ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОЛИМПИАДЕ ПО ФИЗИКЕ

Учебно-методическое пособие

Воронеж 2019

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОЛИМПИАДЕ ПО ФИЗИКЕ

Учебно-методическое пособие

Воронеж 2019

УДК53(075.8)
ББК22.3я7

П625

Авторы:
Е. П. Татьянина, Т. Л. Тураева, Т. В. Дубовицкая,
А. Г. Москаленко, О. С. Хабарова, С. А. Солдатенко

П625 **Пособие для подготовки к олимпиаде по физике**: учеб.-метод. пособие [Электронный ресурс] – Электрон. текстовые и граф. данные (852 КБ) / Е. П. Татьянина, и [др.] – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв. – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024x768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7731-0817-7

В учебно-методическом пособии содержатся задачи, которые предлагались на вузовской олимпиаде по физике в ВГТУ за период 2001-2018 гг. Приводится подробное решение этих задач с пояснениями.

Предназначено для студентов технических направлений для подготовки к олимпиаде по физике.

Ил. 63. Библиогр.: 13 назв.

УДК53(075.8)
ББК22.3я7

Издается по решению учебно-методического совета
Воронежского государственного университета

Рецензенты:
кафедра теоретической физики Воронежского государственного университета (зав. кафедрой д-р. физ.-мат. наук, проф. М. В. Фролов);
А. В. Строгонов, д-р техн. наук, проф. ВГТУ

ISBN 978-5-7731-0817-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Олимпиада в Воронежском государственном техническом университете ежегодно проводится с 2001 года как вузовский этап Всероссийской студенческой олимпиады по физике. Олимпиада предполагает соревнование студентов в творческом применении умений, знаний и навыков по физике, полученных в школе и вузе.

В олимпиаде по личной инициативе могут принимать участие студенты, обучающиеся по образовательным программам разных направлений подготовки и всех курсов. Предварительная регистрация участников не производится.

Для олимпиадных заданий предлагаются задачи с глубоким физическим смыслом, развивающие нестандартное мышление. Ряд задач, представленных в пособии, авторские. Многие годы в состав жюри олимпиады входили лучшие преподаватели кафедры физики: Антипов С. А., Груздев А. Д., Долгачёв А. А., Москаленко А. Г., Суходолов Б. Г., Тураева Т. Л., Татьянина Е. П., Фёдоров В. М., Хабарова О. С.

Работы участников шифруются и проверяются. По завершении соревновательного тура все участники могут познакомиться с полными решениями задач.

Оценка работ проводится по десятибалльной шкале по каждой задаче по следующим обобщённым критериям:

- **3 балла** - при записи только одного физического закона, формулы, необходимой для решения задачи;
- **6 баллов** - если верно записаны все необходимые для решения физические законы или формулы, и их использование обосновано, но математические преобразования в задаче не были проведены;
- **8 баллов** - в случае правильно решенной задачи, но с некоторыми недочетами, например, в математических преобразованиях;
- **10 баллов** за правильно решенную задачу.

По указанным обобщённым критериям к каждой олимпиадной задаче с учетом ее особенностей и специфики формируется детальная разбалловка от 1 до 10 баллов.

Баллы по каждой задаче суммируются, формируется протокол участников, происходит расшифровка работ. По итоговой сумме баллов определяются победители (1, 2 и 3 м есто) и призёры олимпиады (обычно 10 % от числа всех участников).

Коллектив авторов рекомендует преподавателям поощрять победителей и призёров олимпиады, например оценкой «отлично» за текущий семестр по физике. Победители и призёры получают грамоты.

ВВЕДЕНИЕ

В пособие включены условия и решения олимпиадных задач, предлагаемых на олимпиаде ВГТУ по механике, молекулярной физике и электромагнетизму, с целью углубления знаний и подготовки к участию в студенческих олимпиадах. Каждая предложенная задача сопровождается подробным разбором решения. После номера задачи в скобках указывается год, в котором она была предложена на олимпиаде.

Пособие будет полезно абитуриентам, школьным учителям, преподавателям различных курсов по физике, руководителям школьных физических кружков и всем, кто интересуется физикой.

1. МЕХАНИКА

№ 1.1 (2001). Кольцевая цепочка массы m надета на горизонтальный диск радиуса R. Сила натяжения надетой цепочки T. Найдите коэффициент трения между диском и цепочкой, если при вращении диска с угловой скоростью ω цепочка с него соскальзывает.

Решение

Рассмотрим малый элемент цепочки массой $dm = \dfrac{m}{2\pi} d\alpha.$ Покажем действующие на него силы (рис. 1.1). Сила трения покоя компенсирует силу тяжести и не дает упасть, пока не достигнет максимального значения, равного силе трения скольжения $dm \cdot g = \mu N$.

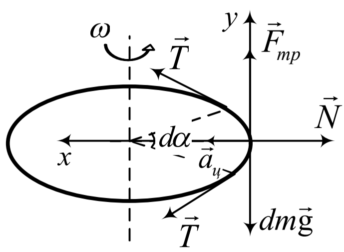

Рис. 1.1

Центростремительное ускорение $a_ц = \omega^2 \cdot R$ элементу dm сообщает равнодействующая сил натяжения $2T\sin\dfrac{d\alpha}{2}$ и силы реакции N. Запишем условие соскальзывания цепочки:

$$dm \cdot \omega^2 \cdot R = 2T\sin\frac{d\alpha}{2} - N.$$

Учитывая, что угол $d\alpha$ мал, можно считать $\sin\dfrac{d\alpha}{2} \approx \dfrac{d\alpha}{2}$.

После замены $dm = \dfrac{m}{2\pi} \cdot d\alpha$ и $N = \dfrac{dm \cdot g}{\mu} = \dfrac{mgd\alpha}{2\pi\mu}$ получим

$$\frac{m}{2\pi} d\alpha \cdot \omega^2 \cdot R = Td\alpha - \frac{md\alpha \cdot g}{2\pi\mu}.$$

Откуда выражение для искомого коэффициента трения

$$\mu = \frac{mg}{2\pi T - m\omega^2 \cdot R}.$$

Ответ: $\mu = \dfrac{mg}{2\pi T - m\omega^2 \cdot R}$.

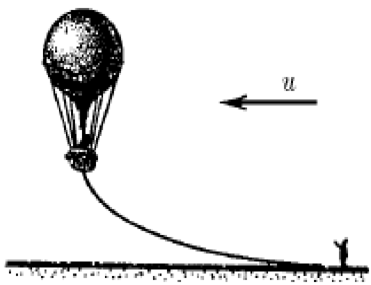

Рис. 1.2

№ 1.2 (2001). Масса воздушного шара вместе с канатом, волочащимся по земле (рис. 1.2), равна *m*; выталкивающая сила, действующая на шар, равна *F*; коэффициент трения каната о землю равен μ. Сила сопротивления воздуха, действующая на шар, пропорциональна квадрату скорости шара относительно воздуха $f = \alpha\upsilon^2$. Найдите скорость шара относительно земли, если дует горизонтальный ветер со скоростью *u*.

Решение

Шар движется вдоль земли благодаря боковому ветру. Согласно закону сложения скоростей относительно земли его скорость составит $\upsilon_{ш/з} = u - \upsilon_{ш/возд}$.

Сила трения каната по поверхности земли $F_{тр} = \mu N$, где силу реакции можно выразить из проекции сил на вертикальное направление $N = mg - F$. Таким образом, $F_{тр} = \mu(mg - F)$.

При равномерном движении силы, действующие в горизонтальном направлении, компенсируют друг друга, поэтому можно записать

$$f = F_{тр}, \quad \Rightarrow \quad \alpha\upsilon^2_{ш/возд} = \mu(mg - F).$$

Откуда скорость шара относительной воздуха

$$\upsilon_{ш/возд} = \sqrt{\frac{\mu(mg - F)}{\alpha}},$$

и окончательно искомая величина скорости относительно земли представится согласно закону сложения скоростей

$$\upsilon_{ш/з} = u - \sqrt{\frac{\mu(mg - F)}{\alpha}}.$$

Ответ: $\upsilon_{ш/з} = u - \sqrt{\dfrac{\mu(mg-F)}{\alpha}}$.

№ 1.3 (2002). Длина образующей L и диаметр D основания конуса равны 10 см. Конус катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания (рис. 1.3). В некоторый момент времени скорость точки A основания конуса равна $u_A = 1\ м/с$. За какое время T конус совершит полный оборот вокруг вертикальной оси OO′?

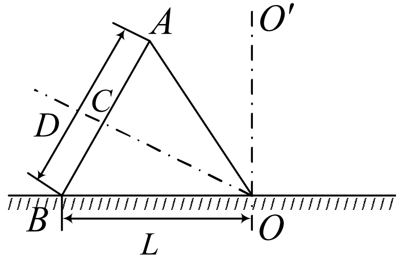

Рис. 1.3

Решение

Мгновенная ось вращения OB проходит вдоль линии касания конуса с поверхностью (рис. 1.4). Так как точка C ближе в два раза к этой оси, то ее скорость в два раза меньше скорости точки A:

$$\upsilon_C = \frac{\upsilon_A}{2}.$$

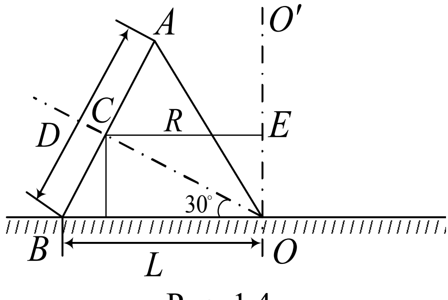

Рис. 1.4

Из треугольника ΔOBC сторона $OC = L\cos 30°$. Тогда радиус, по которому движется точка C вокруг оси OO', выразим из треугольника ΔCOE: $R = OC\cos 30° = L\cos^2 30° = \dfrac{3}{4}L$.

Полный оборот конус совершит за время

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon_c} = \frac{3\pi L}{\upsilon_A} = 1\ c\ .$$

Ответ: $T = 1$ с.

№ 1.4 (2002). Частица движется вдоль положительной полуоси Ox под действием силы $\vec{F}$, проекция которой на эту ось представлена на рис. 1.5. Одновременно на частицу действует сила трения. В начале координат установлена идеально отражающая стенка, перпендикулярная оси Ox. Частица стартует из точки $x_0 = 2\ м$ с кинетической энергией $E = 30\ Дж$. Частица до полной остановки проходит путь S=50 м. Найдите величину силы трения, действующей на частицу. После первого удара о стенку действие силы $\vec{F}$ прекращается.

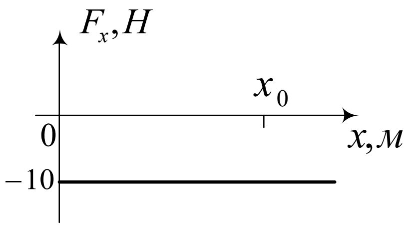

Рис. 1.5

Решение

Так как проекция силы F_x отрицательна, то при движении тела вдоль оси Ox сила $\vec{F}$ вместе с силой трения совершает отрицательную работу и приводит к остановке частицы в некоторой точке x. После чего приводит тело к движению против оси Ox и действует до столкновения со стенкой. После отскока на частицу уже действует только сила трения (рис. 1.6).

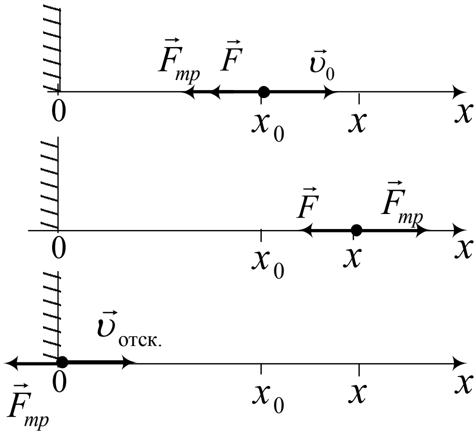

Рис. 1.6

Работа всех сил равна сумме работ силы трения и силы *F*, действующей на тело $A = A_{тр} + A_F$. Работа силы трения на всем пути отрицательна и равна $A_{тр} = -F_{тр}S$.

Полная работа этой сил *F* равна

$$A_F = -F(x - x_0) + F(x - x_0) + Fx_0 = Fx_0.$$

Работа всех сил, согласно теореме о кинетической энергии, равна изменению кинетической энергии тела $A = \Delta E$. Так как тело в конце остановилось, то изменение энергии равно $\Delta E = -E$.

Таким образом, $A = Fx_0 - F_{тр}S = -E$. Откуда

$$F_{тр} = \frac{F_{x_0} + E}{S} = 1\text{Н}.$$

Ответ: $F_{тр} = 1$ *Н*.

№ 1.5 (2003). Два студента Сергей и Михаил, неторопливо бегают по футбольному полю, причем расстояние между ними все время равно 50 м. Сергей с постоянной по величине скоростью 2 м/с бегает по кругу радиусом 50 м, а Михаил бежит по прямой, проходящей через центр этого круга. Найдите максимальное значение скорости Михаила. Считайте, что подолгу он на одном месте не стоит.

Решение

Михаил перемещается по прямой, совершая колебательное движение по закону $x = 2Rcos\alpha$ (рис. 1.7), где $\alpha = \omega t = \dfrac{\upsilon}{R}t$.

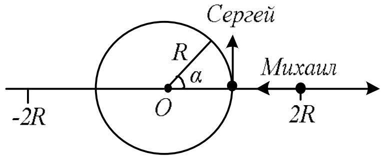

Рис. 1.7

Максимальная скорость при колебательном движении

$$\upsilon_{max} = x_{max}\omega = 2R\frac{\upsilon}{R} = 2\upsilon.$$

Таким образом, максимальная скорость Михаила составляет $\upsilon_{max} = 4$ *м/с*.

Ответ: $\upsilon_{max} = 4$ *м/с*.

№ 1.6 (2004). Два студента, играя в футбол, бегут навстречу друг другу по одной прямой, скорости их одинаковы и равны 5 *м/с*. Судья в любой момент времени благоразумно держится поодаль (опыт есть) – на расстоянии ровном 30 *м* от студента в красной форме и на расстоянии 40 *м* от студента в синей форме. Найдите ускорение судьи в тот момент, когда расстояние между футболистами составляет 50 *м*.

Решение

Обозначим на рисунке следующие точки: *C* − судья, *A* – студент в синей форме, *B* – студент в красной форме (рис. 1.8). Проекция скорости судьи на направление *AC:* $\upsilon_{AC} = \upsilon cos\alpha = 4\frac{м}{c}$; на направление *BC:* $\upsilon_{BC} = \upsilon sin\alpha = 3\frac{м}{c}$.

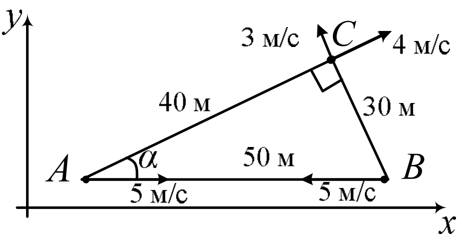

Рис. 1.8

Проекции скорости судьи на координатные оси

$$\upsilon_x = \upsilon cos^2\alpha - \upsilon sin^2\alpha = 1,4\frac{м}{с};$$

$$\upsilon_y = \upsilon cos\alpha sin\alpha + \upsilon sin\alpha cos\alpha = 4,8\frac{м}{с}.$$

В системе отсчета, связанной с футболистом в синей форме, судья движется по окружности радиусом *40 м* с центростремительным ускорением:

$$a_{ц1} = \frac{\upsilon_1^2}{R_1} = \frac{(5-1,4)^2 + 4,8^2}{40} = 0,9\frac{м}{c^2}.$$

Аналогично относительно футболиста в красной форме:

$$a_{ц2} = \frac{\upsilon_2^2}{R_2} = \frac{(5+1,4)^2 + 4,8^2}{50} = 2,13\frac{м}{c^2}.$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_{ц1}^2 + a_{ц2}^2} = 2,3\, м/c^2.$$

Ответ: $a = 2,3\, м/c^2$.

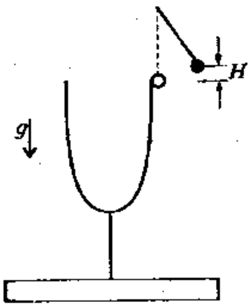

Рис. 1.9

№ 1.7 (2004). В известном опыте академик А. Ф. Иоффе для определения амплитуды колебаний ножки камертона подносил к ней стальной шарик на нити вплоть до соприкосновения шарика с ножкой (рис. 1.9). Найдите амплитуду колебаний ножки камертона, если максимальная высота подъёма шарика после одного отскока (точнее, её среднее значение при многочисленных опытах) равна 30 см. Частота колебаний ножки камертона 200 Гц. Масса шарика мала по сравнению с массой ножки камертона.

Решение

Пусть $\vec{\upsilon}$ – скорость движения ножки камертона. Тогда скорость движения шарика относительно ножки камертона до соударения $(-\vec{\upsilon})$. В результате абсолютно упругого удара скорость шарика изменит направление на противоположное, не изменившись по модулю. Таким образом, относительно Земли после удара скорость шарика составит $2\vec{\upsilon}$.

Пусть соударение шарика с камертоном происходит в точке, где ножка камертона имеет максимальную скорость. Кинетическая энергия шарика преобразуется в потенциальную энергию:

$$\frac{m(2\upsilon)^2}{2} = mgH .$$

Откуда и выразим скорость

$$\upsilon = \sqrt{\frac{gH}{2}} .$$

При колебаниях камертона его скорость при прохождении положения равновесия максимальна и связана с амплитудой колебаний выражением $\upsilon = A\omega$, где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота колебаний.

Таким образом, амплитуда колебаний камертона составит

$$A = \frac{\upsilon}{\omega} = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{gH}{2}} = 1\,мм.$$

Ответ: $A = 1$ *мм*.

№ 1.8 (2005). На горизонтально расположенный отрезок практически нерастяжимой нити длиной ℓ=20 см нанизаны три одинаковые бусинки, которые могут скользить по нему без трения, упруго ударяясь друг о друга и о места закрепления концов нити. Полная кинетическая энергия бусинок $20\,мДж$. Найдите силу натяжения нити. Концы нити прикреплены к двум упругим массивным телам, взаимодействие этих тел друг с другом и с другими телами пренебрежимо мало. Сила тяжести отсутствует.

Решение

Нить между двумя массивными телами будет испытывать натяжение вследствие ударов бусинок, которые передают импульс этим телам. Согласно третьему закону Ньютона по модулю эта сила равна силе реакции, изменяющей импульс бусинок $T = F$.

Так как соударения упругие и бусинки одинаковы, следовательно, они просто обмениваются скоростями и можно рассматривать движение только одной бусинки. Обозначим υ – скорость бусинки; $2m\upsilon$ – импульс, который передает бусинка массивному телу при соударении. За время τ бусинка пролетит расстояние $\upsilon\tau$, произведя $\frac{\upsilon\tau}{2\ell}$ ударов об одно массивное тело. Массивное тело за время τ получит от одной из бусинок импульс

$$\frac{2m\upsilon\cdot\upsilon\tau}{2\ell}=\frac{m\upsilon^2\tau}{\ell}.$$

Согласно закону изменения импульса

$$F\tau=\sum m_i\upsilon_i^2\cdot\frac{\tau}{\ell}.$$

Откуда

$$F=\frac{2E}{\ell}=0{,}2\ H.$$

Ответ: F = 0,2 Н.

№ 1.9 (2006). Вертолёт может зависнуть в воздухе, если механическая мощность двигателя равна N. Какой должна быть механическая мощность двигателя уменьшенной модели этого вертолёта, все линейные размеры которой в 2 раза меньше размеров оригинала, чтобы он мог зависнуть в воздухе?

Решение

Механическая мощность двигателя вертолета N, необходимая для того, чтобы он мог зависнуть в воздухе, равна произведению модуля направленной вниз силы давления лопастей ротора (равной по модулю весу самолета) и средней скорости движущегося вниз столба воздуха под лопастями ротора:

$$N=P\upsilon.$$

Лопасти создают поток воздуха, движущийся со скоростью υ, поэтому $P=\upsilon\frac{dm}{dt}$, где $\frac{dm}{dt}=\rho S\upsilon$. Тогда $P=\rho S\upsilon^2$.

Так как размеры вертолета определяются линейными размерами L, то вес $P\sim L^3$, а площадь $S\sim L^2$. Тогда скорость вертолета $\upsilon\sim\sqrt{\frac{P}{S}}\sim\sqrt{L}$ и мощность двигателя $N=P\upsilon\sim L^{7/2}$.

При уменьшении линейных размеров в *2* раза, мощность уменьшится в $2^{7/2}$=11,3 раза. $N' = \dfrac{N}{11,3} = 0,088N$.

Ответ: $0,088N$.

№ 1.10 (2007). По шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, с высоты *1 м* скатывается однородный сплошной диск массой *20 кг*. Какое максимальное количество теплоты может при этом выделиться? Точки диска всё время находятся в одной вертикальной плоскости.

Решение

Тепло выделяется только при движении диска с проскальзыванием. Изобразим силы, действующие на диск при движении с наклонной плоскости (рис. 1.10), и рассмотрим проекции этих сил на направление движения:

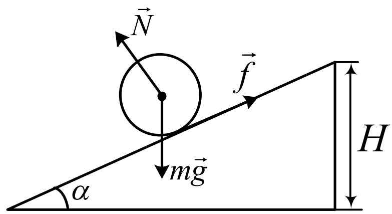

Рис. 1.10

$$F_{тр} = f = \mu N = mg\cos\alpha;$$
$$F = mg\sin\alpha.$$

Ускорение центра диска равно $a = \dfrac{F - f}{m}$, а угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{M_{тр}}{J} = \dfrac{fR}{mR^2/2} = \dfrac{2f}{mR}$, где $J = \dfrac{mR^2}{2}$ – момент инерции диска.

Кинетическая энергия диска

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}; \quad \upsilon = at; \omega = \varepsilon t.$$

$$E_к = \frac{ma^2t^2}{2} + \frac{J\varepsilon^2 t^2}{2} = \frac{at^2}{2}\left(ma + \frac{J\varepsilon^2}{a} \right) =$$

$$= S\left(F - f + \frac{2f^2}{F-f} \right) = SF\left(1 - \frac{f}{F} + \frac{2f^2}{F(F-f)} \right) =$$

$$= mgH\left(1 - x + \frac{2x^2}{1-x} \right), \quad \text{где} \quad x = \frac{f}{F}.$$

Выделившееся количество теплоты будет максимальным, если выражение в скобках принимает минимальное значение. Из этого условия определим

$$x = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,08, \quad E_к \approx 0,9mgH.$$

Тогда максимальное количество теплоты, которое может при этом выделиться, составит

$$Q = mgH - 0,9mgH = 0,1mgH = 20\,Дж.$$

Ответ: $Q = 20\ Дж$.

№ 1.11 (2007). На верхнюю часть горизонтально расположенного камертона насыпан песок. Камертон начинает совершать колебания с частотой 500 Гц. Какова амплитуда колебаний в том месте камертона, где песчинки подскакивают на высоту $h = 1\ мм$ по отношению к их положению при покоящемся камертоне?

Решение

Песчинка отрывается от ветви камертона, когда ветвь смещается вверх от положения равновесия, а ускорение равно ускорению свободного падения: $a = A\omega^2 cos\omega t = g$. В этот момент песчинка находится на высоте $h_0 = A sin\omega t$ и ее скорость $\upsilon_0 = A\omega cos\omega t$.

Запишем закон сохранения энергии:

$$mgh = mgh_0 + \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Отсюда

$$h = h_0 + \frac{\upsilon^2}{2g} = A sin\omega t + \frac{\left(A\omega cos\omega t\right)^2}{2g} = \frac{g}{2\omega^2} + \frac{\left(A\omega\right)^2}{2g}.$$

Выразим амплитуду:

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{2gh - \left(\frac{g}{\omega}\right)^2} \approx 0,045\,мм.$$

Ответ: $A = 0,045\,мм$.

№ 1.12 (2007). Антенна корабельного радиолокатора находится на высоте *h=25 м* над уровнем моря. На каком максимальном расстоянии радиолокатор может обнаружить спасательный плот? С какой частотой могут при этом испускаться импульсы?

Указание. Считать, что отражённый радиоимпульс должен вернуться до того, как начнётся излучение следующего импульса.

Решение

Радиолокатор работает в пределах прямой видимости. На рис. 1.11 обозначены: A – радиолокатор, $AB=S_{max}$ – максимальное расстояние, на котором можно обнаружить плот, OB – радиус Земли.

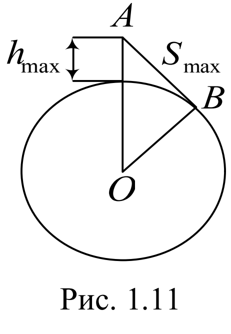

Рис. 1.11

Запишем теорему Пифагора для треугольника *OAB:*

$$S_{max} = \sqrt{(h+R)^2 - R^2} \approx \sqrt{2Rh} = 18\,км.$$

Отраженный радиоимпульс должен вернуться до того, как будет испущен следующий сигнал радиолокатора:

$$\frac{2S_{max}}{c} \le T \le \frac{1}{\nu}, \text{ отсюда } \nu \le \frac{c}{2S_{max}} = 8300\,Гц.$$

Ответ: $\nu \le 8300\,Гц$.

№ 1.13 (2008). Расположенный вертикально однородный стержень длиной L может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В точку, отстоящую от оси вращения на $\frac{2}{3}L$, ударяется тело массой m, летящее перпендикулярно к стержню и к оси. После удара стержень отклоняется на угол α, а тело отскакивает назад со скоростью υ. Найдите начальную скорость тела υ_0. Масса стержня M.

Решение

Запишем закон сохранения момента импульса:

$$m\upsilon_0 \frac{2}{3}L = -m\upsilon \frac{2}{3}L + \frac{ML^2}{3}\omega.$$

Закон сохранения механической энергии стержня:

$$\frac{ML^2}{3} \cdot \frac{\omega^2}{2} = Mg\frac{L}{2}\left(1 - cos\alpha\right).$$

Решая совместно полученную систему уравнений, получим

$$m\frac{2}{3}L\left(\upsilon_0 + \upsilon\right) = \frac{ML^2}{3}\omega,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(1 - cos\alpha\right)} = \sqrt{\frac{3g}{L}2sin^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{6g}{L}}sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\upsilon_0 = \frac{ML}{2m}\sqrt{\frac{6g}{L}}sin\frac{\alpha}{2} - \upsilon = \frac{ML}{m}\sqrt{\frac{3g}{2L}}sin\frac{\alpha}{2} - \upsilon.$$

Ответ: $\upsilon_0 = \dfrac{ML}{m}\sqrt{\dfrac{3g}{2L}} sin\dfrac{\alpha}{2} - \upsilon.$

№ 1.14 (2008). Длинный железнодорожный состав движется по инерции по горизонтальным рельсам, а затем въезжает на горку с углом наклона α к горизонту. Состав полностью остановился, въехав на горку, на половину своей длины. Сколько времени прошло от начала подъёма до остановки? Длина состава *L*. Трением и длиной переходного участка пути при въезде на горку пренебречь.

Решение

Второй закон Ньютона, записанный в проекции на ось *Ox*, которая направлена вдоль горки в сторону движения состава, имеет вид

$$Ma = -mgsin\alpha ,$$

где $m = \dfrac{M}{L}x$ – масса въехавшей на горку части состава, *x* – длина въехавшей на горку части состава.

Уравнение движения можно привести к виду

$$Mx'' + \frac{Mgsin\alpha}{L}x = 0 \text{ или } x'' + \frac{gsin\alpha}{L}x = 0.$$

Полученное выражение является дифференциальным уравнением гармонических колебаний вида $x'' + \omega_0^2 x = 0.$

Здесь $\dfrac{gsin\alpha}{L} = \omega_0^2$, где $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ – циклическая частота.

Отсюда период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{gsin\alpha}}.$$

От начала подъёма до остановки пройдет четверть периода:

$$t=\frac{1}{4}T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{gsin\alpha}}.$$

Ответ: $t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{gsin\alpha}}.$

№ 1.15 (2009). На гладкой горизонтальной плоскости лежит тонкий однородный стержень длиной $\ell=1\,м$ и массой m_1. По плоскости перпендикулярно стержню со скоростью υ=20 *м/с* скользит шарик массой $m=\frac{m_1}{3}$. Точка удара отстоит от середины стержня на расстоянии $\frac{\ell}{4}$. Найдите долю энергии, которая затрачена на работу против сил неупругой деформации.

Решение

Кинетическая энергия системы до удара $E_1=\frac{m\upsilon^2}{2}$, после удара $E_2=\frac{m_1u^2}{2}+\frac{J\omega^2}{2}$. Работа против сил неупругой деформации идет на изменение кинетической энергии системы $A = E_2 - E_1$.

Из закона сохранения импульса $m\upsilon = m_1u$ выразим скорость системы после удара: $u=\frac{m_1}{m\upsilon}=\frac{\upsilon}{3}$.

Из закона сохранения момента импульса получим угловую скорость вращения:

$$\frac{m\upsilon\ell}{4}=J\omega,$$

$$\frac{m\upsilon\ell}{4}=\frac{m_1\ell^2}{12}\omega,$$

$$\omega=\frac{3m\upsilon}{m\ell}=\frac{\upsilon}{\ell}.$$

Тогда

$$E_2=\frac{3m\upsilon^2}{9\cdot 2}+\frac{3m\ell^2\upsilon^2}{12\ell^2\cdot 2}=\frac{m\upsilon^2}{6}+\frac{m\upsilon^2}{8}=\frac{7m\upsilon^2}{24}.$$

$$E_2=\frac{3m\upsilon^2}{9\cdot 2}+\frac{3ml^2\upsilon^2}{12l^2\cdot 2}=\frac{m\upsilon^2}{6}+\frac{m\upsilon^2}{8}=\frac{7m\upsilon^2}{24}.$$

Найдем долю энергии, которая затрачена на работу против сил неупругой деформации:

$$\varepsilon=\frac{|E_2-E_1|}{E_1}=\frac{\left|\frac{7m\upsilon^2}{24}-\frac{m\upsilon^2}{2}\right|}{\frac{m\upsilon^2}{2}}=\frac{5}{12}\approx 0{,}083.$$

Ответ: $\varepsilon=\frac{5}{12}\approx 0{,}083$.

№ 1.16 (2009). Брусок находится на горизонтальной плоскости и с помощью пружины прикреплен к вертикальной стенке. В некоторый момент времени бруску толчком сообщили начальную скорость $\upsilon_0=0{,}6$ *м/с*, направленную к стенке. Наибольшее сжатие пружины составило $x_{max}=12$ *см*. Через какое время после толчка брусок окажется на максимальном удалении от стенки? Трением пренебречь.

Решение

Брусок будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

На максимальном удалении от стенки после толчка он окажется через время $t = \dfrac{3}{4}T$.

Запишем закон сохранения механической энергии $\dfrac{m\upsilon_0^2}{2} = \dfrac{kx_{max}^2}{2}$, из которого следует, что $\dfrac{m}{k} = \dfrac{x_{max}^2}{\upsilon_0^2}$.

Тогда

$$t = \frac{3}{4}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{x_{max}^2}{\upsilon_0^2}} = \frac{3}{2}\pi\,\frac{x_{max}}{\upsilon_0} = 0,9\,c.$$

Ответ: t=0,9c.

№ 1.17 (2010). На неподвижное тело массой m, находящееся на горизонтальной абсолютно гладкой плоскости, в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила, направленная вдоль горизонтальной оси Оx. На рис. 1.12 представлен график зависимости проекции F_x этой силы от времени t. Найдите модуль импульса тела в моменты времени $3t_0$ и $4t_0$.

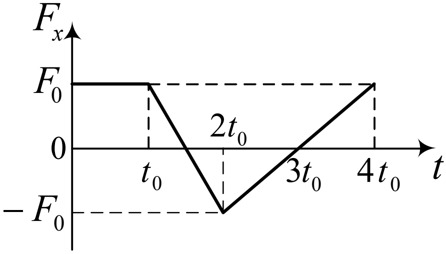

Рис. 1.12

Решение

Второй закон Ньютона позволяет записать связь между проекцией силы и изменением соответствующей проекции импульса тела:

$$\Delta p_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt.$$

При этом помним, что геометрический смысл определенного интеграла – площадь фигуры под графиком функции.

Найдем изменение проекции импульса тела за время от начала движения t_1=0 до $t_2=3t_0$:

$$\Delta p_x = p(t_2) - p(t_1) = \int_0^{3t_0} F_x dt = F_o t_0 - \frac{1}{2} F_o t_0 = \frac{1}{2} F_o t_0,$$

где $p(t_1) = 0,\ \ p(t_2 = 3t_0) = \frac{1}{2} F_o t_0$.

Аналогично для интервала времени от начала движения t_1=0 до $t_2=4t_0$:

$$\Delta p_x = p(t_2) - p(t_1) = \int_0^{4t_0} F_x dt = F_o t_0,$$

где $p(t_1) = 0,\ \ p(t_2 = 4t_0) = F_o t_0$.

Ответ: $\frac{1}{2} F_o t_0;\ F_o t_0$.

№ 1.18 (2010). На концах тонкого невесомого стержня длиной $\ell = 1\ м$ укреплены грузики с массами m_1=*160 г* и m_2=*240 г*. Стержень колеблется вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. Определите период колебаний, совершаемых стержнем для двух случаев: 1) стержень невесом; 2) масса стержня 400 г.

Решение

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\ell_c}},$$

где J – момент инерции маятника относительно точки подвеса, m – масса маятника, ℓ_c – расстояние от точки подвеса до центра масс.

В случае если стержень невесом, то $m = m_1 + m_2$;

$$J = m_1\frac{\ell^2}{4} + m_2\frac{\ell^2}{4} = (m_1 + m_2)\frac{\ell^2}{4}; \quad \ell_c = \frac{(m_2 - m_1)\ell}{2(m_1 + m_2)}.$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell^2(m_1 + m_2)(m_1 + m_2)}{4(m_1 + m_2)g(m_2 - m_1)\ell}} = \pi \text{ с}.$$

Если стержень обладает массой, то $m = m_1 + m_2 + m_3$;

$$J = m_1\frac{\ell^2}{4} + m_2\frac{\ell^2}{4} + m_3\frac{\ell^2}{12} = (3m_1 + 3m_2 + m_3)\frac{\ell^2}{12};;$$

$$\ell_c = \frac{(m_2 - m_1)\ell}{2(m_1 + m_2 + m_3)}.$$

В этом случае период равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell^2(3m_1 + 3m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)}{12(m_1 + m_2 + m_3)g(m_2 - m_1)\ell}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \text{ с}.$$

Ответ: $\pi\, c$; $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}c$.

№ 1.19 (2010). Во время сильного снегопада лыжник, бегущий по полю со скоростью υ = 20 *км/ч*, заметил, что ему в открытый рот попадает N_1 = 50 снежинок в минуту. Повернув обратно, он обнаружил, что в рот попадает N_2 = 30 снежинок в минуту. Площадь рта спортсмена S = 24 *см*^{2}, размер снежинки ℓ= 1 *см*. Определите: 1) концентрацию снежинок в воздухе; 2) оцените дальность прямой видимости в снегопад.

Решение

Пусть n –концентрация снежинок, тогда $N_1=nS(\upsilon+\upsilon_x)$, где υ_x – скорость ветра.

Исключая неизвестную скорость υ_x, получим

$$n = \frac{N_1 + N_2}{2\upsilon S} = 50 \text{ снежинок/м}^3.$$

Дальность прямой видимости в снегопад соответствует расстоянию, на котором снежинка еще не перекрывает луч зрения. Условием перекрытия луча зрения будет попадание снежинки в объем $V=S_cL$, где площадь поверхности одной снежинки $S_c\approx\ell^2$. Число снежинок в этом объеме $N=nV$=1. Тогда искомое расстояние составит

$$L = \frac{1}{nS_c} = \frac{2\upsilon S}{(N_1 + N_2)\ell^2} \approx 200 \text{ м}.$$

Ответ: 50 снежинок/м^3; 200 м.

№ 1.20 (2011). На тележке массой $m_{тел}$ = 20 кг, которая может свободно перемещаться по гладкой горизонтальной поверхности, лежит брусок массой $m_{бр}$ = 5 кг. Коэффициент трения между бруском и тележкой μ = 0,2. Брусок тянут с силой F, направленной параллельно рельсам. Найдите ускорение тележки, если сила изменяется по закону $F = ct$, где c = 4 Н/с. Построить график зависимости ускорения тележки от времени.

Решение

1. Покажем силы, действующие на брусок и тележку (рис. 1.13). Брусок будет оставаться в покое относительно тележки в течение времени $t \le t_{кр}$ пока сила трения покоя не достигнет максимального значения $F_{тр} < F_{тр\ покоя\ max}$. В этом случае ускорения тел равны $a_{бр} = a_{тел}$ и уравнения движения примут вид $m_{тел} a_{тел} = F_{тр}$; $m_{бр} a_{бр} = F - F_{тр}$.

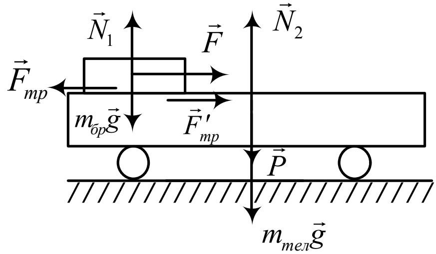

Рис. 1.13

Решая совместно полученные уравнения, имеем

$$a_{тел} = a_{бр} = \frac{F}{m_{бр} + m_{тел}} = \frac{ct}{m_{бр} + m_{тел}},$$

$$F_{кр} = ct_{кр} = \mu m_{бр} g \frac{m_{бр} + m_{тел}}{m_{тел}},$$

$$t_{кр} = \mu m_{бр} g \frac{m_{бр} + m_{тел}}{c m_{тел}} \approx 3с.$$

2) Как только сила трения покоя достигнет максимального значения, брусок начнет скользить по тележке. Тележка будет двигаться под действием этой силы, и ее ускорение составит

$$a_{тел} = \frac{F_{тр}}{m_{тел}} = \frac{\mu m_{бр} g}{m_{тел}} = 0{,}5 м/с^2.$$

Таким образом, ускорение тележки линейно возрастает от 0 до 0,5 м/с^2 в течение времени от 0 до 3 с; при дальнейшем движении ускорение остается постоянным (рис.1.14)

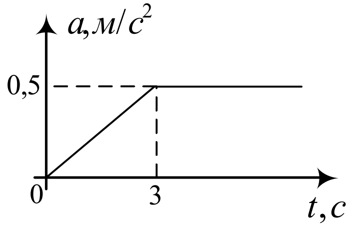

Рис. 1.14

Ответ: график зависимости ускорения тележки от времени показан на рис. 1.14.

№ 1.21 (2011). На рис. 1.15 схематически изображен шарикоподшипник в разрезе. Радиусы внешнего и внутреннего колец равны R_1 и R_2, а их угловые скорости ω_1 и ω_2 соответственно. Проскальзывание между кольцами и шариками отсутствует. Найдите угловую скорость вращения шарика вокруг оси симметрии подшипника.

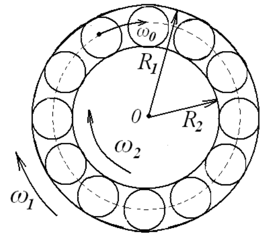

Рис. 1.15

Решение

Запишем линейные скорости точек A и B шарика в местах касания с внешней и внутренней поверхностью колец подшипника соответственно (рис. 1.16). Согласно закону сложения скоростей имеем

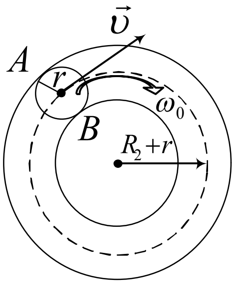

Рис. 1.16

$$\upsilon_A = \upsilon + \omega r;$$
$$\upsilon_B = \upsilon - \omega r,$$

где $r = \dfrac{R_1 - R_2}{2}$ – радиус шарика.

Если нет проскальзывания, то линейные скорости этих точек по модулю равны линейной скорости центра шарика $\upsilon_A = \upsilon_B = \upsilon$.

Тогда, можно переписать

$$\upsilon = \upsilon + \omega r = \omega_1 R_1;$$
$$\upsilon = \upsilon - \omega r = \omega_2 R_2.$$

Отсюда

$$\upsilon = \frac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2}{2}.$$

Угловая скорость вращения шарика вокруг оси симметрии подшипника составит

$$\omega_0 = \frac{\upsilon}{R_2 + r} = \frac{2\upsilon}{R_1 + R_2} = \frac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Ответ: $\omega_0 = \dfrac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2}{R_1 + R_2}$.

№ 1.21 (2011). Кусок сыра бросили на весы. Три последовательных крайних положения стрелки весов были такие: $A_1 = 560$ г, $A_2 = 440$ г, $A_3 = 520$ г. Какова действительная масса m куска сыра?

Решение

Чашка весов совершает затухающие колебания около положения равновесия, соответствующего действительной массе взвешиваемого куска сыра (рис.1.17). Амплитуда колебаний убывает по закону $A = A_0 e^{-\beta t}$, где начальная амплитуда колебания равна $A_0 = 560 - m$.

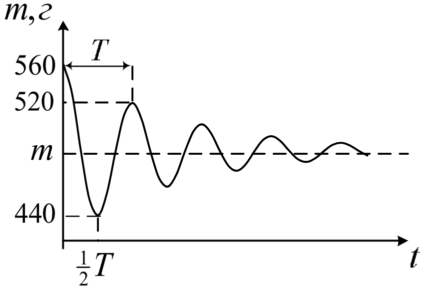

Рис. 1.17

Тогда для следующих двух известных положений можно записать:

$$520 - m = (560 - m)e^{-\beta T},$$

$$m - 440 = (560 - m)e^{-\beta \frac{T}{2}}.$$

Решая совместно полученные уравнения

$$\frac{520 - m}{(560 - m)} = e^{-\beta T},$$

$$\frac{m - 440}{(560 - m)} = e^{-\beta \frac{T}{2}},$$

получим действительную массу куска сыра:

$$m = 488 \text{ г.}$$

Ответ: 488 г.

№ 1.22 (2012). Цилиндр радиусом R вращается между двумя параллельными рейками (рис. 1.18), движущимися в одну сторону со скоростями υ_1 и υ_2 (скольжение отсутствует). Найдите угловую скорость вращения и скорость его центра.

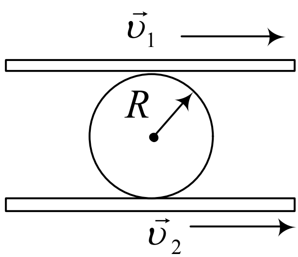

Рис. 1.18

Решение

Скорость точки цилиндра касающейся верхней рейки, с одной стороны, складывается из скорости центра цилиндра и линейной скорости $\upsilon + \omega R$. С другой стороны, так как нет проскальзывания, равна скорости движения рейки υ_1, поэтому можно записать $\upsilon_1 = \upsilon + \omega R$. Рассуждая аналогично и учитывая направление линейной скорости, для точки цилиндра, касающейся нижней рейки, получим $\upsilon_2 = \upsilon - \omega R$.

Отсюда скорость центра цилиндра и угловая скорость его вращения

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}; \quad \omega = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2R}.$$

Ответ: $\upsilon = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}; \quad \omega = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2R}.$

№ 1.22 (2012). Стержень массой M и длиной L, подвешенный за один из его концов, отклонили на угол 90° и отпустили. Вблизи положения равновесия он неупруго соударяется с математическим маятником массой m и длиной $L/2$. Определите угловую скорость системы после соударения.

Решение

Закон сохранения энергии для стержня имеет вид

$$MgL = \frac{ML^2}{3} \cdot \frac{\omega^2}{2} + Mg\frac{L}{2}.$$

Отсюда найдем угловую скорость стержня в момент непосредственно перед ударом:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}.$$

Закон сохранения момента импульса относительно оси вращения для системы стержень – математический маятник:

$J\omega = (J_1 + J_2)\omega'$, где ω' - угловая скорость системы после соударения.

$$\frac{1}{3}ML^2 \cdot \sqrt{\frac{3g}{L}} = \left(\frac{1}{3}ML^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\omega'.$$

Отсюда

$$\omega' = \sqrt{\frac{3g}{L}} \cdot \frac{4M}{4M + 3m}.$$

Ответ: $\omega' = \sqrt{\frac{3g}{L}} \cdot \frac{4M}{4M + 3m}.$

№ 1.23 (2012). На маленькой планете проводится эксперимент по проверке теории колебаний. Суть эксперимента такова: измеряется период T малых колебаний математического маятника, длина нити ℓ которого равна радиусу планеты, а точка подвеса маятника отстоит от центра планеты на расстоянии, которое чуть больше ее удвоенного радиуса. Найдите период, если ускорение свободного падения вблизи поверхности планеты равно g. Вращением планеты вокруг собственной оси и массой нити пренебречь. Атмосфера на планете отсутствует.

Решение

Выведем маятник из положения равновесия на малый угол α (рис. 1.19). Сила тяжести составляет с нитью угол 2α. Уравнение движения имеет вид:

$$J\alpha'' = -mg\ell \sin 2\alpha.$$

При малых углах

$$J\alpha'' = -mg\ell 2\alpha,$$

где $J = m\ell^2 -$ момент инерции маятника.

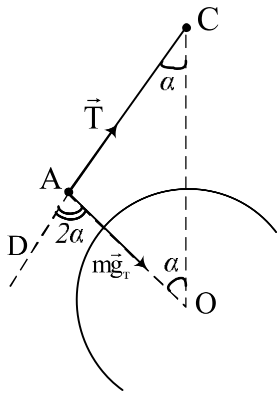

Рис. 1.19

После упрощения получим

$$\alpha'' + \frac{2g}{\ell}\alpha = 0,$$

здесь $\frac{2g}{\ell} = \omega_0^2$. Так как $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, то период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}.$$

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}$.

№ 1.24 (2013). Муха, пролетая параллельно поверхности стола со скоростью υ = 1 м/с на высоте H = 2 м, заметила в некоторый момент времени точно под собой каплю мёда. При помощи крыльев муха может развивать в любом направлении ускорение, не превышающее a=1 м/с^2. За какое минимальное время муха сможет достигнуть мёда? Какое ускорение она должна для этого развить, и в каком направлении? Силой тяжести пренебречь.

Решение

Рассмотрим движение мухи в системе отсчета, имеющей горизонтальную скорость υ = 1 *м/с* относительно стола в направлении движения мухи. Тогда в момент времени, когда муха заметила каплю меда, ее скорость относительно этой системы отсчета равна нулю, а капля меда движется со скорость υ = 1 *м/с* в противоположную сторону.

Чтобы добраться к «месту встречи» с каплей меда за минимальное время, муха должна лететь с максимальным ускорением $\vec{a}$ по прямой в выбранной системе отсчета (рис. 1.20). Расстояние, которое нужно ей преодолеть $L = \frac{at^2}{2}$.

При этом мед переместится на расстояние $S = \upsilon t$.

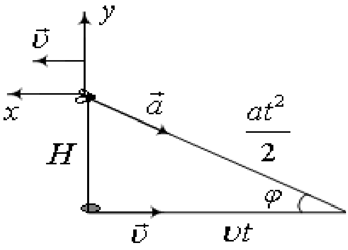

Рис. 1.20

По теореме Пифагора запишем соотношение для сторон получившегося треугольника:

$$\left(\frac{at^2}{2}\right)^2 = (\upsilon t)^2 + H^2.$$

Решим биквадратное уравнение, для этого введем новую переменную $z = t^2$:

$$\frac{a^2z^2}{4} = \upsilon^2 z + H^2 \text{ или}$$

$$a^2z^2 - 4\upsilon^2 z - 4a^2H^2 = 0\,.$$

Решим квадратное уравнение:

$$D = 16\upsilon^2 + 16a^2H^2 = 4^2(\upsilon^2 + a^2H^2),$$

$$z = \frac{4\upsilon^2 \pm \sqrt{4^2(\upsilon^2 + a^2H^2)}}{2a^2} = \frac{4(\upsilon^2 \pm \sqrt{(\upsilon^2 + a^2H^2)})}{2a^2} =$$

$$= \frac{2(\upsilon^2 \pm \sqrt{(\upsilon^2 + a^2H^2)})}{a^2}.$$

Величина $t^2 = z$ не может быть отрицательной, поэтому искомое минимальное время полета мухи

$$t = \frac{\sqrt{2(\upsilon^2 + \sqrt{\upsilon^4 + H^2a^2}}}{a} = 2{,}54\ c.$$

При этом вектор ускорения должен быть направлен под углом $tg\varphi = \frac{H}{\upsilon t} = 0{,}79$, соответственно, угол равен $\varphi = arctg\,0{,}79 \approx 38^\circ$.

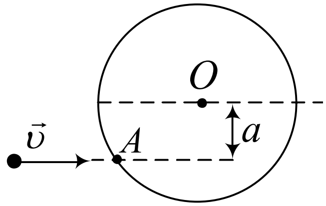

Рис. 1.21

№ 1.25 (2013). Однородный диск массой M = 0,2 кг и диусом R = 20 см может свободно вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O (рис. 1.21). В точку A на образующей диска попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально со скоростью υ =10 м/с, и прилипает к его поверхности. Масса шарика m = 10 г. Расстояние a = 2/3R. Определите угловую скорость диска в начальный момент времени.

Решение

Запишем закон сохранения момента импульса для неупругого соударения шарика и диска:

$$m\upsilon\frac{2}{3}R = (\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega \cdot$$

Откуда угловая скорость диска в начальный момент времени

$$\omega = \frac{m\upsilon\frac{2}{3}R}{(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)} = \frac{4m\upsilon}{3(M+2m)R} \approx 3\,рад/с.$$

Ответ: $\omega \approx 3\,рад/с.$

№ 1.26 (2014). Небольшое тело движется по окружности радиуса R со скоростью, которая изменяется со временем по закону $\upsilon = kt$. Найдите зависимость полного ускорения от времени.

Решение

Полное ускорение равно векторной сумме нормального и тангенциального ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Модуль тангенциального ускорения равен производной модуля скорости по времени $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = k$; нормальное ускорение равно $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{r} = \dfrac{k^2t^2}{r}$.

Так как нормальное и тангенциальное ускорение взаимно перпендикулярны, то модуль полного ускорения равен

$$a_{полн} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{k^2 + \frac{k^4t^4}{r^2}}.$$

Ответ: $a_{полн} = \sqrt{k^2 + \dfrac{k^4t^4}{r^2}}$.

№ 1.27 (2014). Определите линейную скорость υ центра кольца, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой H=1 м.

Решение

Закон сохранения механической энергии для кольца, скатившегося с наклонной плоскости примет вид

$$mgH = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где $J = mR^2$ – момент инерции кольца, $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$ – угловая скорость.

Выполним подстановку и упростим:

$$mgH = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mR^2\dfrac{\upsilon^2}{R^2}}{2} = m\upsilon^2.$$

Откуда скорость центра кольца к моменту спуска

$$\upsilon = \sqrt{gH} \approx 3{,}2\ м/с.$$

Ответ: $\upsilon \approx 3{,}2\ м/с.$

№ 1.28 (2014). Спортсмен-ныряльщик массой m=80 кг прыгает в воду, набрав полные лёгкие (V_0=6 литров) воздуха. При этом объём его тела составляет V=82 литра. С какой максимальной глубины он сможет всплыть, не совершая никаких движений?

Решение

На глубине h_{max} средняя плотность человека должна сравняться с плотностью воды. Объем человека должен стать

$$V_ч = \frac{m}{\rho} = \frac{80}{1000} = 80 \cdot 10^{-3}\ м^3 = 80\ л.$$

Уменьшение объема на $\Delta V = V - V_ч = 82 - 80 = 2\ л$ происходит за счет сжатия воздуха в легких.

Таким образом, объем воздуха в легких на данной глубине станет равным $V_0' = V_0 - \Delta V = 4\ л.$

Это сжатие происходит изотермически по закону Бойля-Мариотта:

$$p_0 V_0 = (p_0 + \rho g h) V_0',$$

где p_0=10^5 Па – атмосферное давление.

Откуда максимальная глубина, с которой ныряльщик сможет всплыть, не совершая никаких движений, составит

$$h = \frac{p_0}{\rho g}\left(\frac{V_0}{V_0'} - 1\right) \approx 5 м.$$

Ответ: $h \approx 5\ м.$

№ 1.29. (2014). Недавние исследования показали, что в северных широтах скорость звука возрастает с глубиной по закону $c(z)=c_0(1+az)$, где c_0 - скорость звука у поверхности воды, z - глубина, a - постоянная величина. На какую максимальную глубину проникнет в такой среде звук, излученный направленным излучателем вблизи поверхности воды под углом α к вертикали? Закон преломления звуковых волн полностью аналогичен закону преломления света.

Решение

Закон преломления волн при переходе из одного слоя в другой, в пределах которого скорость звука можно считать постоянной: $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}=\frac{c_1}{c_2}$, где c_1, c_2 –скорости звука в соседних слоях, φ_1, φ_2 –углы, под которыми звук выходит из первого слоя и входит во второй.

Для следующей пары соседних слоев: $\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_3}=\frac{c_2}{c_3}$ и т.д.

Перемножая такие равенства для последовательно расположенных слоев, получаем:

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_n}=\frac{c_1}{c_n}.$$

Пусть звук проникает в океане на максимальную глубину $z=H$. Тогда

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi(H)}=\frac{c_0}{c(H)},$$

где $\varphi(H)$ – угол, под которым звук входит в самый глубоко лежащий слой.

Условие, при котором звук не проникнет глубже $\varphi(H)=\pi/2$. Тогда

$$\sin\alpha=\frac{c_0}{c_0(1+aH)}.$$

Откуда максимальная глубина, на которую проникнет в такой среде звук, излученный направленным излучателем вблизи поверхности воды под углом α к вертикали:

$$H = \frac{1 - \sin\alpha}{a\sin\alpha}.$$

Ответ: $H = \dfrac{1 - \sin\alpha}{a\sin\alpha}$.

№1.30 (2015) Колесо радиусом R = 1 м катится без проскальзывания по горизонтальной дороге с ускорением a = 4 м/с^2. Каким по модулю будет ускорение точки A (рис. 1.22) относительно неподвижной системы отсчета в тот момент времени, когда скорость центра колеса равна $\upsilon = 1$ м/с?

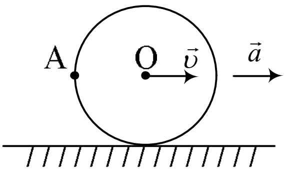

Рис. 1.22

Решение

В поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром масс колеса, все точки на ободе движутся по окружности радиусом R. Так как качение колеса происходит без проскальзывания, то модуль тангенциального ускорения точек на ободе $a_\tau = a$, а модуль нормального ускорения этих точек $a_n = \upsilon^2 / R$ (рис. 1.23). При переходе к неподвижной системе отсчета к вектору ускорения каждой точки нужно прибавить вектор ускорения центра колеса. Тогда полное ускорение точки A:

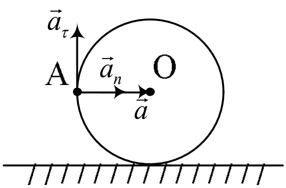

Рис. 1.23

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + (a_n + a)^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R} + a\right)^2} \approx 6{,}4\ м/с^2.$$

Ответ: a = 6,4 *м/с^2*.

№ 1.31. (2015). Обруч массой *m* висит на гвозде, вбитом в стену, и совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. На нижнюю точку обруча села маленькая птичка массой m_0 (рис. 1.24). Как изменился период колебаний обруча?

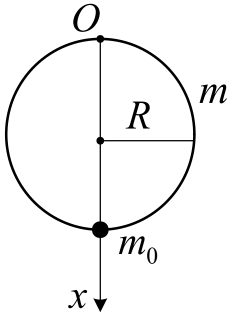

Рис. 1.24

Решение

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\ell_c}},$$

где J – момент инерции маятника, m – масса маятника, ℓ_c - расстояние от точки подвеса до центра масс системы.

Момент инерции обруча относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку подвеса, согласно теореме Штейнера:

$$J_1 = J_c + md^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$$

Расстояние ℓ_c равно радиусу R. Тогда период колебаний обруча без птички

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Найдем период колебаний обруча, когда на его нижнюю точку села маленькая птичка массой m_0. Момент инерции птички относительно оси проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку подвеса,

$$J_2 = m_0(2R)^2 = 4m_0R^2,$$

тогда суммарный момент инерции системы

$$J = J_1 + J_2,$$

$$J = 2mR^2 + 4m_0R^2 = 2R^2(m + 2m_0).$$

Положение центра масс относительно точки подвеса найдем по формуле

$$\ell_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

где $x_1 = R$ и $x_2=2R$ – координаты центров масс обруча и птички соответственно.

Тогда

$$\ell_c = \frac{Rm + 2Rm_0}{m + m_0} = R\left(\frac{m + 2m_0}{m + m_0}\right).$$

Учитывая, что масса маятника стала равна сумме масс обруча и птички, а также полученные выражения для J и ℓ_c, запишем период колебаний системы:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R^2(m+2m_0)}{(m_1+m_2)gR\left(\frac{m+2m_0}{m+m_0}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Таким образом, период колебаний обруча не изменился: $T=T_0$.

Ответ: период колебаний обруча не изменился $T=T_0$.

№ 1.32 (2016). На поверхности гладкого кругового конуса с углом при вершине $2\alpha = 120°$ покоится шарик, прикрепленный нерастяжимой нитью длиной ℓ=20 *см* к вершине конуса, как показано на рис. 1.25. Во сколько раз изменится сила натяжения нити, если шарику сообщить скорость $\upsilon = 50$ *см/с*, направленную перпендикулярно нити вдоль боковой поверхности конуса. Считать, что при движении шарик не отрывается от поверхности конуса, трение не учитывать. Ускорение свободного падения принять $g = 10 м/с^2$.

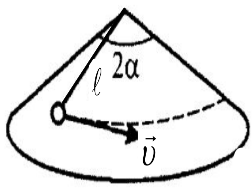

Рис. 1.25

Решение

Для решения задачи воспользуемся неподвижной относительно земли системой отсчета, считая ее инерциальной. Выберем систему координат, направив координатные оси так, как показано на рис. 1.26.

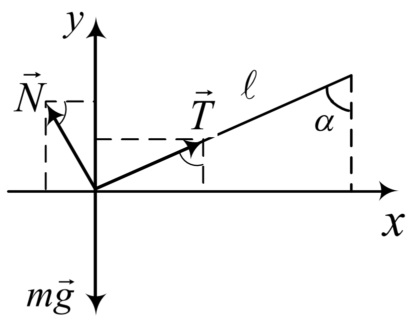

Рис. 1.26

На шарик действуют сила тяжести, сила реакции опоры и сила натяжения нити. В равновесии векторная сумма приложенных сил равна нулю:

$$m\vec{g}+\vec{N}+\vec{T}=0.$$

Проецируя на координатные оси, получим

$$T\,sin\alpha - N\,cos\,\alpha = 0,\;\; T\,cos\,\alpha + N\,sin\,\alpha - mg = 0.$$

Откуда $T = mg\,cos\,\alpha.$

Если шарику сообщить скорость υ, он начнет двигаться по окружности радиусом $R=\ell\,sin\alpha$ и приобретет центростремительное ускорение $a_ц=\dfrac{\upsilon^2}{R}$ (рис. 1.27).

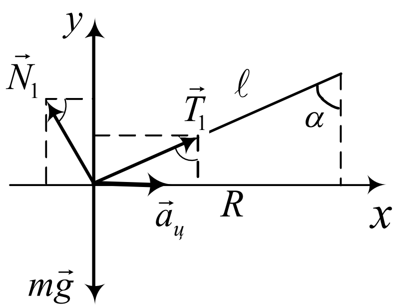

Рис. 1.27

Тогда по второму закону Ньютона

$$m\vec{g}+\vec{N}+\vec{T}=m\vec{a}_ц\,.$$

Проецируя на координатные оси, получаем

$$T_1 \sin\alpha - N_1 \cos\alpha = m\frac{\upsilon^2}{R},$$

$$T_1 \cos\alpha + N_1 \sin\alpha - mg = 0.$$

Отсюда $T_1 = m\left(g\cos\alpha - \dfrac{\upsilon^2}{\ell}\right)$ и окончательно

$$\frac{T_1}{T} = \frac{m\left(g\,cos\,\alpha + \dfrac{\upsilon^2}{\ell}\right)}{mg\,cos\,\alpha} = 1 + \frac{\upsilon^2}{g\ell\,cos\,\alpha} = 1,25.$$

Ответ: 1,25.

№ 1.33 (2015). Тонкий стержень массой $6m$ и длиной ℓ подвешен шарнирно за один конец. В положении равновесия в его середину попадает пуля массой m, летящая горизонтально (рис. 1.28). С какой минимальной скоростью должна лететь пуля, чтобы стержень сделал полный оборот?

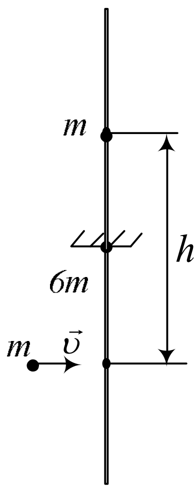

Рис. 1.28

Решение

Система соударяющихся тел является замкнутой, следовательно, момент импульса системы тел при соударении изменяться не будет $L_1 = L_2$.

Начальный момент импульса системы равен моменту импульса пули $L_1 = m\upsilon\dfrac{\ell}{2}$, момент импульса после соударения равен суммарному моменту импульса стержня с пулей $L_1 = (J_1 + J_2)\omega$, где J_1 – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его край перпендикулярно стержню. По теореме Штейнера он равен $J_1 = \frac{1}{12}6m\ell^2 + 6m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 2m\ell^2$; $J_2 = m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$ - момент инерции пули; $\omega -$ угловая скорость.

Приравнивая моменты импульса, получим

$$m\upsilon\frac{\ell}{2} = \frac{9}{4}m\ell^2\omega\ , \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\upsilon}{9\ell}.$$

После соударения система движется только под действием потенциальных сил, значит, выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{(J_1 + J_2)\omega^2}{2} = (m + 6m)gh\,,$$

$$\frac{\frac{9}{4}m\ell^2\left(\frac{2\upsilon}{9\ell}\right)^2}{2} = 7mg\ell\ .$$

Откуда скорость пули, при которой стержень сделает полный поворот, $\upsilon = 3\sqrt{14\ell g}$.

Ответ: $\upsilon = 3\sqrt{14\ell g}$.

№ 1.34 (2017). За какое время шар радиусом R и массой m скатится с наклонной плоскости высотой h и углом α при основании рис. 1.29). Шар катится без проскальзывания.

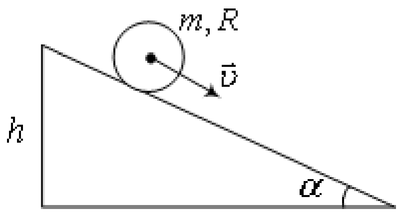

Рис. 1.29

Решение

Запишем закон сохранения энергии:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где $J = \frac{2}{5}mR^2$ – момент инерции шара, $\omega = \frac{\upsilon}{R}$ – угловая скорость. Если проскальзывания нет, то линейная скорость точек на поверхности шара равна по модулю скорости центра масс.

После подстановки выражения для момента инерции и угловой скорости получим скорость шара в конце спуска:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{\frac{2}{5}mR^2\,\frac{\upsilon}{R^2}^2}{2} = \frac{7m\upsilon^2}{10};$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{10}{7}gh}\,.$$

Из уравнения равноускоренного движения получим время спуска

$$S = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}t = \frac{\upsilon t}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2S}{\upsilon}, \qquad \text{где } S = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Таким образом, время спуска составит

$$t = \frac{2S}{\upsilon} = \frac{2h}{\sin\alpha\sqrt{\frac{10}{7}gh}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{14h}{5g}}.$$

Ответ: $t = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{14h}{5g}}.$

№ 1.35 (2017). У рыбака крупная рыба оторвала снасти, и он отошел за новыми грузилами и поплавком. Его удочка, оставленная без присмотра, оказалась на плаву, частично погрузившись в воду, другим концом опираясь на его стул (рис. 1.30). Определите, какая часть удочки будет под водой, если плотность материала 437,5 кг/м^3. Считать удочку прямой однородной тонкой палочкой.

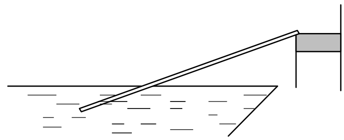

Рис. 1.30

Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на удочку (рис. 1.31).

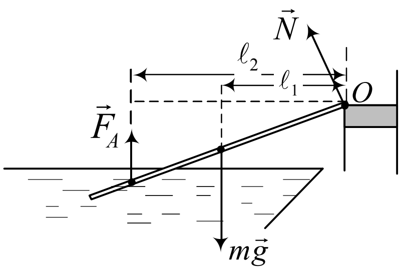

Рис.1.31

Запишем условие равновесия относительно точки O:.

$$mg\ell_1 = F_A\ell_2,$$

где $F_A = \rho_в g V_{п.т.}$ − сила Архимеда, приложенная к середине подводной части удочки.

Так как под водой находится n-я часть удочки, то объем погруженной части

$$V_{п.т.} = \frac{1}{n}V = \frac{1}{n}\cdot\frac{m}{\rho}.$$

Из подобия треугольников найдем отношение плечей указанных сил:

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{\left(\frac{2n-1}{2n}\right)L}{\frac{1}{2}L} = \frac{(2n-1)}{n},$$

здесь L – длина удочки.

Тогда, используя полученные выражения, получим

$$mg\ell_1 = \rho_в g \frac{1}{n} \cdot \frac{m}{\rho} \cdot \frac{(2n-1)}{n} \ell_1,$$

отсюда

$$\rho n^2 = \rho_в (2n-1).$$

Получим квадратное уравнение:

$$\frac{\rho}{\rho_в} n^2 - 4n + 2 = 0.$$

Корень этого уравнения, имеющий физический смысл, n=4. Таким образом, под водой будет находиться четвертая часть удочки.

Ответ: под водой будет находиться четвертая часть удочки.

№ 1.36 (2018). Космический челнок с Марса массой 5 тонн приблизился к Земле на расстояние двух земных радиусов. Для посадочного маневра были включены реактивные сопла челнока, что позволило удерживать прежнюю орбиту на утроенной скорости некоторое время. Какое количество газов ежесекундно выбрасывает двигатель для этого маневра при истечении топлива из двигателя со скоростью 2 *км/с*?

Решение

Движение тела переменной массы описывается уравнением Мещерского:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{тяг} + \vec{u}\frac{\Delta m}{\Delta t},$$

где $a = a_ц = \dfrac{\upsilon^2}{R}$ – ускорение челнока на орбите, $\vec{F}_{тяг}$ – сила тяготения со стороны Марса, u – скорость истечения топлива, $\vec{u}\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ – реактивная сила.

До маневрирования реактивная сила была равна нулю, так как двигатели не были включены. Тогда уравнение Мещерского примет вид: $m\dfrac{\upsilon^2}{R} = F_{тяг}$.

Силу тяготения на высоте орбиты марсианского челнока найдем согласно закону Всемирного тяготения:

$$F_{тяг} = G\frac{Mm}{R^2} = G\frac{Mm}{(2R_з)^2} = G\frac{Mm}{4R_з^2} = \frac{mg}{4}.$$

Следовательно

$$m\frac{\upsilon^2}{R} = \frac{mg}{4}.$$

После маневрирования скорость челнока утроилась, что привело к увеличению ускорения, и тогда

$$ma_{ц2} = m\frac{(3\upsilon)^2}{R} = m\frac{9\upsilon^2}{R} = \frac{9mg}{4}.$$

Так как во время маневрирования двигатели работали, то уравнение Мещерского примет вид:

$$m\frac{9\upsilon^2}{R} = \frac{mg}{4} + u\frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Решая полученное уравнение, получим:

$$9\frac{mg}{4}=\frac{mg}{4}+u\frac{\Delta m}{\Delta t}; \quad 8\frac{mg}{4}=u\frac{\Delta m}{\Delta t};$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{2mg}{u}=50\ кг/с.$$

Ответ: 50 кг/с.

№ 1.37 (2018). Новогодний елочный шарик заполнен фосфоресцирующим гелем и вращается на елочке с постоянной угловой скоростью ω_0. Шарик поймал котенок и сразу же отпустил. Угловая скорость вращения елочного шарика стала в 2 раза меньше. Найдите отношение внешнего R_2 и внутреннего радиусов R_1 елочного шарика, если стекло плотнее светящегося геля в 2 раза.

Решение

Вычислим момент инерции «гелевого» шара:

$$J_{геля}=\frac{2}{5}m_{геля}R_1^2=\frac{2}{5}\rho_{геля}\frac{4}{3}\pi R_1^3R_1^2=\frac{8}{15}\rho_{геля}\frac{4}{3}\pi R_1^5.$$

Для определения момента инерции «стеклянного слоя» шара. Для этого вычтем из момента инерции стеклянного шара радиусом R_2 момент инерции шара радиусом R_1:

$$J_{стек}=\frac{8}{15}\rho_{стек}\pi(R_2^5-R_1^5)=\frac{8}{15}\cdot 2\rho_{геля}\pi(R_2^5-R_1^5)=\frac{16}{15}\cdot\rho_{геля}\pi(R_2^5-R_1^5).$$

Момент импульса пойманного шарика (котенок остановил стеклянный слой, но гель вращался по инерции с угловой скоростью ω_0) равен моменту импульса вращающегося шарика с гелем уже с меньшей скоростью, после того как его отпустил котенок:

$$\omega_0 J_{геля}=\frac{1}{2}\omega_0(J_{геля}+J_{стек}).$$

$$\omega_0 \frac{8}{15}\rho_{геля}\pi R_1^5 = \frac{1}{2}\omega_0\left(\frac{16}{15}\cdot\rho_{геля}\pi(R_2^5 - R_1^5) + \frac{8}{15}\rho_{геля}\pi R_1^5\right).$$

После сокращения одинаковых множителей

$$R_1^5 = \frac{1}{2}(2\cdot(R_2^5 - R_1^5) + R_1^5),$$

раскроем скобки и упростим

$$R_1^5 = R_2^5 - R_1^5 + \frac{1}{2}R_1^5; \quad R_1^5 + R_1^5 - \frac{1}{2}R_1^5 = R_2^5; \quad \frac{3}{2}R_1^5 = R_2^5.$$

Окончательно $R_2 = \sqrt[5]{1,5R_1} = 1,084R_1$.

Ответ: $R_2 = \sqrt[5]{1,5R_1} = 1,084R_1$.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

И ТЕРМОДИНАМИКА

№ 2.1 (2003). Найдите массу воздуха, находящегося между двойными рамами окна. Считайте, что температура воздуха там меняется по линейному закону от наружной $T_н$ до внутренней $T_{вн}$, а давление всюду одно и то же и равно наружному p_0. Толщина воздушной прослойки L, площадь рамы S.

Решение

Температура в тонком сечении воздушной прослойки толщиной dx, находящейся на расстоянии x от наружного стекла: $T_x = T_н + \dfrac{T_{вн} - T_н}{L} x$.

Запишем уравнение состояния идеального газа для малого объема воздуха $dV = Sdx$, заключенного в рассматриваемой воздушной прослойке, $p_0 Sdx = \dfrac{dm}{M} RT_x$.

Откуда $dm = \dfrac{MSdx}{RT_x}$.

Теперь массу воздуха, находящегося между двойными рамами окна, найдем путем интегрирования:

$$m = \int dm = \int_0^L \frac{MSdx}{RT_x} = \int_0^L \frac{MSdx}{R\left(T_н + \dfrac{T_{вн} - T_н}{L} x\right)} = \frac{Mp_0 SL}{R\left(T_{вн} - T_н\right)} ln \frac{T_{вн}}{T_н}.$$

Ответ: $m = \dfrac{Mp_0 SL}{R\left(T_{вн} - T_н\right)} ln \dfrac{T_{вн}}{T_н}$.

№ 2.2 (2003). Горный хребет омывается адиабатически влажным воздухом (рис. 2.1). Давление воздуха, измеренное

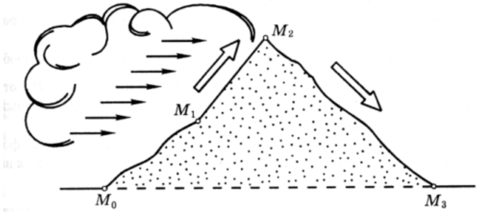

Рис. 2.1

метеорологическими станциями M_0 и M_3, равно 100 кПа. Температура воздуха в точке M_0 составляет +20°С. Когда воздух поднимается, при давлении 84,5 кПа начинается образование облаков. Определите температуру T на уровне нижней границы облаков. На какой высоте над станцией M_0 расположена нижняя граница облаков? Считать, что плотность воздуха убывает линейно с высотой.

Решение

Будем считать воздух идеальным газом и пренебрежем влиянием водяного пара.

Пусть точка M_1 соответствует высоте, на которой расположена нижняя граница облаков.

Учитывая адиабатический характер процесса, можно записать уравнение, связывающее параметры воздуха у подножия холма и на искомой высоте:

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\gamma},$$

где $\gamma = 1,4$ – показатель адиабаты воздуха.

Или, учитывая связь между параметрами воздуха в двух состояниях $\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$, можно переписать в виде

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}.$$

Искомая температура на уровне нижней границы облаков составит

$$T_1 = T_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 279{,}2\ \text{К}.$$

Значения плотности воздуха у подножия холма и на высоте h_1 найдем с помощью уравнения состояния идеального газа $\rho = \dfrac{pM}{RT}$, где $M=0{,}029$ кг/моль – молярная масса воздуха.

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0} = 1{,}191\frac{кг}{м^3};\ \rho_1 = \frac{p_1 M}{RT_1} = 1{,}056\frac{кг}{м^3}.$$

Плотность воздуха с высотой убывает линейно, поэтому средняя плотность воздуха может быть определена как среднее арифметическое $\bar{\rho} = \dfrac{\rho_0 + \rho_1}{2} = 1{,}124\ \dfrac{кг}{м^3}$. Статическое давление столба воздуха высотой h_1 составит

$$p = p_0 - p_1 = \bar{\rho} g h_1,\ \text{где } g=9{,}8\ \text{м/с}^2.$$

Высота, на которой расположена нижняя граница облаков,

$$h_1 = \frac{p_0 - p_1}{\bar{\rho} g} \approx 1407\ м.$$

Ответ: $T_1 = 279{,}2\ К$; $h_1 \approx 1407\ м$.

№ 2.3 (2006). Для достижения высокого вакуума в сосудах газ иногда вымораживают, охлаждая одну из стенок сосуда. Пусть в сферическом сосуде радиусом 10 *см* находится воздух при нормальном давлении. Сосуд имеет комнатную температуру, за исключением небольшой области в 1 *см*^{2}, температура которой равна температуре жидкого азота. Оцените, за какое время давление в сосуде уменьшится на *5 %*, считая, что каждая молекула, которая сталкивается с охлаждённой поверхностью, остаётся на ней. Среднюю скорость движения молекул принять равной 500 м/с.

Решение

На охлаждаемую поверхность за *t* с попадает $N = S\upsilon tn$ молекул. Из-за этого число молекул в единице объема изменяется на $\Delta n = \frac{N}{V} = \frac{S\upsilon tn}{V}$. Тогда $\frac{\Delta n}{n} = \frac{S\upsilon t}{V}$. Так как давление газа прямо пропорционально числу молекул, то $\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta p}{p} = 0{,}05.$

Время, за которое давление уменьшится на *5 %,* равно

$$t = \frac{0{,}05V}{S\upsilon} = \frac{0{,}05 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{S\upsilon} = 0{,}004\ c.$$

Ответ: $t = 0{,}004\ c$.

№ 2.4 (2009). Воздушный шар наполняется горячим воздухом при нормальном атмосферном давлении. Абсолютная температура *T* горячего воздуха в 2 раза больше температуры T_0 окружающего воздуха. При каком отношении массы оболочки к массе наполняющего ее газа шар начнет подниматься? Оболочка шара нерастяжима и имеет в нижней части небольшое отверстие.

Решение

Условие воздухоплавания $F_A \geq Mg + mg$. Подставляя выражения для выталкивающей силы, получим

$$\rho_0 gV \geq (M + m)g,\ \rho_0 V \geq (M + m),$$

где ρ_0 – плотность окружающего воздуха.

Уравнение состояния идеального газа $pV = \frac{m}{M}RT$. Получим выражение для плотности окружающего воздуха $\rho_0 = \frac{M_{возд}p}{RT_0}$, а также массы газа внутри шара $m = \frac{M_{возд}pV}{RT}$.

$$\frac{M_{возд}pV}{RT_0} = M + \frac{M_{возд}pV}{RT}.$$

Откуда масса оболочки равна

$$M = \frac{M_{возд}pV}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) = \frac{M_{возд}pV}{2RT_0}.$$

Чтобы шар начал подниматься, отношение массы оболочки к массе наполняющего ее газа должно быть равным

$$\frac{M}{m} = \frac{M_{возд}pV}{2RT_0} : \frac{M_{возд}pV}{RT} = \frac{T}{2T_0} = 1.$$

Ответ: $\frac{M}{m} = 1$.

№ 2.5 (2013). В сосуде объёмом V = 1 л находится ν =1 моль азота при давлении p = 10^5 Па. Азот медленно откачивают, поддерживая температуру сосуда неизменной. Какую массу азота придётся откачать к тому моменту, когда давление в сосуде упадёт вдвое? Температура кипения азота t = -196 °C, молярная масса азота M = 28 г/моль.

Решение

Начальная масса азота в сосуде равна $m_0 = \nu M = 28$ г.

Значительная часть газа в указанных условиях находится в жидком состоянии, остальная часть − насыщенный пар.

Уравнение состояния пара

$$pV = \frac{m_п}{M}RT,$$

где m_n – масса пара, создающего давление 10^5 Па.

Отсюда

$$m_n = \frac{pVM}{RT} = 4{,}4 \text{ г}.$$

Для того, чтобы давление упало вдвое, нужно «откачать» всю жидкость (она испаряется при откачивании паров газа) и оставить в сосуде $m_n/2$=2,2 г газа. Всего следует откачать

$$\Delta m = m_0 - m_n = 25{,}8 \text{ г}.$$

Ответ: 25,8 *г*.

№ 2.6 (2015). В вертикально расположенном теплоизолированном цилиндре, закрытом теплонепроницаемым поршнем, находится идеальный одноатомный газ. На поршень, который может перемещаться в цилиндре без трения, кладут гирю. Давление газа в результате увеличилось в два раза (рис. 2.2). Определите, как изменился его объем. Внешнее давление на поршень отсутствует.

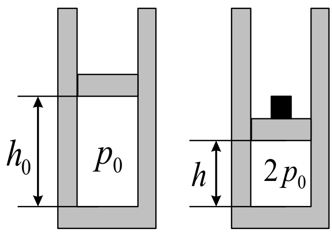

Рис. 2.2

Решение

Пусть p_0, V_0, T_0 и $2p_0, V, T$ – параметры ν молей газа в начальном и конечном состояниях. Запишем уравнения состояния

$$p_0V_0 = \nu RT_0,\ 2p_0V = \nu RT\ .$$

Приращение внутренней энергии газа составит

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T - T_0) = \frac{3}{2}(pV - p_0V_0) =$$

$$= \frac{3}{2}(2p_0V - p_0V_0).$$

Так как система теплоизолированная Q=0, то приращение внутренней энергии равно убыли потенциальной энергии поршня с гирей. Изменение высоты поршня можно выразить через изменение объема $(h_0 - h) = (V_0 - V)/S$, где S – площадь поперечного сечения цилиндра. Тогда

$$\Delta E_П = mg(h_0 - h) = \frac{mg(V_0 - V)}{S}.$$

Учитывая, что при установившемся равновесии $mg = 2p_0S$, перепишем

$$\Delta E_П = \frac{2p_0S(V_0 - V)}{S} = 2p_0(V_0 - V).$$

Приравняем приращение внутренней энергии к потенциальной энергии поршня с гирей:

$$\frac{3}{2}(2p_oV - p_0V_0) = 2p_0(V_0 - V).$$

Откуда получим

$$V = 0{,}7V_0.$$

Ответ: $V = 0{,}7V_0$.

№ 2.7 (2015). КПД тепловой машины, работающей по циклу 1-2-3-1 равен η_0 (рис. 2.3). Найдите КПД η тепловой машины, работающей по циклу 1-3-4-1.

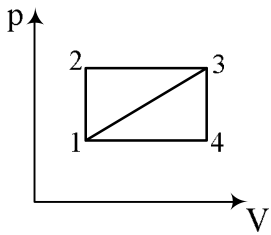

Рис. 2.3

Решение

Полезная работа за цикл численно равна площади, ограниченной этим циклом. Из графика видно, что полезные работы в рассматриваемых циклах равны. Обозначим эти работы через $A = A_{1231} = A_{1341}$.

Из определения КПД цикла

$$\eta_0 = \frac{A}{Q_{123}},\ \eta = \frac{A}{Q_{13}},$$

где Q_{123} и Q_{13} - полученные в циклах количества теплоты.

По первому началу термодинамики, учитывая, что работа в изохорном процессе A_{12} равна нулю, запишем

$$Q_{123} = \Delta U_{13} + A_{23},Q_{13} = \Delta U_{13} + A_{13}.$$

Из геометрического смысла работа $A_{23} = A_{13} + A$, тогда $Q_{123} = Q_{13} + A$.

Выразим полученные количества теплоты через КПД и подставим в полученное соотношение:

$$Q_{123} = \frac{A}{\eta_0},\ Q_{13} = \frac{A}{\eta},\ \frac{A}{\eta_0} = \frac{A}{\eta} + A.$$

Откуда

$$\eta = \frac{\eta_0}{1-\eta_0}.$$

Ответ: $\eta = \dfrac{\eta_0}{1-\eta_0}$.

№ 2.8 (2017). Чистый, свежий и в меру влажный воздух в доме – основная составляющая здорового микроклимата. Для поддержания влажности в помещении используют увлажнители. Определите, какой станет относительная влажность воздуха в комнате кубатурой V=30 *м*^{3} после 30 *минут* работы увлажнителя, производительностью 300 *мл/ч*, если до его включения она составляла 20 %. Температура в помещении 22 °С, давление насыщенного пара при такой температуре 2,64 *кПа*. Помещение считать герметичным.

Решение

Относительная влажность определяется парциальным давлением водяного пара и давлением насыщенного пара при той же температуре:

$$\varphi = \frac{p}{p_{н.п.}} \cdot 100\,\%.$$

За время работы увлажнителя испарится вода массой

$$\Delta m = \rho\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)t\,,$$

где $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ − производительность увлажнителя.

Водяной пар в комнате является разреженным газом, который подчиняется уравнению Менделеева-Клапейрона. Испарение воды приведет к увеличению парциального давления водяного пара на величину

$$\Delta p = \frac{\Delta m}{MV} RT\,.$$

Тогда увеличение относительной влажности составит

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta p}{p_{.н.п.}} \cdot 100\ \% = \frac{\Delta mRT}{MVp_{н.п.}} \cdot 100\ \% = \frac{\rho RT}{MVp_{н.п.}}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)t \cdot 100\ \%.$$

Таким образом, после работы увлажнителя, относительная влажность составит

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi = \varphi_1 + \frac{\rho RT}{MVp_{н.п.}}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)t \cdot 100\ \%.$$

После подстановки числовых значений получим

$$\varphi_2 = 20 + \frac{1000 \cdot 8{,}31 \cdot 295}{0{,}18 \cdot 30 \cdot 2{,}64 \cdot 10^3}\left(\frac{300 \cdot 10^{-6}}{3600}\right)1800 \cdot 100\ \% = 46\ \%.$$

Ответ: 46 %

№ 2.9 (2018). Металлический шарик остывает на открытом воздухе. Мощность теплового излучения пропорциональна четвертой степени термодинамической температуры $P \sim T^4$. Во сколько раз отличается время t_1 остывания шарика от начальной температуры T_0 до температуры $0{,}5T_0$ от времени

t_2 остывания от $0{,}5T_0$ до $0{,}25T_0$? Теплопроводностью воздуха пренебречь.

Решение

Количество теплоты, выделяемой телом при остывании равно $dQ = cmdT$. С другой стороны, энергия, излучаемая шариком, $dW=Pdt$. Согласно закону сохранения энергии

$$dQ = -dW = -Pdt.$$

Приравнивая эти выражения и разделяя переменные, получим

$$cmdT = -Pdt, \quad dt = -\frac{cm\,dT}{P} \sim -\frac{cm\,dT}{T^4}.$$

Интегрируя в соответствующих пределах, получим выражения для t_1 и t_2:

$$t_1 \sim -\int_{T_0}^{0{,}5T_0} \frac{cmdT}{T^4} \sim \frac{cm}{3}\left(\frac{1}{\left(0{,}5T_0\right)^3} - \frac{1}{\left(T_0\right)^3}\right) \sim \frac{7cm}{3} \cdot \frac{1}{T_0^3}.$$

$$t_2 \sim -\int_{0{,}5T_0}^{0{,}25T_0} \frac{cmdT}{T^4} \sim \frac{cm}{3}\left(\frac{1}{\left(0{,}25T_0\right)^3} - \frac{1}{\left(0{,}5T_0\right)^3}\right) \sim \frac{56cm}{3} \cdot \frac{1}{T_0^3}.$$

Ответ: $t_1 = \frac{1}{8} t_2$.

3. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

№ 3.1 (2001). Есть «черный ящик» с двумя парами выводов. Если на первую пару выводов подать напряжение *10 В*, то вольтметр, подключенный к другой паре, показывает *5 В*. Если на другую пару выводов подать напряжение *10 В*, то вольтметр, подключенный к первой паре, покажет напряжение *10 В*. Начертите схему, собранную в «черном ящике» (источников тока в «ящике» нет).

Решение

Условию задачи соответствует простая цепь, собранная по схеме на рис. 3.1. Она состоит из двух резисторов.

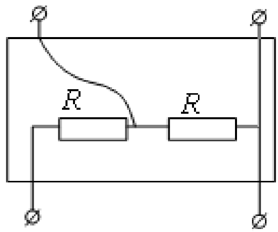

Рис. 3.1

№ 3.2 (2001). Электрон влетает в область параллельных электрического и магнитного полей шириной L. Начальная скорость электрона направлена под острым углом α к силовым линиям полей и равна υ. Через какое время электрон вылетит из области полей? Напряженность электрического поля E, индукция магнитного поля B.

Решение

Рассмотрим движение электрона вдоль силовых линий рис. 3.2). Со стороны электрического поля на него действует тормозящая сила $F_{эл} = eE = ma$. Со стороны же

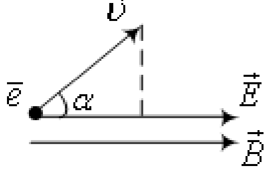

Рис. 3.2

магнитного поля вдоль силовых линий сила не действует − $F_{лx} = 0$. Если бы не было электрического поля, то электрон бы двигался по спирали вдоль направления магнитного поля. Электрическая сила сообщает электрону отрицательное ускорение. Поэтому траекторией будет винтовая линия с постепенно уменьшающимся шагом. При равнозамедленном движении $L = \upsilon cos\alpha t - \frac{at^2}{2}$, где ускорение $a = \frac{eE}{m}$. После подстановки выражения для ускорения приведем выражение к стандартному виду квадратного уравнения:

$$\frac{eEt^2}{2m} - \upsilon cos\alpha t + L = 0.$$

Здесь t – время, через которое координата электрона станет равна *L*.

Решая квадратное уравнение, получим

$$t = \frac{m\left(\upsilon_0 \cos\alpha \pm \sqrt{\upsilon_0^2 \cos^2\alpha - \frac{2LeE}{m}}\right)}{eE}.$$

Физическому смыслу отвечает только ответ со знаком «-». Знак «+» соответствует случаю $x > L$, однако там нет поля по условию задачи и электрон не может вернуться в точку с координатой $x = L$.

Проанализируем полученное выражение для времени вылета электрона из области полей. Рассмотрим 3 случая:

1) Электрон вылетает из области полей в точке с координатой $x=0$. По закону сохранения энергии кинетическая энергия электрона равна работе электрического поля:

$$E_{кх} = A_{эл} \text{ или } \frac{m\upsilon_0^2 \cos^2\alpha}{2} = eEL.$$

В этом случае значение под корнем в выражении для времени вылета электрона равно нулю.

Тогда

$$t = \frac{m\upsilon_0 \cos\alpha}{eE}.$$

Электрон, достигнув границы области полей, «упруго отразится» от нее, и продолжит движение в противоположном направлении и вылетит из области полей в точке «входа». Столько же времени потребуется на полет элетрона обратно. Значит, время до вылета составит

$$t_1 = \frac{2m\upsilon_0 \cos\alpha}{eE}.$$

2) Электрон вылетает из области полей в координате $x=L$. В этом случае кинетическая энергия должна превосходить работу поля $E_{кх} > A_{эл}$ и времени вылета электрона соотвествует ранее полученное выражение со знаком «-»:

$$t_2 = \frac{m\left(\upsilon_0 \cos\alpha - \sqrt{\upsilon_0^2 \cos^2\alpha - \frac{2LeE}{m}}\right)}{eE}.$$

3) Возможен случай, когда кинетическая энергия электрона намного меньше, чем работа электрического поля $E_{кх} < A_{эл}$. Это соотвествует случаю, когда значение под корнем в выражении для времени вылета электрона меньше нуля.

$$\upsilon_0^2 \cos^2\alpha - \frac{2LeE}{m} = 0.$$

В этом случае время вылета электрона из области полей будет равно бесконечности, электрон будет очень медленно перемещаться внутри области полей:

$$t_3 = \infty .$$

Ответ: 1) $t_1 = \dfrac{2m\upsilon_0 \cos\alpha}{eE}$;

$$2)\ t_2 = \frac{m\left(\upsilon_0 \cos\alpha - \sqrt{\upsilon_0^2 \cos^2\alpha - \frac{2LeE}{m}}\right)}{eE};\ 3)\ t_3 = \infty .$$

№ 3.3 (2002). В вакуумном диоде, анод и катод которого - параллельные пластины, сила тока зависит от напряжения по закону $I = cU^{3/2}$, где c – некоторая константа. Во сколько раз увеличится сила давления на анод, возникающая из-за ударов электронов о его поверхность, если напряжение на диоде увеличить в два раза? Начальной скоростью электронов, вылетающих с катода, пренебречь.

Решение

Сила тока по определению $I = \frac{dq}{dt}$. Учитывая, что любой заряд кратен заряду электрона, можно записать: $I = \frac{edn}{dt}$. Откуда число электронов, ударяющихся об анод за время dt, равно $dn = \frac{Idt}{e}$.

Каждый из ударившихся об анод электронов будет иметь скорость, которую можно выразить через ускоряющее напряжение из закона сохранения энергии:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = eU, \text{ откуда } \upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m}} .$$

При соударении изменяется импульс электронов:

$$dp = m\upsilon dn = \frac{m\upsilon Idt}{e} .$$

По третьему закону Ньютона сила давления электронов на поверхность анода равна по модулю силе, действующей на электроны со стороны поверхности анода и изменяющей их импульс. Согласно обобщенному закону Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Так как в вакуумном диоде электроны движутся параллельно силовым линиям электрического поля, то можно переписать выражение для модуля силы: $F = \frac{dp}{dt}$.

Если все электроны поглощаются поверхностью анода, то импульс силы после подстановки полученных ранее выражений для скорости и импульса, равен

$$F = \frac{m\upsilon I}{e} = \frac{mI}{e}\sqrt{\frac{2eU}{m}} = I\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

По условию задачи сила тока зависит от напряжения по закону $I = cU^{3/2}$, тогда

$$F = cU^{3/2}\sqrt{\frac{2mU}{e}} = c\sqrt{\frac{2m}{e}}U^2 \sim U^2.$$

Таким образом, сила давления прямо пропорциональна квадрату напряжения на диоде. Если напряжение на диоде увеличится в два раза, то сила давления увеличится в 4 раза.

Ответ: Увеличится в 4 раза.

№ 3.4 (2002). На диэлектрическом кольце массой m и радиусом R равномерно распределён электрический заряд q. Кольцо может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент времени оно покоится. В пространстве создано перпендикулярное к плоскости кольца магнитное поле, индукция которого в центральной части кольца радиусом $a < R$ равна $2B$, а в остальной части пространства – B. Затем магнитное поле равномерно уменьшается до нуля. Какую скорость будет иметь кольцо, когда индукция магнитного поля обратится в нуль.

Решение

Изменяющееся магнитное поле приводит к возникновению вихревого электрического поля, действующего на свободные заряды.

Магнитный поток, пронизывающий плоскость кольца в начальный момент, равен

$$\Phi = \pi a^2 2B + \pi\left(R^2 - a^2\right)B = \pi B\left(R^2 + a^2\right).$$

При обращении в нуль индукции магнитного поля изменение магнитного потока приводит к возникновению ЭДС индукции:

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi(R^2 + a^2)dB}{dt} = \frac{\pi(R^2 + a^2)B}{t}.$$

С другой стороны, ЭДС численно равна работе по перемещению единичного заряда по контуру:

$$\mathcal{E} = \frac{dA}{dt} = 2\pi RE,$$

где E – напряженность электрического поля.

Приравнивая выражения для ЭДС, получим

$$2\pi RE = \frac{\pi\left(R^2 + a^2\right)B}{t}.$$

Выразим напряженность

$$E = \frac{\left(R^2 + a^2\right)B}{2Rt}.$$

На выделенный на кольце заряд dq действует электрическая сила $dF=dq\cdot E$, сообщая ускорение

$$a = \frac{dF}{dm} = \frac{Edq}{dm}.$$

При равномерном распределении заряда и массы справедливо

$$dq = \frac{q \cdot dl}{2\pi R} \text{ и } dm = \frac{m \cdot dl}{2\pi R}.$$

Таким образом, тангенциальное ускорение будет равно

$$a=\frac{Edq}{dm}=\frac{Eq}{m}=\frac{\left(R^2+a^2\right)Bq}{2Rtm}.$$

К моменту времени, когда магнитная индукция обратится в нуль, кольцо приобретет скорость

$$\upsilon=at=\frac{\left(R^2+a^2\right)Bq}{2Rm}.$$

.

Ответ: $\upsilon=\frac{\left(R^2+a^2\right)Bq}{2Rm}$.

№ 3.5 (2003). На рис.3.3 изображена электрическая цепь, состоящая из шести одинаковых звеньев. Все резисторы в цепи В первое и последнее звенья цепи включены амперметры *A* и одинаковы и имеют сопротивление $R=1\ Ом$.

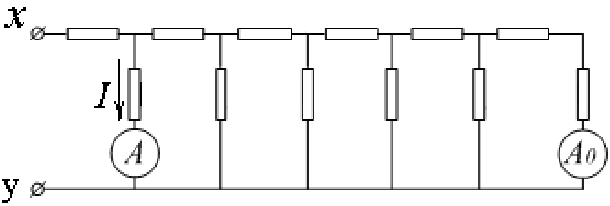

Рис. 3.3

A_0. На входные клеммы x и y цепи подано постоянное напряжение U_{xy}, при этом амперметр A показывает ток $I=8{,}9\ A$. Какой ток показывает амперметр A_0? Определите напряжение U_{xy}, поданное на входные клеммы цепи.

Решение

Обозначим силу тока через амперметр A_0 как I_0. Покажем на схеме распределение токов (рис. 3.4), учитывая законы последовательного и параллельного соединения.

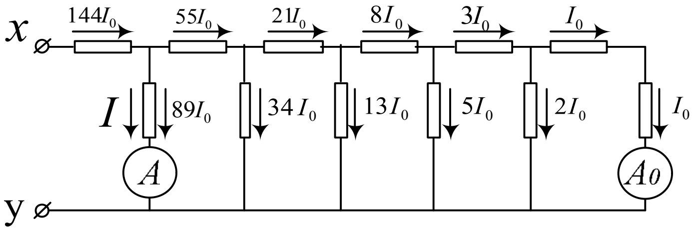

Рис. 3.4.

Видим, что $I = 89I_0$, значит $I_0 = 0{,}1A$.

Напряжение U_{xy}, поданное на входные клеммы цепи, найдем по закону Ома:

$$U_{xy} = I_{xy}R_{xy} = (144 + 89)I_0R = 23{,}3B.$$

Ответ: $I_0 = 0{,}1A;\ U_{xy} = 23{,}3B$.

№ 3.6 (2004). Напряжённость электрического поля, создаваемая зарядами, равномерно распределёнными по поверхности полусферы, в центре O этой полусферы равна $E_0 = 30\ В/м$. Двумя плоскостями, проходящими через один и тот же диаметр и составляющими друг с другом угол $a = 60°$, от этой полусферы отделена «долька» (рис. 3.5). Найдите напряжённость электрического поля в той же точке O, создаваемого зарядами, находящимися на отделённой части поверхности (на «дольке»).

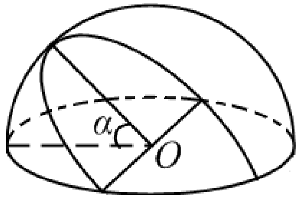

Рис. 3.5

Решение

Полную напряженность поля $\vec{E}_0$, созданного полусферой, можно представить в виде суперпозиции напряженности поля $\vec{E}'$, созданного «долькой», угол раствора которой α, и напряженности поля $\vec{E}$, созданного добавочной «долькой» с углом раствора $(\pi-\alpha)$ (рис. 3.6): $\vec{E}_0 = \vec{E}' + \vec{E}$.

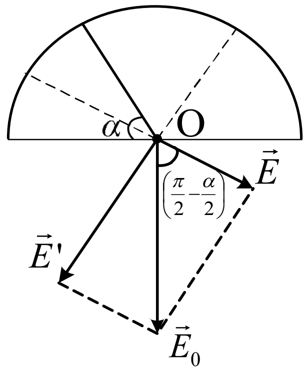

Рис. 3.6

Учитывая симметрию, легко видеть, что $\vec{E} \perp \vec{E}'$. Из векторной диаграммы определим модуль искомой напряженности:

$$E = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}E_0 = 15\frac{В}{м}.$$

Ответ: $E = 15\frac{В}{м}$.

№ 3.7. (2004). Две студентки, Алиса и Василиса, решили изготовить самодельные вольтметры из миллиамперметров. Алиса соединила миллиамперметр последовательно с резистором сопротивлением $R_1 = 1\ кОм$ и приклеила на прибор шкалу напряжений, показывающую произведение текущего через миллиамперметр тока на R_1. Василиса собрала ту же схему, используя другой резистор, с сопротивлением $R_2 = 2\ кОм$ и приклеила шкалу напряжений, показывающую произведение IR_2. Студентки решили испытать свои приборы, подключив их к схеме, показанной на рис. 3.7, с неизвестным напряжением батарейки и неизвестными сопротивлениями резисторов.

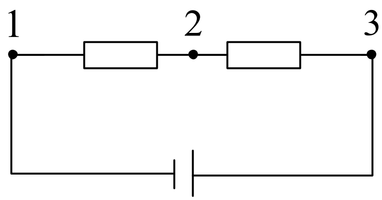

Рис. 3.7

Прибор Алисы при подключении к контактам *1* и *2* показал напряжение $U_{12} = 1{,}8\ B$, к контактам *2* и *3* - напряжение $U_{23} = 1{,}8\ B$, к контактам *1* и *3* - напряжение $U_{13} = 4{,}5\ B$. Что покажет прибор Василисы при подключении к тем же парам контактов? Внутренним сопротивлением батарейки и миллиамперметров пренебречь.

Решение

При подключении приборов к контактам *1* и *3* и первый, и второй прибор покажут одинаковое напряжение, равное напряжению батарейки (сопротивлением батарейки по условию задачи можно пренебречь). Таким образом,

$$U'_{13} = U_{13} = 4{,}5\ B.$$

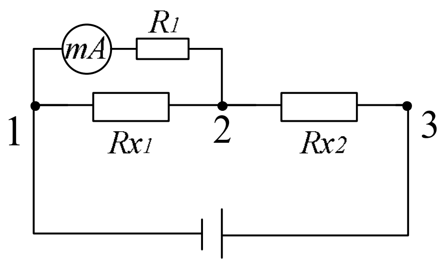

Рис. 3.8

Подключение прибора Алисы к контактам 1 и 2 показано на рис. 3.8.

Так как, показания прибора Алисы в случаях подключения к контактам 1 и 2 и к контактам 2 и 3 одинаковы, можно сделать вывод, что неизвестные сопротивления равны $R_{x1} = R_{x2} = R_x$.

Учитывая, что через участки 1-2 и 2-3 течет один и тот же ток, можно составить пропорцию:

$$\frac{U_{R_{x2}}}{U_{12}} = \frac{R_{x2}}{R_{12}} = \frac{R_x\left(R_1 + R_x\right)}{R_x R_1} = 1 + \frac{R_x}{R_1},$$

где $U_{R_{x2}} = U_{13} - U_{12} = 2,7\,B.$

Тогда неизвестное сопротивление составит

$$R_x = \left(\frac{U_{R_{x2}}}{U_{12}} - 1\right) R_1 = 500\,Ом.$$

При подключении прибора Василисы к контактам 1 и 2, рассуждая аналогично, можно записать

$$\frac{U_{13} - U'_{12}}{U'_{12}} = 1 + \frac{R_x}{R_2} = 2,25.$$

Отсюда, $U'_{12} = 2B$. При подключении к контактам 2 и 3 показания прибора будут также равны $U'_{23} = 2B$.

Ответ: $2B;\ 2B;\ 4,5B.$

№ 3.8 (2005). Студент купил кипятильник, на упаковке которого было написано «*500 ватт*, сделано в Китае». В лёгком тонкостенном стакане он решил нагреть 1 *л* воды. Температура достигла 60 *°C* и никак дальше не растёт. Ему надоело, и он выключил нагреватель. За первые 20 *с* вода остыла на 2 *°C*. Сколько ватт содержит «китайский ватт»?

Решение

При предельной температуре мощность потерь равна мощности кипятильника. Если считать изменение температуры на 2 *°C* небольшим, то мощность потерь заметно не изменится и составит

$$P = \frac{cm\Delta T}{\tau} = 420 \text{ Вт}.$$

Из пропорции определим

$$1 \text{ «китайский ватт»} = \frac{420}{500} = 0,84\,Вт.$$

Ответ: $0,84 Вт$.

№ 3.9 (2005). Из одного куска нихромовой проволоки спаяли прямоугольный треугольник с катетами 30 *см* и 40 *см*. К одному из катетов этого треугольника подсоединили небольшой по размерам вольтметр так, что соединительные провода и стороны треугольника образуют квадраты. Вся конструкция находится в одной плоскости, перпендикулярно которой направлено однородное магнитное поле. Индукция поля изменяется со скоростью $\frac{dB}{dt} = 0,01\ Тл/с$. Сопротивление вольтметра много больше сопротивлений сторон треугольника. Найдите показания вольтметра.

Решение

При изменении индукции магнитной поля, пронизывающего замкнутый проводящий контур, возникает ЭДС индукции.

$$\mathcal{E}_1 = \frac{dB}{dt} S_\Delta = \frac{dB}{dt}\frac{1}{2}ab.$$

Сопротивления сторон треугольника будут соответственно *3R, 4R, 5R*. Полное сопротивление контура *12R*. Тогда сила индукционного тока составит

$$I_\Delta = \mathcal{E}_1/12R = \frac{dB}{dt}\frac{1}{24R}ab.$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{dB}{dt} S_{кв} = \frac{dB}{dt}a^2,$$ где a=40 см.

Второе правило Кирхгофа: $4I_\Delta R = U - \mathcal{E}_2$;

$$U = 4I_{\Delta}R + \mathscr{E}_2 = \frac{dB}{dt}\frac{4R}{24R}ab + \frac{dB}{dt}a^2 = \frac{dB}{dt}\left(\frac{b}{6} + a\right)a = 1{,}8\,мВ.$$

Ответ: $U = 1{,}8\ мВ$.

№ 3.10 (2007). Два одинаковых металлических шарика радиусом $R{=}1\ мм$ соединены длинным тонким проводом. Один из них размещен в разреженном воздухе, а другой - в вакуумной камере. На расположенный в вакууме шарик падает поток электронов со скоростью $\upsilon_0{=}3000\ км/с$. Какой заряд можно накопить таким образом на шариках? Электрический пробой разреженного воздуха происходит при напряжённости электрического поля $E_0{=}3\cdot 10^4\ В/м$.

Решение

Максимальное значение заряда ограничено:

1) возможностью пробоя воздуха, поэтому $k\dfrac{|Q|}{2R^2} \le E_0$;

2) отталкиванием электронов от уже заряженного шарика, поэтому $k\dfrac{e|Q|}{2R} \le \dfrac{m\upsilon_0^2}{2}$.

Значение Q должно удовлетворять обоим неравенствам. Откуда $Q{=}5{,}7\cdot 10^{-12}\ Кл$.

Ответ: $Q{=}5{,}7\cdot 10^{-12}\ Кл$.

№ 3.11 (2009). Две частицы массами m и $2m$, имеющие заряды $-q$ и $2q$ соответственно ($q = 2\ нКл$), движутся как одно целое вдоль силовой линии однородного электрического поля с напряженностью $E = 30\ кВ/м$. Определите расстояние между частицами, при котором возможно такое движение.

Решение

На каждую частицу действует две электрические силы: со стороны внешнего электрического поля и сила кулоновского взаимодействия (рис. 3.9).

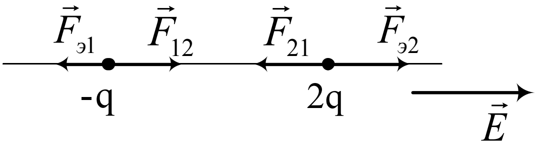

Рис. 3.9

Уравнения движения для них имеют вид

$$ma = F_{12} - F_{э1},$$

$$2ma = F_{э2} - F_{21},$$

где $\left|F_{12}\right| = \left|F_{21}\right| = k\dfrac{q \cdot 2q}{r^2}$, $F_{э1} = -qE, F_{э2} = 2qE$.

После элементарных преобразований получим

$$3ma = qE,\ a = \frac{qE}{3m}.$$

Подставляя в уравнение движения первой частицы выражения для ускорения и сил, получим

$$\frac{qE}{3m}m = k\,\frac{q \cdot 2q}{r^2} - qE,$$

$$k\,\frac{2q}{r^2} = \frac{4E}{3}\ .$$

Расстояние между частицами, при котором возможно такое движение, составит

$$r = \sqrt{k\,\frac{3q}{2E}} = 3\,см.$$

Ответ: $r = 3см.$

№ 3.12 (2009). ЭДС самоиндукции, возникающая в цепи с индуктивностью 2 *Гн*, изменяется с течением времени по закону $\mathcal{E} = 10+4t$ (величины выражены в единицах СИ). По какому закону изменяется сила тока в цепи, если в начальный момент времени ток в цепи отсутствовал?

Решение

Модуль ЭДС самоиндукции по определению $\mathcal{E} = \left| -L\dfrac{dI}{dt} \right|$, откуда

$$I = \frac{1}{L}\int \mathcal{E}\,dt = \frac{1}{L}\int (10+4t)\,dt = \frac{1}{L}\left(10t + 2t^2\right) + C;$$

Из начальных условий определим константу C: при t=0 ток отсутствовал, следовательно, C=0.

Таким образом, закон по которому изменяется сила тока в цепи,

$$I = \frac{1}{L}\left(10t + 2t^2\right) = 5t + t^2.$$

Ответ: $I = 5t + t^2$.

№ 3.13 (2010). Елочная гирлянда, состоящая из n=20 последовательно соединенных одинаковых лампочек типа A, подключена к сети. Во сколько раз изменится мощность, потребляемая гирляндой, если m = 5 лампочек из нее заменить на лампочки типа B? Известно, что при подключении к батарейке одной лампочки типа B потребляется в α = 3 раза большая мощность, чем при подключении к той же батарейке одной лампочки типа A. Напряжение на зажимах сети считать неизменным, внутренним сопротивлением батарейки пренебречь.

Решение

Мощность, потребляемая одной лампочкой при подключении к батарейке, $P = \dfrac{U^2}{R}$. Так как известно, что при подключении к батарейке одной лампочки типа B потребляется в α=3 раза большая мощность, чем при подключении к той же батарейке одной лампочки типа A, то $R_B = \frac{1}{\alpha} R_A$.

Мощность гирлянды из n = 20 последовательно соединенных одинаковых лампочек типа A равна $P_1 = \frac{U^2}{nR_A}$.

Мощность, потребляемая гирляндой при замене m = 5 лампочек на лампочки типа B:

$$P_2 = \frac{U^2}{(n-m)R_A + mR_B}.$$

Найдем, как изменится мощность:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{nR_A}{(n-m)R_A + mR_B} = \frac{\alpha n}{\alpha(n-m)+m} = 1,2.$$

Ответ: увеличится в 1,2 раза.

№ 3.14 (2011). Электрон, движущийся с нерелятивистской скоростью $\vec{\upsilon} = \upsilon_0 \vec{e}_x$, влетает в область 0<$x$<$a$, где создано постоянное однородное электрическое поле (рис. 3.10). Определить приращение кинетической энергии электрона $\Delta W_к$ после выхода из области поля, если оно имеет вид:

1) $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$;

2) $\vec{E} = E_0 \vec{e}_y$. Сделайте рисунок, изобразите траекторию движения электрона.

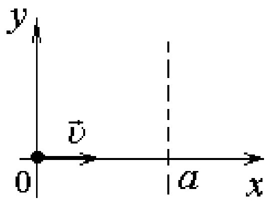

Рис. 3.10

Решение

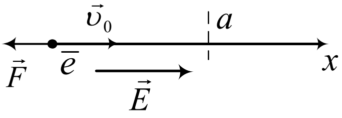

Рис. 3.11

1) Если силовые линии направлены вдоль оси *Ox,* то электрон, влетевший в поле вдоль этих линий, будет двигаться прямолинейно и равнозамедленно (рис. 3.11). Из теоремы о кинетической энергии следует $\Delta W_к = A = -|e|E_0 a.$

2) При движении электрона в вертикальном поле на него действует электрическая сила, перпендикулярная направлению его движения, что приведет к возрастанию вертикальной составляющей скорости (рис. 3.12).

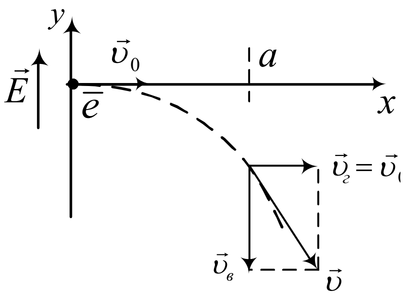

Рис. 3.12

За время смещения вдоль силовой линии на расстояние $t = \dfrac{a}{\upsilon_0}$, вертикальная составляющая скорости приобретет значение $\upsilon_в = \dfrac{|e|E}{m} t = \dfrac{|e|E}{m} \cdot \dfrac{a}{\upsilon_0}$.

По теореме Пифагора получим

$$\upsilon^2 = \upsilon_г^2 + \upsilon_в^2 = \upsilon_0^2 + \left(\frac{|e|E}{m} \cdot \frac{a}{\upsilon_0} \right)^2.$$

Тогда изменение кинетической энергии равно

$$\Delta W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{\left(|e|Ea\right)^2}{2m\upsilon_0^2}.$$

Ответ: 1) $\Delta W_к = -|e|E_0 a$; 2) $\Delta W_к = \dfrac{\left(|e|Ea\right)^2}{2m\upsilon_0^2}$.

№ 3.15 (2012). Два одинаковых маленьких шарика массой m и зарядом q каждый висят на нитях одинаковой длины ℓ на расстоянии $x \ll \ell$ (рис. 3.13) . Из-за медленной утечки заряда по нити величина заряда каждого шарика изменяется со временем t по закону $q = q_o(1 - \alpha t)^{3/2}$ (где α — постоянная), а шарики сближаются. Величины q_o, m, α, ℓ заданы. Найдите скорость υ сближения шариков.

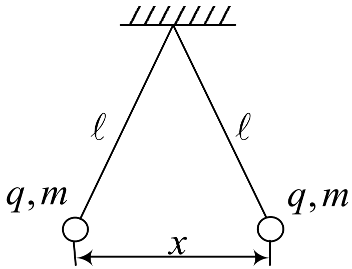

Рис. 3.13

Решение

Так как ток утечки мал, то можно считать, что в каждый момент времени сумма всех сил, действующих на шарик, равна нулю (квазистатический процесс);

$$\begin{cases} F = T\sin\alpha; \\ mg = T\cos\alpha. \end{cases}$$

Тогда сила Кулона

$$F = k\frac{q^2}{x^2} = mg \cdot tg\alpha ,$$

где α — половинный угол между нитями.

Учитывая, что $q = q_o(1 - \alpha t)^{3/2}$, получим

$$kq_0^2(1-\alpha t)^3 = \frac{mgx^3}{2\ell}.$$

Тогда зависимость расстояния между шариками от времени имеет вид

$$x = \left(\frac{2k\ell q_0^2}{mg}\right)^{\frac{1}{3}}(1-\alpha t).$$

Скорость сближения шариков

$$|\upsilon| = \left|\frac{dx}{dt}\right| = \alpha\left(\frac{2k\ell q_0^2}{mg}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ответ: $|\upsilon| = \left|\frac{dx}{dt}\right| = \alpha\left(\frac{2k\ell q_0^2}{mg}\right)^{\frac{1}{3}}$.

№ 3.16 (2012). Цена деления прибора $c = 15\cdot10^{-6}$ *А/дел*. Шкала прибора имеет $n = 200$ делений, внутреннее сопротивление $R_{П} = 100$ *Ом*. Как из этого прибора сделать вольтметр для измерения напряжения $U = 200$ В?

Решение

Предельный ток, который может быть измерен прибором:

$$I_{п} = cn.$$

Допустимое падение напряжения на приборе

$$U_{п} = I_{п}\, R_{п} = R_{п} \cdot cn.$$

Для того, чтобы прибор можно было использовать как вольтметр на напряжение U, последовательно с ним должно быть включено добавочное сопротивление $R_{Д}$, падение напряжения на котором равно

$$U_{Д} = U - U_{П} = U - R_{П} \cdot cn.$$

Откуда

$$R_{Д} = \frac{U_{Д}}{I_{П}} = \frac{U - R_{П}cn}{cn} \approx 66{,}6 \text{ кОм}.$$

Ответ: 66,6 кОм.

№ 3.17 (2013). Маленький металлический шарик с массой $m = 1$ *г*, которому сообщён заряд $q = +10^{-7}$ *Кл*, брошен издалека в металлическую сферу с зарядом $Q = +3\cdot10^{-7}$*Кл* со скоростью $\upsilon = 1$ *м/с*. При каком минимальном значении радиуса сферы шарик достигнет её поверхности?

Решение

Шарик достигает сферы, если на её поверхности скорость будет больше или равна нулю. В предельном случае $\upsilon_2 = 0$. Из закона сохранения энергии следует: $\frac{m\upsilon_1^2}{2} = q\varphi_{сф}$,

где $\varphi_{сф} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ –потенциал на поверхности сферы; учли, что $\varphi_\infty = 0$.

Тогда

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R};$$

$$R = \frac{2qQ}{4\pi\varepsilon_0 m\upsilon_1^2} = 0{,}54\,м.$$

Ответ: 0,54 м.

№ 3.18 (2013). Постройте график зависимости сопротивления цепи, изображённой на рис. 3.14, от сопротивления резисторов *r*. Сопротивление *R* резисторов неизменно. Считайте, что сопротивление диода в прямом направлении очень мало, а в обратном – очень велико.

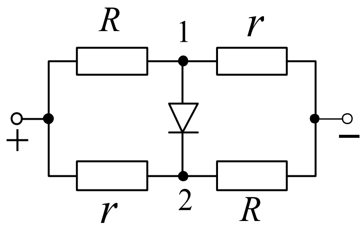

Рис. 3.14

Решение

Найдём потенциалы точек 1 и 2 в отсутствии диода. На схему подано постоянное напряжение, и при этом потенциал минусовой клеммы равен нулю.

$$\varphi_1 = \frac{Ur}{r+R}; \ \varphi_1 = \frac{UR}{r+R}.$$

Если $r < R$, то $\varphi_1 < \varphi_2$ и диод не будет проводить ток. Эквивалентная схема показана на рис. 3.15.

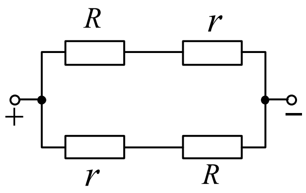

Рис. 3.15

Общее сопротивление в этом случае $R_{общ1} = \frac{r+R}{2}$.

Если $r > R$, то $\varphi_1 > \varphi_2$ – диод будет проводить ток. Эквивалентная схема показана на рис. 3.16 и общее сопротивление $R_{общ2} = \frac{2rR}{r+R}$.

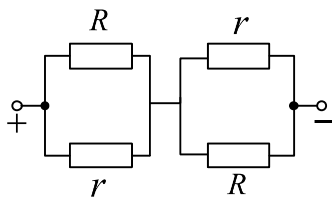

Рис. 3.16

График зависимости сопротивления цепи от сопротивления резисторов r имеет вид, представленный на рис. 3.17.

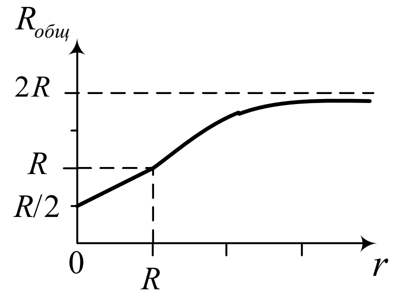

Рис. 3.17

Ответ: график зависимости $R(r)$ показан на рис. 3.17.

№ 3.19 (2014). Сила тока в проводнике сопротивлением R=10 *Ом* нарастает с течением времени Δt=2 *с* по линейному закону от I_0 = 0 до I_{max} = 6 *А* (рис. 3.18). Определите количество теплоты Q_2, выделившееся в этом проводнике за вторую секунду, и Q_3 – за третью секунду, а также отношение этих количеств теплоты Q_3/Q_2.

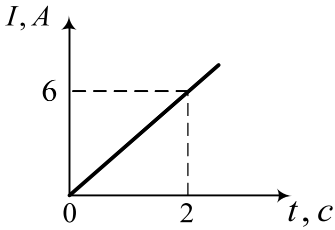

Рис. 3.18

Решение

Согласно закону Джоуля-Ленца в проводнике с током за время dt выделится количество теплоты $dQ = I^2Rdt$.

Учитывая линейную зависимость силы тока от времени, можно записать I=kt, где $k = \dfrac{\Delta I}{\Delta t} = \dfrac{6}{2} = 3A/c$ – скорость изменения силы тока. Тогда $dQ = 9t^2Rdt$.

За конечный промежуток времени Δt выделится количество теплоты

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} 9t^2 R dt\ .$$

Найдем, сколько выделится теплоты за вторую секунду:

$$Q_2 = \int_1^2 9t^2 R dt = \left.\frac{9Rt^3}{3}\right|_1^2 = 3R(8-1) = 21R = 210\,Дж.$$

Аналогично найдем тепло, выделившееся за третью секунду:

$$Q_3 = \int_2^3 9t^2 R dt = \left.\frac{9Rt^3}{3}\right|_2^3 = 3R(27-8) = 57R = 570\,Дж.$$

Отношение этих количеств теплоты

$$\frac{Q_3}{Q_2} = \frac{570}{210} \approx 2{,}7.$$

Ответ: 210 *Дж*; 570 *Дж*; 2,7.

№ 3.20 (2015). В электрической цепи, схема которой изображена на рис. 3.19, вольтметр и батарейка идеальные. Диод при включении в обратном направлении не пропускает ток, а при включении в прямом направлении открывается при напряжении U_0 (вольтамперная характеристика диода приведена на рис. 3.20). Что показывает вольтметр в этой цепи? Что он будет показывать, если изменить полярность включения диода?

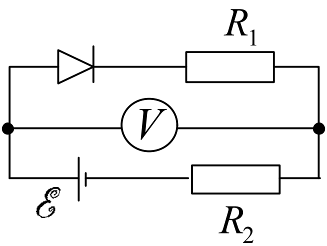

Рис. 3.19

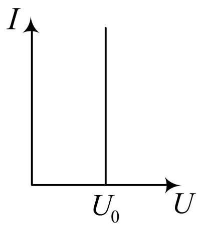

Рис. 3.20

Решение

При $\mathcal{E}<U_0$ ток в цепи не будет идти при включении диода в любом направлении и, следовательно, в этом случае вольтметр будет показывать напряжение $V_1 = \mathcal{E}$.

В случае $\mathcal{E}>U_0$, диод открывается и падение напряжения на нем не зависит от тока и равняется U_0. Поэтому закон для всей замкнутой цепи имеет вид $\mathcal{E}=U_0 +I(R_1+R_2)$, а ток в цепи равен

$$I = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R_1 + R_2}.$$

При этом вольтметр будет показывать напряжение

$$V_2 = U_0 + IR_1 = \frac{\mathcal{E}R_1 + U_0R_2}{R_1 + R_2}.$$

Если изменить полярность включения диода, то ток в цепи течь не будет, так как диод не пропускает ток в обратном направлении. Поэтому вольтметр покажет напряжение, равное ЭДС, $V= \mathcal{E}$.

Ответ: $V_1 = \mathcal{E}$,

$$V_2 = U_0 + IR_1 = \frac{\mathcal{E}R_1 + U_0R_2}{R_1 + R_2}.$$

№ 3.21 (2015). Тонкий медный проводник массой m=1 *г* согнут в виде квадрата, и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле (B = 0,1 *Тл*) так, что плоскость его перпендикулярна линиям поля. Определить количество электричества q, которое протечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию (плотность меди $\rho = 8940 кг / м^3$, удельное электрическое сопротивление меди $\rho_{уд} = 0,017 мкОм \cdot м$).

Решение

Согласно закону Фарадея ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока

$$\mathcal{E}_{\text{i}} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{B\Delta S}{\Delta t}.$$

Закон Ома для замкнутого контура $\mathcal{E}=IR$, где сила тока $I=\frac{\Delta q}{\Delta t}$, сопротивление $R=\rho_{уд}\frac{\ell}{S_n}$.

Обозначим сторону проволочного квадрата через a. Тогда изменение площади контура $\Delta S=a^2$, длина проволоки $\ell = 4a$, площадь поперечного сечения проволоки $S_n=\frac{m}{\rho\ell}$.

Приравнивая выражения, получим

$$\Delta q = (\mathcal{E}\cdot\Delta t)/R = \frac{Ba^2\Delta t}{R\Delta t} = \frac{Ba^2}{R} = \frac{Ba^2 m}{\rho_{уд}4a\rho 4a} \Rightarrow$$

Таким образом, количество электричества Δq, которое протечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию равно

$$\Delta q = \frac{Bm}{16\rho_{уд}\rho} = 0{,}041\ Кл.$$

Ответ: $\Delta q = 0{,}041\ Кл.$

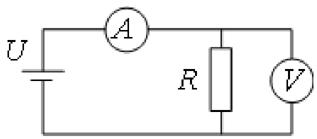

Рис. 3.21

№ 3.22 (2015). Для измерения сопротивления резистора собрана электрическая схема из батарейки, амперметра и вольтметра (рис. 3.21). Вольтметр подключен параллельно резистору и показывает U_1=1В, амперметр подключен к ним последовательно и показывает I_1=1А. После того как приборы поменяли местами, их показания стали равными соответственно $U_2 = 2$ *В* и I_2=0,5 *А*. Считая батарейку идеальной, определите по этим данным сопротивление резистора.

Решение

Обозначим через R_A, R_V и R – сопротивления амперметра, вольтметра и резистора, а через U - напряжение батарейки. Тогда по закону Ома в первом и втором случаях получаем

$$U = I_1 R_A + U_1 ,\ U = I_2 R_A + U_2 .$$

Отсюда, исключая сопротивление амперметра, получим напряжение батарейки:

$$U = \frac{I_1 U_2 - I_2 U_1}{I_1 - I_2} .$$

В первом случае (рис. 3.22) через параллельно соединённые вольтметр и резистор течет суммарный ток

$$I_1 = U_1 \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R} \right).$$

Во втором случае (рис. 3.23) на параллельно соединенных амперметре и резисторе падает напряжение $(U - U_2)$, поэтому ток через резистор равен $\frac{(U - U_2)}{R}$, а ток через вольтметр $\frac{(U - U_2)}{R} + I_2$. С другой стороны, этот же ток равен $\frac{U_2}{R_V}$, т.е. $\frac{(U - U_2)}{R} + I_2 = \frac{U_2}{R_V}$.

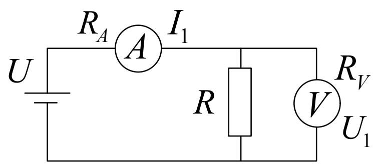

Рис. 3.22

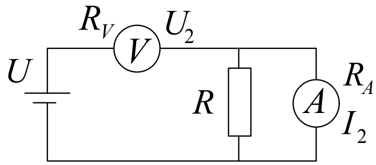

Рис. 3.23

Из системы уравнений

$$I_1 = U_1\left(\frac{1}{R_V}+\frac{1}{R}\right)\frac{(U-U_2)}{R}+I_2=\frac{U_2}{R_V}$$

исключая сопротивление вольтметра, имеем

$$R=\frac{UU_1}{I_1U_2-I_2U_1}.$$

Подставляя ранее полученное выражение для напряжения батарейки, окончательно получим

$$R=\frac{U_1}{I_1-I_2}=2\ Ом.$$

Ответ: 2 *Ом*.

№ 3.23 (2015). В постоянном магнитном поле с индукцией B_0 заряженная частица движется по окружности R_0. Когда индукцию магнитного поля стали медленно увеличивать, обнаружилось, что скорость частицы изменяется так, что ее кинетическая энергия прямо пропорциональна индукции поля. Чему будет равен радиус орбиты в магнитном поле с индукцией B?

Решение

В однородном магнитном поле с индукцией B частица с массой m и зарядом q движется по окружности радиуса R под действием силы Лоренца $F_{Л}=q\upsilon B$, сообщающей центростремительное ускорение $a_ц=\frac{\upsilon^2}{R}$.

По второму закону Ньютона $m\frac{\upsilon^2}{R}=q\upsilon B$, откуда радиус орбиты

$$R=\frac{m\upsilon}{qB}.$$

Энергия частицы в магнитном поле зависит только от ее скорости $E = \frac{m\upsilon^2}{2}$, поэтому $\upsilon = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ и радиус орбиты $R = \frac{\sqrt{2Em}}{qB}$.

По условию задачи энергия частицы обратно пропорциональна периоду обращения, т.е. выполняется соотношение $\frac{E}{E_0} = \frac{T_0}{T}$, где период обращения равен $T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi m\upsilon}{qB\upsilon} = \frac{2\pi m}{qB}$, следовательно, $\frac{E}{E_0} = \frac{B}{B_0}$. Тогда радиус орбиты частицы после изменения индукции поля

$$\frac{R}{R_0} = \frac{B_0}{B}\sqrt{\frac{E}{E_0}} = \frac{B_0}{B}\sqrt{\frac{B}{B_0}} = \sqrt{\frac{B_0}{B}},$$

откуда

$$R = R_0\sqrt{\frac{B_0}{B}}.$$

Ответ: $R = R_0\sqrt{\frac{B_0}{B}}$.

№ 3.24 (2017). В металлическую сферу падают капли заряженной жидкости (рис. 3.24). Какой наибольший заряд Q накопится на сфере? Радиус каждой капельки r = 0,5 *мм*, заряд $q = 2\cdot10^{-11}$ *Кл*, плотность жидкости ρ = 1 *г/см*^{3}. Радиус сферы R = 6 *см*, капельница расположена на расстоянии h=4 *см* над сферой.

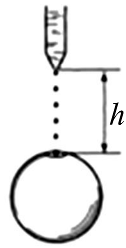

Рис. 3.24

Решение

Заряд, накапливающийся на сфере по мере падения капель, начнет отталкивать вновь падающие капли и при некотором заряде Q будет полностью их задерживать. Запишем закон сохранения энергии:

$$mgh + q\varphi_1 = q\varphi_2.$$

Учитывая выражение для потенциала поля заряженной сферы, закон сохранения энергии примет вид

$$mgh + k\frac{qQ}{(R+h)} = k\frac{qQ}{R},$$

где $m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$ – масса капли, k – электрическая константа.

Откуда заряд сферы

$$Q = \frac{mgR(R+h)}{kq} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3 gR(R+h)}{kq}.$$

После подставки числовых значений получим:

Q=1,74 *мкКл.*

Проверим, поместятся ли все капли, несущие такой заряд, в сферу. Максимальное число капель, которое может вместить сфера:

$$N_{max} = \frac{V_ш}{V_к} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = 1{,}73 \cdot 10^6.$$

Число капель несущих заряд Q:

$$N = \frac{Q}{q} \approx \frac{1{,}74 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-11}} = 0{,}87 \cdot 10^5.$$

Так как $N<N_{max}$, то поместятся.

Ответ: 1,74 *мкКл.*

№ 3.25 (2017). Одинаковые лампочки включены в цепь, как показано на рис. 3.25. Определите напряжение на первой лампочке, если известно, что ЭДС источника постоянного тока равно $\mathcal{E}$=6В, а сопротивление резистора R=20 Ом. Вольтамперная характеристика лампочки показана на рис. 3.26. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

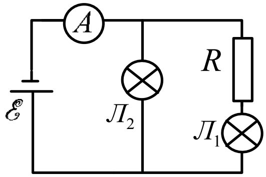

Рис. 3.25

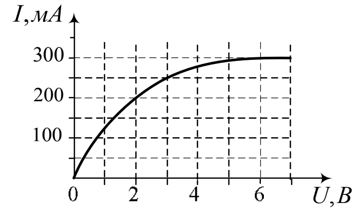

Рис. 3.26

Решение

Из закона Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

напряжение на внешней цепи

$$U = \mathcal{E} - Ir = \mathcal{E}.$$

Заметим, что напряжение на участке AB (рис. 3.27) равно напряжению на внешней цепи, т.к. амперметр идеальный:

$$U_{AB} = U = \mathcal{E}.$$

Тогда напряжение на первой лампочке составит

$$U_{Л1} = \mathcal{E} - IR;$$

$$U_{Л1} = 6 - 20I.$$

Построив график полученной зависимости, найдем по точке пересечения напряжение на лампочке при заданных условиях (рис. 3.28) $U_{Л1} = 2B$.

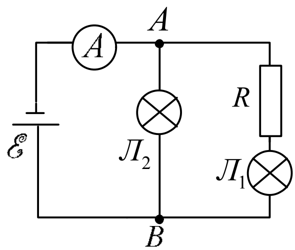

Рис. 3.27

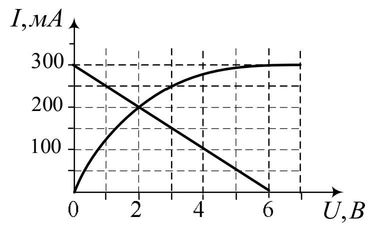

Рис. 3.28

Ответ: 2 В.

№ 3.26 (2018). Изобразите график зависимости напряженности электрического поля от расстояния от центра двух концентрических металлических сфер радиусами R_1 и $R_2 = 2R_1$, электрические заряды которых соответственно равны $q_1 = +q$, $q_1 = +2q$.

Решение

Напряженность поля заряженной сферы:

$E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, если r≥R , и E=0, если r<R.

Принцип суперпозиции полей $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, позволяет определить результирующую напряженность в каждой области:

1) $r < R$: $E(r)=0$;

2) $R_1<r<R_2$: $E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

На границах этой области напряженности соответственно равны:

$$E(R_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} \text{ и } E(R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}.$$

3) $r>R_2$: $E(r) = \dfrac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

На границе со второй областью напряженность

$$E(R_2) = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = \frac{3}{4} E(R_1) .$$

Покажем полученные зависимости на графике (рис. 3.29):

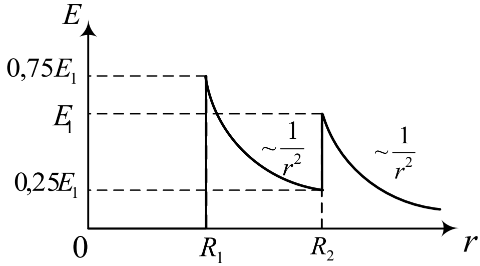

Рис. 3.29

Ответ: график зависимости *E(r)* изображен рис. 3.29.

№ 3.27 (2018). Юный экспериментатор решил сделать источник постоянного тока своими руками. Для этого он использовал вращение проводящего диска в магнитном поле. Чтобы проверить его работу, он с помощью скользящих контактов (один на оси диска, другой − на краю) подключил лампочку от карманного фонарика мощностью 1,89 *Вт* и сопротивлением 21 *Ом*. С какой частотой должен вращаться диск, чтобы лампочка загорелась в полную силу? Радиус диска 10 *см*, нормальная составляющая индукции магнитного поля 1 *Тл*. Электрическим сопротивлением диска и соединительных проводов пренебречь.

Решение

Свободные заряды, находящиеся во вращающемся проводящем диске, движутся по окружностям. Линейная скорость заряда на расстоянии x от центра диска

$$\upsilon(x) = \omega x .$$

Со стороны магнитного поля на движущиеся заряды действует сила Лоренца (центробежной силой можно пренебречь в виду малой массы электрона):

$$F_л = q\upsilon B_\perp = q\omega x B_\perp .$$

Работа силы Лоренца по перемещению заряда от центра диска к краю равна

$$A=\int_0^{r/2} F_л dx=\int_0^{r/2} q\omega x B_\perp dx=q\omega B_\perp \frac{r^2}{8}.$$

Таким образом, ЭДС индукции, возникающая между центром диска и его краем,

$$\mathcal{E}=\frac{A}{\mathrm{q}}=\frac{\omega B_\perp r^2}{2}.$$

Мощность, выделяющаяся на лампочке, $N=\mathcal{E}^2/R$.

Откуда $\mathcal{E}=\sqrt{NR}$. Приравняв выражения для ЭДС и выполнив элементарные преобразования, получим угловую скорость вращения

$$\omega=\frac{8\sqrt{NR}}{B_\perp r^2}.$$

Отсюда частота вращения диска

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{4\sqrt{NR}}{\pi B_\perp r^2}=800\ Гц.$$

Ответ: 800 Гц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение олимпиадных задач по физике способствует развитию абстрактного и логического мышления, тренирует нестандартность мышления, гибкость ума. Учит применять полученные и усвоенные знания в самых разных сферах.

Участие в олимпиадах развивает и личностные качества, повышает уверенность в себе, раскрывает творческие потенциалы.

Несмотря на то, что олимпиадные задачи отличаются оригинальностью и нет единого алгоритма их решения, подготовиться к олимпиаде можно, анализируя задачи, предлагаемые на олимпиадах разного уровня, изучая основные подходы и методы их решения. С этой целью и было написано данное пособие.

Желаем всем будущим участникам олимпиад по физике успехов!

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова, Т. И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – М.: Академия, 2018. – 560 с.
2. Детлаф, А. А. Курс физики: учеб. пособие для втузов/ А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Высш. шк. 2002. – 718 с.
3. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 5 кн.: учеб. пособие для втузов / И. В. Савельев. – М.: Лань, 2011.
4. Яворский, Б. М. Справочник по физике для инженеров и студ. вузов: учеб. пособие/ Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев. – М.: Оникс, 2006. – 1056 с.
5. Чертов, А. Г. Задачник по физике: учеб. пособие для втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М.: Изд-во физ. мат. литературы, 2001. – 640 с.
6. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики: учеб. пособие для студентов втузов / В. С. Волькенштейн. – СПб.: Специальная литература, 2001. – 327с.
7. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике [Текст]: учеб. пособие для вузов / И. Е. Иродов. – 3-е изд., перераб . – М: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 432 с.
8. Варламов, С. Д. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986-2005: учеб. издание / С. Д. Варламов [и др.] ;. под ред. М. В. Семёнова. – М.: МЦНМО, 2007. – 624 с.
9. Воробьёв, И. И. Задачи по физике : учеб. пособие / И. И. Воробьёв [и др.]; под ред. О. Я. Савченко. - 4-е изд. – СПб.: Издательство «Лань», 2001.–368 с.
10. Белонучкин, В. Е. Задачи по общей физике / В. Е. Белонучкин [и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 336 с.
11. Ильин, С. И. Олимпиадные задачи по физике: метод. указания к практическим занятиям / С. И. Ильин.– М.: МИИТ, 2008. – 32 с.

12. Кабардин, О. Ф. Международные физические олимпиады школьников / О. Ф. Кабардин, В. А. Орлов; под ред. В. Г. Разумовского. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 160 с.
13. Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач/ под ред. В. А. Макарова, М. В. Семенова, А. А. Якуты; ФИПИ. – М.: Интеллект-Центр, 2010. – 368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Татьянина Елена Павловна,
Тураева Татьяна Леонидовна,
Дубовицкая Татьяна Викторовна,
Москаленко Александр Георгиевич,
Хабарова Ольга Сергеевна,
Солдатенко Сергей Анатольевич

ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
К ОЛИМПИАДЕ ПО ФИЗИКЕ

Учебно-методическое пособие

Редактор Аграновская Н. Н.

Компьютерный набор
Е. П. Татьянина
Т. В Дубовицкая

Подписано к изданию 20.11.2019.

Объем данных 852 КБ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»

394026 Воронеж, Московский пр.,14