ФГ БОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования)

ЭЛЕМЕНТЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы
по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201
«Управление и информатика в технических системах», 140604
«Электропривод и автоматика промышленных установок
и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика»,
110302 «Электрификация и автоматизация сельского
хозяйства» очной формы обучения

Составители: Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов,
А.В. Купцов

Ur-Mat.rar 440 K байт 14.06.2011 уч.-изд. 3.1 л.
(название файла) (объем файла) (дата) (объем издания)

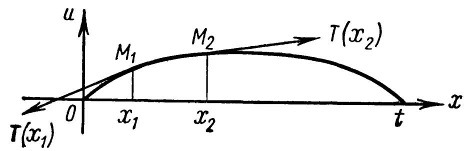
ФГ БОУВПО «Воронежский государственный технический университет »

Кафедра высшей математики и физико-математического моделирования

ЭЛЕМЕНТЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы
по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения



Воронеж 2011

Составители: ст. преп. Г.Ф. Федотенко, канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, канд. физ.-мат. наук А.В. Купцов

УДК 517

Элементы уравнений математической физики: методические указания по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 « Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения / ФГ БОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж, 2011. 50 с.

Методическое указание содержат теоретический материал, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле « Ur-Mat.rar »

Ил. 2. Библиогр.: 7 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. М.В. Юрьева

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых задач типового расчета по теме:“ Элементы уравнений математической физики ”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

В данной работе изложены основные понятия из теории функции нескольких переменных. Методическое указание содержит большое количество задач для проведения практических и индивидуальных занятий. К задачам даны ответы, большое количество пояснений дает возможность многие примеры выносить на самостоятельную работу.

1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1.1. Уравнение колебаний струны

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. Под струной понимают тонкую нить, которая может свободно изгибаться, т. е. не оказывает сопротивления изменению ее формы, не связанному с изменением ее длины. Сила натяжения То, действующая на струну, предполагается значительной, так что можно пренебречь действием силы тяжести.

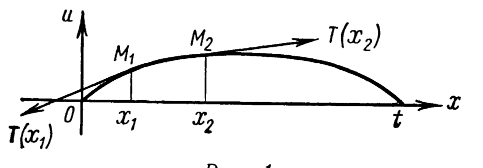


Рис. 1

Пусть в положении равновесия струна направлена по оси Ох. Будем рассматривать только Рис. 1 поперечные колебания струны, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикулярно оси Ох.

Обозначим через u(x, t) смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции u(x, t), очевидно, дает форму струны в этот момент времени (рис. 1). Рассматривая далее только малые колебания струны, будем считать, что смещение u(x, t), а также производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами. Выделим произвольный участок (x1, x2) струны (см. рис. 1), который при колебании струны деформируется в участок M1,M2.

Длина дуги этого участка в момент времени t равна

$$S' = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1 + u_x^2}\, dx \approx x_2 - x_1 = S,$$

вследствие чего можно считать, что в процессе малых колебаний удлинения участков струны не происходит. Отсюда в силу закона Гука следует, что величина натяжения Т в каждой точке струны не меняется со временем. Таким образом, при наших предположениях изменением величины натяжения струны, возникающим при ее движении, можно пренебречь по сравнению с натяжением, которому она была уже подвергнута в положении равновесия.

Покажем, что величину натяжения Т можно считать не зависящей от x, т. е. Т ≈ То. Действительно, на участок М1М2 струны действуют силы натяжения, направленные по касательным к струне в точках М1 и М2, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций на ось Ох всех этих сил должна равняться нулю. Так как мы рассматриваем только поперечные колебания, то силы инерции и внешние силы направлены параллельно оси Оu, тогда

$$T(x_1)\cos\alpha(x_1)-T(x_2)\cos\alpha(x_2)=0,$$

где a(x) — угол между касательной в точке с абсциссой x к струне в момент времени t с положительным направлением оси x. В силу малости колебаний

$$\cos\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx 1$$ и $T(x_1)\approx T(x_2)$..

Сумма проекций на ось Ou сил натяжения, действующих в точках M1 и M2, равняется $Y=T_0[\sin\alpha(x_2)-\sin(x_1)]$, но вследствие наших предположений

$$\sin\alpha(x)=\frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}}=\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$Y=T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right].$$

Замечая теперь, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx,$$ окончательно получим

$$Y=T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \qquad (1)$$

Обозначим через p(x, t) внешнюю силу, действующую на струну параллельно оси Ou и рассчитанную на единицу длины. Тогда проекция на ось Ou внешней силы, действующей на участок M1M2 струны, будет равна

$$\int_{x_1}^{x_2}p(x,t)dx \qquad (2$$

Пусть p(x) — линейная плотность струны, тогда сила инерции участка M1M2 струны будет равна

$$-\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx \qquad (3)$$

Сумма проекций (1)-(3) на ось Ou всех сил, действующих на участок M1M2 струны, должна быть равна нулю, т. е.

$$\int_{x_1}^{x}\left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+p(x,t)\right]dx=0\,.$$

Отсюда ввиду произвольности x1 и x2 следует, что подынтегральная функция должна равняться нулю для каждой точки струны в любой момент времени t, т. е.

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p(x,t) \tag{4}$$

Это есть искомое уравнение колебаний струны.

Если p = const, т. е. в случае однородной струны, уравнение (4) обычно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{5}$$

где $a=\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}},\, f(x,t)=\dfrac{p(x,t)}{\rho}.$ (6)

Если внешняя сила отсутствует, то p(x, t) = 0 и получаем уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Уравнение (4) имеет бесчисленное множество частных решений. Поэтому одного уравнения (4) недостаточно для полного определения движения струны; нужны еще некоторые дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи. Так, в начальный момент времени t = 0 нужно задать положение и скорость всех точек струны

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x),\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x). \tag{8}$$

Условия (8) называются начальными условиями. Так как струна ограничена, то нужно указать, что происходит на ее концах. Для закрепленной струны на концах должно быть

$$u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = 0 \qquad (9)$$

при всяком $t \geq 0$. Условия (9) называются краевыми или граничными условиями Возможны и другие граничные условия.

Итак, физическая задача о колебании струны свелась к математической задаче: найти решение уравнения (4), которое удовлетворяло бы начальным условиям (8) и граничным условиям (9).

Можно рассматривать колебания полубесконечной или бесконечной струны, когда один или оба конца находятся бесконечно далеко. Оба эти случая являются идеализацией случая очень длинной струны, причем первый из них соответствует рассмотрению точек, сравнительно близких от одного из концов струны, а второй — рассмотрению точек, расположенных далеко от обоих концов. В первом из этих случаев в качестве граничного условия остается требование $u\big|_{x=0} = 0$, а во втором случае граничные условия вообще отсутствуют. Начальные функции φ0(x) и φ1(x) должны быть в этих случаях заданы соответственно для всех $0 \leq x < \infty$ или для всех $-\infty < x < \infty$.

1.2. Уравнение колебаний мембраны.

Мембраной называют свободно изгибающуюся натянутую пленку.

Пусть в положении равновесия мембрана расположена в плоскости xOy и занимает некоторую область D, ограниченную замкнутой кривой L. Далее предположим, что мембрана находится под действием равномерного натяжения T, приложенного к краям мембраны. Это означает, что если провести линию по мембране в любом направлении, то сила взаимодействия между двумя частями, разделенными элементами линии, пропорциональна длине элемента и перпендикулярна его направлению; величина силы, действующая на элемент ds линии, будет равна Tds. Будем рассматривать только поперечные колебания мембраны, при которых каждая ее точка движется перпендикулярно плоскости xOy, параллельно оси Ou. Тогда смещение и точки (x, y) мембраны будет функцией от x, y и t. Рассматривая далее только малые колебания мембраны, будем считать, что функция u(x, y, t), а также ее частные производные по x и y малы, так что квадратами и произведениями их можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами. Выделим произвольный участок (σ) мембраны, ограниченный в положении равновесия кривой l. Когда мембрана будет выведена из положения равновесия, этот участок мембраны деформируется в участок σ' поверхности мембраны, ограниченный пространственной кривой l'. Площадь участка σ' в момент времени t равна

$$\sigma' = \iint_{\sigma} \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dxdy \approx \iint_{\sigma} dxdy = \sigma.$$

Таким образом, при наших предположениях можно пренебречь изменением площади произвольно взятого участка мембраны в процессе колебаний и считать, что любой участок σ' мембраны будет находиться под действием первоначального натяжения T.

Перейдем к выводу уравнения поперечных колебаний мембраны. Рассмотрим произвольный участок σ' мембраны. Со стороны остальной части мембраны на этот участок действует направленное по нормали к контуру l' равномерно распределенное натяжение T, лежащее в касательной плоскости к поверхности мембраны. Найдем проекцию на ось Ou сил натяжения, приложенных к кривой l', ограничивающей участок σ' мембраны. Обозначим через ds' элемент дуги кривой l'. На этот элемент действует натяжение, равное по величине Tds'. Косинус угла, образованного вектором натяжения T с осью Ou, очевидно, равен, в силу наших предположений, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$, где n — направление внешней нормали к кривой l, ограничивающей участок а мембраны в положении равновесия

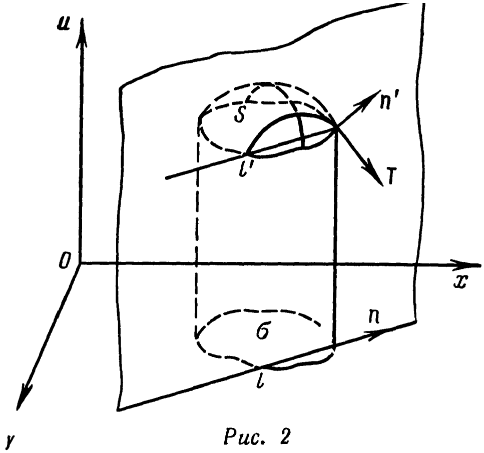


Рис. 2

(рис. 2). Отсюда следует, что проекция на ось Ou сил натяжения, приложенных к элементу ds' контура l', равна

$T\dfrac{\partial u}{\partial n}ds'$ и, стало быть, проекция на ось Ou сил натяжения, приложенных ко всему контуру l', равна

$$T\int_{l'}\frac{\partial u}{\partial n}ds'. \tag{10}$$

Так как при малых колебаниях мембраны можно считать ds≈ ds', то мы можем в интеграле (10) путь интегрирования l' заменить на l. Тогда, применяя формулу Грина, получим

$$T\int_{l}\frac{\partial u}{\partial n}ds = T\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy. \tag{11}$$

Предположим далее, что на мембрану параллельно оси Ou действует внешняя сила p (x, y, t), рассчитанная на единицу площади. Тогда проекция на ось Оu внешней силы действующей на участок σ/ мембраны, будет равна

$$\iint_{\sigma} p(x, y, t) dxdy. \qquad (12)$$

Силы (11) и (12) должны в любой момент времени t уравновешиваться силами инерции участка σ/ мембраны

$$-\iint_{\sigma} p(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdy,$$

где p(x, у) — поверхностная ,плотность мембраны.

Таким образом, мы получаем равенство

$$\iint_{\sigma} \left[\rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t) \right] dxdy = 0.$$

Отсюда в силу произвольности площадки a следует, что

$$\rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t). \qquad (13)$$

Это есть дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны. В случае однородной мембраны p = const уравнение малых колебаний мембраны можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t). \qquad (14)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, f(x, y, t) = \frac{p(x, y, t)}{\rho}. \qquad (15)$$

Если внешняя сила отсутствует, т. е. p(x, y, t) = 0, то из (14) получаем уравнение свободных колебаний однородной мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \qquad (16)$$

Как и при рассмотрении колебаний струны, одного уравнения (13) недостаточно для полного определения движения мембраны; нужно задать смещение и скорость ее точек в начальный момент времени:

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x,y), \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \varphi_1(x,y). \qquad (17)$$

Далее, так как на контуре L мембрана закреплена, то должно быть

$$u\big|_{L} = 0 \qquad (18)$$

при любом $t \geq 0$.

<u>Пример.</u> *Продольные колебания стержня*

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях однородного упругого стержня длины l, когда один его конец $x = 0$ закреплен, а другой $x = l$ свободен. Было показано, что эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ a^2 = \frac{E}{\rho}$$

при граничных условиях $u\big|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{x=l} = 0,$ и начальных условиях $u\big|_{t=0} = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = F(x),\ (0 < x < l)$

Согласно методу Фурье, частные решения уравнения будем искать в виде

$u(x, t) = X(x)T(t)$

Подставив $u(x, t)$ в основное уравнение , получим $\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$, откуда получаем два уравнения

$X(x) + \lambda^2 X(x) = 0,\ T(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0$

Чтобы функция $X(x)$, отличная от тождественного нуля, удовлетворяла граничным условиям, очевидно, нужно потребовать выполнения условий X(0) = 0, X(l) = 0. Таким образом, мы пришли к задаче о собственных числах для уравнения

$X(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ при граничных условиях $u\big|_{x=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\big|_{x=l} = 0,$.

Интегрируя уравнение , получим

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x\,.$$

И имеем $C_1 = 0$, $C_2 \lambda \sin\lambda l = 0$.

Считая $C_2 \neq 0$ (в противном случае имели бы $X(x) \equiv 0$), находим $\cos\lambda x = 0$, откуда $\lambda l = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ (k — целое число).

Таким образом, нетривиальные решения задачи возможны лишь при значениях λ_k

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}\,.$$

Собственным числам λ_k^2 соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\ (k=0,1,2,\dots),$$

определенные с точностью до постоянного множителя, который мы положили равным единице (отрицательные целые значения k новых собственных функций не дадут).

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение основного уравнения имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k \sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\,,$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

Найдем

$$u_k(x,t) = T_k(t)X_k(x) = \left(a_k \cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k \sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

Составим ряд

$$u\ (x,t)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}+b_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

Для выполнения начальных условий необходимо, чтобы

$$f(x)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}a_k\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

$$F(x)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(2k+1)\pi a}{2l}b_k\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

Предполагая что ряды сходятся равномерно, можно определить коэффициенты a_k и b_k, умножив обе части равенств рядов на $\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ и проинтегрировав по x в пределах от x = 0 до x = l Тогда, приняв во внимание, что

$$\int_0^l\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}dx=\begin{cases}0 & \text{при}\ \ k\neq n\\ \dfrac{l}{2} & \text{при}\ \ k=n\end{cases}$$

получим.

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{(2\mathrm{n}+1)\pi x}{2l}dx$$

$$b_n=\frac{4}{(2n+1)}\int_0^l F(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx,$$

С помощью метода Фурье легко можно исследовать задачу о продольных колебаниях стержня. Напомним, что поставленная там задача привелась к решению основного уравнения при граничных и начальных условиях

$u\big|_{t=0}=f(x)=\mathrm{rx},\quad \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=0,\ \ (0<x<l)$, где r— постоянная.

Применяя формулы, полученные выше, найдем, что $a_k=\frac{(-1)^k 8lr}{(2k+1)^2\pi^2}$, $b_k=0$ откуда вытекает, что относительное перемещение сечения стержня с абсциссой x выражается рядом

$$u(x,t)=\frac{8lr}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

1.3. Уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле

Рассмотрим твердое тело, температура которого в точке (x, y, x) в момент времени t определяется функцией u(x, y, z, t). Если различные части тела находятся при различной температуре, то в теле будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Возьмем какую-нибудь поверхность S внутри тела и на ней малый элемент ΔS. В теории теплопроводности принимается, что количество тепла ΔQ, проходящего через элемент ΔS за время Δt, пропорционально ΔtΔSи нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$, т. е.

$$\Delta Q=-k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta S\Delta t=-k\Delta S\Delta t grad_n u, \qquad (36)$$

где k > 0 — коэффициент внутренней теплопроводности, а n — нормаль к элементу поверхности ΔS в направлении движения тепла. Будем считать, что тело изотропно в отношении теплопроводности, т. е. что коэффициент внутренней теплопроводности k зависит только от точки (x, y, z) тела и не зависит от направления нормали поверхности S в этой точке.

Обозначим через q тепловой поток, т. е. количество тепла, проходящего через единицу площади поверхности за единицу времени. Тогда (36) можно записать в виде

$$q=-k\frac{\partial u}{\partial n}. \qquad (37)$$

Для вывода уравнения распространения тепла выделим внутри тела произвольный объем V, ограниченный гладкой замкнутой поверхностью S, и рассмотрим изменение количества тепла в этом объеме за промежуток времени (t_1, t_2). Нетрудно видеть, что через поверхность S за промежуток времени (t_1, t_2), согласно формуле (36), входит количество тепла, равное

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

где n — внутренняя нормаль к поверхности S.

Рассмотрим элемент объема ΔV. На изменение температуры этого объема на Δu за промежуток времени Δt нужно затратить количество тепла

$$\Delta Q_2 = [u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t)]\gamma(x, y, z)\rho(x, y, z)\Delta V,$$

где p(x,y,z), γ(x,y,z) — плотность и теплоемкость вещества. Таким образом, количество тепла, необходимое для изменения температуры объема V на Δu = u(x, y, z, t_2) — u(x. y, г, t_1), равно

$$Q_2 = \iiint_V [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, t_1)]\gamma\rho dV \text{ или}$$

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV, \text{так как}\, u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Предположим, что внутри рассматриваемого тела имеются источники тепла. Обозначим через F (x, y, z, t) плотность (количество поглощаемого или выделяемого тепла в единицу времени в единице объема тела) тепловых источников. Тогда количество тепла, выделяемого или поглощаемого в объеме V за промежуток времени (t_1, t_2), будет равно

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z, t) dV.$$

Составим теперь уравнение баланса тепла для выделенного объема V. Очевидно, что $Q_2 = Q_1 + Q_3$, т. е.

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_v \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z, t) dV,$$

или, применив формулу Остроградского ко второму интегралу, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \left[\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} - div(kgradu) - F(x, y, z, t) \right] dV = 0.$$

Так как подынтегральная функция непрерывна, а объем V и промежуток времени (t_1, t_2) произвольны, то для любой точки (x, y, г) рассматриваемого тела и для любого момента времени t должно быть

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(kgradu) + F(x, y, z, t) \tag{38}$$

или

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F(x, y, z, t). \tag{38$'$}$$

Это уравнение называется уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела.

Если тело однородно, то γ, ρ и к — постоянные и уравнение (38') можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \tag{39}$$

где $a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}, f(x, y, z, t) = \frac{F(x, y, z, t)}{\gamma\rho}$.

Если в рассматриваемом однородном теле нет источников тепла, т е. F(x, y, z, t) = 0, то получим однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \tag{40}$$

В частном случае, когда температура зависит только от координат x, y и t, что, например, имеет место при распространении тепла в очень тонкой однородной пластинке, уравнение (40) переходит в следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \qquad (41)$$

Наконец, для тела линейного размера, например для тонкого однородного стержня, уравнение теплопроводности примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (42)$$

Отметим, что при такой форме уравнений (41) и (42) не учитывается, конечно, тепловой обмен между поверхностью пластинки или стержня с окружающим пространством.

Чтобы найти температуру внутри тела в любой момент времени, недостаточно одного уравнения (38). Необходимо, как это следует из физических соображений, знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе S тела (граничное условие). Граничное условие может быть задано различными способами:

1) в каждой точке поверхности S задается температура $u|_S = \Psi_1(P,t)$, где Ψ_1(P,t)— известная функция точки поверхности 5 и времени t;

2) на поверхности S задается тепловой поток $q = -k\frac{\partial u}{\partial n}$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \Psi_2(P,t), \qquad (44)$$

где Ψ_2(P, t) — известная функция, выражающаяся через заданный тепловой поток по формуле $\Psi_2(P,t) = -\frac{q(P,t)}{k}$;

3) на поверхности твердого тела происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой и0 известна.

Закон теплообмена очень сложен, но для упрощения задачи он может быть принят в виде закона Ньютона. По закону Ньютона, количество тепла, передаваемое в единицу времени с единицы площади поверхности тела в окружающую среду, пропорционально разности температур поверхности тела и окружающей среды: $q=H(u-u_0)$, где H — коэффициент теплообмена. Коэффициент теплообмена зfвисит от разности температур $u - u_0$, от характера поверхности и окружающей среды (он может изменяться вдоль поверхности тела). Мы будем считать коэффициент теплообмена H постоянным, не зависящим от температуры и одинаковым для всей поверхности тела.

По закону сохранения энергии это количество тепла должно быть равно тому количеству тепла, которое передается через единицу площади поверхности за единицу времени вследствие внутренней теплопроводности. Это приводит к следующему граничному условию:

$$H(u-u_0) = -k\frac{\partial u}{\partial n} \qquad \text{(на S)},$$

где n —внешняя нормаль к поверхности S, или, положив $h = \dfrac{H}{k}$,

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u-u_0)\big|_S - 0. \tag{45}$$

Таким образом, задача о распространении тепла в изотропном твердом теле ставится так:

Найти решение уравнения теплопроводности (38), удовлетворяющее начальному условию.

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z) \tag{46}$$

и одному из граничных условий (43), (44) или (45).

<u>**Пример.**</u> Распространение тепла в неограниченном стержне

Задача о распространении тепла *в неограниченном однородном стержне*, боковая поверхность которого теплоизолирована, математически формулируется следующим образом. Найти ограниченную функцию u(x, t) ($t \geq 0$, $-\infty < x < \infty$), удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *($t>0$, $-\infty<x<\infty$)* и начальному условию

$u|_{t=0} = \varphi(x)$ ($-\infty<x<\infty$), где $\varphi(x)$ — непрерывная ограниченная функция.

Найдем сначала частные решения уравнения (1) вида u=T(t)X(x).

Подставляя u=T(t)X(x) в основное уравнение, имеем

$$T'(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

где λ^2 — постоянная. Мы получаем

$T'(t)+a^2\lambda^2 T(t)=0$, $X''(x)+\lambda^2 X(x)=0$,

откуда, отбрасывая постоянный множитель в выражении T(t):

$$T(t)=e^{-a^2\lambda^2 t}, \quad X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x.$$

Постоянные A и B могут зависеть от λ. Так как граничные условия отсутствуют, то параметр λ остается совершенно произвольным.

Согласно предыдущему, получим, что

$u(x, t)= e^{-a^2\lambda^2 t}[A\cos\lambda x+B\sin\lambda x]$- есть частное решение уравнения основного уравнения при любых $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Получим решение уравнения :

$u(x, t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda,$ если этот интеграл сходится и его можно дифференцировать один раз по t и два раза по x под знаком интеграла.

Выберем A (λ) и B (λ) так, чтобы выполнялось и начальное условие . Полагая t = 0, получим

$$\varphi(x) = \int_{=\infty}^{\infty}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda.$$

Сравнивая интеграл в правой части с интегралом Фурье дляфункции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi + \sin\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right]d\lambda,$$

И A(λ)= $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi$; B(λ)= $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi$.

Тогда получаем:

u(x, t)= $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\xi$

или, изменяя порядок интегрирования,

u(x, t)= $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{0}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda.$

Внутренний интеграл можно вычислить. Действительно, положим $a\lambda\sqrt{t} = z,\ \ \lambda(\xi - x) = \mu z,$ откуда

$$d\lambda = \frac{dz}{a\sqrt{t}},\ \ \mu = \frac{\xi - x}{a\sqrt{t}}.$$

Поэтому

$$\int_{0}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}\cos\mu z dz = \frac{1}{a\sqrt{t}}J(\mu).$$

Дифференцируя интеграл $J(\mu)$ по параметру μ , найдем, что

$$J'(\mu) = -\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}z\sin\mu z dz,$$

причем это дифференцирование законно в силу равномерной сходимости полученного интеграла. Интегрируя теперь по частям, получаем

$$J'(\mu) = -\frac{\mu}{2}\int_0^\infty e^{-z^2} z\sin\mu z dz = -\frac{\mu}{2}J(\mu), \text{отсюда } J(\mu) = Ce^{-\frac{\mu^2}{4}}.$$

Чтобы найти постоянную С, полагаем здесь μ =0. Это дает

$$C = J(0) = \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \text{ Поэтому } J(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\mu^2}{4}}, \text{ и}$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}.$$

Подставив это соотношение в решение, окончательно найдем:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}d\xi.$$

Нетрудно видеть, что функция

$$\upsilon(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}},$$

рассматриваемая как функция от (x, t), является решением нашего уравнения. знака интеграла.

Задача для самостоятельного решения.

Дана неограниченная пластина толщиной 2R при температуре $0^\circ C$. Пластина нагревается с обеих сторон одинаково постоянным тепловым потоком q.

Найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени t > 0.

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{a^2 q}{kR}\left(t - \frac{R^2 - 3x^2}{6a^2}\right) - \frac{2qR}{k\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}e^{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi x}{R},$$

где k—коэффициент внутренней теплопроводности.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при условиях

$$k\frac{\partial u}{\partial x} + q\Big|_{x=-R} = 0, \quad -k\frac{\partial u}{\partial x} + q\Big|_{x=R} = 0, \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 0.$$

1.4. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа

Установившаяся температура в однородном твердом теле. В предыдущем параграфе было установлено, что уравнение распространения тепла в изотропном однородном теле в случае отсутствия источников тепла имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \qquad (47)$$

Допустим теперь, что температура в каждой точке (x, y, z) внутри тела установилась, т. е. что она не меняется с течением времени. Тогда $\frac{du}{dt} = 0$ и уравнение (47) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (48)$$

Таким образом, уравнению Лапласа (48) удовлетворяет темпера- тура и (x, y, z), установившаяся в однородном теле. Для определения и(x, y, z) теперь не надо уже задавать начальное распределение температуры (начальное условие), а достаточно задать одно граничное условие, не зависящее от времени. Задача определения решения уравнения (48) по его значениям на границе рассматриваемой области называется задачей Дирихле. Задача определения решения уравнения (48), удовлетворяющего граничному условию $\frac{du}{dn}\Big|_S = 0$, называется задачей Неймана. Потенциальное движение несжимаемой жидкости. Рассмотрим установившееся движение несжимаемой жидкости. Пусть движение жидкости невихревое или, иначе говоря, потенциальное, т. е. скорость v (x, y, z) есть потенциальный вектор

$$v = \mathrm{grad}\ \varphi. \qquad (49)$$

Для несжимаемой жидкости плотность ρ постоянна, и из уравнения неразрывности (20) имеем

$$\mathrm{div}\ \varphi = 0 \qquad (50)$$

Подставив (49) в (50), получим

$$div grad \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z} = 0, \qquad (51)$$

т.е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2. I. Типы уравнений второго порядка

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,\dots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(x_1,\dots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (1)$$

Коэффициенты a_{ij}- — заданные функции в области D пространства (x_1, ...$x_{n)}$, причем $a_{ij} = a_{ji}$. Все функции и независимые переменные считаем вещественными

В этом параграфе мы дадим классификацию уравнений вида (1) в точке. Зафиксируем определенную точку ($x^0{}_1$ ..., $x_т$) в области D и составим квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x^0{}_1,\dots,x^0{}_n\right)t_i t_j. \qquad (2)$$

Уравнение (1) принадлежит эллиптическому типу в точке ($x^0{}_{1,\dots,}x^0{}_n$) если в этой точке квадратичная форма (2) положительно определенная или отрицательно определенная.

Уравнение (1) принадлежит гиперболическому типу в точке($x^0{}_{1,\dots,}x^0{}_n$) если в этой точке квадратичная форма (2) при приведении ее к сумме квадратов имеет все коэффициенты, кроме одного, определенного знака, а оставшийся один коэффициент противоположного знака.

Уравнение (2) принадлежит ультрагиперболическому типу в точке $(x^0_{1,\dots,}x^0_{\ n})$,если в этой точке квадратичная форма (2) при приведении ее к сумме квадратов имеет больше одного положительного коэффициента и больше одного отрицательного, причем все коэффициенты отличны от нуля. Уравнение (1) принадлежит параболическому типу в точке $(x^0_{1,\dots,}x^0_{\ n}\ )$если в этой точке квадратичная форма (2) при приведении ее к сумме квадратов -имеет только один коэффициент, равный нулю, все же другие коэффициенты имеют одинаковые знаки. Уравнение (1) принадлежит эллиптическому типу соответственно гиперболическому типу и т. д. в области D, если во всех точках этой области оно принадлежит эллиптическому типу, соответственно гиперболическому типу и т. д. Если коэффициенты a_{ij} постоянные, то принадлежность уравнения к тому или иному типу не зависит от значений независимых переменных. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа; уравнением гиперболического типа является волновое уравнение и, наконец, уравнением параболического типа — уравнение теплопроводности.

2.2. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть дано уравнение с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f(x_1,\dots,x_n). \tag{3}$$

Введем вместо $(x_1,\dots,x_n)$ новые независимые переменные $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ при помощи линейного преобразования

$$\xi_k=\sum_{i=1}^{n} c_{ki}x_i\,(k=1,2,\dots,n). \tag{4}$$

Мы предполагаем, что преобразование (4) неособенное, т. е. что определитель $|c_{ki}|$ не равен нулю. Производные по старым переменным выразятся через производные по новым переменным следующими формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} c_{ki} c_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l}. \qquad (5)$$

Подставив (5) в уравнение (3), получим

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + cu = f_1(\xi_1,..., \xi_n), \qquad (6)$$

где

$$a_{kl} = \sum_{l,j=1}^{n} a_{ij} c_{ki} c_{lj}. \qquad (7)$$

Нетрудно проверить, что формулы преобразования (7) коэффициентов при вторых производных от функции u при замене независимых переменных по формулам (4) совпадают с формулами преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{k,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j, \qquad (8)$$

если в ней произвести линейное преобразование

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \tau_k, (i = 1,2,..., n), \qquad (9)$$

приводящее ее к виду

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} \tau_k \tau_l. \qquad (10)$$

В алгебре доказывается, что всегда можно подобрать коэффициенты c_{ik} так, чтобы квадратичная форма (8) привелась к сумме квадратов, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tau_k^2, \qquad (10')$$

или, иначе говоря, $a_{kl} = 0$ при $k \neq l$ и $a_{kk} = \lambda_k$. Коэффициенты λ_k равны ± 1 или нулю соответственно. Знаки коэффициентов λ_k и определяют тип уравнения (3). Преобразованное уравнение (6) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + cu = f_1(\xi_1, ..., \xi_n). \tag{11}$$

Этот вид уравнения (3) называется его каноническим видом.

Положим, что все λ_k отличны от нуля, т. е. что уравнение (3) не параболического типа, и покажем, что в этом случае при помощи преобразования функции u можно освободиться от производных первого порядка. С этой целью вместо и введем новую искомую функцию v по формуле

$$u = ve^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\lambda_k} \xi_k}.$$

Подставив это в уравнение (11), получим, как нетрудно проверить, уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} + c_1 v = f_2(\xi_1, ..., \xi_n).$$

Для уравнения эллиптического типа все $\lambda_k = 1$ или $\lambda_k =$ —1, и, умножая, если надо, обе части уравнения на (—1), мы можем считать, что все $\lambda_k = 1$. Таким образом, сохраняя прежние обозначения, мы можем утверждать, что всякое линейное уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_1 u = f(x_1, ..., x_n). \tag{12}$$

В случае гиперболического типа будем считать, что имеется (n + 1) независимых переменных, и положим $\xi_{n+1} = t$. Тогда всякое линейное уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}+c_2 u=f_3(x_1,\dots,x_n,t). \qquad (13)$$

В случае уравнения (3) с переменными коэффициентами для каждой точки ($x^0_{1,\dots,}x^0_n$) области D можно указать такое неособое преобразование независимых переменных, которое приводит уравнение (3) к каноническому виду в этой точке. Для каждой точки ($x^0_{1,\dots,}x^0_n$). имеется, вообще говоря свое преобразование независимых переменных, приводящее уравнение к каноническому виду; в других точках это преобразование может не приводить уравнение к каноническому виду.

2.3. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \qquad (14)$$

где коэффициенты A, B и C суть функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно. Будем предполагать, что A, B и C не обращаются одновременно в нуль.

Уравнению (14) соответствует квадратичная форма

$$At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2. \qquad (15)$$

Дифференциальное уравнение (1) принадлежит:

1) гиперболическому типу, если B^2 — AC> 0 (квадратичная форма (15) знакопеременная);

2) параболическому типу, если B^2 — AC = 0 (квадратичная форма (15) знакопостоянная);

3) эллиптическому типу, если B^2 —AC<0 (квадратичная форма (15) знакоопределенная).

Введем вместо (x, y) новые независимые переменные (ξ,η).

Пусть

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y) \tag{16}$$

— дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем якобиан

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{17}$$

в области D.

В новых независимых переменных ξ и η уравнение (14) запишется так:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta} + F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \tag{18}$$

где

$$A(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$C(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2, \tag{19}$$

$$B(\xi,\eta) = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что

$$B^2 - AC = \left(B^2 - AC\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2. \tag{20}$$

Отсюда легко видеть, что преобразование независимых переменных не меняет типа уравнения.

В преобразовании (16) в нашем распоряжении две функции ξ (x, y) и η (x, y). Покажем, что их можно выбрать так, чтобы выполнялось только одно из условий

1) A=0, C = 0; 2) A=0, B = 0; 3) A = C, B = 0.

Тогда, очевидно, преобразованное уравнение (18) примет наиболее простой вид.

1) B^2 — AC> 0. В рассматриваемой области D уравнение (14) принадлежит гиперболическому типу. Можно считать, что в точке (x_0,y_0) в окрестности которой мы будем приводить уравнение (14) к каноническому виду, либо A≠0, либо C≠0.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0. \qquad (21)$$

Пусть A≠0. Так как B^2 — AC> 0, то уравнение (21) можно записать в виде

$$\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-\left(\sqrt{B^2-AC}\right)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,$$

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \qquad (21а)\quad(21б)$$

Следовательно, решения каждого из уравнений (21а) и (21б) будут решениями уравнения (21).

Для интегрирования уравнений (21а) в (21б) составим соответствующие им системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B+\sqrt{B^2-AC}},\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B-\sqrt{B^2-AC}} \text{ или}$$

$$Ady-\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)dx=0, Ady-\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)dx=0.$$

Заметим, что уравнения (22) можно записать в виде одного уравнения

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0. \qquad (22a)$$

Коэффициенты дифференциальных уравнений (22) имеют непрерывные частные производные до второго порядка, что следует из предположений о коэффициентах A, B и C. Так как $A(x_0,y_0) \neq 0$, то существуют интегралы

$$\varphi_1(x,y) = const.\varphi_2(x,y) = const \qquad (23)$$

уравнений (22) и их левые части имеют непрерывные частные производные до второго порядка в окрестности точки (x0, y0)*. Левые части интегралов (23) будут соответственно решениями уравнений (21а) и (21б). Кривые (23) называются характеристическими кривыми или просто характеристиками уравнения (14), а уравнение (21) — уравнением характеристик.

Для уравнения гиперболического типа B^2 — AC>0 и, следовательно, интегралы (23) вещественны и различны. При этом мы имеем два различных семейства вещественных характеристик.

Положим в преобразовании (16)

$$\xi = \xi(x,y) = \varphi_1(x,y), \eta = \eta(x,y) = \varphi_2(x,y),$$

где φ_1 (x, y) и φ_2 (x, y) —соответственно суть дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнений (21а) и (21б). Эти решения можно выбрать так, чтобы якобиан $\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)} \neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) области D. Действительно, так как $A \neq 0$, то из уравнений (21а) и (21б) получим

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}.$$

Отсюда, в силу B^2 — AC > 0 и уравнений (21а) и (21б), следует, что если якобиан в некоторой точке равен нулю, то в этой точке равны нулю обе частные производные первого порядка от φ_1 или φ_2. Таким образом, надо строить такие решения уравнений (21а) и (21б), у которых обе частные производные первого порядка одновременно не равны нулю **.

Функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ удовлетворяют уравнению (21) и, в силу (19), в уравнении (18) A=C = 0. Коэффициент B≠0 всюду в рассматриваемой области, что следует из (17) и (20). Разделив на коэффициент 2B уравнение (18), приведем его к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F_1\left(\xi,\eta,u\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \tag{24}$$

Этот вид уравнения также называется каноническим.

Если уравнение (14) было линейным относительно производных первого порядка и самой функции и, то преобразованное уравнение также будет линейным:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial\xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial\eta} + c(\xi,\eta)u = f(\xi,n). \tag{25}$$

При A=C = O уравнение (14) уже имеет вид (24). Положив $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$, приведем уравнение (24) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = \Phi\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right). \tag{26}$$

Это—канонический вид уравнения гиперболического типа.

2) B^2 — aC = 0. В рассматриваемой области D уравнение (14) принадлежит параболическому типу. Так как мы предполагаем, что коэффициенты A, B и C уравнения (14) не обращаются одновременно в нуль, то, в силу условия B^2 — AC = 0, следует, что в каждой точке этой области один из коэффициентов A и C отличен от нуля. Пусть, например, A≠0 в точке (x_0, y_0), в окрестности которой мы будем приводить

уравнение (14) к каноническому виду. Тогда оба уравнения (21а) и (21б) совпадают и обращаются в уравнение

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \qquad (27)$$

Нетрудно видеть, что всякое решение уравнения B7), в силу условия B^2 — AC = 0, удовлетворяет также уравнению

$$B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \qquad (28)$$

Мы можем, как и в предыдущем пункте, найти такое решение φ(x, y) уравнения (27), что функция φ(x,y) имеет непрерывные частные производные второго порядка и ее первые производные не обращаются в нуль одновременно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Отметим, что для уравнения параболического типа мы имеем одно семейство вещественных характеристик φ(x, y) = const.

Положим в преобразовании (16) , где φ(x, y) — решение уравнения (27), а за η(x, y) возьмем любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию так, чтобы якобиан $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\neq 0$ в окрестности точки (x_0, y_0). Тогда в уравнении (18) A≡0, что следует из (19), а коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial\xi\partial\eta}$ принимает следующий вид:

$$B=\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Согласно (27) и (28), B≡0 в окрестности точки (x_0, y_0). Коэффициент С в уравнении (18) преобразуется к виду

$C=\frac{1}{A}\left(A\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$. Откуда C≠0, так как в противном случае, в силу (27), якобиан $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=0$. Разделив на C≠0 уравнение (18), приведем его к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F_2\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \qquad (29)$$

Это — канонический вид уравнения параболического типа.

3) B^2 — AC<0. В рассматриваемой области D уравнение (14) принадлежит эллиптическому типу. Будем считать, что коэффициенты A, B и C суть аналитические функции от x и y*. Тогда коэффициенты уравнений (21а) и (21б) — также аналитические функции от x и y, и можно утверждать, что уравнение (21) имеет аналитическое решение

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)+i\varphi(x,y)$$

в окрестности точки (x_0, y_0) и $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|\neq 0$ в этой окрестности . Положим в преобразовании (16) $\xi=\varphi_1(x,y),\eta=\varphi_2(x,y)$.

Нетрудно показать, что $\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)}\neq 0$.Разделяя теперь в тождестве $A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0$ вещественную и мнимую части, получим

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0.$$

Отсюда, в силу (19), следует, что А = С, В = 0.

В силу определенности квадратичной формы $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_3^2 \left(B^2 - AC < 0\right)$, коэффициенты А=С могут обратиться в нуль только в том случае, если

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \qquad (30)$$

Но решение φ(x, y) выбрано так, что равенства (30) не выполняются одновременно. Таким образом, в уравнении (18) А= С≠0 и после деления на А оно приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (31)$$

Это — канонический вид уравнений эллиптического типа. Замечание. Может оказаться, что в различных частях области D уравнение (14) принадлежит различным типам. Как уже было сказано, точки параболичности уравнения (14) характеризуются равенством

$$B^2 — AC = 0. \qquad (32)$$

Предположим, что множество точек области D, которое описывается уравнением (32), является простой гладкой кривой σ. Кривая σ называется линией параболического вырождения. Если кривая σ делит область D на две части, в одной из которых уравнение (14) принадлежит эллиптическому типу, а в другой — гиперболическому типу, то мы скажем, что в области D уравнение (14) смешанного типа. Например:

1) Уравнение Трикоми

$y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ — уравнение смешанного типа в любой области D, содержащей точки оси Ox. При $y > 0$ оно принадлежит эллиптическому типу, при $y<0$ — гиперболическому типу, $y= 0$ — линия параболичности.

2) Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ — уравнение смешанного типа в любой области D, содержащей точки оси Ox; y = 0 — линия параболичности, которая одновременно является характеристикой (y = 0 —огибающая семейства характеристик).

Пример. Рассмотрим уравнение

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Это уравнение гиперболического типа, так как B^2-AC=$\sin^2$x+$\cos^2$x=1. Согласно общей теории, составляем уравнение (22a) dy^2 - 2sinxdxdy-cosxdx^2 = 0 или dy + (l + sinx)dx=0, dy-(1-sinx)dx = 0, интегрируя эти уравнения, получим X+y-cosx=C_1, x-y+cosx=C_2.

Вводим новые переменные (ξ,η) по формулам ξ = x + y — *cosx*, *η= x-y+cosx.* Тогда уравнение (33) в новых независимых переменных приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0. \tag{34}$$

Положив ξ=α+β, η=α-β, приведем уравнение (34) к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = 0.$$

Уравнение (33) можно проинтегрировать в замкнутом виде, т. е. найти формулу, дающую все решения этого уравнения. Действительно, перепишем уравнение (34) в виде

$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0.$ Тогда $\frac{\partial u}{\partial\eta} = \Theta(\eta)$, где θ(η) — произвольная функция η. Интегрируя полученное уравнение по η, считая ξ параметром, найдем, что $u = \int\Theta(\eta)d\eta + \varphi(\xi)$, где φ(ξ) — произвольная функция по ξ. Полагая $\int\Theta(\eta)d\eta = \psi(\eta)$, получим

$u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$, или, возвращаясь к старым переменным (x, y), получим решение уравнения (33) в виде

$$u(x,y)=\varphi(x+y-\cos x)+\psi(x-y+\cos x). \qquad (39)$$

Задачи для самостоятельного решения.

Привести к каноническому виду следующие уравнения:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(3+\sin^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

3. $\left(1+x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(1+y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

Ответы:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\eta-\xi}{32}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0.$

$\xi=2x+\sin x+y, \eta=2x-\sin x-y.$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{\partial u}{\partial\xi}=0, \xi=\frac{x^2}{2}+y, \eta=x.$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0, \xi=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \eta=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right).$

3. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

3.I. Квазилинейные дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

Рассмотрим уравнение

$$ap+bq=c, \ (p=u_x,\ q=u_y) \qquad (1)$$

где a, b, c — заданные функции от x, y, u, которые в рассматриваемой области имеют непрерывные частные производные первого порядка и удовлетворяют условию $a^2 + b^2 \neq 0$.

Решение u= u(x, y) уравнения (1) геометрически представляет собой поверхность в пространстве (x, y, u). Эту поверхность будем называть интегральной поверхностью.

Функции a(x,y,u), b(x, y, u) и c(x, y, u) определяют некоторое поле направлений в пространстве (x, y, u)y а именно: в каждой фиксированной точке этого пространства мы имеем направление, направляющие косинусы которого пропорциональны a, b и c. Интегральные кривые, соответствующие этому полю направлений, определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{du}{c(x,y,u)} \qquad (2)$$

и называются характеристическими кривыми или характеристиками уравнения (1). Если ввести параметр s, изменяющийся вдоль характеристической кривой, то дифференциальные уравнения (2) примут вид

$$\frac{dx}{ds} = a(x,y,y), \frac{dy}{ds} = b(x,y,u), \frac{du}{ds} = c(x,y,u). \qquad (3)$$

Величины p, q и (—1) пропорциональны направляющим косинусам нормали к интегральной поверхности u= u(x, y) и уравнение (1) выражает условие перпендикулярности $ap+bq+c(-1)=0$ нормали к интегральной поверхности с направлением поля, т. е. уравнение (1) сводится к требованию, чтобы в каждой точке интегральной поверхности u= u(x, y) направление, определяемое указанным выше полем направлений, находилось в касательной плоскости к поверхности. Если некоторая поверхность u= u(x, y) образована характеристиками уравнения (1), то в каждой точке этой поверхности касательная к характеристике, проходящей через эту точку, лежит в касательной плоскости к поверхности и, следовательно, эта поверхность является интегральной поверхностью уравнения (1). Обратно, если u= u(x, y) есть интегральная поверхность уравнения (1), то ее можно покрыть семейством характеристик. Действительно, на любой интегральной поверхности u= u(x, y) уравнения (1) можно задать однопараметрическое семейство кривых x = x(s), y = y(s), u = u(x(s), y(s)) с помощью дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, u), \frac{dy}{ds} = b(xx, y, u),$$ в которых и заменено его выражением u= u(x, y). Вдоль каждой такой кривой уравнение (1) переходит в $\frac{du}{ds} = c$. Таким образом, рассматриваемое семейство удовлетворяет уравнениям (3) и, следовательно, состоит из характеристических кривых. Так как решения системы дифференциальных уравнений (3) однозначно определяются начальными значениями x, y, u при s = 0, мы получаем следующий результат: любая характеристическая кривая, имеющая общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой интегральной поверхности.

Задача Коши. Пусть пространственная кривая l задана в параметрической форме x = x(t), y = y(t), u = u(t), причем $x^2{}_l+y^2{}_l \neq 0$.

Обозначим через l_0 проекцию кривой l на плоскость xOy. Задача Коши для уравнения (1) ставится так: в окрестности проекции l_0 найти интегральную поверхность уравнения (1), проходящую через заданную кривую l, т. е. найти такое решение уравнения (1), которое принимает заданные значения в точках кривой l_0. Будем предполагать, что начальные функции x(t), y(t), u(t) непрерывно дифференцируемы в рассматриваемой области. Для решения задачи Коши проведем через каждую точку кривой lхарактеристику, т. е. интегральную кривую системы (3); это можно сделать, причем единственным образом, в некоторой окрестности кривой l. Мы получим семейство характеристических кривых, зависящих еще от параметра t.

$$x = x(s, t),\ y = y(s,t),\ \ u=u(s, t). \qquad (4)$$

В силу наших предположений функции (4) имеют непрерывные производные первого порядка по s и t. Кривые (4) образуют поверхность u= u(x, y), если из первых двух уравнений (4) можно выразить s и t через x и y. Для этого достаточно, чтобы на кривой l не обращался в нуль якобиан

$$\Delta= x_s y_t - x_t y_s = a y_t - b x_t. \qquad (5)$$

Если на l выполняется условие $\Delta\neq 0$, то и является функцией x и y. Нетрудно видеть, что эта функция есть решение уравнения (1). Действительно, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции и уравнениями (3), получим $\frac{du}{ds} = u_x a + u_y b.$ Но $\frac{du}{ds} = c$ и, следовательно, г(x, y) удовлетворяет уравнению (1). Если $\Delta=0$ всюду на кривой l и если существует интегральная поверхность u= u(x, y) с непрерывными производными первого порядка, проходящая через /, то эта кривая должна быть характеристикой. В самом деле, в этом случае параметр t на кривой l можно выбрать так, что вдоль этой кривой $a = \frac{dx}{dt}, b = \frac{dy}{dt}$ Далее, подставляя в u(x, y) выражения x=x(t), y = y(t) и дифференцируя по l, будем иметь $\frac{du}{dt} = u_x a + b u_y$. Отсюда, учитывая, что u(x, y) есть решение уравнения (1), получим $\frac{du}{dt} = c$; следовательно, l является характеристикой. Но, если l — характеристика, то через нее проходит не только одна, а бесконечно много интегральных поверхностей. Действительно, проведем через любую точку кривой l кривую l', которая уже не является характеристикой. Интегральная поверхность, проходящая через l', обязательно содержит характеристику l. Таким образом, множество решений задачи Коши для характеристики / определяется множеством кривых l'. Все интегральные поверхности, проходящие через кривые этого множества, содержат характеристику l. Следовательно, характеристики являются линиями пересечения интегральных поверхностей линиями ветвления, тогда как через не характеристическую кривую не может проходить более одной интегральной поверхности.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема. Если $\Delta \neq 0$ всюду на начальной кривой l, то задача Коши для уравнения (1) имеет одно и только одно решение. Если же $\Delta \neq 0$ всюду на l, то для того чтобы задача Коши имела решение, кривая l должна быть характеристикой. В этом случае задача Коши имеет бесконечно много решений.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$(y^2-u)p + yq = u. \tag{6}$$

Система (3) имеет вид

$$\frac{dx}{ds} = y^2 - u, \frac{dy}{ds} = y, \frac{du}{ds} = u \tag{7}$$

и ее решение, выраженное через начальные значения переменных (x, y, u), будет

$$x = \left(\frac{1}{2} y_0^2 e^s - u_0\right) e^s + x_0 + \left(u_0 - \frac{1}{2} y_0^2\right), y = y_0 e^s, u = u_0 e^s. \tag{8}$$

Положим, что кривая l, через которую должна проходить интегральная поверхность, задана уравнениями

$$x_0=1,\ y_0=t,\ u_0=(1/2)t^2 \tag{9}$$

Подставив (9) в (8), получим

$$x = \frac{t^2}{2}\left(e^s - 1\right)e^s + 1, y = te^s, u = \frac{t^2}{2} e^s. \tag{10}$$

Определитель $\Delta = x_s y_t - x_t y_s = \dfrac{t^2}{2} e^{2s}$, не обращается в нуль при s = 0 и $t \neq 0$. Исключая s и t, мы получим уравнение интегральной поверхности $u=1-x+y^2/2$

Пусть теперь кривая l задана уравнениями:

$x_0=0, y_0=t, u_0=t^2$. (11)

Подставив (11) в (8), найдем, что $x=t^2e^s(chs-1)$, $y=te^s$, $u=t^2e^s$. Определитель $\Delta= te^s(e^s—1)$ обращается в нуль при s = 0, т. е. вдоль l, хотя l не характеристика. Исключая s и t, мы получим $u(x,y)=y\left(y\pm\sqrt{2x}\right)$, т. е. две интегральные поверхности уравнения (6), проходящие через кривую (11). В данном случае $p = \pm\dfrac{y}{\sqrt{x}}$ и эта частная производная обращается в бесконечность вдоль линии (11).

3.2. Нелинейные дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \tag{12}$$

где F — непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные первого порядка по всем пяти аргументам в рассматриваемой области и кроме того, $F^2_p + F^2_q|\neq 0$.

Выясним прежде всего геометрический смысл уравнения (12). В любой фиксированной точке (x, y, u) уравнение А2) устанавливает зависимость между величинами p и q, определяющими направление касательной плоскости к интегральной поверхности. Таким образом, из связки плоскостей, проходящих через точку x, y, u, соотношение (12) выделяет семейство плоскостей, зависящее от одного параметра. Огибающая этого семейства возможных касательных плоскостей есть некоторый конус; назовем его конусом T или конусом Монжа,. Уравнение (12) эквивалентно, таким образом, заданию в каждой точке (x, y, u) рассматриваемой области пространства конусаT, а искомая интегральная поверхность уравнения (12) должна обладать тем свойством, что в каждой ее точке касательная плоскость должна касаться конусаT, соответствующего этой точке. Найдем уравнения образующих конуса T в заданной точке (x, y, и). Пусть p и q—функции некоторого параметра α, удовлетворяющие уравнению (12) в фиксированной точке (x,y,u). Конус T является огибающей семейства плоскостей

$$p(\alpha)(X-x) + q(\alpha)(Y-y)-(U-u) = 0. \quad (13)$$

Дифференцируя (13) по α, получим

$$p^{/}(\alpha)(X-x)+q^{/}(\alpha)(Y-y)=0. \quad (14)$$

Дифференцируя соотношение F = 0 по α, будем иметь

$$Pp'(\alpha) + Qq'(\alpha) = 0, \quad (15)$$

где положено $P = F_p$, $Q = F_q$.

Считая, что производные $p^{/}$ (a) и $q^{/}$(a) не равны нулю, одновременно мы из однородных уравнений (14) и (15) получим (X—x)\P=(Y— y)\Q и, наконец, используя уравнение (13), получим уравнения образующих конуса T:

$$(X-x)\backslash P=(Y-y)\backslash Q=(U-u)\backslash(Pp+qQ). \quad (16)$$

В случае квазилинейного уравнения (1) в каждой точке имеется только одно направление (конус T вырождается в прямую линию) и касательная плоскость к искомой интегральной поверхности содержит это направление. В случае нелинейного уравнения (12) мы имеем в каждой точке вместо одного определенного направления конус T и касательная плоскость к искомым интегральным поверхностям должна касаться этого конуса. Таким образом для нелинейного уравнения (12) нельзя непосредственно строить характеристические кривые, как это мы делали для квазилинейного уравнения (1), так как вместо поля направлений мы имеем поле конусов. Но мы покажем, что если известна интегральная поверхность
u= u(x, y) уравнения (12), то ее можно покрыть линиями, которые вполне аналогичные характеристическим линиям квазилинейного уравнения А). Действительно, в каждой точке интегральной поверхности касательная плоскость должна касаться конуса T, соответствующего этой точке, и тем самым должна содержать одну из образующих этого конуса, вдоль которой она и касается конуса. Эти образующие конусов T и создают на интегральной поверхности поле направлений и тем

самым, интегрируя соответствующее этому полю направлений дифференциальное уравнение первого порядка, мы покрываем нашу интегральную поверхность семейством кривых C, зависящим от одного параметра. Направляющие косинусы упомянутого поля направлений пропорциональны знаменателям уравнений (16), где p и q определяются из уравнения рассматриваемой интегральной поверхности. Таким образом, вдоль линий C, покрывающих заданную интегральную поверхность, выполняются соотношения

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{pP + qQ} \qquad (17)$$

или

$$\frac{dx}{ds} = P, \frac{dy}{ds} = Q, \frac{du}{ds} = pP + qQ. \qquad (18)$$

Чтобы найти линии C на заданной интегральной поверхности, достаточно проинтегрировать уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}, \qquad (19)$$

где знаменатели написанных дробей содержат только переменные x и y поскольку функция r и ее частные производные p и q на заданной поверхности являются известными функциями x и y. Интегрируя уравнение (19) и пользуясь уравнением поверхности u=u(x, y), мы получим однопараметрическое семейство кривых C. Правые части уравнений (18) имеют определенный смысл только при определенном выборе интегральной поверхности u=u(x, y).

Для заданной интегральной поверхности величины p и q есть известные функции x и y. Мы дополним систему уравнений (18) еще двумя уравнениями, содержащими дифференциалы dp и dq, так, чтобы получилась система дифференциальных уравнений, независящая от выбора интегральной поверхности уравнения (12). Введем обозначения $X = F_x$, $Y = F_y$,

$U = F_u$, $r = u_{xx}$, $\sigma=u_{xy}$, $t=u_{yy}$. Дифференцируя левую часть уравнения (12) сначала по x, а затем по y, получим соотношения

$$X+Up+Pr+Q\sigma=0,\ Y+Uq+P\sigma+Qt=0, \qquad (20)$$

которые являются тождествами на заданной интегральной поверхности.

Вдоль кривой C мы имеем, очевидно:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{ds} &= r\frac{dx}{ds}+\sigma\frac{dy}{ds} = \mathrm{Pr}+Q\sigma,\\ \frac{dq}{ds} &= \sigma\frac{dx}{ds}+t\frac{dy}{ds} = P\sigma+Qt.\end{aligned} \qquad (21)$$

Определяя из равенств (20) значения $Pr+Q\sigma$, $P\sigma+Qt$ и подставляя их в уравнения (21), получим два добавочных дифференциальных уравнения

$$\frac{dp}{ds} = -(X+Up), \frac{dq}{ds} = -(Y+Uq).$$

Присоединив эти уравнения к уравнениям (18), получим систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений с пятью функциями вспомогательного параметра s:

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{ds} = P, \frac{dy}{ds} = Q, \frac{du}{ds} = Pp+Qq,\\ &\frac{dp}{ds} = -(X+Up), \frac{dq}{ds} = -(Y+Uq).\end{aligned} \qquad (22)$$

Систему дифференциальных уравнений (22) можно рассматривать независимо от интегральных поверхностей уравнения (12). Эта система называется характеристической системой уравнения (12). Нетрудно проверить, что система (22) имеет первый интеграл

$$F(x, y, u, p, q) = C. \qquad (23)$$

Действительно, дифференцируя по s левую часть этого равенства и пользуясь уравнениями (22), получим

$$\frac{dF}{ds}=F_x\frac{dx}{ds}+F_y\frac{dy}{ds}+F_u\frac{du}{ds}+F_u\frac{du}{ds}+F_p\frac{dp}{ds}+F_q\frac{dq}{ds}=$$
$$XP+YQ+U\left(Pp+Qq\right)-P\left(X+Up\right)-Q\left(Y+Uq\right)\equiv 0,$$
т. е. функция F вдоль каждого решения системы (22) принимает постоянное значение.

Из множества решений системы (22) выделим те решения системы, вдоль которых функция F принимает значение, равное нулю, как того требует исходное дифференциальное уравнение. Назовем такие решения системы (22) характеристическими полосами уравнения (12), т. е. характеристической полосой уравнения (12) называется система функций

$$x(s),\ y(s),\ u(s),\ p(s),\ q(s), \tag{24}$$

удовлетворяющих системе (22) и уравнению

$$F(x,\ y,\ u,\ p,\ q) = 0. \tag{25}$$

Пространственная кривая x(s), y(s) и u(s), несущая эту полосу, называется характеристической кривой. Функции (24) определяют не только пространственную кривую, но и плоскость, касающуюся ее в каждой точке. Для того чтобы решение системы (22) удовлетворяло соотношению (25), т. е. было характеристической полосой, достаточно, в силу (23), проверить, что этому соотношению удовлетворяют начальные данные (x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) решения, т. е.

$$F(x_0,\ y_0,\ u_0,\ p_0,\ q_0)=0. \tag{26}$$

Отметим, что при выводе уравнений (22) мы пользовались производными второго порядка функции u(x, y). Кроме того, при интегрировании системы (22) существенно, чтобы правые части имели непрерывные производные первого порядка. Для этого нужно потребовать, чтобы функция F (x, y, u, p, q) имела непрерывные производные до второго порядка в некоторой области. Как и для квазилинейных уравнений, из самого вывода характеристической системы уравнений (22) можно получить следующие теоремы.

I. На любой интегральной поверхности уравнения (12) существует однопараметрическое семейство характеристических кривых и соответствующих характеристических полос. II. Если характеристическая полоса имеет общий элемент (т. е. значения x, y, u, p, q) с интегральной поверхностью, то эта полоса целиком принадлежит интегральной поверхности.
III. Если две интегральные поверхности касаются в некоторой точке, то они касаются вдоль всей характеристической полосы, имеющей начальным элементом точку касания плоскостей. Предположим теперь, что мы сумели проинтегрировать систему (22) при условии (25) и тем самым нашли всевозможные характеристические полосы. Покажем, каким образом можно из этих характеристических полос строить интегральные поверхности уравнения (12).

Пусть начальная полоса задана функциями

$$x_0(t),\ y_0(t),\ u_0(t),\ p_0(t),\ q_0(t), \tag{27}$$

причем эти функции должны удовлетворять условию (26) и иметь непрерывные производные. Через каждый элемент заданной начальной полосы проведем характеристическую полосу. Эта полоса получается как решение системы (22), которое при s=0 обращается в заданные элементы полосы $x_0(t)$, $y_0(t)$, $u_0(t)$, $p_0(t)$, $q_0(t)$. Обозначим эту систему решений через

$$x = x(s, t),\ y=y(s,t),.\ u = u(s, t),\ p = p(s, t),\ q = q(s, t). \tag{28}$$

Если определитель

$$\Delta=x_s y_t-y_s x_t=F_p y_t-F_q x_t \tag{29}$$

отличен от нуля на начальной полосе, т. е. при s = 0, а следовательно, в силу непрерывности производных и в некоторой ее окрестности, то в качестве независимых переменных можно взять x и y в этой окрестности вместо параметров s и t. Это значит, что можно выразить величины u, p, q как функции от x и y и, в частности, получить явное уравнение поверхности u=u(x, y). Функция u(x, y) будет удовлетворять уравнению (12), так как выражение F (x, y, u, p, q) обращается в нуль тождественно по s и t на нашей поверхности (в силу выполнения условия (26) при s = 0); следовательно, оно также обращается в нуль тождественно по x и y. Остается еще доказать, что функции p и q, определенные последними двумя уравнениями (28), совпадают соответственно с u_x и u_y. Для этого достаточно показать, что два выражения

$$H=\frac{\partial u}{\partial s}-p\frac{\partial x}{\partial s}-q\frac{\partial y}{\partial s},$$
$$L=\frac{\partial u}{\partial s}-p\frac{\partial x}{\partial t}-q\frac{\partial y}{\partial t} \tag{30}$$

тождественно обращаются в нуль на поверхности u=u(x, y), тогда из соотношений

$$\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=0$$

следует, что $p=\dfrac{\partial u}{\partial x},q=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ поскольку $\Delta=x_sy_t-x_ty_s\neq 0$ по предположению. Обращение в нуль величины H непосредственно следует из первых трех уравнений системы (22). Остается выяснить, при каких условиях и второе из соотношений (30) обращается в нуль тождественно. Рассмотрим тождество $\dfrac{\partial L}{\partial s}-\dfrac{\partial H}{\partial t}=p_tx_s+q_ty_s-p_sx_t-q_sy_t$ и воспользуемся уравнениями (22), а также тем, что из H=0 следует равенство $\dfrac{\partial H}{\partial t}=0$. Тогда получим $\dfrac{\partial L}{\partial s}=P\dfrac{\partial p}{\partial t}+Q\dfrac{\partial q}{\partial t}+\left(X+Up\right)\dfrac{\partial x}{\partial t}+\left(Y+Uq\right)\dfrac{\partial y}{\partial t}.$ Далее, дифференцируя по t соотношение F = 0, которому удовлетворяют функции (28), получим $X\dfrac{\partial x}{\partial t}+Y\dfrac{\partial y}{\partial t}+U\dfrac{\partial u}{\partial t}+P\dfrac{\partial p}{\partial t}+Q\dfrac{\partial q}{\partial t}=0.$

Вычитая это равенство из предыдущего, будем иметь

$\frac{dL}{ds} = U\left(p\frac{\partial x}{\partial t} + q\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right)$ или $\frac{\partial L}{\partial s} = -UL,$ откуда следует $L = L_0 e^{-\int_0^s UdS}$, где L_0 есть значение L при s=0. Из последнего равенства видно, что для обращения L в нуль при всех значениях s необходимо и достаточно, чтобы $L_0=0$, т. е. чтобы функции (27) удовлетворяли соотношению

$$\frac{du_0}{dt} = p_0\frac{dx_0}{dt} + q_0\frac{dy_0}{dt}.$$

Таким образом, из предыдущих рассуждений следует, что если функции (27) удовлетворяют двум соотношениям

$$\begin{gathered} F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0, \\ \frac{du_0}{dt} = p_0\frac{dx_0}{dt} + q_0\frac{dy_0}{dt} \end{gathered} \tag{31}$$

и если определитель $\Delta=x_s y_t-x_t y_s\neq 0$ при s=0, то первые три из уравнений (28) в некоторой (s, t) окрестности определяют интегральную поверхность u=u(x,y) уравнения (12), содержащую начальную полосу, причем u(x, y) имеет непрерывные производные второго порядка.

Задача Коши для уравнения (12) формулируется так же, как и в случае квазилинейного уравнения. Требуется найти интегральную поверхность уравнения (12), проходящую через заданную кривую l.

Пусть кривая l задана в параметрической форме:

$$x=x_0(t),\ y=y_0(t),\ u=u_0(t), \tag{32}$$

причем $x^2_t+y^2_t\neq 0$. Кривую l дополним до полосы C_1, определив $p_0(t)$ и $q_0(t)$ из уравнений (31). Функциональный определитель левых частей уравнений (31) по p_0 и q_0 $\Delta_0=y'_0(t)F_{p0}-x'_0(t)F_{qo}$ совпадает с определителем (29) при s = 0. Будем считать, что определитель (29) отличен от нуля вдоль l, и что система (31) на l однозначно разрешима относительно $p_0(t)$ и $q_0(t)$.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\Delta_0 = x_s y_t - x_t y_s|_{s=0} = y'_0(t)F_{p0} - x'_0(t)F_{q0} = 0 \qquad (33)$$

всюду вдоль заданной полосы C_1, удовлетворяющей двум соотношениям (31). Положим, что существует дважды непрерывно дифференцируемая интегральная поверхность $u=u(x, y)$, проходящая через полосу C_1. Из (33) и второго соотношения (31) следует, что полоса удовлетворяет уравнениям (18) (параметр s обозначенnбуквой t), а также согласно предыдущим вычислениям эта полоса удовлетворяет и всем уравнениям (22), т. е. является характеристической полосой. Таким образом, в случае $\Delta 0=0$ интегральная поверхность уравнения (1) может проходить через кривую l, если функции $p_0(t)$ и $q_0(t)$, определенные из соотношений (31), дополняют эту кривую до характеристической полосы.

3.3. Нелинейные дифференциальные уравнения с n независимыми переменными

Изложенная в 2.2 теория нелинейных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными непосредственно распространяется на уравнение с n неизвестными переменными

$$F(x_1, ..., x_n, u, p_1, ..., p_n) = 0 \qquad \left(p_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \qquad (34)$$

Поэтому мы ограничимся лишь указанием результатов. Характеристическая система, соответствующая уравнению (34), имеет вид:

$$\frac{dx_1}{P_1} = ... = \frac{dx_n}{p_n} = \frac{du}{P_1 p_1 + ... + P_n p_n} = -\frac{dp_1}{(X_1 + Up_1)} = ... = -\frac{dp_n}{(X_n + Up_n)} = ds, \quad (35)$$

где $X_k=F_{xk}$, $U=F_u$, $P_k=F_{pk}$, а s — некоторый вещественный параметр. Система (35) имеет первый интеграл $F(x_1, ..., x_n, u, p_1, ..., p_n) = C$. Все решения системы (35), одновременно удовлетворяющие соотношению $F(x_1, ..., x_n, u, p_1,…,p_n)=0$, называются характеристическими полосами. Эти полосы образуют (2n-1) — параметрическое семейство.

Положим, что мы проинтегрировали систему (35):

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k\left(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}\right), \\ u &= u\left(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}\right), \\ p_k &= p_k\left(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

где $x^{(0)}_k$, u^0, $p^{(0)}_k$—начальные значения функций при $s = 0$. Будем считать, что эти начальные значения являются функциями (n—1) параметров:

$$x^{(0)}_k(t_1,\dots, t_{n-1}),\ u^{(0)}(t_1,\dots,t_{n-1}),\ p^{(0)}_k(t_1,\dots,t_{n-1}). \qquad (37)$$

Подставив это в (36), получим:

$$x_k=x_k(s,t_1,\dots, t_{n-1}),\ u_k=u_k(s,t_1,\dots,t_{n-1}),\ p_k=p_k(s,t_1,\dots,t_{n-1}). \qquad (38)$$

Если функциональный определитель $\Delta = \dfrac{D(x_1,\dots, x_n)}{D(s, t_1,\dots, t_{n-1})}$, который, в силу первых из уравнений системы (35), может быть записан в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1,\dots, P_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1},\dots,\dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}},\dots,\dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \qquad (39)$$

не обращается в нуль на начальном многообразии (37) (т. е. при $s = 0$) и, следовательно, в силу непрерывности производных, не обращается в нуль в некоторой окрестности этого многообразия, то величины s, t_1, ... , t_{n-1} в этой окрестности могут быть выражены через x_1, ... ,x_n, подставляя эти выражения в $u = u(s, t_1 ..., t_{n-1})$ получим определенную поверхность $u = u(x_1, ... , x_n)$, содержащую начальное многообразие (37). Эта поверхность будет интегральной поверхностью уравнения (34), если функции (37) удовлетворяют n соотношениям

$$F\left(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},u^{(0)},p_1^{(0)},\dots,p_n^{(0)}\right)=0,$$
$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t_j}=\sum_{v=1}^{n}p_v^{(0)}\frac{\partial x_v^{(0)}}{\partial t_j}\left(j=1,2,\dots,n-1\right) \tag{40}$$

тождественно по t_j.

Задача Коши состоит в отыскании интегральной поверхности уравнения (34), содержащей заданное (n-1)-мерное многообразие

$x^{(0)}{}_k(t_1,\dots,t_{n-1})$, $u^{(0)}\ t_1,\dots,t_{n-1})$. (41)

Многообразие (41) дополним до многообразия (37), определив $p^{(0)}{}_k(t_1,\dots,t_{n-1})$ из уравнений (40). Если при этом определитель (39) отличен от нуля вдоль такого многообразия, то указанный выше метод приводит к решению задачи Коши, и это решение единственно.

Пример. Найти интегральную поверхность уравнения

$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3-(1/2)(p^2{}_1+p^2{}_2-p^2{}_3)-u=0$ (42)

содержащую 2-мерное многообразие

$x^{(0)}{}_1=t_1$, $x^{(0)}{}_2=t_2$, $x^{(0)}{}_3=0$,$u^{(0)}=(1/2)(t^2{}_2-t^2{}_1)$. (43)

Дополним это многообразие, определив p из уравнений

Отсюда

$p^{(0)}{}_1=t_1$, $p^{0)}{}_2=t_2$, $p^{(0)}{}_3=\sqrt{2}t_1$. (44)

Характеристическая система (35) имеет вид

$$\frac{dx_1}{x_1-p_1}=\frac{dx_2}{x_2-p_2}=\frac{dx_3}{x_3+p_3}=\frac{du}{u-\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2-p_3^2\right)}=\frac{dp_1}{0}=\frac{dp_2}{0}=\frac{dp_3}{0}=ds,$$

и ее решение, выраженное через начальные данные, будет:

$$x_1=p_1^{(0)}+\left(x_1^{(0)}+p_3^{(0)}\right)e^s,x_2=p_2^{(0)}+\left(x_2^{(0)}-p_2^{(0)}\right)e^s$$
$$x_3=-p_3^{(0)}+\left(x_3^{(0)}+p_3^{(0)}\right)e^s,u=\frac{1}{2}\left(p_1^{(o)^2}+p_2^{(0)^2}-p_3^{(0)^2}\right)\left(1-e^s\right)+u^{(0)}e^s,$$
$$p_1=p_1^{(0)},p_2=p_2^{(0)},p_3=p_3^{(0)}.$$

Подставив (43) и (44) в (45), получим:

$$x_1 = -t_1 + 2t_1 e^s, x_2 = t_2, x_3 = \sqrt{2t_1}\left(e^s - 1\right),$$

$$u = \frac{1}{2}\left(t_2^2 - t_1\right), p_1 = -t_1, p_2 = t_2, p_3 = \sqrt{2t_1}.$$

Исключив s, t_1, t_2 из первых четырех уравнений, получим интегральную поверхность.

$$u = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}\left(x_1 - \sqrt{2}x_3\right)^2.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам выполнить типовой расчет по вышеуказанной теме курса математики, а также предоставляет студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической и теоретической части курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С Ч 2. Дифференциальные и интегральные исчисления Москва 2001 г.

2. Данко Л.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах./Л.Е. Данко, А.Т. Попов, Т.Я. Кожевникова. Ч.2.М.:Высш. шк. 1987 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы
по курсу «Математика» для студентов специальностей220201
«Управление и информатика в технических системах», 140604
«Электропривод и автоматика промышленных установок
и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика»,
110302 «Электрификация и автоматизация сельского
хозяйства» очной формы обучения

Составители: Федотенко Галина Федоровна,
Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Купцов Андрей Валериевич

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.06. 2011.
Уч.-изд. л. 3,1 «С»

ФГ БОУВПО «Воронежский государственный технический университет» 394026 Воронеж, Московский просп., 14