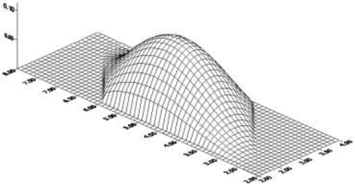
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для организации самостоятельной работы
по изучению раздела «Функции нескольких переменных»
курса «Математический анализ»
для студентов по направлению подготовки бакалавров 230100
«Информатика и вычислительная техника»
(профили «Системы автоматизированного проектирования»,
«Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»)
очной формы обучения
Часть 2



Воронеж 2012

Составители: канд. физ.-мат. наук Е.Г. Глушко,
канд. физ.-мат. наук А.П. Дубровская

УДК 517.9

Методические указания для организации самостоятельной работы по изучению раздела «Функции нескольких переменных» курса «Математический анализ» для студентов специальностей 220300 «Системы автоматизированного проектирования», 230101 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» очной формы обучения. Ч. 2/ ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Е.Г. Глушко, А.П. Дубровская. Воронеж, 2012. 48 с.

В методических указаниях содержатся основные теоретические сведения по дифференциальному исчислению функций нескольких переменных. Приводится большое количество решенных типовых задач, задач для самостоятельного решения.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе MS Word 2003 и содержатся в файле ФНП2.docx .

Библиогр.: 7 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Ломакин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой
д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

## 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $z = f(x, y)$ независимых переменных $x$ и $y$ дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и дважды дифференцируема в точке $M_0$. Первый дифференциал функции $dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)dy$ является функцией четырех переменных: $x, y, dx$ и $dy$, причем $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ - дифференцируемые в точке $M_0$ функции.

Дифференциал второго порядка $d^2z$ функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0$ определяется как дифференциал в точке $M_0$ от первого дифференциала $dz$ при следующих условиях: $dz$ рассматривается как функция только независимых переменных $x, y$ ($dx$ и $dy$ рассматриваются как постоянные множители), при вычислении дифференциалов от $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ приращение независимых переменных $x$ и $y$ берутся такими же, как и в выражении для $dz$, то есть равными $dx$ и $dy$.

Найдем вид второго дифференциала:

$$d^2z = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 +$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

где $dx^2 = (dx)^2, dy^2 = (dy)^2$.

Последнюю формулу можно записать в более компактном виде. Символ $d = \frac{\partial \cdot}{\partial x}dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y}dy$ назовем оператором дифференциала. При действии этого оператора на функцию $z$

получается дифференциал функции $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Определим $n-$ную степень оператора дифференциала как $n-$ную степень двучлена $\frac{\partial \cdot}{\partial x}dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y}dy$. В частности, при $n = 2$ получаем

$$d^2 \cdot = (\frac{\partial \cdot}{\partial x}dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y}dy)^2 = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2}dy^2 .$$

При действии оператора $d^2$ на функцию $z$ получится второй дифференциал функции. Таким образом, второй дифференциал можно записать в операторном виде:

$$d^2 z = (\frac{\partial \cdot}{\partial x}dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y}dy)^2 z .$$

Дифференциал $d^n z$ произвольного $n-$го порядка функции $z(x, y)$ определяется индуктивно по формуле $d^n z = d(d^{n-1}z)$ при таких же двух условиях, что и дифференциал второго порядка. Для $d^n z$ справедлива операторная формула

$$d^n z = (\frac{\partial \cdot}{\partial x}dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y}dy)^n z .$$

При этом выражение в скобках раскрывается по формуле бинома Ньютона, а затем перед множителями $dx_j dx_k$ над чертой дописывается буква u. Например, для функции двух переменных $u = f(x; y)$

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 ,$$

$$d^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3 .$$

Если $x, y$ являются не независимыми переменными, а дифференцируемыми функциями каких-либо независимых переменных, то последняя формула при $n \geq 2$ становится, вообще говоря, неверной из-за неинвариантности формы дифференциалов высших порядков. В частности, при $n = 2$ имеем

$$d^2 z = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x} dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y} dy\right)^2 z + \left(\frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y\right).$$

В случае функции $m$ независимых переменных $u = f(x_1, x_2, ...x_m)$ дифференциал $n-$го порядка определяется индуктивно. Оператор дифференциала имеет вид $d = \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial \cdot}{\partial x_m} dx_m$ и справедлива операторная формула

$$d^n u = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial \cdot}{\partial x_m} dx_m\right)^n u.$$

Для функции трёх переменных

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} dzdx.$$

Следует иметь в виду, что под $dx^2, dy^2, dz^2$ понимаются квадраты дифференциалов, а не дифференциалы квадратов: $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$, $dz^2 = (dz)^2$.

Пример. Найти второй дифференциал функции $z = x^y$ в точке $M_0(1,0)$.

Решение. Вычисляем частные производные второго порядка данной функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = x^{y-1}(1 + y\ln x); \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 + y\ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y(\ln x)^2.$$

В указанной точке, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = 0;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(M_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = 1; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) = 0.$$

Подставляя эти значения формулу второго дифференциала, находим $d^2 z|_{M_0} = 2dxdy$.

Пример. Найти $du$ и $d^2u$ для функции $u = 2x^3 y + y^3$.

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3 + 3y^2$;

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 6x^2 ydx + (2x^3 + 3y^2)dy.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 12xy,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x^2.$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 = 12xydx^2 + 12x^2dxdy + 6ydy^2$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти $d^2 z$, если $z = e^{xy}$.
2. Найти $d^2 z$, если $z = \ln(x^2 + y^2)$.
3. Найти $d^2 z$, если $z = \frac{xy}{x - y}$.
4. Найти $d^2 z$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
5. Найти $d^3 z$, если $z = \frac{xy}{x + y}$.

6. Найти $d^3z$, если $z=\cos(x+2y^2)$.

Ответ: 1. $d^2z=e^{xy}((ydx+xdy)^2+2dxdy)$.

2. $d^2z=2\dfrac{(y^2-x^2)dx^2-4xydxdy+(x^2-y^2)dy^2}{(x^2+y^2)^2}$.

3. $d^2z=\dfrac{2(y^2dx^2-2xydxdy+x^2dy^2)}{(x-y)^3}$.

4. $d^2z=\dfrac{2(xydx^2+(y^2-x^2)dxdy-xydy^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

5. $d^3z=\dfrac{6}{(x+y)^4}(y^2dx^3-(2xy-y^2)dx^2dy-$

$-(2xy-x^2)dxdy^2+6x^2dy^3)$.

6. $d^3z=\sin(x+2y^2)dx^3+12y\sin(x+2y^2)dx^2dy+$

$+(48y^2\sin(x+2y^2)-12\cos(x+2y^2))dxdy^2+$

$+(64y^3\sin(x+2y^2)-48y\cos(x+2y^2))dy^3$.

## 2. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Теорема. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до $(n+1)$ порядка включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Тогда для любой точки $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ из этой окрестности справедливо равенство

$$f(M)=f(M_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{d^k f(M_0)}{k!}+\frac{d^{n+1}f(N)}{(n+1)!},$$

где $N(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$ - некоторая точка, лежащая на отрезке $M_0M$, $(0<\theta<1)$. Последнее слагаемое (остаточный член) можно записать в форме Пеано $o(\rho^n)$, где $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, а символ $o(\rho^n)$ означает бесконечно малую при $\rho\to 0$ (или при $M \to M_0$) функцию более высокого порядка малости, чем $\rho^n$.

<u>Доказательство</u>. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) = f(M_t)$, определенную на отрезке $[0,1]$, причем $\varphi(0) = f(M_0)$, $\phi(1) = f(M)$. Найдем производные функции $\varphi(t)$ до $n$-го порядка включительно:

$$\varphi(t) = f'_x(M_t)\Delta x + f'_y(M_t)\Delta y = (\frac{\partial \cdot}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \cdot}{\partial y}\Delta y)|_{M_t} = df(M_t);$$

$$\varphi(t) = f''_{xx}(M_t)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(M_t)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M_t)\Delta y^2 =$$

$$= (\frac{\partial \cdot}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \cdot}{\partial y}\Delta y)^2 f\,|_{M_t} = d^2 f(M_t); \ldots$$

$$\varphi^{(n)}(t) = (\frac{\partial \cdot}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \cdot}{\partial y}\Delta y)^n f\,|_{M_t} = d^n f(M_t).$$

По формуле Маклорена для функции $\varphi(t)$ одной переменной имеем:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}t^{(n+1)},$$

где $0 < \theta < 1$.

Полагая $t = 1$, получим

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

С учетом того, что $\varphi(1) = f(M)$, $\varphi^{(k)}(0) = d^k f(M_0)$, $\varphi^{(n+1)}(\theta) = f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = f(N)$ имеем

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{d^k f(M_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(N)}{(n+1)!}.$$

В частности,

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+$$

$$\frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2]+\frac{1}{3!}[\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^3}(x-x_0)^3+$$

$$+3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^2\partial y}(x-x_0)^2(y-y_0)+3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y^2}(x-x_0)(y-y_0)^2+$$

$$\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial y^3}(y-y_0)^3]+\ldots+\frac{1}{n!}[\frac{\partial\cdot}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial\cdot}{\partial y}(y-y_0)]^n f\,|_{(x_0,y_0)}+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}[\frac{\partial\cdot}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial\cdot}{\partial y}(y-y_0)]^{(n+1)} f\,|_{(x_0+\theta\Delta x,\,y_0+\theta\Delta y)}.$$

Остаточный член

$$\frac{1}{(n+1)!}[\frac{\partial\cdot}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial\cdot}{\partial y}(y-y_0)]^{(n+1)} f\,|_{(x_0+\theta\Delta x,\,y_0+\theta\Delta y)}$$ можно

записать в виде $o(\rho^n)$, где

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,.$$

Пример. Разложить функцию $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ по формуле Тейлора с центром разложения в точке $M_0(0,1)$ до членов второго порядка включительно.

Решение. Найдем частные производные функции $f(x,y)$ до второго порядка включительно:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y};\ \frac{\partial f}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\cdot(-\frac{x}{y^2});\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\cdot(-\frac{x}{y^3})+e^{\frac{x}{y}}\cdot(-\frac{1}{y^2});\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x^2}{y^4}+e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{2x}{y^3}.$$

В точке $M_0(0,1)$ имеем

$$f(M_0)=1,\ \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)=1;\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)=0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)=1;$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)=-1;\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)=0.$ Подставляя эти выражения в формулу Тейлора, получаем

$$e^{\frac{x}{y}}=1+x+\frac{1}{2}x^2-x(y-1)+R_3=1+2x+\frac{1}{2}x^2-xy+R_3.$$

В форме Пеано $R_3=o(x^2+(y-1)^2)$.

Пример. Разложить функцию $f(x;\,y)=x^2\cdot 2^{x-3y}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(2;\ 1)$ до членов второго порядка включительно. Пользуясь этой формулой, найти приближённое значение функции в точке M(2,05; 0,38).

Решение. Найдём значение функции и частных производных функции до 2-го порядка включительно в точке $M_0(2;\ 1)$:

$f(M_0)=2^2\cdot 2^{2-3}=2$;

$f'_x=2x\cdot 2^{x-3y}+x^2\cdot 2^{x-3y}\cdot\ln 2=x\cdot 2^{x-3y}(2+x\ln 2)$;

$f'_x(M_0)=2\cdot 2^{2-3}(2+2\ln 2)=2(1+\ln 2)$;

$f'_y=-3x^2\cdot 2^{x-3y}\ln 2$, $\quad f'_y(M_0)=-3\cdot 2^2\cdot 2^{2-3}\cdot\ln 2=-6\ln 2$;

$f''_{xx}=(2^{x-3y}+x\cdot 2^{x-3y}\cdot\ln 2)(2+x\ln 2)+x\cdot 2^{x-3y}\cdot\ln 2=$

$=2^{x-3y}(2+4x\ln 2+x^2\ln^2 2)$;

$f''_{xx}(M_0)=2^{-1}(2+8\ln 2+4\ln^2 2)=1+4\ln 2+2\ln^2 2$;

$f''_{xy}=-3x\cdot 2^{x-3y}\cdot(2+x\ln 2)\cdot\ln 2$

$f''_{xy}\ \ M_0\ \ =-32\cdot 2^{-1}\cdot(2+2\ln 2)\cdot\ln 2=-6(1+\ln 2)\cdot\ln 2$

$f''_{yy}=9x^2\cdot 2^{x-3y}\cdot\ln^2 2,$

$f''_{yy}\ M_0\ = 94\cdot 2^{-1}\cdot \ln^2 2 = 18\ln^2 2.$

Воспользуемся формулой Тейлора:

$f(x;\,y) = 2 + 2(1+\ln 2)(x-2) - 6\ln 2\cdot(y-1) +$

$+\dfrac{1}{2}[(1+4\ln 2 + 2\ln^2 2)(x-2)^2 - 12(1+\ln 2)\ln 2\cdot(x-2)(y-1) +$

$+18\ln^2 2\cdot(y-1)^2] + o(\rho^2)$,

где $\rho^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$.

Найдём приближённое значение f(2,05; 0,38), отбросив в последнем равенстве остаточный член $o(\rho^2)$:

f(2,05; 0,98) $\approx$ 2 + 2(1 + ln2)·0,05 – 6 ln2·(– 0,02) +

$+\dfrac{1}{2}$ [(1 + 4 ln2 + 2 $\ln^2$ 2·$0{,}05^2$ – 12·(1 +ln2) ln2·0,05·(–0,02) +

+ 18·$\ln^2$ 2·$(–0{,}02)^2$ = 2 + 0,1 ·(1 + ln2) – 0,12·ln2 +

+ $\dfrac{1}{2}$ [(1+ 4 ln2 + 2 $\ln^2$2) ·0,0025 – 0,012·(1+ ln2)ln2+ 0,0072·$\ln^2$2 $\approx$

$\approx 2{,}087.$

Задачи для самостоятельной работы

1.Разложить данную функцию по формуле Тейлора с центром разложения в точке $M_0$

1.1. $u = (x-1)^2 + (x+y)^2,\ M_0(0,0);$

1.2. $u = x - 2y + x^2 - 3xy + 4y^2,\ M_0(1,2);$

1.3. $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,\ M_0(1,1,1)$.

2.Разложить данную функцию по формуле Тейлора с центром
разложения в данной точке $M_0$ до членов указанного порядка включительно

2.1. $u = \sqrt{1-x-y},\ M_0(0,0),$ до членов второго порядка;

2.2. $u=\ln(1+x+y)$, $M_0(0,0)$, до членов третьего порядка;

2.3. $u=(x+y)\sin(x-y)$, $M_0(0,0)$, до членов третьего порядка;

2.4. $u=e^x\cos y$, $M_0(0,0)$, до членов четвертого порядка;

2.5. $u=x^{\frac{y}{z}}$, $M_0(1,2,1)$, до членов второго порядка.

Ответы:

1.1. $u=1-2x+(2x^2+2xy+y^2)$;

1.2. $u=8+(-3(x-1)+11(y-2))+((x-1)^2-3(x-1)(y-2)+4(y-2)^2)$;

1.3. $u=3((x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(y-1)(z-1)-$
$-(z-1)(x-1))+((x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1))$.

2.1. $\sqrt{1-x-y}=1-\dfrac{1}{2}(x+y)-\dfrac{1}{8}(x+y)^2+o(x^2+y^2)$;

2.2 $\ln(1+x+y)=x+y-0{,}5(x+y)^2+(1/3)(x+y)^3+o((x^2+y^2)^{3/2})$;

2.3. $(x+y)\sin(x-y)=x^2-y^2+o((x^2+y^2)^{3/2})$;

2.4. $e^x\cos y=1+x+\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)+\dfrac{1}{6}(x^3-3xy^2)+\dfrac{1}{24}(x^4-6x^2y^2+y^4)+$
$+o(x^2+y^2)^2$;

2.5. $x^{\frac{y}{z}}=-y+2z+x^2+xy-2xz+o((x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2)$.

## 3. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $z=f(x,y)$, если существует такая $\varepsilon$ окрестность $\Omega$ точки $M_0(x_0,y_0)$, что $f(M_0)>f(M)$ ($f(M_0)<f(M)$) для любой точки $M\in\Omega, M\neq M_0$.

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой локального экстремума, если она является либо точкой локального максимума, либо точкой локального минимума.

Приведем еще одно определение максимума и минимума функции.

Пусть $x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y,$ тогда

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0) = \Delta f \ .$$

1) Если $\Delta f < 0$ при всех достаточно малых приращениях независимых переменных, то функция $f(x,y)$ достигает <u>максимума</u> в точке $M(x_0,y_0)$.

2) Если $\Delta f > 0$ при всех достаточно малых приращениях независимых переменных, то функция $f(x,y)$ достигает <u>минимума</u> в точке $M(x_0,y_0)$.

Эти формулировки переносятся без изменения на функции любого числа переменных.

<u>Теорема1</u>(необходимое условие экстремума). Если $M_0(x_0,y_0)$ - точка локального экстремума функции $f(x,y)$, имеющей непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ в этой точке, то $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0.$

<u>Доказательство</u>. Дадим переменной $y$ определенное значение $y = y_0$. Тогда функция $f(x,y_0)$ будет функцией одной переменной $x$. Так как при $x = x_0$ она имеет экстремум,
и имеет непрерывную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$, то $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0.$
Аналогично доказывается, что $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0.$

Эта теорема не является достаточной для исследования вопроса об экстремальных значениях функции, но позволяет находить эти значения в тех случаях, в которых мы заранее уверены в существовании максимума или минимума.

Пример. Функция $z = x^2 - y^2$ имеет производные

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, которые обращаются в нуль при $x = 0, y = 0$.
Но эта функция при указанных значениях не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно, эта функция равна нулю в начале координат и принимает в как угодно близких точках от начала координат как положительные, так и отрицательные значения.

Точки, в которых $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ (или не существует) и $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (или не существует), называются критическими точками функции $z = f(x, y)$.

Точки, в которых все частные производные первого порядка равны нулю, называются точками стационарности функции или стационарными точками.

Для исследования функции в критических точках установим достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, пусть, кроме того, точка $M_0(x_0, y_0)$ - стационарная, то есть $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0.$

Обозначим $A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}, B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}$

и $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тогда:

1) если $D>0,\ A>0\ (C>0)$, то в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ имеет минимум;

2) если $D>0,\ A<0\ (C<0)$, то в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ имеет максимум;

3) если $D<0$, то экстремума в точке $M_0(x_0,y_0)$ нет;

4) если $D=0$, то экстремум в этой точке может быть и может не быть (требуется дальнейшее исследование).

Доказательство. Напишем формулу Тейлора второго порядка для функции $z=f(x,y)$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+$$
$$+\frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2]+o(\rho^2),$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. По условию $M_0(x_0,y_0)$ - точка стационарности, поэтому $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$. Из формулы Тейлора следует

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+$$
$$+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2]+o(\rho^2).$$

Используя введенные обозначения, запишем

$$\Delta f=\frac{1}{2!}[A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2]+o(\rho^2).$$

Выражение в квадратных скобках, то есть второй дифференциал $d^2f=A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$, является квадратичной формой относительно $\Delta x, \Delta y$. Если выполнено условие $D>0$, то квадратичная форма сохраняет постоянный знак. Этот знак совпадает со знаком $\Delta f$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, поскольку $o(\rho^2)$ - величина бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\rho^2$. Если:

1) $D>0, A>0,$ то $d^2 f>0$ и $\Delta f>0$ при любых достаточно малых $\Delta x, \Delta y$. Следовательно, при $D>0, A>0$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z=f(x, y)$ имеет минимум;

2) $D>0, A<0,$ то $d^2 f<0$ и $\Delta f<0$ при любых достаточно малых $\Delta x, \Delta y$. Следовательно, при $D>0, A<0$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z=f(x, y)$ имеет максимум;

3) если $D<0,$ то $d^2 f$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ нет;

4)если $D=0$, то $\Delta f=A(\Delta x+\frac{B}{A}\Delta y)^2+o(\rho^2)$ и при $\Delta x=-\frac{B}{A}\Delta y$ знак приращения функции определяется последующими слагаемыми в формуле Тейлора, поэтому требуется дополнительное исследование.

Пример. Найти локальные экстремумы функции $f(x, y)=3xy-(x^3+y^3)$ в области $D=\{(x, y) \mid x>0, y>0\}$.

<u>Решение</u>. Найдем $\frac{\partial f}{\partial x}=3y-3x^2, \frac{\partial f}{\partial y}=3x-3y^2$. Решив систему уравнений $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=3y-3x^2=0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}=3x-3y^2=0, \end{cases}$ получим

стационарную точку $M_0(1,1)$, то есть $x=1, y=1$. В этой точке выполнены необходимые условия экстремума. Найдем вторые частные производные

$$A=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}=-6x\,|_{\substack{x=1\\y=1}}=-6,\ C=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}=-6y\,|_{\substack{x=1\\y=1}}=-6,$$

$$B=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y}=3.$$

Вычислим $D=AC-B^2=(-6)(-6)-3^2>0$. Так как $D>0, A<0$, то точка $M_0(1,1)$ является точкой локального максимума.

Пример. Найти точки экстремума функции

$$u(x;\,y)=\frac{x^2}{2}+2x+\frac{y^3}{3}+y^2-3y+5.$$

Решение. Найдём стационарные точки функции $\frac{\partial u}{\partial x}=x+2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=y^2+2y-3$. Решим систему уравнений

$$\begin{cases}x+2=0,\\ y^2+2y-3=0,\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x=-2,\\ y=-3,\quad y=1.\end{cases}$$

Решением системы являются точки $M_1(-2;\,-3)$, $M_2(-2;\,1)$. Исследуем эти стационарные точки на экстремум, для чего найдём частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=1,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2y+2.$$

Имеем $\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2y+2\end{vmatrix}=2y+2.$

$\Delta(M_1) = 2(-3) + 2 = -4 < 0$, следовательно, $M_1(-2; -3)$ не является точкой экстремума.

$\Delta(M_2) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 > 0$, что говорит о том, что $M_2(-2; 1)$ является точкой экстремума. А так как $\dfrac{\partial^2 u(M_2)}{\partial x^2} = 1 > 0$, то заключаем, что $M_2$ – точка минимума.

Задачи для самостоятельной работы

Найти точки локального экстремума следующих функций двух переменных:

1. $u = x^2 - xy + y^2;$ 2. $u = x^2 - xy - y^2;$
3. $u = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x;$ 4. $u = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2;$
5. $u = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y.$ 6. $u = 4x + 2y - x^2 - y^2;$
7. $u = x^3 + y^3 - 15xy.$ 8. $u = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$
9. $u = x^2 + 4y^2 - 2xy + 4.$ 10. $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} + y.$
11. $z = (x-1)^2 - 2y^2.$ 12. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$
13. $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2).$ 14. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$
15. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$
16. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + 5\dfrac{2}{3}.$
17. $z = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 3y - 20.$
18. $z = -x^2 + xy - y^2 - 9y + 6x - 35.$
19. $z = 6x^2 - 7xy + 2y^2 + 6x - 3y.$
20. $z = 4x^2 - 5xy + 3y^2 - 9x - 8y.$

Ответы: 1. $u_{\min} = u(0,0) = 0.$ 2. точек экстремума нет.
3. $u_{\min} = u(-2,-1) = -2.$ 4. $u_{\min} = u(4/3, 4/3) = -64/27;$

$u_{\max}=u(0,0)=0$. 5. $u_{\min}=u(1,-1)=-6$; $u_{\max}=u(-1,1)=6$. 6. $u_{\max}=u(2,1)=5$. 7. В точке $(0,0)$ экстремума нет, $u_{\min}=u(5,5)=-125$. 8. $u_{\min}=u(0,3)=-9$. 9. $u_{\min}=u(0,0)=4$. 10. $u_{\min}=u(1,1)=3$. 11. Экстремумов нет. 12. $z_{\min}=-8$ при $x=\sqrt{2}; y=-\sqrt{2}$ и при $x=-\sqrt{2}; y=\sqrt{2}$; при $x=y=0$ экстремумов нет. 13. $z_{\max}=8e^{-2}$ при $x=-4, y=-2$; при $x=y=0$ экстремумов нет. 14. $z_{\max}(4,4)=28$. 15. $z_{\min}(1;0,5)=4$.

## 4. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ $m$ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим случай большего числа переменных. Пусть функция $u=f(M)=f(x_1,x_2,...x_m)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$.

Определение. Функция $u=f(M)$ имеет в точке $M_0$ локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки $M_0$, в которой при $M\neq M_0$ выполняется неравенство $f(M)<f(M_0)$ $\quad(f(M)>f(M_0))$.

Если функция имеет в точке $M_0$ локальный максимум или локальный минимум, то говорят, что она имеет в этой точке локальный экстремум (или просто экстремум).

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). Если функция $u=f(M)=f(x_1,x_2,...x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ локальный экстремум и в этой точке
существует частная производная функции по аргументу $x_k$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)=0 \text{ при } k=1,2,...,m.$$

Следствие. Если функция $u=f(M)=f(x_1,x_2,...x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то

$$du|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m = 0$$

при любых значениях дифференциалов независимых переменных $dx_1, \ldots, dx_m$.

Точки, в которых первый дифференциал функции равен нулю, называют точками возможного экстремума этой функции. Для отыскания точек возможного экстремума функции $u = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ нужно решить систему $m$ уравнений с $m$ переменными $\begin{cases} \partial f / \partial x_1 = 0; \\ \ldots \\ \partial f / \partial x_m = 0 \end{cases}$.

## 5. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ

Функция вида $Q(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$ , где $a_{ij}$ числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$, называется квадратичной формой от переменных $x_1, \ldots, x_m$. Числа $a_{ij}$ называются коэффициентами квадратичной формы, а составленная из этих коэффициентов симметричная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$ - матрицей квадратичной формы.

Определители

$$\delta_1 = a_{11}, \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ . & \ldots & . \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, \delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ . & \ldots & . \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

называются угловыми минорами матрицы $A$.

Квадратичная форма $Q(x_1,...,x_m)$ называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для любых значений переменных $x_1,...,x_m$, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения.

Отметим, что $Q(0,0,...,0)=0$.

Например, $Q(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2$ - положительно определенная квадратичная форма, так как $Q(x_1,x_2)>0$ во всех точках $(x_1,x_2)$, кроме точки (0,0).

Квадратичная форма называется знакоопределенной, если она является либо положительно определенной, либо отрицательно определенной.

Квадратичная форма $Q(x_1,...,x_m)$ называется квазизнакоопределенной, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, но при этом обращается в нуль не только при $x_1=x_2=...=x_m=0$.

Квадратичная форма $Q(x_1,...,x_m)$ называется знакопеременной, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

## Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.

1.Для того чтобы квадратичная форма $Q(x_1,...,x_m)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны: $\delta_1>0, \delta_2>0, ..., \delta_m>0.$

2. Для того чтобы квадратичная форма $Q(x_1,...,x_m)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров матрицы чередовались следующим образом: $\delta_1<0, \delta_2>0, \delta_3<0, \delta_4>0, ...$.

## 6. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ $m$ ПЕРЕМЕННЫХ

Второй дифференциал функции $u = f(M) = f(x_1, x_2, ... x_m)$, где $x_1,..., x_m$ - независимые переменные, в точке $M_0$ можно записать в виде

$$d^2u|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j .$$

Это выражение показывает, что второй дифференциал функции $u = f(x_1, x_2, ... x_m)$ в данной точке $M_0$ является квадратичной формой от переменных $dx_1,..., dx_m$, а частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)$ - коэффициенты этой квадратичной формы.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть функция $u = f(M) = f(x_1, x_2, ... x_m)$ дифференцируема в некоторой окрестности точка $M_0(x_1^0,..., x_m^0)$ и дважды дифференцируема в самой точке $M_0$, причем $M_0$ - точка возможного экстремума данной функции, то есть $du|_{M_0} = 0$. Тогда если второй дифференциал $d^2u|_{M_0}$, является положительно определенной (отрицательно определенной) квадратичной формой от переменных $dx_1,..., dx_m$, то функция $u = f(M)$ имеет в точке $M_0$ локальный минимум (максимум). Если же $d^2u|_{M_0}$ является знакопеременной квадратичной формой, то в точке $M_0$ функция $u = f(M)$ не имеет
локальнoго экстремума.

Пример 1. Найти точки локального экстремума функции

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2 .$$

Решение. Для нахождения точек возможного экстремума данной функции вычислим ее частные производные и приравняем их нулю

$$\begin{cases} u'_x = 4x - y + 2z = 0, \\ u'_y = -x - 1 + 3y^2 = 0, \\ u'_z = 2x + 2z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему трех уравнений, находим две точки возможного экстремума: $M_1(1/3, 2/3, -1/3)$, $M_2(-1/4, -1/2, 1/4)$. Далее воспользуется достаточными условиями экстремума. Для этого вычислим частные производные второго порядка данной функции

$u''_{xx} = 4,\ u''_{xy} = u''_{yx} = -1,\ u''_{xz} = u''_{zx} = 2,\ u''_{yy} = 6y,\ u''_{yz} = u''_{zy} = 0,\ u''_{zz} = 0.$

Значения этих частных производных в точке $M_1$ являются коэффициентами $d^2u|_{M_1}$ - квадратичной формы от переменных $dx, dy, dz.$ Матрица этой квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя главные миноры матрицы $A$, получаем

$$\delta_1 = 4 > 0,\ \delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0, \delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, $d^2u|_{M_1}$ является положительно определенной квадратичной формой от переменных $dx, dy, dz$. Следовательно, в точке $M_1$ функция имеет локальный минимум.

Исследуем теперь точку $M_2$. Матрица квадратичной формы $d^2u|_{M_2}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$\delta_1 = 4 > 0,\ \delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13 < 0, \delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 < 0.$$

Следовательно, $d^2u|_{M_2}$ не является знакоопределенной квадратичной формой от $dx, dy, dz$ Не трудно видеть, что эта квадратичная форма- знакопеременная. Следовательно, в точке $M_2$ функция не имеет локального экстремума.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z\ .$$

<u>Решение.</u> Найдем частные производные первого и второго порядков.

$u'_x = 2x - 4,$ $\qquad$ $u''_{xx} = a_{11} = 2,$ $\qquad$ $u''_{yy} = a_{22} = 2,$

$u'_y = 2y + 6,$ $\qquad$ $u''_{xy} = a_{12} = 0,$ $\qquad$ $u''_{yz} = a_{23} = 0,$

$u'_z = 2z - 2,$ $\qquad$ $u''_{xz} = a_{13} = 0,$ $\qquad$ $u''_{zz} = a_{33} = 2.$

Приравнивая первые частные производные к нулю, найдем стационарную точку $x^0 = (2,-3,1)$. Запишем матрицу квадратичной формы и найдем ее главные миноры в точке

$$x^0 = (2,-3,1).\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ A_1 = 2,\ A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$A_3 = \det A = 8.$

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена, следовательно данная функция в точке $x^0$ = (2,–3,1) достигает минимума.

Пример 3. Найти точки экстремума функции

$$u = z^3 - x^2 - 3y^2 - \frac{3}{2}z^2 - 4x + 6y + 2 .$$

Решение. Найдём стационарные точки функции $\frac{\partial u}{\partial x} = -2x - 4$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -6y + 6$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - 3z$ .

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} -2x - 4 = 0, \\ -6y + 6 = 0, \\ 3z^2 - 3z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2, \\ y = 1, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$$

Решение этой системы приводит к двум стационарным точкам $M_1$(–2; 1; 0) и $M_2$(–2; 1; 1). Проверим, являются ли эти точки точками экстремума.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6z - 3,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0 .$$

$$\Delta_1(x;\, y;\, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2,$$

$$\Delta_2(x;\, y;\, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\Delta_3(x;\ y;\ z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6z-3 \end{vmatrix} = 36(2z-1).$$

$\Delta_1(M_1) = -2 < 0,\ \Delta_2(M_1) = 12 > 0,\ \Delta_3(M_1) = -36 < 0$.

Следовательно, $M_1(-2;\ 1;\ 0)$ является точкой максимума.

$\Delta_1(M_2) = -2 < 0,\ \Delta_2(M_2) = 12 > 0,\ \Delta_3(M_2) = 36 > 0$, что означает, что $M_2(-2;\ 1;\ 1)$ не является точкой экстремума.

Задачи для самостоятельной работы

Найти точки локального экстремума следующих функций трех переменных:

1. $u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1;$
2. $u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x;$
3. $u = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1;$
4. $u = xyz(1 - x - y - z);$
5. $u = 2\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} - 4x + 2z^2;$
6. $u = (x + y + 2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}.$
7. $u\ \ x;\ y; z\ \ = x^2 - 3x + 2y^2 - y - z^3 - 5z^2 - 3z - 4$;
8. $u\ \ x;\ y; z\ \ = -3x^3 - 2x^2 + 5x - y^2 - 7y + z^2 + z - 2$;
9. $u\ \ x;\ y; z\ \ = x^2 + 6x - 4y^3 + 5y^2 + 2y + z^2 + z - 6$;

10. $u\ \ x;\ y;z\ \ = 3x^2 - 6x + y^2 + 2y - z^3 + z^2 + z - 7$;

11. $u\ \ x;\ y;z\ \ = -x^3 + 4x^2 - 3x + y^2 - 4y + z^2 + 3z - 2$;

12. $u\ \ x;\ y;z\ \ = x^2 + 4x - 3y^3 + 3y^2 + 3y - z^2 - 5z + 1$;

13. $u\ \ x;\ y;z\ \ = x^2 + 10x - y^2 - 4y + 15z^3 - 2z^2 - z + 3$;

14. $u\ \ x;\ y;z\ \ = x^2 - 7x + 4y^3 - 2y^2 - y + 2z^2 - 6z + 1$;

15. $u\ \ x;\ y;z\ \ = -x^3 + 4x^2 - 4x + y^2 - 3y + z^2 + z - 2$;

16. $u\ \ x;\ y;z\ \ = 2x^2 - 4x + y^3 - 5y^2 + 3y - z^2 - 2z + 3$.

Ответ: 1. $u_{\min} = u(1,-1,3) = -11$; 2. $u_{\min} = u(1/2, 1/2, -2) = -17/4$; 3. $u_{\min} = u(1,-2,1/2) = -9/2$; 4. $u_{\max} = u(1/4, 1/4, 1/4) = 1/256$; 5. $u_{\max} = u(1/4, 1/4, 1/4) = -1/8$; $u_{\max} = u(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3e^{-1}}$; $u_{\min} = u(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\sqrt{3e^{-1}}$.

## 7. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Рассмотрим функцию

$$u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots x_m) \qquad (1)$$

при условии, что ее аргументы являются не независимыми переменными, а связаны между собой $k$ соотношениями $(k < m)$:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \qquad (2)$$

Эти соотношения называются условиями связи. Пусть координаты точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ удовлетворяют уравнениям (2).

Определение. Функция (1) имеет в точке $M_0$ условный минимум (максимум) при условиях связи (2), если существует такая окрестность точки $M_0$, что для любой точки $M$ этой окрестности ($M \neq M_0$), координаты которой удовлетворяют уравнениям (2), выполняется неравенство

$$f(M) > f(M_0)\ (f(M) < f(M_0)).$$

Иными словами, условный максимум (минимум)- это наибольшее (наименьшее) значение функции в точке $M_0$ по отношению не ко всем точкам из некоторой окрестности точки $M_0$, а только к тем из них, которые связаны между собой условиями связи.

Задачу об условном экстремуме функции можно решать методом исключения части переменных. Этот метод состоит в том, что из $k$ уравнений условий связи $k$ переменных выражают через остальные $m-k$ переменных (если это возможно), подставляют найденные переменные в функцию $u = f(M) = f(x_1, x_2, ...x_m)$ и решают задачу об экстремуме функции $m-k$ переменных.

Пример. Методом исключения части переменных найти экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$$

Решение. Из условий связи находим $z = x + 1, \quad y = xz + 1$. Подставляя найденные $z, y$ в функцию, приходим к функции одной переменной $x$: $u(x) = 2x^2 + 4x + 2$, для которой рассмотрим задачу о безусловном экстремуме. Так как $u' = 4(x+1) = 0$ при $x = -1$, то функция $u(x)$ имеет единственную точку возможного экстремума. Поскольку $u''(-1)=4>0$, в точке $x=-1$ функция $u(x)$ имеет минимум. Из условий связи находим соответствующие значения $z, y$: $z=0, y=1$. Итак, функция $u(x)$ при заданных условиях связи имеет в точке (-1,1,0) минимум, причем $u(-1,1,0)=0$.

Метод Лагранжа.

Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $z = f(x,y)$ в общем виде. Функция $z = f(x,y)$ геометрически представляет собой некоторую поверхность, а уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ – некоторый цилиндр. Нам нужно исследовать на экстремум линию пересечения двух поверхностей:

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

В точке экстремума $grad\, f$ должен быть перпендикулярным цилиндру $\varphi(x,y)=0$, в противном случае на линии пересечения не будет выполняться необходимое условие экстремума. С другой стороны $grad\, \varphi$ перпендикулярен поверхности уровня $\varphi(x,y)=0$, следовательно $grad\, f$ и $grad\, \varphi$ в точке экстремума коллинеарны, поэтому линейно зависимые

$$grad\, \varphi + \lambda\, grad\, f = 0, \text{ или } grad(f+\lambda\varphi) = 0.$$

Записывая последнее равенство в скалярном виде и присоединяя уравнения связи, получим необходимые условия существования условного экстремума

$$\begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Если ввести функцию Лагранжа

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda\,\varphi(x, y),$$

то легко проверить, что необходимые условия безусловного экстремума функции Лагранжа совпадают с (3). Чтобы найти достаточные условия экстремума, следует определить знак полного приращения $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0)$ возможного экстремума. Но при наличии связи $\varphi(x, y) = 0$ $\Delta z = \Delta L$, где $\Delta L$ – полное приращение функции Лагранжа. Поэтому достаточные условия безусловного экстремума для функции Лагранжа будут достаточными для условного экстремума функции $f(x, y)$.

Исследуем знак второго дифференциала

$$d^2 L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 =$$

$$= dx^2\left(L''_{xx} + 2L''_{xy}y'_x + L''_{yy}(y'_x)^2\right).$$

Производную $y'_x = -\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ найдем из уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$.

Учитывая это, $d^2 L$ преобразуем следующим образом:

$$d^2 L = \frac{dx^2}{(\varphi'_y)^2}\cdot\Delta, \qquad (4)$$

где

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Из (4) видно, что при $\Delta > 0$, $d^2L > 0$ и функция $z = f(x, y)$ достигает в точке $(x_0, y_0)$ условного минимума, а при $\Delta < 0$ – максимума.

Задача об условном экстремуме функции (1) при условиях связи (2) эквивалентна задаче об обычном экстремуме функции Лагранжа

$$L(x_1, x_2, ..., x_m, \lambda_1, ...\lambda_k) = f(x_1, x_2, ..., x_m) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i (x_1, x_2, ..., x_m),$$

$\lambda_i$ $(i = 1, 2, ..., k)$ - называются множителями Лагранжа.

Необходимые условия условного экстремума выражаются системой $m + k$ уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_m, \lambda_1, ...\lambda_k) = 0, \; i = 1, 2, ..., m, \\ \varphi_i (x_1, x_2, ..., x_m) = 0, \; i = 1, 2, ..., k \end{cases} \qquad (6)$$

относительно $m + k$ неизвестных $x_1, x_2, ..., x_m, \lambda_1, ...\lambda_k$. Если $x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, \lambda_1^0, ...\lambda_k^0$ - решение системы (6), то $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ является точкой возможного условного экстремума функции (1) при условиях связи (2). Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2L(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, \lambda_1^0, ...\lambda_k^0, dx_1, ..., dx_m).$$

Для каждой системы значений $x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, \lambda_1^0, ...\lambda_k^0$, полученной из (6) при условии, что $dx_1, ..., dx_m$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varphi_i(x_1^0,...,x_m^0)}{\partial x_j}dx_j=0 \quad (i=1,2,...,k) \qquad (7)$$

при $dx_1^2+dx_2^2+...+dx_n^2\neq 0.$

Функция $u=f(M)=f(x_1,x_2,...x_m)$ имеет условный максимум в точке $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$, если для всевозможных значений $dx_1,...,dx_m$, удовлетворяющих условиям (7) и не равных одновременно нулю, выполняется неравенство $d^2L(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0,\lambda_1^0,...\lambda_k^0,dx_1,...,dx_m)<0$ (квадратичная форма отрицательно определена) и условный минимум, если при этих условиях $d^2L(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0,\lambda_1^0,...\lambda_k^0,dx_1,...,dx_m)>0$ (квадратичная форма положительно определена), если $d^2L(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0,\lambda_1^0,...\lambda_k^0,dx_1,...,dx_m)$ - знакопеременная квадратичная форма, то в точке $M_0$ функция (1) не имеет условного экстремума.

Пример 1. Методом Лагранжа найти экстремум функции $u=x+y+z^2$ при условиях связи $\begin{cases} z-x=1, \\ y-xz=1. \end{cases}$

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x+y+z^2+\lambda_1(z-x-1)+\lambda_2(y-xz-1)$$

и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=1-\lambda_1-\lambda_2 z=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=1+\lambda_2=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2z+\lambda_1-\lambda_2 x=0, \\ \varphi_1=z-x-1=0, \\ \varphi_2=y-xz-1=0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение $x=-1, y=1, z=0, \lambda_1=1,$ $\lambda_2=-1,$ то есть $M_0(-1,1,0)$ - единственная точка возможного экстремума функции при заданных условиях связи. Вычислим второй дифференциал функции Лагранжа $d^2F=2(dz)^2-2\lambda_2 dxdz$. Подставляя в него $\lambda_2=-1$ и $dz=dx$, найденное из первого уравнения связи, получаем положительно определенную квадратичную форму от переменной $dx: 4(dx)^2>0$ при $dx\neq 0$. Отсюда следует, что функция при заданных условиях связи имеет в точке $M_0$ условный минимум.

Пример 2. На эллипсоиде $x^2+2y^2+4z^2=8$ найти точку, наиболее удаленную от точки (0,0,3).

Решение. Расстояние между точками $(x,y,z)$ и (0,0,3) определяется формулой $\rho=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}$. Поэтому исходная задача равносильна задаче об условном максимуме функции $u=\rho^2=x^2+y^2+(z-3)^2$ при условии связи $x^2+2y^2+4z^2=8$. Составим функцию Лагранжа

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+(z-3)^2+\lambda(x^2+2y^2+4z^2-8)$$

и рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda x=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+4\lambda y=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2z-6+8\lambda z=0, \\ \varphi=x^2+2y^2+4z^2=8. \end{cases}$$

Так как эллипсоид более всего вытянут вдоль оси $Ox$, то абсцисса искомой точки не может быть равна нулю, то есть $x\neq 0$. Поэтому из первого уравнения системы следует, что $\lambda=-1$.

Тогда из второго и третьего уравнений системы имеем $y = 0,\ z = -1.$ Из последнего уравнения системы находим $x = \pm 2.$ Итак, функция имеет две точки возможного экстремума $M_1(2,0,-1),\ M_2(-2,0,-1)$. Из уравнения связи получим $xdx + 2ydy + 4zdz = 0$, откуда $dz = -\dfrac{x}{4z}dx - \dfrac{y}{2z}dy.$ Теперь вычисляем второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2L = 2(1+\lambda)(dx)^2 + 2(1+2\lambda)(dy)^2 + (2+8\lambda)(dz)^2 .$$

Подставим $\lambda = -1$, координаты точки $M_1$ или $M_2$ выражение для $dz$, получаем отрицательно определенную квадратичную форму от двух переменных $dx, dy$ $: d^2L = -2(dy)^2 - 3(dx)^2$. Отсюда следует, что функция имеет в точках $M_1(2,0,-1),\ M_2(-2,0,-1)$ условный максимум при заданных условиях связи, то есть на эллипсоиде имеются две точки $M_1(2,0,-1),\ M_2(-2,0,-1)$ наиболее удаленные от точки (0,0,3).

Пример 3. Найти условный экстремум функции

$$u = x^2 + 2y^2 - 3xy + 3x - 6y + 2$$

при уравнении связи $x + y - 3 = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x;\ y;\ \lambda) = x^2 + 2y^2 - 3xy + 3x - 6y + 2 + \lambda(x + y - 3) .$$

Обозначим $\varphi(x, y) = x + y - 3 = 0$.

Найдём стационарные точки этой функции $L'_x = 2x - 3y + 3 + \lambda$, $L'_y = 4y - 3x - 6 + \lambda$, $L'_\lambda = x + y - 3$. Решим систему уравнений

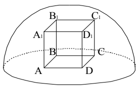
$$\begin{cases} 2x - 3y + 3 + \lambda = 0, \\ 4y - 3x - 6 + \lambda = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, находим $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\lambda_0 = 1$. Имеем $\varphi'_x \equiv \varphi'_y \equiv 1$, $L''_{xx}(1;2;1) = 2$, $L''_{xy}(1;2;1) = -3$, $L''_{yy}(1;2;1) = 4$.

$$\Delta(1;2;1) = \left. L''_{xx} \cdot (\varphi'_x)^2 - 2L''_{xy} \cdot \varphi'_x \cdot \phi'_y + L''_{yy} \cdot \varphi'_y{}^2 \right|_{(1;2;1)} =$$

= 2 – 2(-3) + 4 = 12 > 0, следовательно, $M(1; 2)$ является точкой условного максимума.

Пример 4. В полушар радиусом R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма.




Решение. Обозначим через $x$, $y$, $z$ измерения параллелепипеда: $|AD| = x$, $|AB| = y$, $|AA_1| = z$. Пусть 0 – центр основания; $|0A_1| = R$. Тогда согласно теореме Пифагора $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + z^2 = R^2$, или

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 4R^2 = 0. \quad (8)$$

Это есть уравнение связи. Обозначим левую часть уравнения (8) через $\varphi(x; y; z)$. Фактически требуется решить следующую задачу на условный экстремум: найти наибольшее значение функции V = $xyz$ при условии, что переменные $x$, $y$, $z$ удовлетворяют уравнению (8). Введём в рассмотрение функцию Лагранжа $L(x; y; z; \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + 4z^2 - 4R^2)$.

Найдём стационарные точки функции $L(x; y; z; \lambda)$:

$L'_x = yz + 2\lambda x$, $L'_y = xz + 2\lambda y$, $L'_z = xy + 8\lambda z$,

$L'_\lambda = \varphi(x; y; z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4R^2$.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x = 0, \\ xz + 2\lambda y = 0, \\ xy + 8\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 4R^2 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения, предварительно умноженного на *x*, второе, предварительно умноженное на *y*, получим $x^2 - y^2 = 0$. Учитывая особенности задачи ( $x > 0, \quad y > 0$ ), заключаем, что $x = y$. Действуя так же, находим, что $x = 2z$. Отсюда получаем $x = y = 2R/\sqrt{3}$, $z = R/\sqrt{3}$, $\lambda = -x/4 = -R/(2\sqrt{3})$. Таким образом, $N\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}; \frac{2R}{\sqrt{3}}; \frac{R}{\sqrt{3}}; -\frac{R}{2\sqrt{3}}\right)$ или $N(-4\lambda_0; -4\lambda_0; -2\lambda_0; \lambda_0)$, если положить $\lambda_0 = -R/(2\sqrt{3})$, является стационарной точкой функции $L(x; y; z; \lambda)$. Для выяснения того, является ли $M(-4\lambda_0; -4\lambda_0; -2\lambda_0)$ точкой экстремума, исследуем второй дифференциал $d^2L(-4\lambda_0; -4\lambda_0; -2\lambda_0; \lambda_0; dx; dy; dz)$ при условии, что в точке M *dx, dy, dz* связаны следующим соотношением (являющимся следствием равенства (8)):

$\varphi'_x(M)dx + \varphi'_y(M)dy + \varphi'_z(M)dz = 0$;

$(2xdx + 2ydy + 8zdz)\big|_M = 0$; $-8\lambda_0 dx - 8\lambda_0 dy - 16\lambda_0 dz = 0$.

Из последнего равенства получаем

$$dz = -\frac{1}{2}(dx + dy). \qquad (9)$$

Запишем формулу второго дифференциала функции $L(x; y; z; \lambda)$, считая её функцией трёх переменных x, y, z :

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + 2L''_{yz}dydz + 2L''_{zx}dzdx\,.$$

Имеем

$$\begin{array}{lll} L''_{xx} = 2\lambda\,, & L''_{xy} = z\,, & L''_{xz} = y\,, \\ L''_{yx} = z\,, & L''_{yy} = 2\lambda\,, & L''_{yz} = x\,, \\ L''_{zx} = y\,, & L''_{zy} = x\,, & L''_{zz} = 8\lambda\,. \end{array}$$

$$d^2L(M) = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + 2L''_{yz}dydz + 2L''_{zx}dzdx =$$
$$= 2\lambda_0 dx^2 + 2\lambda_0 dy^2 + 8\lambda_0 dz^2 + 2zdxdy + 2xdydz +$$
$$+2ydzdx = \begin{bmatrix} x = y = -4\lambda_0, \quad z = -2\lambda_0, \\ \text{согласно (9), dz} = -\dfrac{1}{2}(dx+dy) \end{bmatrix} =$$
$$= 2\lambda_0 dx^2 + 2\lambda_0 dy^2 + 8\lambda_0\left(-\frac{1}{2}(dx+dy)\right)^2 - 4\lambda_0 dxdy -$$
$$-8\lambda_0 dy\left(-\frac{1}{2}(dx+dy)\right) - 8\lambda_0\left(-\frac{1}{2}(dx+dy)\right)dx =$$
$$= 2\lambda_0 dx^2 + 2\lambda_0 dy^2 + 2\lambda_0 dx^2 + 4\lambda_0 dxdy + 2\lambda_0 dy^2 - 4\lambda_0 dxdy +$$
$$+4\lambda_0 dxdy + 4\lambda_0 dy^2 + 4\lambda_0 dx^2 + 4\lambda_0 dxdy =$$
$$= 8\lambda_0 dx^2 + 8\lambda_0 dy^2 + 8\lambda_0 dxdy = 8\lambda_0(dx^2 + dxdy + dy^2) =$$
$$= 8\lambda_0 dy^2\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \frac{dx}{dy} + 1\right] = 8\lambda_0 dy^2\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \frac{dx}{dy} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right] =$$
$$= 8\lambda_0 dy^2\left[\left(\frac{dx}{dy} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] = 8\lambda_0\left[\left(dx + \frac{1}{2}dy\right)^2 + \frac{3}{4}dy^2\right].$$

Так как выражение в квадратных скобках положительно при любых $dx$, $dy$, удовлетворяющих условию $|dx| + |dy| \neq 0$, а

$\lambda_0 = -\dfrac{R}{2\sqrt{3}} < 0$, то $d^2L < 0$; следовательно, точка $M\left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}; \dfrac{2R}{\sqrt{3}}; \dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)$ является точкой условного максимума, и искомый параллелепипед имеет измерения $x = 2R/\sqrt{3}$, $y = 2R/\sqrt{3}$, $z = R/\sqrt{3}$, где $x$, $y$ – измерения основания прямоугольного параллелепипеда, лежащего на круге полушара, а $z$ – высота.

Замечание. Для решения вопроса знакопостоянства квадратичной формы $d^2L = 8\lambda dx^2 + 8\lambda dxdy + 8\lambda dy^2$ в последнем примере можно было привлечь критерий Сильвестра. Образуем симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 8\lambda_0 & 4\lambda_0 \\ 4\lambda_0 & 8\lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\Delta_1 = 8\lambda_0 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8\lambda_0 & 4\lambda_0 \\ 4\lambda_0 & 8\lambda_0 \end{vmatrix} = 48\lambda_0^2 > 0$

($\lambda_0 = -R/(2\sqrt{3}) < 0$). Следовательно, $d^2L$ отрицательно определён и поэтому $M\left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}; \dfrac{2R}{\sqrt{3}}; \dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)$ является точкой условного максимума.

Задачи для самостоятельной работы

1. Исследуйте на условный экстремум методом исключения части переменных функцию:

1.1. $u = x^2 + y^2$ при условии связи $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$;

1.2. $u = x + y$ при условии связи $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$;

1.3. $u = xy$ при условии связи $x^2 + y^2 = 1$;

1.4. $u = x^2 + y^2 + 2z^2$ при условии связи $x - y + z = 1$;

1.5. $u = x - 2y + z$ при условии связи $x + y^2 - z^2 = 1$;

1.6. $u = xy^2z^3$ при условии связи $x + 2y + 3z = 6$ ($x > 0$, $y > 0, z > 0$);

1.7. $u = x - 2y + 2z$ при условии связи $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

1.8. $u = x - 2y + z$ при условии связи $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;

Ответ:1.1. $u_{\min} = u(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2}) = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$;
1.2. $u_{\min} = u(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a) = 2\sqrt{2}a$; $u_{\max} = u(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a) = -2\sqrt{2}a$;
1.3. $u_{\max} = 0,5$ в точках $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ и $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$;
$u_{\min} = -0,5$ в точках $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$;
1.4. $u_{\min} = u(0,4; -0,4; 0,2) = 0,4$ 1.5. нет точек экстремума;
1.6. $u_{\max} = u(1,1,1) = 1$; 1.7. $u_{\min}(-1/3, 2/3, -2/3) = -3$;
$u_{\max}(1/3, -2/3, 2/3) = 3$ .1.8. нет точек экстремума.

2. Исследуйте на условный экстремум методом Лагранжа:

2.1. Функцию $u = xyz$ при условии связи $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

2.2. Функцию $u = xyz$ при условиях связи

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0.$$

2.3. Функцию $u\ \ x; y\ \ = xy - y^2 - x^2$ при условии связи $x + 2y = 14$.

2.4. Функцию $u\ \ x; y\ \ = 1 - 4x - (y - x)^2$ при условии связи $x + y = 3$.

2.5. Функцию $u\ \ x;y\ \ = 4 - x - y - x^2 - 2y^2$ при условии связи $2x + y = 10$.

2.6. Функцию $u\ \ x;y\ \ = x + y^2 - xy$ при условии связи $x + 2y = 4$.

2.7. Функцию $u\ \ x;y\ \ = 2x^2 - 2xy + y^2$ при условии связи $2x - y + 4 = 0$

2.8. Функцию $u\ \ x;y\ \ = x^2 - y^2$ при условии связи $2x - y - 6 = 0$.

2.9. Функцию $u\ \ x;y\ \ = -x^2 + xy - 2y^2 + 3x$ при условии связи $x + 2y = 6$ .

2.10. Функцию $u\ \ x;y\ \ = x^2 - xy + 2y^2 + 3y$ при условии связи $x + y + 7 = 0$ .

2.11. Функцию $u\ \ x;y\ \ = x^2 - 2xy - 2y^2 - 2x + 6$ при условии связи $2x - y + 13 = 0$ .

2.12. Функцию $u\ \ x;y\ \ = 2x^2 + xy - y^2 - y + 1$ при условии связи $2x + y + 6 = 0$ .

2.13. Функцию $u\ \ x;y\ \ = 4x^2 + 2xy + y^2 + 3x - y + 1$ при условии связи $2x + 3y + 1 = 0$ ;

2.14. Функцию $u\ \ x;y\ \ = -3x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x + 3y + 6$ при условии связи $4x - y + 2 = 0$ ;

2.15. Функцию $u\ \ x;y\ \ = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 3y + 7$ при условии связи $-2x + y - 2 = 0$ ;

2.16. Функцию $u\ \ x;y\ \ = -4x^2 + xy - 4y^2 + 3x - 2y + 6$ при условии связи $-2x + 2y + 1 = 0$ ;

2.17. Функцию $u\ \ x;y\ \ = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 3y + 8$ при условии связи $2x - y + 3 = 0$;

2.18. Функцию $u\ \ x;y\ \ = x^2 - 2xy + 2y^2 + 3x - 2y + 5$ при условии связи $x - y + 5 = 0$;

2.19. Функцию $u\ \ x;y\ \ = 4x^2 + xy + 2y^2 + 2x + y + 3$ при условии связи $x - y + 2 = 0$;

2.20. Функцию $u\ \ x;y\ \ = 3x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y + 3$ при условии связи $x - 2y + 3 = 0$.

3.При каких значениях диаметра основания $d$ и высоты $h$ цилиндрическая банка, объем которой равен $54\pi$, имеет наименьшую поверхность?

4. При каких размерах прямоугольная банка объемом 32 $см^2$ открытая сверху (т.е. без верхней грани), имеет наименьшую поверхность?

5. Найдите наименьшее расстояние между точками параболы $zy = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$.

Ответ: 2.1. $u_{\min} = -1$ в точках (-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1), (-1,-1,-1), $u_{\max} = 1$ в точках (1,1,1),(-1,-1,1),(-1,1,-1),(1,-1,-1); 2.2. $u_{\min} = -1/(3\sqrt{6})$ в точках $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$, $(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$, $(-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$, $u_{\min} = 1/(3\sqrt{6})$, в точках $(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$, $(-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$, $(2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$. 3. $d = h = 6$. 4. $S_{\min} = 48 см^2$ при высоте 2 см и длинах сторон основания равных 4 см. 5. $7/4\sqrt{2}$.

## 8. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в стационарной точке внутри области или в граничной точке области. Таким образом, для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции в замкнутой области, необходимо:

1) найти стационарные точки, расположенные в данной области, вычислить значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$ (прямоугольнике).

Решение. 1) Найдем стационарные точки функции из системы $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$ Получаем две стационарных точки $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$. Значения функции в этих точках $z(M_1) = 0$, $z(M_2) = -1$.

2) Исследуем функцию на границах области:

а) При $x = 0$ имеем $z = y^3$. Эта функция монотонно возрастает и на концах отрезка [-1,2] принимает значения $z|_{y=-1} = -1$, $z|_{y=2} = 8$;

б) при $x = 2$ имеем $z = 8 + y^3 - 6y$. Найдем значения этой функции в стационарной точке и на концах отрезка [-1,2]. Имеем $z' = 3y^2 - 6$; $z' = 0$ при $y^2 = 2$, или в данной области, при $y = \sqrt{2}$; $z|_{y=\sqrt{2}} = 8 - 4\sqrt{2}$; $z|_{y=-1} = 13$; $z|_{y=-2} = 4$.

в) При $y=-1$ имеем $z=x^3-1+3x$ и $z'=3x^2+3>0$. Функция монотонно возрастает от $z|_{x=0}=-1$до $z|_{x=2}=13$.

г) При $y=2$ имеем $z=x^3+8-6x$ и $z'=3x^2-6>0$; $z'=0$ при $x=\sqrt{2}$; $z|_{x=\sqrt{2}}=8-4\sqrt{2}$; $z|_{x=0}=8$; $z|_{x=2}=6$ .

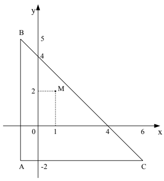
3) Сравнивая все найденные значения функции, заключаем, что $z_{наиб}=13$ в точке (2,-1); $z_{наим}=-1$ в точках (1,1) и (0,-1).

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u=2x^2-4xy+3y^2+4x-8y+5$ в замкнутой области (D), заданной неравенствами $x\ge -1$, $y\ge -2$, $x+y\le 4$.

Решение. Изобразим область (D); она представляет собой треугольник с вершинами A|(-1; -2), B(-1; 5), C(6; -2). Найдём стационарные точки. $u'_x=4x-4y+4$, $u'_y=-4x+6y-8$. Решим систему уравнений

$$\begin{cases}4x-4y+4=0,\\ -4x+6y-8=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-y=-1,\\ -2x+3y=4.\end{cases}$$




Решением этой системы является $x$=1, $y$=2. Стационарная точка M(1;2) принадлежит области (D), так как её координаты удовлетворяют всем трём неравенствам, задающим треугольник (D). Найдём значение функции в этой точке: u(M) = 2 – 8 + 12 + 4 – 16 + 5 = –1.

Исследуем функцию на границе (Г) области (D). Граница (Г) представляет собой объединение трёх отрезков: $(\ell_1)$ – отрезка ВС, $(\ell_2)$ – отрезка АВ, $(\ell_3)$ – отрезка АС.

1) $(\ell_1) = \ (x;\ y): -1 \le x \le 6, \quad y = 4 - x\ .$

$u\big|_{\ell_1}$ = 2x$^2$ – 4x(4 – x) + 3(4 – x)$^2$ + 4x – 8(4–x) + 5 = 2x$^2$ – 16x + +4x$^2$ + 3(16 – 8x + x$^2$) + 4x – 32 + 8x + 5 = 9x$^2$ – 28x + 21.

Найдём наибольшее и наименьшее значения функции $\varphi_1(x) =$ 9$x^2$ – 28$x$ + 21 на отрезке [–1; 6]. Имеем $\varphi'_1(x) = 18x$ – 28; $x$ = 14/9 – стационарная точка функции $\varphi_1(x)$, 14/9 ∈ ∈ [–1; 6]. Обозначим $N_1$(14/9 ; 4 –14/9 ) или $N_1$(14/9 ; 22/9 ). $u(N_1)$ = $=\varphi_1(14/9)$ =196/9 – 392/9 + 21 = –34/9. Найдём значения $\varphi_1(x)$ на концах отрезка [–1; 6]: $\varphi_1(-1) = u$(B) = 58; $\varphi_1(6) = u$(C) = 177. Наибольшим из этих значений является $u$(C) = 177, наименьшим – $u(N_1)$ = – 34/9.

2) $(\ell_2) = \ (x;\ y): x = -1, -2 \le y \le 5\ .$

$u\big|_{\ell_2}$ = 2 + 4y + 3y$^2$ – 4 – 8y + 5 = 3y$^2$ – 4y + 3.

Найдём наибольшее и наименьшее значения функции $\varphi_2(y) =$ 3y$^2$ – 4y + 3 на отрезке [–2; 5]; $\varphi_2'(y) =$ 6y – 4; $y$ = 2/3 – стационарная точка функции $\varphi_2(y)$, принадлежащая отрезку [–2; 5]. Обозначим $N_2$(–1; 2/3). U($N_2$) = $\varphi_2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 3 = \frac{5}{3}$. Найдём значения функции $\varphi_2(y)$ на концах отрезка [– 2; 5]: $\varphi_2(-2) =$ $u$(A) = 23; $\varphi_2(5) = u$(B) = 58.

3) $(\ell_3) = \{(x;\, y):\ -1 \le x \le 6,\ \ y = -2\}$.

$u|_{\ell_3} = 2x^2 + 8x + 12 + 4x + + 16 + 5 = 2x^2 + 12x + 33$.

Обозначим $\varphi_3(x) = 2x^2 + 12x + 33$.

$\varphi'_3(x) = 4x + 12$. Стационарная точка $x = -3$ не принадлежит отрезку [–1; 6], поэтому она нас не интересует. Значения $\varphi_3(x)$ на концах отрезка [–1; 6] были найдены ранее: $\varphi_3(-1) = u(A) = 23$, $\varphi_3(6) = u(C) = = 177$.

Сравнивая все полученные значения, находим $\max\limits_{(x;y)\in(D)} u(x;\, y) = u(C) = u(6; -2) = 177$, $\min\limits_{(x;y)\in(D)} u(x;\, y) = u(M) = u(1; 2) = -1$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти наибольшее значение функции $z = x - 2y + 5$ в областях а) $x \ge 0, y \ge 0,\ x + y \le 1$; б) $x \le 0, y \ge 0,\ y - x \le 1$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 3$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy^2$ в области $x^2 + y^2 \le 1$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $u(x;\, y)$ в области (D), заданной указанными неравенствами.

4.1. $u(x; y) = -4x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 4$, $(D): x \ge -3, y \ge -2$, $x + y \le 12$;

4.2. $u(x; y) = 3x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 2y + 2$, $(D): x \le 2, y \le 3$, $x + y \ge 1$;

4.3. $u(x; y) = 2x^2 - xy + 2y^2 + 2x + 3y + 1$, $(D): x \le 2, y \ge -1$, $x - y \ge 1$;

4.4 $u\ x;y\ = 4x^2+2xy-y^2+2x+y-1,\ D\ : x\ge -2, y\ge -1,$
$x+y\le 2;$
4.5. $u\ x;y\ = -3x^2-2xy+y^2+4x+y-2,\ D\ : x\ge -1, y\ge -2,$
$x+y\le 1;$
4.6. $u\ x;y\ = -2x^2+3xy+2y^2+4x+y-1,\ D\ : x\le 1, y\le 2,$
$x+y\ge -1;$
4.7. $u\ x;y\ = -4x^2-2xy-y^2+2x-y+2,\ D\ : x\ge -2, y\ge -2,$
$x+y\le -1;$
4.8. $u\ x;y\ = 3x^2-xy-2y^2+2x-2y-1,\ D\ : x\le 1, y\ge -1,$
$x-y\ge -2;$
4.9. $u\ x;y\ = -x^2+xy+2y^2+4x+y-2,\ D\ : x\le 2, y\le 2,$
$x+y\ge 1;$
4.10. $u\ x;y\ = 4x^2+2xy+4y^2+x+6y-1,\ D\ : x\ge -1, y\le 3,$
$-x+y\ge -1.$

5. Представить положительное число $a$ в виде произведения четырех положительных сомножителей так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.

Ответ:1. а) $z_{наиб}=6$ при $x=3, y=0$; б) $z_{наиб}=5$ при $x=y=0$. 2. $z_{наиб}=6$ при $x=3, y=0$ и при $x=0, y=3$ ; $z_{наим}=-1$ при $x=y=1$. 3. $z_{наиб}=2/(3\sqrt{3})$ при $x=1/\sqrt{3}, y=\pm\sqrt{2/3}$; $z_{наим}=-2/(3\sqrt{3})$ при $x=-1/\sqrt{3}, y=\pm\sqrt{2/3}$.
5. $a=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}.$

## 9. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В практических применениях математики часто встречается такая задача. Зависимость между переменными величинами выражается в виде таблицы, полученной опытным путем. Это могут быть результаты эксперимента, данные наблюдений или измерений, статистической обработки материала и т.п. Требуется выразить эту зависимость между переменными аналитически, то есть дать формулу, связывающую между собой соответствующие значения переменных. Такая формула облегчает анализ изучаемой зависимости. Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, принято называть эмпирическими формулами.

Подбор эмпирической формулы по данным наблюдений не может ставить перед собой задачу разгадать истинный характер зависимости между имеющимися переменными. Даже в том случае, когда в нашем распоряжении имеются точные значения аргумента и функции, восстановить функцию по конечному числу ее значений - задача математически неразрешимая. Тем более не следует ожидать, что это удастся сделать исходя из экспериментальных данных, которые наверняка содержат случайные ошибки измерения или статистических наблюдений.

Во многих случаях характер зависимости между переменными величинами предполагается известным из каких-либо теоретических соображений и задача подбора эмпирической формулы сводится к тому, чтобы определить числовые значения параметров, входящих в формулу данного вида.

Один из способов подбора эмпирических формул состоит в том, что поданным результатам наблюдений подбирается наиболее простая формула того или иного типа, дающая наилучшее приближение к имеющимся данным. При этом пользуются принципом наименьших квадратов. Он основан на том, что из данного множества формул вида $y = f(x)$ наилучшим образом изображающей данные значения считается та, для которой сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от вычисленных является наименьшей.

Подбор параметров функции $f(x)$, основанный на этом принципе, называют <u>способом наименьших квадратов</u>.

Необходимо помнить, что способ наименьших квадратов применяется для подбора параметров после того, как вид функции $y = f(x)$ определен. Если из теоретических соображений нельзя сделать никаких выводов о том, какой должна быть эмпирическая формула, то приходится руководствоваться наглядным представлениями, прежде всего графическим изображением наблюденных данных. Вид функции выбирается таким образом, чтобы график этой функции по возможности близко напоминал расположение на графике данных наблюдения.

Пусть в результате эксперимента получены $n$ значений функции $y$ при соответствующих значениях $x:(x_1, y_1),(x_2, y_2)$, ..., $(x_n, y_n)$. При выбранном виде функции $y = f(x,a,b,c,...)$ остается подобрать входящие в нее параметры так, чтобы сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от вычисленных являлась наименьшей. Составим функцию $S(a,b,c,...) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i, a,b,c,...) - y_i]^2$ и подберем параметры $a,b,c,...$ так, чтобы сумма имела наименьшее значение. Таким образом, получилась задача нахождения минимума функции нескольких переменных $S(a,b,c,...)$. Сумма принимает минимальное значение при тех значениях параметров $a,b,c,...$, при которых обращаются в нуль частные производные этой функции по каждой переменной, то есть когда $\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \frac{\partial S}{\partial b} = 0,$ $\frac{\partial S}{\partial c} = 0,...$.

Пример. Пусть $y = ax + b$. Найдем параметры $a$ и $b$/ Составим функцию $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [(ax_i + b) - y_i]^2$. Находим частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 2[a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}x_i y_i],$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 2[a\sum_{i=1}^{n}x_i + bn - \sum_{i=1}^{n}y_i].$$

Приравнивая каждую частную производную нулю, получаем систему двух линейных уравнений относительно $a, b$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i; \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i + bn = \sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

Решая ее, находим $a$ и $b$.

Из характера задачи следует, что система имеет определенное решение и что при полученных значениях $a, b$ функция $S(a, b)$ имеет минимум. Нетрудно доказать это и на основании достаточных условий. Действительно,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n}x_i^2, \ \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}x_i, \ \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n.$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - (\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b})^2 = 4n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - (2\sum_{i=1}^{n}x_i)^2 =$

$$= 4\sum_{i,j;i<j}(x_i - x_j)^2 > 0, \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления/ Н.С. Пискунов.- М.: Наука, 2001. Т.1.- 250 с.

2. Мантуров О.В. Курс высшей математики/ Мантуров О.В., Матвеев Н.М.- М.: Высш. Шк.,1986.480 с.

3. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под ред. А.В. Ефимова, Б.П.Демидовича.М.:Наука.1993.480 с.

4. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных/ Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.- М.: Высш. Шк., 1988. 288с.

5. Зимина О.В. Высшая математика/ О.В. Зимина, А.И. Кириллов, Т.А. Сальникова.- М.: Физматлит, 2005.-368 с.

6. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч.2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения/ А.П. Рябушко [и др.]. Минск:Выш. шк., 2007.-396 с.

7. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс/Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. Федин С.Н., Шевченко Ю.А.-М.: Рольф, 2001.-576 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для организации самостоятельной работы
по изучению раздела «Функции нескольких переменных»
курса «Математический анализ»
для студентов по направлению подготовки бакалавров 230100
«Информатика и вычислительная техника»
(профили «Системы автоматизированного проектирования»,
«Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»)
очной формы обучения
Часть 2

Составители:
Глушко Елена Георгиевна
Дубровская Алевтина Петровна
В авторской редакции
Компьютерный набор Е.Г. Глушко

Подписано к изданию 25. 06. 2012.
Уч. - изд. л. 2,9

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14