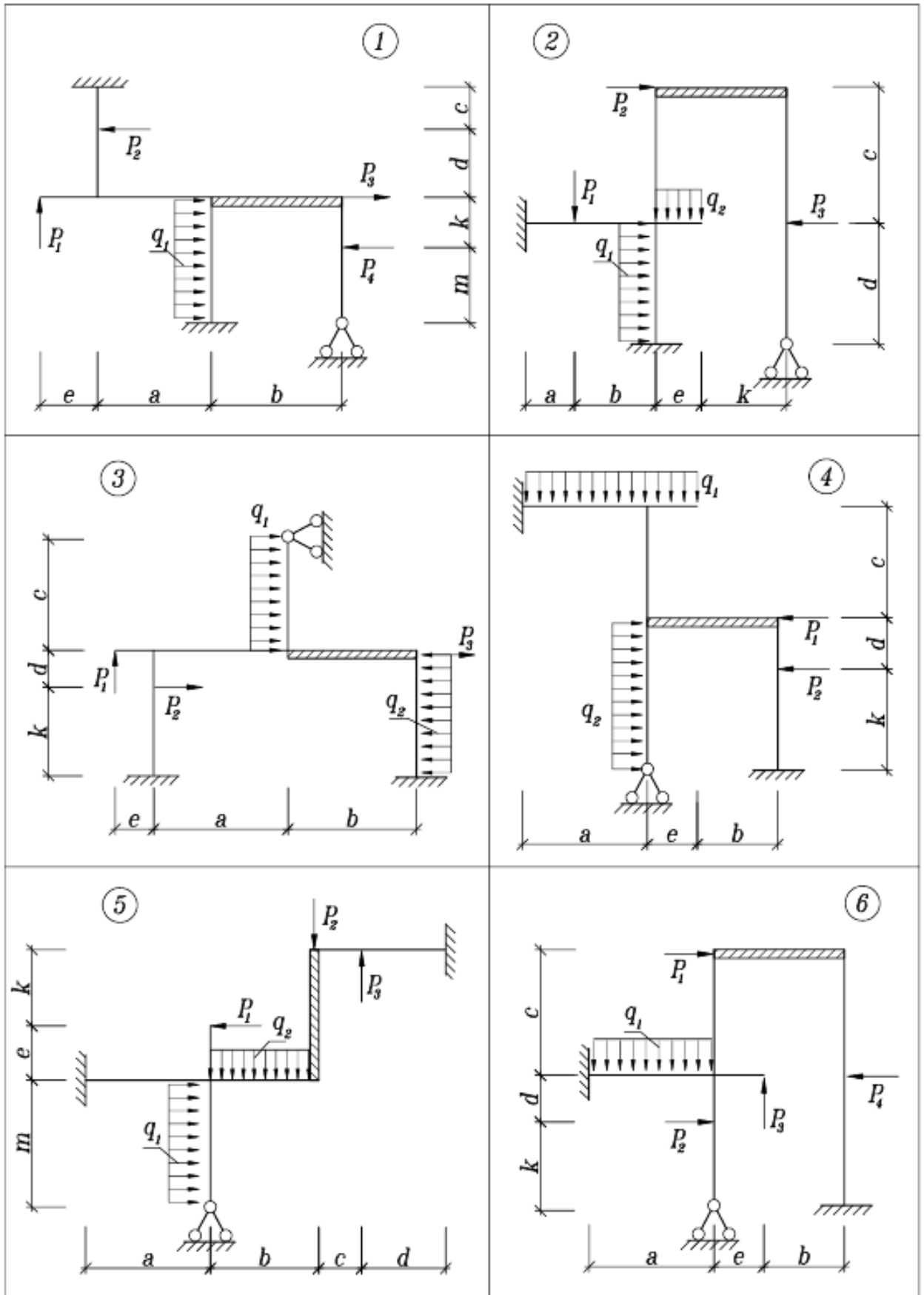
	стр.
Введение.....	3
1. Задание на выполнение расчётной работы.....	3
2. Содержание расчётной работы с указаниями по оформлению	3
3. Общие методические указания	5
4. Пример расчета с дополнительными методическими указаниями.....	11
4.1. Задание	11
4.2. Кинематический анализ расчётной схемы рамы.....	11
4.3. Расчёт рамы на заданную нагрузку.....	12
4.3.1. Основная система и канонические уравнения метода перемещений.....	12
4.3.2. Единичные состояния основной системы и соответствующие эпюры. Определение коэффициентов канонических уравнений	13
4.3.3. Основная система под действием нагрузки и соответствующие эпюры. Определение свободных членов канонических уравнений..	15
4.3.4. Вычисление основных неизвестных.....	16
4.3.5. Построение окончательной эпюры изгибающего момента M.....	17
4.3.6. Построение окончательной эпюры поперечной силы Q.....	18
4.3.7. Построение окончательной эпюры продольной силы N.....	19
4.3.8. Проверка равновесия рамы в целом.....	20
Контрольные вопросы.....	21
Библиографический список.....	23
Приложение 1. Исходные данные к расчётным схемам рам.....	24
Расчётные схемы рам.....	26

Исходные данные к расчётным схемам рам

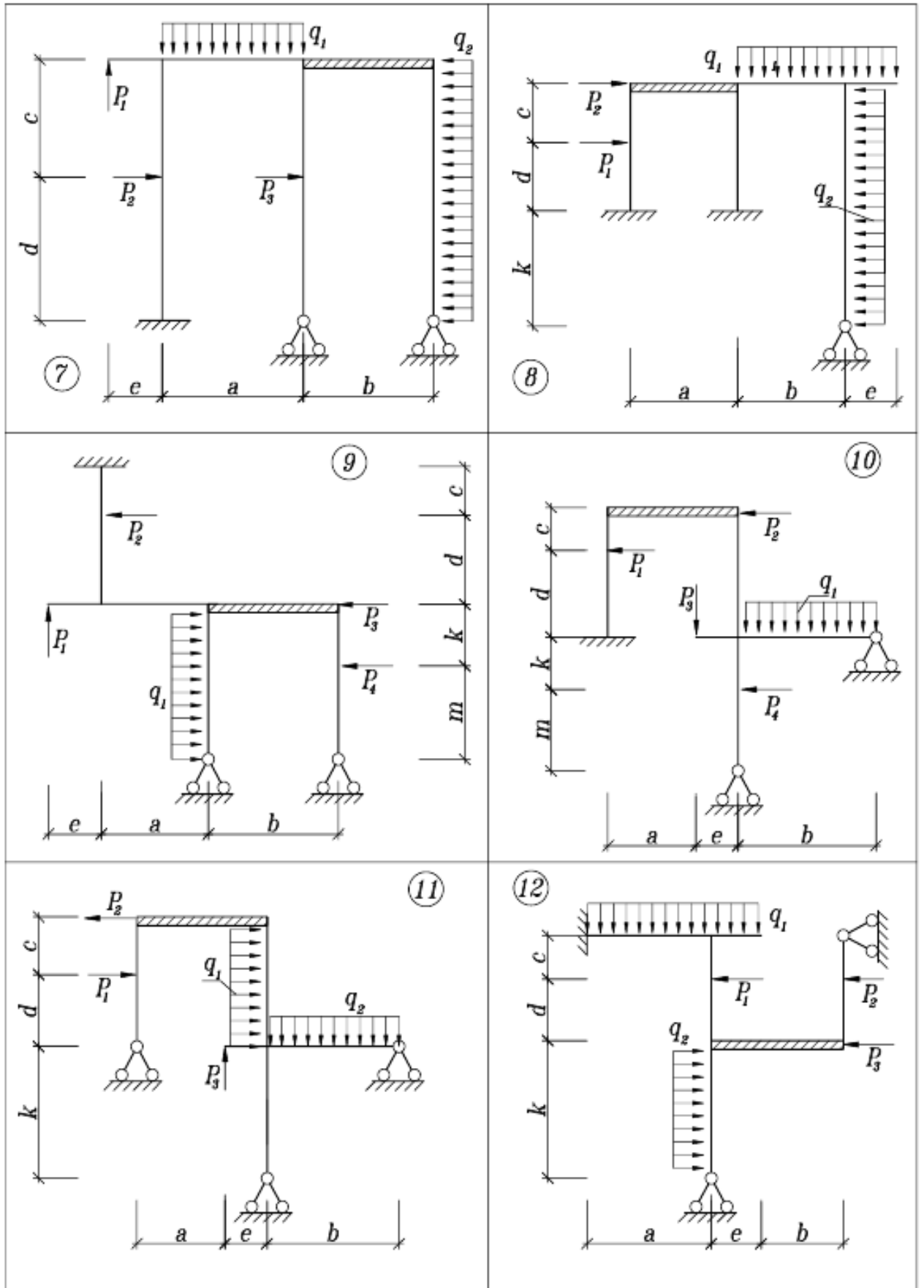
Таблица П.1

Буквы	Первая буква фамилии	Вторая буква фамилии				Первая буква имени			Вторая буква имени		Первая буква отчества				Вторая буква отчества
	Схема рамы	Размеры, м				Размеры, м			Распределённая нагрузка, кН/м		Сосредоточенная сила, кН				Жёсткость
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>k</i>	<i>m</i>	<i>q</i> ₁	<i>q</i> ₂	<i>P</i> ₁	<i>P</i> ₂	<i>P</i> ₃	<i>P</i> ₄	$E \cdot J_{\text{риг}} / E \cdot J_{\text{ст}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
А	1	5	4	6	4	2	5	6	7	9	12	15	25	16	2
Б	2	7	5	4	6	3	4	7	12	5	18	28	15	22	3
В	3	6	5	4	7	1,5	5	6	13	17	9	17	26	32	2,4
Г	4	5	7	6	5	2,2	4	4	14	16	10	16	15	23	2
Д	5	6	4	5	6	2,6	5	5	5	12	15	22	18	25	3
Е	6	8	8	7	5	2	6	7	16	14	18	25	20	27	3,5
Ж	7	7	8	4	6	2,4	4	5	13	9	10	24	32	18	2,4
З	8	9	7	5	5	2,2	6	5	17	7	28	34	12	24	2,2
И	9	8	8	7	7	1,5	5	6	9	15	12	18	25	23	2,6
К	10	5	7	5	6	1,8	9	8	17	14	16	7	28	18	3,2
Л	11	7	9	5	6	2,5	9	8	6	16	12	18	23	15	2,5
М	12	9	8	7	5	2,4	6	9	5	13	32	23	10	36	3,4
Н	13	9	7	4	6	2,6	7	6	15	19	20	30	12	17	2
О	14	7	9	6	5	2	8	7	12	18	22	15	19	13	3
П	15	10	8	5	7	3	7	5	18	12	16	24	28	14	2,8
Р	16	7	9	5	4	2,4	6	4	5	9	30	25	20	18	2,5
С	17	9	7	7	8	3	7	5	13	18	26	34	23	14	2,2
Т	18	6	9	5	5	2,2	4	5	14	20	22	15	28	18	2,4
У	19	5	6	7	5	4	6	7	9	12	28	16	20	25	2,6
Ф	20	7	9	4	6	2,5	5	6	10	14	18	12	14	20	3,2

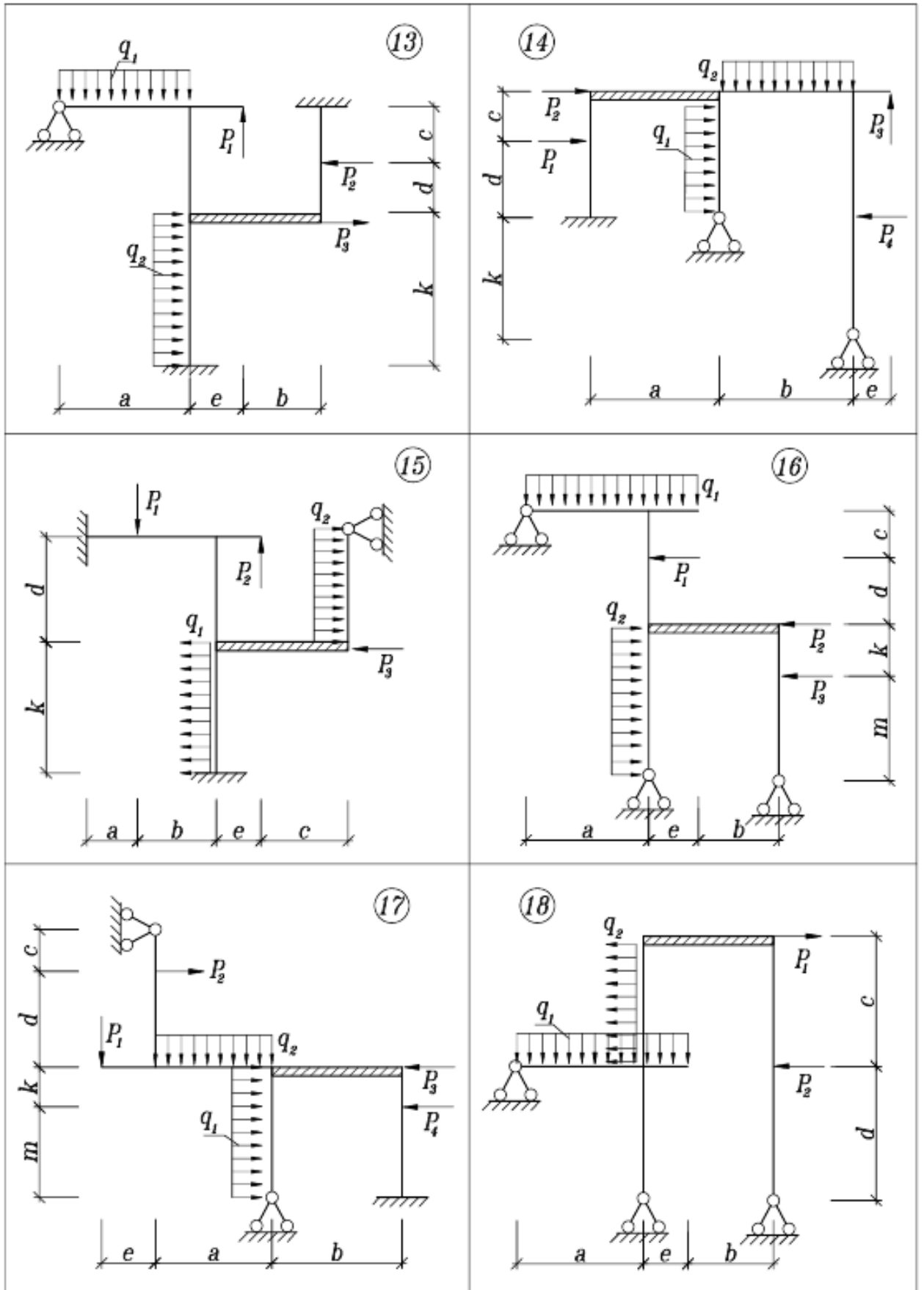
Бук- вы	Первая буква фамилии	Вторая буква фамилии				Первая буква имени			Вторая буква имени		Первая буква отчества				Вторая буква отчества
		Размеры, м				Размеры, м			Распределён- ная нагрузка, кН/м		Сосредоточенная сила, кН				Жёсткость
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>k</i>	<i>m</i>	<i>q</i> ₁	<i>q</i> ₂	<i>P</i> ₁	<i>P</i> ₂	<i>P</i> ₃	<i>P</i> ₄	$E \cdot J_{\text{риг}}/E \cdot J_{\text{ст}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Х	21	10	8	5	3	2	6	6	15	18	13	20	25	17	2,8
Ц	22	12	6	7	5	2,8	5	8	12	15	25	18	24	26	3
Ч	23	10	7	9	6	2,6	7	6	7	16	10	22	30	28	2
Ш	24	9	8	7	9	3,2	6	4	18	6	15	28	20	30	3,4
Щ	25	7	6	5	4	2,7	5	6	10	12	16	26	36	20	2,6
Э	26	10	7	6	5	2,5	5	7	9	15	12	22	32	16	3,4
Ю	27	12	10	7	4	2,4	9	6	14	16	14	34	24	18	2,4
Я	28	9	7	6	6	1,8	10	8	15	18	20	12	30	25	3



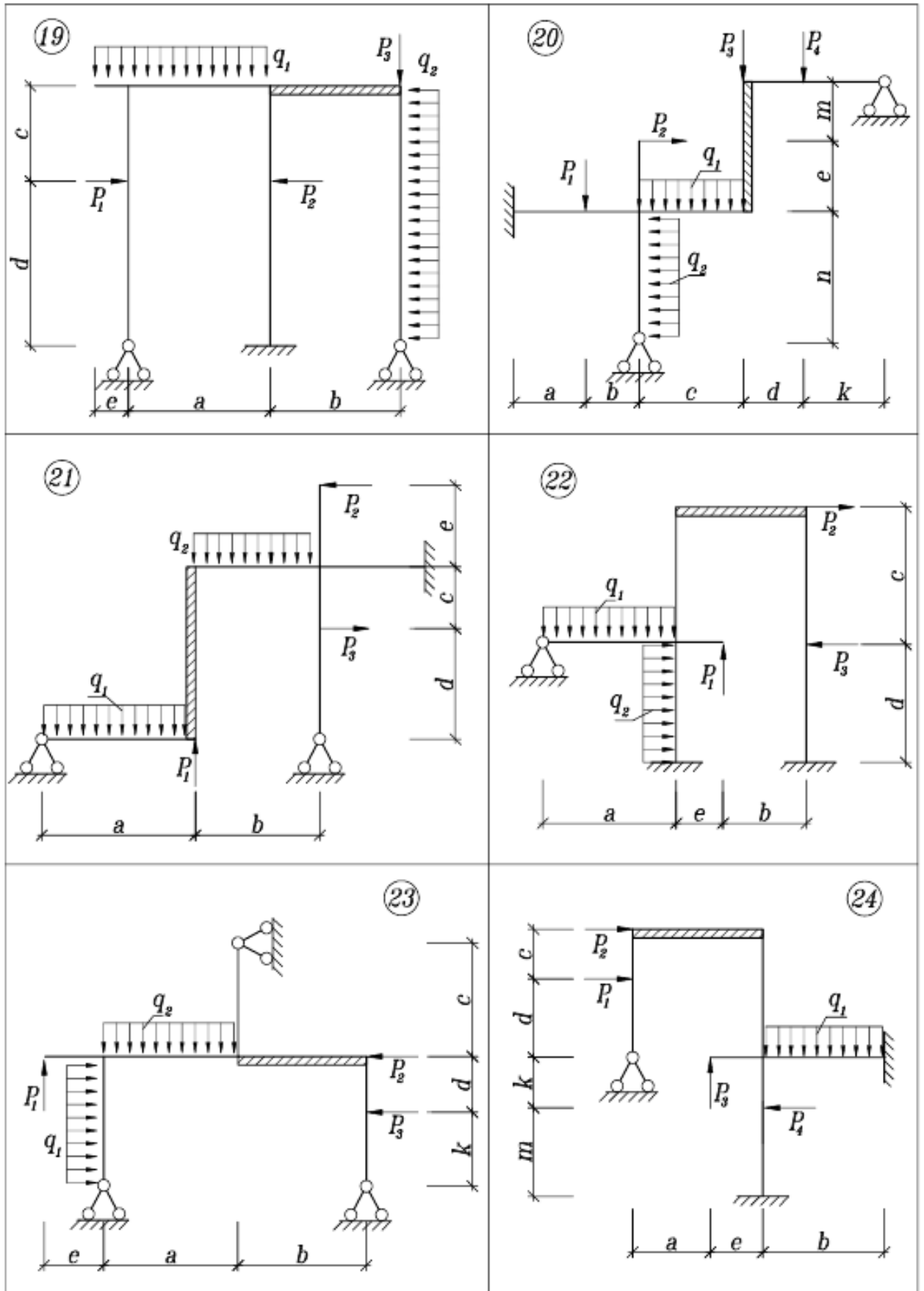
Расчётные схемы рам



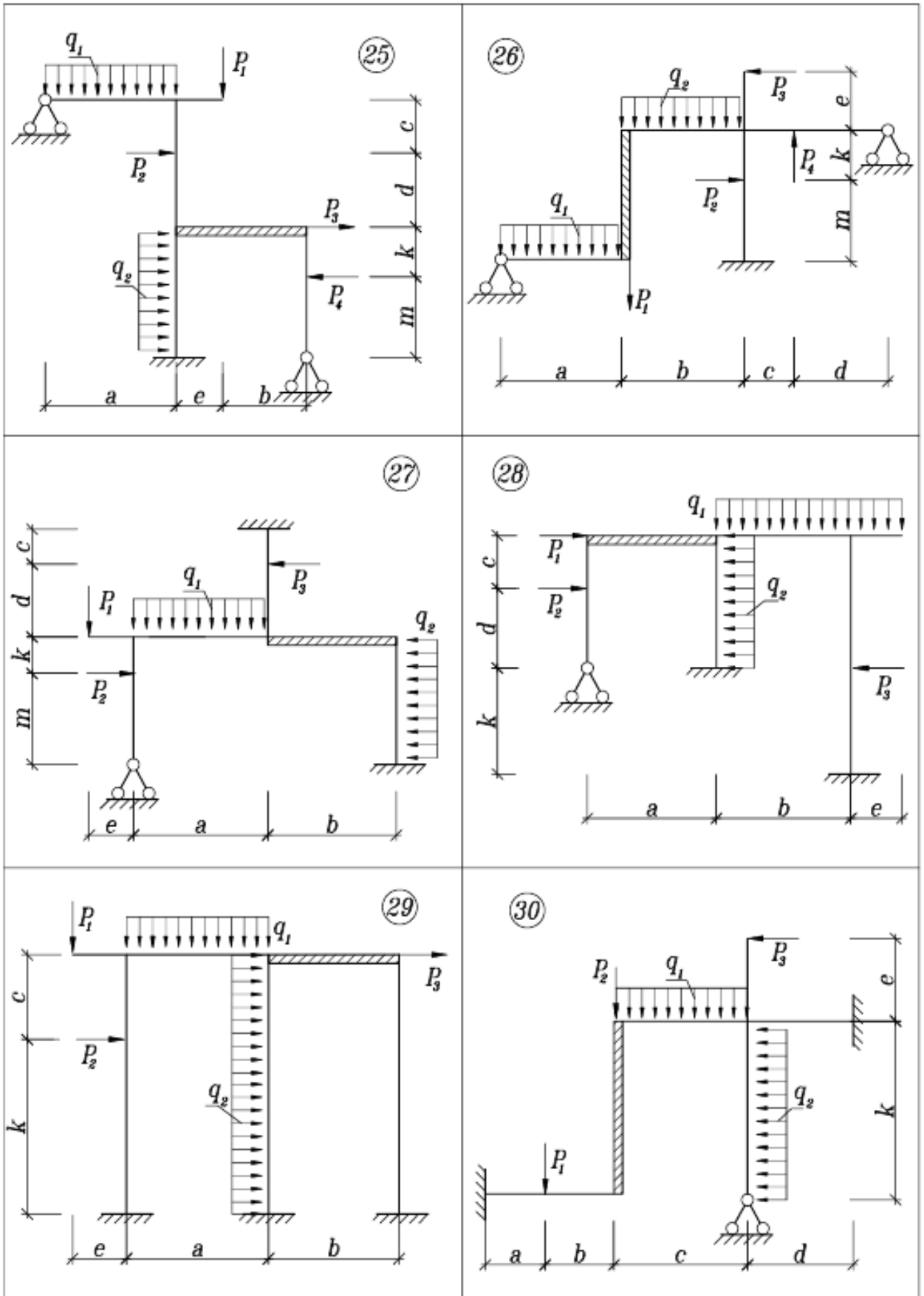
Расчётные схемы рам



Расчётные схемы рам



Расчётные схемы рам



Расчётные схемы рам

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Методические указания
к выполнению расчетно-графической работы
по курсу «Строительная механика» для студентов,
обучающихся по направлению «**Строительство**»
и «**Строительство уникальных зданий и сооружений**»

Составитель: ст. преп. Ринат Абдуллаевич Мухтаров

Подписано в печать Формат 60x84 1/16. Уч. изд. 2.0.
Усл. печ. 2.1 Бумага писчая. Тираж 150 экз. Заказ № **300**

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии издательства учебной
литературы и учебно-методических пособий ВГТУ
394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября 84