ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра компьютерных интеллектуальных технологий проектирования

196-2015

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы № 2
по дисциплине «Модели и методы анализа проектных решений» для студентов направления подготовки бакалавров 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» (профиль «Системы автоматизированного проектирования в машиностроении») заочной формы обучения

Воронеж 2015

Составитель канд. техн. наук О.В. Собенина

УДК 681.3

Методические указания к выполнению контрольной работы № 2 по дисциплине «Модели и методы анализа проектных решений» для студентов направления подготовки бакалавров 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» (профиль «Системы автоматизированного проектирования в машиностроении») заочной формы обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. О.В. Собенина. Воронеж, 2015. 28 с.

Методические указания содержат необходимые для выполнения контрольной работы теоретические сведения, примеры выполнения контрольных заданий.

Предназначены для студентов 4 курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе Word и содержатся в файле «МиМАПР Контрольная работа №2.doc».

Табл. 2. Ил. 2. Библиогр.: 4 назв.

Рецензент канд. физ-мат. наук, доц. В.В. Горбунов

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. М.И. Чижов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа выполняется печатным способом.

2. На титульном листе работы должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, шифр группы, названии дисциплины, факультет, ВУЗ. В начале работы указывается вариант контрольной работы. В конце работы ставится дата ее выполнения и подпись студента.

3. В работу включаются все задачи, указанные в заданиях, и строго по положенному варианту.

4. Условия задач приводятся полностью. Решения излагаются подробно, объясняются все действия по ходу решения.

5. После получения проверенной работы исправляются все отмеченные рецензентом ошибки.

6. **Выбор варианта контрольной работы производится по последней цифре номера зачетной книжки**.

1. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА МАКРОУРОВНЕ

Теоретические сведения

Математической моделью технического объекта на макроуровне является система обыкновенных дифференциальных уравнений, в общем случае не разрешенная относительно производных, т. е. $F\left(\dot{v}, v, t\right) = 0$, где v — вектор фазовых переменных; t — время, независимая переменная; F — вектор–функция; $\dot{v} = dv/dt$. Подобную систему уравнений в общем случае можно решить только с помощью численных методов интегрирования, поскольку эта система высокого порядка и нелинейна. Результат решения ММ системы (ММС) — зависимости фазовых переменных от времени.

Обобщенная ММС может быть представлена в виде системы уравнений:

α компонентных уравнений реактивных и нереактивных ветвей $\begin{cases} F(Z,W)=0; \\ F(W)=0; \end{cases}$

α топологических уравнение $F(W, H) = 0;$

γ формул интегрирования $F(Z, Y)=0,$

где H — вектор переменных состояния, т. е. фазовых переменных, непосредственно характеризующих запасы энергии в системе (переменных типа разности потенциалов на ветвях типа C и переменных типа потока через ветви типа L); W — вектор остальных фазовых переменных; Z — вектор производных переменных состояния по времени.

1.1. Метод получения топологических уравнений на основе матрицы контуров и сечений

Метод, основанный на использовании информации, заключенной в М-матрице (в матрице контуров и сечений), - наиболее удобный и общий метод получения топологических уравнений.

М-матрица строится на основании ориентированного графа эквивалентной схемы и выбранного для этого графа дерева. Количество столбцов матрицы соответствует числу, ветвей дерева, а количество строк — числу хорд.

Процедура формирования М-матрицы заключается в следующем: каждая хорда графа поочередно включается в дерево, при этом образуется замкнутый контур. Обход этого контура выполняется в направлении, заданном направлением хорды; в строке матрицы, соответствующей данной хорде, ставится +1, если направление ветви дерева совпадает с направлением обхода контура, –1, если направление ветви дерева противоположно, 0, если ветвь не входит в данный контур.

Рассмотрим получение матрицы контуров и сечений для графа, показанного на рис. 1. *М-матрица* этого графа представлена в табл. 1.

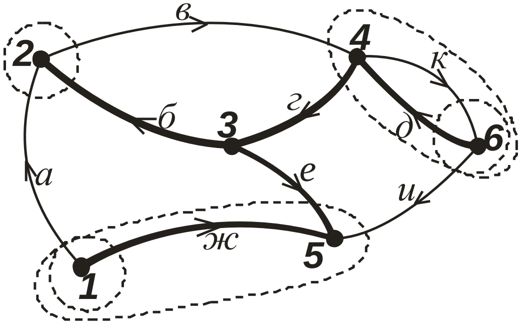


Рис. 1. Матрица контуров и сечений графа

Таблица 1

	б	*г*	*д*	*е*	*ж*
а	-1	0	0	+1	-1
в	+1	+1	0	0	0
к	0	0	+1	0	0
и	0	-1	-1	-1	0

При подключении хорды *а* образуется контур из ветвей дерева *б, е, ж*, в столбцах матрицы, соответствующих ветвям *б* и *ж*, появится -1, в столбце, соответствующем ветви *е*, будет +1, остальные столбцы содержат 0. Аналогично заполняются и другие строки.

Топологические уравнения с использованием *М-матрицы* имеют вид:

$$MU_{\text{в.д}} + U_x = 0\,; \qquad (1)$$

$$I_{\text{в.д}} - M^t I_x = 0, \qquad (2)$$

где $U_{\text{в.д}}$, U_x — векторы переменных типа разностей потенциалов на ветвях дерева и хордах; $I_{\text{в.д}}$, I_x — векторы переменных типа потока для ветвей дерева и хорд; M^t транспонированная *М-матрица*.

Уравнение (1) — уравнение второго закона Кирхгофа (или ему аналогичное согласно аналогиям топологических уравнений), записанное в матричной форме, а (2) — уравнение первого закона Кирхгофа (или ему аналогичное) для сечений дерева. Линии сечений графа (рис. 1) отмечены пунктирными линиями.

Для *М-матрицы,* представленной в таблице 1, получим:

$$-U_б + U_е - U_ж + U_а = 0;$$
$$U_б + U_г + U_в = 0;$$
$$U_д + U_к = 0;$$
$$-U_г - U_д - U_е + U_и = 0;$$

$$I_б + I_а - I_в = 0;$$
$$I_г - I_в + I_и = 0;$$
$$I_д - I_к + I_и = 0;$$
$$I_е - I_а + I_и = 0;$$
$$I_ж + I_а = 0;$$

где U_i и I_i — переменные типа U и I для ребра i.

Примечание. Сечения дерева специально выбирать не надо, их уравнения получаются из М-матрицы, для построения которой сечения не привлекаются. На рис. 1 они отмечены для проверки полученных уравнений.

Количество топологических уравнений равно количеству ветвей эквивалентной схемы.

Задача. По эквивалентной схеме гидромеханической системы построить граф, выделить фундаментальное дерево (остов) графа. Построить *М-матрицу.* Получить топологические уравнения системы.

Эквивалентная схема гидромеханической системы представлена на рис. 2, *а*.

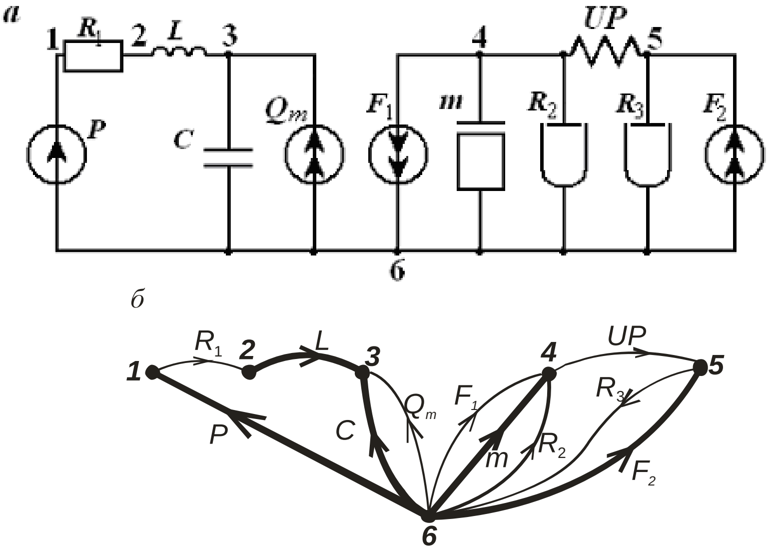


Рис. 2. Эквивалентная схема гидромеханической системы (*а*) и ее граф (*б*) с выделенным фундаментальным деревом

Граф эквивалентной схемы изображен на рис. 2, *б*. Направления переменных типа потока в ветвях задаем произвольно (кроме источников потока). Если заданное и истинное направления не совпадают, то получим значения переменных типа потока со знаком минус. Фундаментальное дерево (остов) графа выделено жирными линиями.

Используя уравнения (1) и (2), получим топологические уравнения системы. *М-матрица* представлена в табл. 2. Нулевые элементы в ней не проставлены.

Таблица 2

	P	*L*	*C*	*m*	F_2
R_1	*+1*	*+1*	*-1*		
Q_m			*-1*		
F_1				*-1*	
R_2				*-1*	
UP				*+1*	*-1*
R_3					*+1*

Система топологических уравнений такова:

$$U_P + U_L - U_C + U_{R_1} = 0;$$

$$-U_C + U_{Q_m} = 0;$$

$$-U_m + U_{F_1} = 0;$$

$$-U_m + U_{R_2} = 0;$$

$$U_m - U_{F_2} + U_{UP} = 0;$$

$$U_{F_2} + U_{R_3} = 0;$$

$$I_P - I_{R_1} = 0;$$

$$I_L - I_{R_1} = 0;$$

$$I_C + I_{R_1} + I_{Q_m} = 0;$$

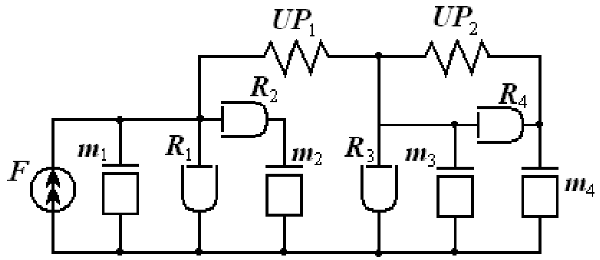
$$I_m + I_{F_1} + I_{R_2} - I_{UP} = 0;$$

$$I_{F_2} + I_{UP} - I_{R_3} = 0.$$

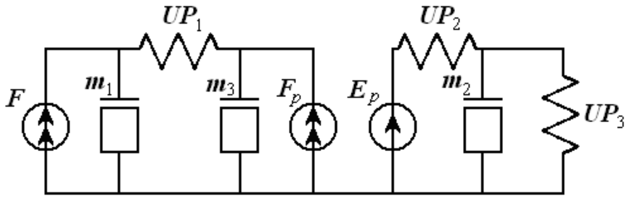
Задание 1. По эквивалентной системы построить граф, выделить фундаментальное дерево (остов) графа. Построить *М-матрицу*. Получить топологические уравнения системы.

Варианты.

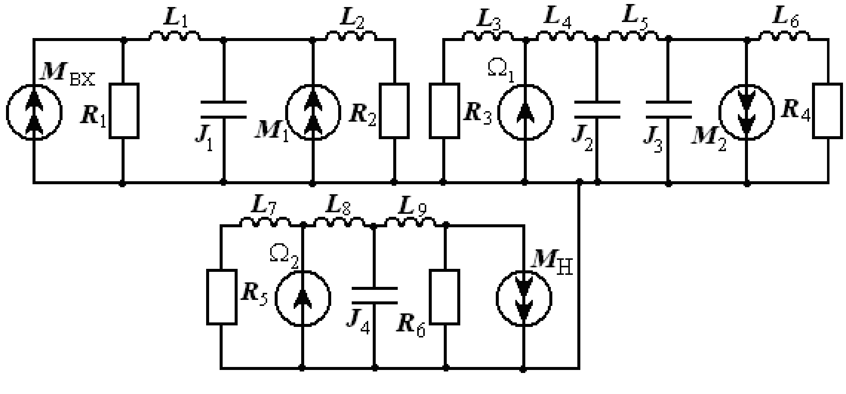
0. Эквивалентная схема механической поступательной системы



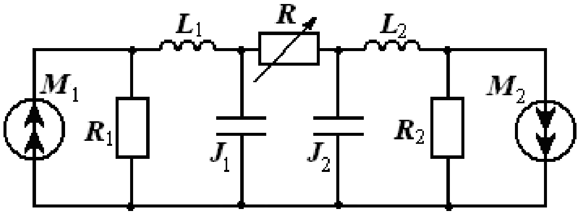
1. Эквивалентная схема рычажной механической системы



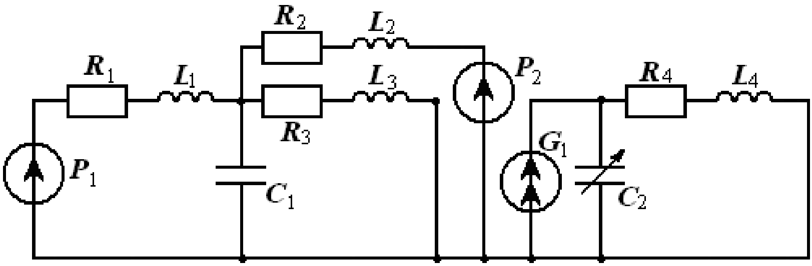
2. Эквивалентная схема редуктора



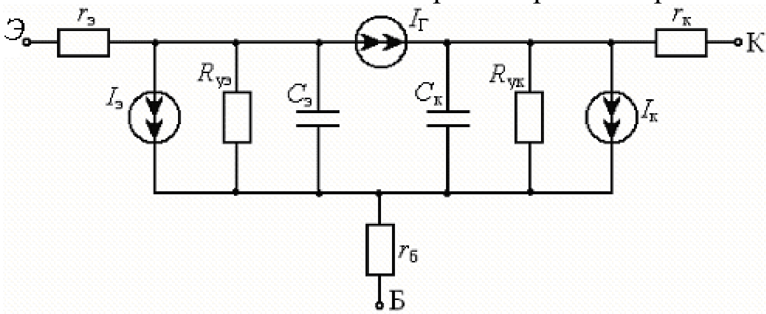
3. Эквивалентная схема муфты сцепления



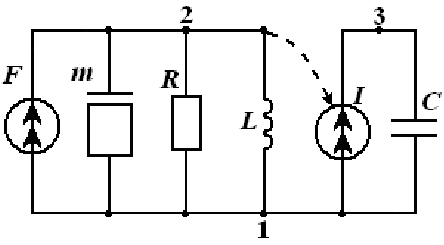
4. Эквивалентная схема гидравлической подсистемы



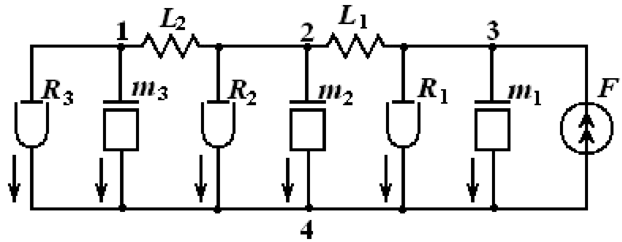
5. Эквивалентная схема биполярного транзистора



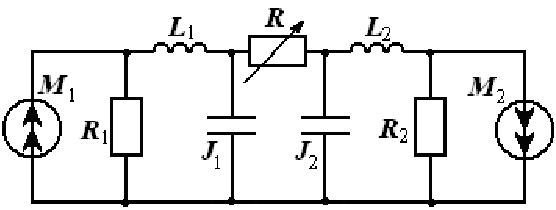
6. Эквивалентная схема



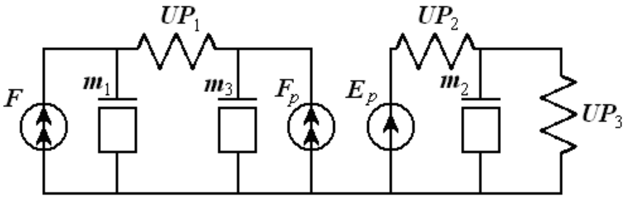
7. Эквивалентная схема



8. Эквивалентная схема муфты сцепления



9. Эквивалентная схема рычажной механической системы



<u>Задание 2</u>. Дать ответ на следующий вопрос.

Вариант	Вопрос
0	Метод получения топологических уравнений на основе матрицы контуров и сечений.
1	Обобщенный метод получения математических моделей систем.
2	Табличный метод получения математических моделей систем.
3	Аналогии топологических уравнений для электри-

	ческой, механической поступательной, механической вращательной подсистем.
4	Аналогии топологических уравнений для электрической, гидравлической, тепловой подсистем.
5	Узловой метод получения математических моделей систем.
6	Метод переменных состояния.
7	Получение эквивалентных схем технических объектов.
8	Аналогии компонентных уравнений для электрической, механической поступательной, механической вращательной подсистем.
9	Аналогии компонентных уравнений для электрической, гидравлической, тепловой подсистем.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НА МЕТАУРОВНЕ

Теоретические сведения

К основным типам сложных технических объектов, подходы к моделированию которых на метауровне различны, можно отнести объекты, являющиеся предметами исследований теории автоматического управления (ТАУ), и объекты, моделируемые как системы массового обслуживания.

Поведение сложного технического объекта в случае ТАУ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Классические методы ТАУ развиты для случаев отсутствия или ограниченного числа нелинейностей в моделях безынерционных элементов. При использовании моделей ТАУ в САПР эти ограничения могут быть сняты.

Для решения таких задач можно использовать специализированные программы, реализующие классические методы ТАУ, или универсальные программные комплексы. Специализированные программы просты, но, как уже было отмечено, классические методы вносят ряд ограничений. Для применения универсальных программных комплексов с входными языками, ориентированными на описание эквивалентных схем, нужна методика приведения поставленной задачи к таким схемам.

2.1. Математические модели систем массового обслуживания

Математическое моделирование систем массового обслуживания (СМО) может быть аналитическим и имитационным. При аналитическом моделировании модели СМО могут быть получены при использовании допущений, каждое из которых приводит к уменьшению степени их адекватности. Поэтому, несмотря на то что аналитические модели очень экономичны, основным универсальным методом исследования СМО является имитационное моделирование.

Для представления имитационных моделей можно использовать языки программирования общего применения, однако такие представления оказываются довольно громоздкими. Поэтому обычно применяют специальные языки имитационного моделирования на системном уровне. Среди языков имитационного моделирования различают языки, ориентированные на описание событий, средств обслуживания или маршрутов движения заявок (процессов). Выбор языка моделирования определяет структуру модели и методику ее построения.

Языки имитационного моделирования реализуются в программно-методических комплексах моделирования СМО, имеющих ту или иную степень специализации. Так, комплексы на базе языка GPSS можно использовать во многих приложениях, но есть специализированные комплексы для моделирования вычислительных сетей, систем управления предприятиями и т.п.

При использовании языков, ориентированных на процессы, в составе СИМ выделяются элементарные части и ими могут быть источники входных потоков заявок, устройства, накопители и узлы.

Источник входного потока заявок представляет собой алгоритм, в соответствии с которым вычисляются моменты t_k появления заявок на выходе источника. Источники могут быть зависимыми и независимыми. В зависимых источниках моменты появления заявок связаны с наступлением определенных событий, например, с приходом другой заявки на вход некоторого устройства. Типичным независимым источником является алгоритм выработки значений t_k случайной величины с заданным законом распределения.

Устройства в имитационной модели представлены алгоритмами выработки значений интервалов (длительностей) обслуживания. Чаще всего это алгоритмы генерации значений случайных величин с заданным законом распределения. Но могут быть устройства с детерминированным временем обслуживания или временем, определяемым событиями в других частях СИМ. Модель устройства отображает также заданную дисциплину обслуживания, поскольку в модель входит алгоритм, управляющий очередями на входах устройства.

Накопители моделируются алгоритмами определения объемов памяти, занимаемых заявками, приходящими на вход накопителя. Обычно объем памяти, занимаемый заявкой, вычисляется как значение случайной величины, закон и (или) числовые характеристики распределения может зависеть от типа заявки.

Узлы выполняют связующие, управляющие и вспомогательные функции в имитационной модели, например, для выбора направлений движения заявок в СИМ, изменения их параметров и приоритета, разделения заявок на части, их объединения и т.п.

Обычно каждому типу элементарной модели, за исключением лишь некоторых узлов, в программной системе соответствует определенная процедура (подпрограмма). Тогда СИМ можно представить как алгоритм, состоящий из упорядоченных обращений к этим процедурам, отражающим поведение моделируемой системы.

В процессе моделирования происходят изменения модельного времени, которое чаще всего принимается дискретным, измеряемым в тактах. Время изменяется после того, как закончена имитация очередной группы событий, относящихся к текущему моменту времени t_k. Имитация сопровождается накоплением в отдельном файле статистики таких данных, как количества заявок, вышедших из системы обслуженными и необслуженными, суммарное время занятого состояния для каждого из устройств, средние длины очередей и т.п. Имитация заканчивается, когда текущее время превысит заданный отрезок времени или когда входные источники выработают заданное число заявок. После этого производят обработку накопленных в файле статистики данных, что позволяет получить значения требуемых выходных параметров.

В программах имитационного моделирования СМО преимущественно реализуется **событийный метод** организации вычислений. Сущность событийного метода заключается в отслеживании на модели последовательности событий в том же порядке, в каком они происходили бы в реальной системе. Вычисления выполняют только для тех моментов времени и тех частей (процедур) модели, к которым относятся совершаемые события. Другими словами, обращения на очередном такте моделируемого времени осуществляются только к моделям тех элементов (устройств, накопителей), на входах которых в этом такте произошли изменения. Поскольку изменения состояний в каждом такте обычно наблюдаются лишь у малой доли ОА, событийный метод может существенно ускорить моделирование по сравнению с инкрементным методом, в котором на каждом такте анализируются состояния всех элементов модели.

2.2. Моделирование систем массового обслуживания с отказами

Системой массового обслуживания с ожиданием называется система, в которой заявка, пришедшая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получает отказ и покидает систему. В стационарном режиме $P_0, P_1, \ldots\ldots P_n$ определяют вероятности состояний системы (количество занятых каналов) и определяются по формулам:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_2 = \frac{1}{2\mu}\left[-\lambda P_0 + (\lambda + \mu) P_1\right] = \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} P_0$$

$$P_3 = \frac{1}{3\mu}\left[-\lambda P_1 + (\lambda + 2\mu) P_2\right] = \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} P_0$$

В случае произвольного к =1,2,3,…….n

$$P_к = \frac{\lambda^к}{к!\mu^к} P_0$$

В дальнейшем удобно обозначать отношение

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \ ,$$

которое называется приведенной плотностью потока заявок и равно среднему числу заявок, приходящих за среднее время обслуживания одной заявки:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{t}_{об}$$

В полученных формулах все вероятности $P_к$ выражаются через P_0.

Для определения P_0 воспользуемся соотношением

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_n = 1,$$

отражающим факт пребывания СМО в одном из возможных состояний, получим:

$$\sum_{S=0}^{n} P_S = P_0 \sum_{S=0}^{n} \frac{\alpha^S}{S!} = 1,$$

откуда

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{S=0}^{n} \frac{\alpha^S}{S!}}$$

и формулы принимают вид:

$$P_к = \frac{\alpha^к / к!}{\sum_{S=0}^{n} \frac{\alpha^S}{S!}}, \left(к = 0,1,2,3,\ldots\ldots n\right)$$

Формулы называются формулами Эрланга. Они дают вероятности пребывания системы в состоянии с **к** - занятыми каналами в установившемся режиме обслуживания в зависимости от характеристик потока заявок и потока обслуживаний. В частности, P_0 есть вероятность того, что СМО простаивает; P_n - вероятность того, что все каналы заняты, пришедшая заявка получает отказ; $q = 1 - P_n$ - вероятность обслуживания поступившей заявки (относительная пропускная способность СМО), Q=qλ - абсолютная пропускная способность системы.

Задача. Имеется четырех канальная система массового обслуживания (СМО) с отказами. Определить вероятности состояний и показатели системы в установившемся режиме обслуживания: относительные и абсолютные пропускные способности системы, если поступает 3 вызова в час, а среднее время обслуживания одной заявки равно 2 условным единицам. Что будет, если количество вызова увеличить в 2 раза; количество линий обслуживания увеличить на единицу; время обслуживания увеличить на 1 единицу? Смоделировать описанную систему СМО и проанализировать показатели системы.

Решение задачи. Решение проведем в Mathcad.

$$n := 4 \quad t := 2 \quad \lambda := 3 \quad \mu := \frac{1}{t} \quad \alpha := \frac{\lambda}{\mu}$$

$$po := \frac{1}{\displaystyle\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^{s}}{s!}} \qquad pot := \frac{\alpha^{n}}{n!} \cdot po$$

$$q := 1 - pot \qquad Q := \lambda \cdot q$$

$$po = 8.696 \times 10^{-3} \qquad pot = 0.47$$

$$q = 0.53 \qquad Q = 1.591$$

Вероятность простоя системы равна 0,008696, т.е. очень маленькая, вероятность отказа, наоборот, большая: 0,47. Относительная пропускная способность равна 0,53. Абсолютная пропускная способность системы равна 1,591.

Увеличим количество вызовов в 2 раза:

$$n := 4 \quad t := 2 \quad \lambda := 6 \quad \mu := \frac{1}{t} \quad \alpha := \frac{\lambda}{\mu}$$

$$po := \frac{1}{\displaystyle\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^s}{s!}} \qquad pot := \frac{\alpha^n}{n!} \cdot po$$

$$q := 1 - pot \qquad Q := \lambda \cdot q$$

$$po = 8.084 \times 10^{-4} \qquad pot = 0.698$$

$$q = 0.302 \qquad Q = 1.809$$

Увеличилась вероятность отказа системы, уменьшилась относительная пропускная способность системы, а абсолютная пропускная способность увеличилась.

Увеличим количество линий на 1, а количество вызовов в час оставим прежним:

$$n := 5 \quad t := 2 \quad \lambda := 3 \quad \mu := \frac{1}{t} \quad \alpha := \frac{\lambda}{\mu}$$

$$po := \frac{1}{\displaystyle\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^s}{s!}} \qquad pot := \frac{\alpha^n}{n!} \cdot po$$

$$q := 1 - pot \qquad Q := \lambda \cdot q$$

$$po = 5.562 \times 10^{-3} \qquad pot = 0.36$$

$$q = 0.64 \qquad Q = 1.919$$

Уменьшилась вероятность отказа системы, увеличились относительная пропускная способность (0,64) и абсолютная пропускная способность системы (1,919).

Уменьшим время обслуживания на 1, а количество вызовов в час оставим прежним.

Вероятность отказа системы значительно уменьшилась, а относительная пропускная способность (0,89) и абсолютная пропускная способность системы (2,67) значительно увеличились:

$$n := 5 \quad t := 1 \quad \lambda := 3 \quad \mu := \frac{1}{t} \quad \alpha := \frac{\lambda}{\mu}$$

$$po := \frac{1}{\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^s}{s!}} \qquad pot := \frac{\alpha^n}{n!} \cdot po$$

$$q := 1 - pot \qquad Q := \lambda \cdot q$$

$$po = 0.054 \qquad pot = 0.11$$

$$q = 0.89 \qquad Q = 2.67$$

Вывод: возможно целесообразно открыть новую линию для обслуживания клиентов.

<u>Задание 3.</u> Имеется четырех канальная система массового обслуживания (СМО) с отказами. Определить вероятности состояний и показатели системы в установившемся режиме обслуживания: относительные и абсолютные пропускные способности системы, если поступает А вызова в час, а среднее время обслуживания одной заявки равно В условным единицам. Что будет, если количество вызова увеличить в С раз; количество линий обслуживания увеличить на единицу; время обслуживания увеличить на D единиц? Смоделировать описанную систему СМО и проанализировать показатели системы. Решение провести в Mathcad.

Вариант	A	B	C	D
0	4	3	3	2
1	5	3	2	2
2	3	1	2	1
3	2	1	2	1
4	4	3	3	1
5	6	4	3	3
6	5	4	3	3
7	3	2	2	1
8	3	1	2	2
9	4	2	2	2

2.3. Моделирование систем массового обслуживания с бесконечной очередью

Теоретические сведения

Пусть имеется **n**-канальная СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений ни по длине очереди, ни по времени ожидания, определим предельные вероятности состояний такой СМО для установившегося режима работы. Состояния X0 , X1 , … , Xn-1 имеют тот же смысл, что и в случае системы с отказами.

Смысл других состояний следующий:

Xn – заняты все **n** каналов (очереди нет);

Xn+1 – заняты все **n** каналов, и одна заявка стоит в очереди;

……………………………
X_{n+i} – заняты все **n** каналов, и **i** заявок стоят в очереди;
……………………………

Заметим, что число заявок, стоящих в очереди СМО с бесконечной очередью может быть сколько угодно большим, так что система может иметь бесконечное число состояний. Соответственно, число уравнений, описывающих систему, тоже будет бесконечным.

Система алгебраических уравнений для предельных вероятностей имеет вид:

Подсистема I:

$$\lambda P_0 = \mu P_1,$$

$$(\lambda + \mu) P_1 = \lambda P_0 + 2\mu P_2,$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – –

Подсистема II:

$$(\lambda + n\mu) P_n = \lambda P_{n-1} + n\mu P_{n+1},$$

$$(\lambda + n\mu) P_{n+1} = \lambda P_n + n\mu P_{n+2},$$

– –

Решение подсистемы I системы дается формулами:

$$P_к = \frac{\alpha^к / к!}{\sum_{S=0}^{n} \frac{\alpha^S}{S!}}, (к = 0,1,2,3,\ldots\ldots n)$$

Решение подсистемы II имеет вид:

$$P_{n+1} = \frac{1}{n\mu}\left[(\lambda + n\mu) P_n - \lambda P_{n-1}\right] = \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} P_0$$

$$P_{n+2}=\frac{1}{n\mu}\left[(\lambda+n\mu)P_{n+1}-\lambda P_n\right]=\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\frac{\alpha^n}{n!}\,P_0$$

Аналогично, для случая произвольного значения **i:**

$$P_{n+i}=\left(\frac{\alpha}{n}\right)^i\cdot\frac{\alpha^n}{n!}\,P_0\,,$$

где вероятность P_0 найдем из условия, что сумма вероятностей всех состояний системы есть вероятность достоверного события, то есть:

$$P_0+P_1+P_2+\ldots+P_n+P_{n+1}+P_{n+2}+\ldots=1$$

получим:

$$P_0\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{\alpha^s}{s!}+\frac{\alpha^n}{n!}\left[\sum_{i+1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^i\right]\right\}=1$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, есть геометрическая прогрессия. Если знаменатель прогрессии $\frac{\alpha}{n}<1$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^i=\frac{\alpha}{n-\alpha}\quad,$$

и вероятность

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^s}{s!} + \frac{\alpha}{n-\alpha} \cdot \frac{\alpha^n}{n!}} .$$

Итак, для установившегося режима обслуживания вероятность пребывания системы МО с бесконечной очередью в состоянии P_k дается формулами (при $\frac{\alpha}{n} < 1$):

$$P_k = \frac{\alpha^k / k!}{\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^s}{s!} + \frac{\alpha}{n-\alpha} \cdot \frac{\alpha^n}{n!}}, \quad (k=0,1,2,\ldots n),$$

$$P_{n+i} = \frac{\left(\frac{\alpha}{n}\right)^i \cdot \frac{\alpha^n}{n}}{\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^s}{s!} + \frac{\alpha}{n-\alpha} \cdot \frac{\alpha^n}{n!}}, \qquad (i = 1,2,\ldots).$$

Заметим, что если $\frac{\alpha}{n} < 1$, то система не перегружена, так как за время обслуживания $\bar{t}_{об} = 1/\mu$ одной заявки на один канал приходится меньше одной заявки ($\frac{\alpha}{n} < 1$ заявки в единицу времени). Если же $\frac{\alpha}{n} \geq 1$, канал будет непрерывно занят, система будет перегружена, и очередь при $t \to \infty$, будет расти до бесконечности. В этом случае пользоваться формулами нельзя. Таким образом, в СМО с бесконечной очередью, установившийся режим обслуживания возможен лишь при условии $\frac{\alpha}{n} < 1$.

<u>Задача.</u> На вход трехканальной системы массового обслуживания (СМО) с бесконечной очередью поступает простейший поток заявок с плотностью 4 заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки равно 1/3 часа. Определить вероятности загрузки каналов, вероятность наличия очереди. Что будет, если время обслуживания увеличится на 10 минут и составит 1/2 часа; время обслуживания уменьшить до 15 минут; плотность заявок увеличится в 2 раза? Смоделировать описанную систему СМО и проанализировать показатели системы.

Решение задачи. Решение проведем в Mathcad.

$$n := 3 \qquad t := \frac{1}{3} \qquad \lambda := 3$$

$$\mu := \frac{1}{t} \qquad \alpha := \frac{\lambda}{\mu} \qquad i := 1$$

$$po := \frac{1}{\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^s}{s!} + \frac{\alpha}{n-\alpha} \cdot \frac{\alpha^n}{n!}}$$

$$p1 := \alpha \cdot po \qquad p2 := \frac{\alpha^2}{2} \cdot po \qquad p3 := \frac{\alpha^3}{3!} \cdot po$$

$$pk := \begin{pmatrix} po \\ p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix} \qquad poch := 1 - po - p1 - p2 - p3$$

$$pni := \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{i} \cdot \frac{\alpha^{n}}{n!} \cdot po \qquad pk = \begin{pmatrix} 0.364 \\ 0.364 \\ 0.182 \\ 0.061 \end{pmatrix}$$

$$poch = 0.03 \quad pni = 0.02$$

Вероятности загрузки каналов соответственно равны 0,364, 0,364, 0,182, 0,061, т.е. с одинаковой вероятностью система не загружена и занят один канал, вероятность наличия очереди очень маленькая - 0,03.

Увеличим время обслуживания на 10 минут:

$$n := 3 \qquad t := \frac{1}{2} \qquad \lambda := 3$$

$$\mu := \frac{1}{t} \qquad \alpha := \frac{\lambda}{\mu} \qquad i := 1$$

$$po := \frac{1}{\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^{s}}{s!} + \frac{\alpha}{n-\alpha} \cdot \frac{\alpha^{n}}{n!}}$$

$$p1 := \alpha \cdot po \qquad p2 := \frac{\alpha^{2}}{2} \cdot po \qquad p3 := \frac{\alpha^{3}}{3!} \cdot po$$

$$pk := \begin{pmatrix} po \\ p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix} \qquad poch := 1 - po - p1 - p2 - p3$$

$$pni := \left(\frac{\alpha}{n}\right)^i \cdot \frac{\alpha^n}{n!} \cdot po \qquad pk = \begin{pmatrix} 0.211 \\ 0.316 \\ 0.237 \\ 0.118 \end{pmatrix}$$

$$poch = 0.118 \qquad pni = 0.059$$

Вероятность наличия очереди увеличилась, примерно 12 % заявок будут стоять в очереди на обслуживание. Если время обслуживания уменьшить до 15 минут, то очереди практически не будет:

$$n := 3 \qquad t := \frac{1}{4} \qquad \lambda := 3$$

$$\mu := \frac{1}{t} \qquad \alpha := \frac{\lambda}{\mu} \qquad i := 1$$

$$po := \frac{1}{\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^s}{s!} + \frac{\alpha}{n - \alpha} \cdot \frac{\alpha^n}{n!}}$$

$$p1 := \alpha \cdot po \qquad p2 := \frac{\alpha^2}{2} \cdot po \qquad p3 := \frac{\alpha^3}{3!} \cdot po$$

$$pk := \begin{pmatrix} po \\ p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix} \qquad poch := 1 - po - p1 - p2 - p3$$

$$pni := \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{i} \cdot \frac{\alpha^{n}}{n!} \cdot po \qquad pk = \begin{pmatrix} 0.471 \\ 0.353 \\ 0.132 \\ 0.033 \end{pmatrix}$$

$$poch = 0.011 \qquad pni = 8.272 \times 10^{-3}$$

Только 1,1 % заявок будут стоять в очереди и очередь, в основном, будет состоять из одной заявки.

<u>Задание 4.</u> На вход трехканальной системы массового обслуживания (СМО) с бесконечной очередью поступает простейший поток заявок с плотностью A4 заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки равно B1/3 часа. Определить вероятности загрузки каналов, вероятность наличия очереди. Что будет, если время обслуживания увеличится на C10 минут и составит D1/2 часа; время обслуживания уменьшить до F15 минут; плотность заявок увеличится в G2 раза? Смоделировать описанную систему СМО и проанализировать показатели системы. Решение провести в Mathcad.

Вариант	A	B	C	D	F	G
0	6	1/3	10	1/2	15	3
1	5	1/3	10	1/2	15	3
2	4	1/4	15	1/2	10	2
3	3	1/4	15	1/2	10	2

4	5	1/3	10	1/2	15	3
5	7	1/3	10	1/2	15	3
6	6	1/4	15	1/2	10	3
7	6	1/3	10	1/2	15	3
8	5	1/4	15	1/2	10	3
9	4	1/3	10	1/2	15	3

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования: учеб. для вузов / И.П. Норенков. 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд–во МГТУ им. Баумана, 2006. – 448 с.

2 Килина А.А. Модели и методы анализа проектных решений: учеб. пособие / А.А. Килина, Е.Д. Федорков. Воронеж: ВГТУ, 2008. – 228 с.

3 Муромцев Д.Ю. Математическое обеспечение САПР / Д.Ю. Муромцев, И.В. Тюрин. М.: Лань, 2014. 464 с.

4 Ушаков Д.М. Введение в математические основы САПР: курс лекций / Д.М. Ушаков. М.: ДМК Пресс, 2011. 208 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы № 2
по дисциплине «Модели и методы анализа проектных решений» для студентов направления подготовки бакалавров 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» (профиль «Системы автоматизированного проектирования в машиностроении») заочной формы обучения

Составитель
Собенина Ольга Валерьевна

В авторской редакции
Компьютерный набор О.В. Собениной

Подписано к изданию 30.04.2015.
Уч.-изд. л. 1,7. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14