

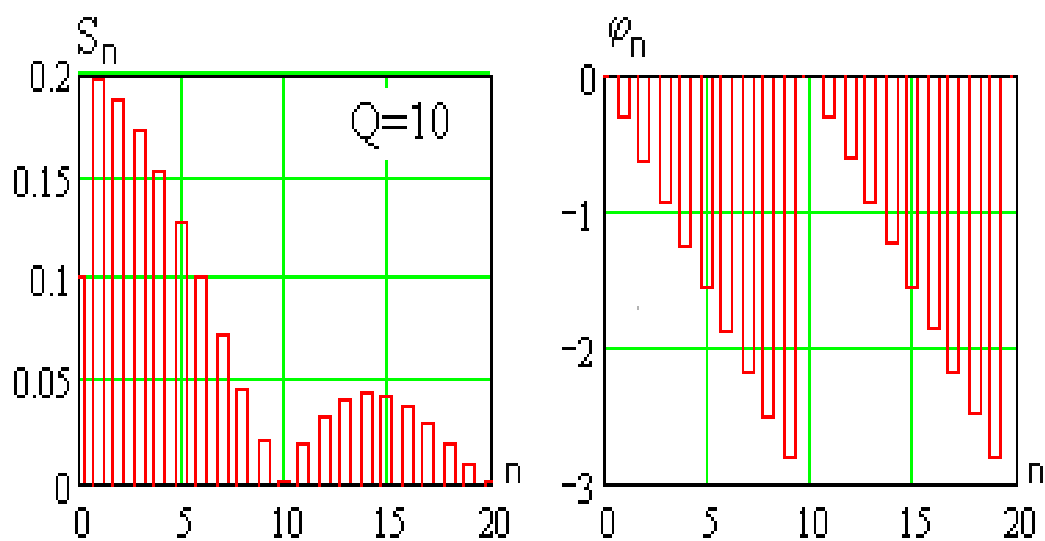
В. П. Литвиненко, Ю. В. Литвиненко, А. Н. Глушков

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Учебное пособие

В 3-х частях

Часть 3



Воронеж 2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

В. П. Литвиненко, Ю. В. Литвиненко, А. Н. Глушков

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Учебное пособие

В 3-х частях

Часть 3

Воронеж 2022

УДК 621.3.013(075.8)

ББК 31.211я7

Л641

Рецензенты:

*кафедра авиационных систем и комплексов
радионавигации и радиосвязи ФГКВОУ ВО «Военный учебно-научный центр
Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»» (г. Воронеж);
О. В. Пьянков, д-р техн. наук, доцент, заместитель начальника кафедры
инфокоммуникационных систем и технологий
ФГКОУ ВО «Воронежский институт МВД России»*

Литвиненко, В. П.

Л641 Основы теории цепей: учебное пособие: в 3-х частях [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (1,7 Мб) / В. П. Литвиненко, Ю. В. Литвиненко, А. Н. Глушков. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2022. – Ч. 3. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв. – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024x768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

Учебное пособие содержит материал курса лекций по дисциплине «Основы теории цепей». Рассматриваются методы анализа цепей при сложных (негармонических) воздействиях, метод переменных состояния, основы теории синтеза электрических цепей с заданными частотными свойствами, методы анализа нелинейных цепей, цепи с распределенными параметрами. Приводятся примеры расчета и моделирования сигналов и цепей.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 11.03.01 «Радиотехника» (профиль «Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов»), при изучении дисциплины «Основы теории цепей».

Ил. 66. Табл. 1. Библиогр.: 9 назв.

УДК 621.3.013(075.8)

ББК 31.211я7

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

© Литвиненко В. П., Литвиненко Ю. В.,
Глушков А. Н., 2022

© ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический
университет», 2022

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Основы теории цепей» является базовой для специальности «Радиотехника», а также для других профилирующих дисциплин. В третьей части учебного пособия изучаются методы расчета цепей при негармонических воздействиях, синтеза цепей по заданным характеристикам, расчета нелинейных резистивных цепей и длинных линий [1].

При освоении материала необходимо приобрести навыки решения задач по соответствующим разделам [2-4], овладеть основами техники измерений [5]. Современная вычислительная техника предоставляет широкие возможности по расчету [6] и моделированию [7, 8] электрических цепей (пакеты программ WorkBench, MicroCAP и другие). Это направление подготовки специалистов имеет большое самостоятельное значение и является хорошим вспомогательным средством при изучении электрических цепей и сигналов в ходе аудиторных занятий и самостоятельной работы.

По курсу имеется дополнительная литература [9-10].

Изучение теории электрических цепей базируется на курсах высшей математики, раздела «Электричество и магнетизм» курса физики, дисциплине «Моделирование и вычисления на ЭВМ». Представленные в пособии рисунки и таблицы являются авторскими.

1. МЕТОДЫ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ

1.1. Сложные сигналы и цепи

В теории электрических цепей [1 - 4] разработаны мощные методы анализа воздействия гармонического (*простого*) сигнала на линейную цепь, их общее название - метод комплексных амплитуд. Он применим для сложных цепей с большим числом элементов, при этом повышается порядок системы линейных уравнений электрического равновесия с комплексными коэффициентами.

Для негармонических (сложных) сигналов также необходимо использовать универсальные методы расчета.

1.2. Частотный (спектральный) метод

Сложный сигнал можно представить в виде суммы гармоник с помощью **спектров амплитуд и фаз**, и тогда имеется возможность с помощью принципа наложения рассматривать воздействие на цепь каждой гармоники в отдельности с последующим сложением результатов (комплексных амплитуд).

Прохождение через цепь гармонического сигнала описывается комплексным коэффициентом передачи $\dot{K}(j\omega)$.

Для комплексной амплитуды n -й гармоники \dot{U}_{2n} **периодического** сигнала $u_2(t)$ на выходе цепи получим

$$\dot{U}_{2n} = \dot{K}(j\omega)\dot{U}_{1n}, \quad (1.1)$$

где \dot{U}_{1n} - комплексная амплитуда n -й гармоники входного сигнала $u_1(t)$.

Для непериодического сигнала комплексная спектральная плотность $F_2(j\omega)$ выходного сигнала $u_2(t)$ равна

$$F_2(j\omega) = \dot{K}(j\omega)F_1(j\omega), \quad (1.2)$$

где $F_1(j\omega)$ - комплексная спектральная плотность входного сигнала $u_1(t)$.

Рассмотрим четырехполюсник на рис. 1.1,а (ФНЧ) при воздействии периодического сигнала, показанного на рис. 1.1,б.

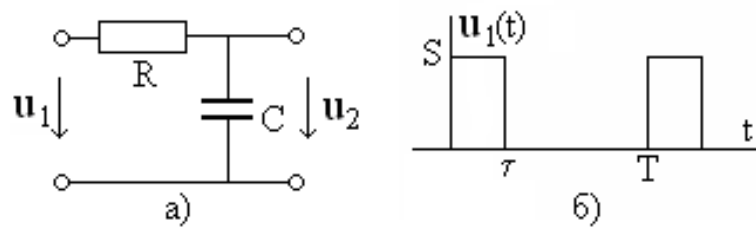


Рис. 1.1

Комплексный коэффициент передачи цепи рис. 1.1,а равен

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (1.3)$$

(проведите расчет самостоятельно).

Комплексная амплитуда n -й гармоники сигнала на рис. 1.1,б определяется выражением (получите эти формулы самостоятельно)

$$\dot{U}_{1n} = \frac{2S}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \exp\left(j\frac{n\omega_1\tau}{2}\right), \quad (1.4)$$

тогда для комплексной амплитуды n -й гармоники выходного сигнала получим

$$U_{2n} = \frac{2S}{n\pi} \cdot \frac{\exp\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)}{1 + jn\omega_1 RC} \cdot \sin\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right). \quad (1.5)$$

Рассмотрим численный пример расчета для входного сигнала $s_1(t)$ при $S = 10$ В, $T = 10^{-3}$ с, $\tau = T/5$ и $RC = 10^{-4}$ с. На рис. 1.2 показана программа на языке MathCAD [6] (повторите расчеты самостоятельно).

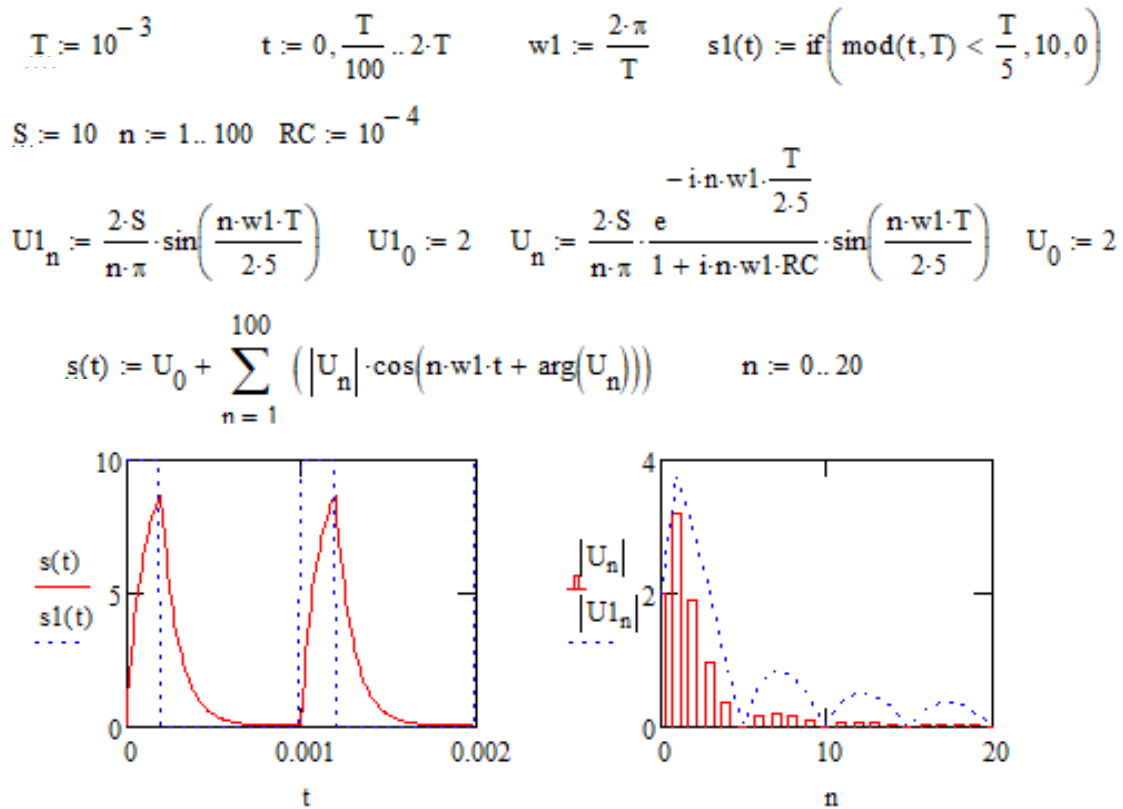


Рис. 1.2

Пунктирные линии соответствуют входному сигналу, а сплошные – выходному. Цепь на рис. 1.1,а является фильтром нижних частот, а полоса пропускания Π равна

$$\Pi = \frac{1}{RC}. \quad (1.6)$$

С ростом произведения RC полоса пропускания фильтра уменьшается, подавляются высшие гармоники спектра сигнала, что приводит к «затягиванию» его фронта и среза и сглаживанию импульсов.

1.3. Операторный метод

Для входных непериодических сигналов, удовлетворяющих условию преобразования Лапласа

$$u_{BX}(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad (1.7)$$

можно использовать операторный метод расчета выходного сигнала четырех-полюсника, свойства которого описываются операторным коэффициентом передачи $K(p)$.

Для входного сигнала определяется изображение по Лапласу $U_{BX}(p)$, тогда изображение выходного сигнала равно

$$U_{ВЫХ}(p) = K(p) \cdot U_{BX}(p), \quad (1.8)$$

и по таблицам преобразования Лапласа можно найти его оригинал $u_{ВЫХ}(t)$.

Рассмотрим пример цепи на рис. 1.3,а при воздействии экспоненциально-го входного импульса

$$u_{BX}(t) = U_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot t),$$

показанного на рис. 1.3,б.

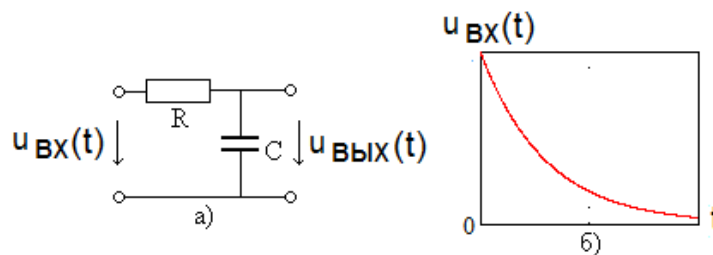


Рис. 1.3

Изображение входного сигнала равно

$$U_{BX}(p) = U_0 \frac{1}{p + \alpha},$$

а операторный коэффициент передачи имеет вид

$$K(p) = \frac{1}{1 + pRC}$$

(проведите расчеты самостоятельно). Тогда для изображения выходного сигнала получим

$$U_{ВЫХ}(p) = K(p) \cdot U_{BX}(p) = U_0 \frac{1}{p + \alpha} \cdot \frac{1}{1 + pRC} = \frac{U_0}{RC} \frac{1}{(p + \alpha) \cdot \left(p + \frac{1}{RC}\right)}.$$

По таблицам преобразования Лапласа

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} \Leftrightarrow \frac{1}{a-b} [e^{-bt} - e^{-at}],$$

тогда, полагая $a = \alpha$ и $b = 1/RC$, получим

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{U_0}{RC} \frac{1}{\alpha - \frac{1}{RC}} \left[\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - \exp(-\alpha t) \right] = U_0 \frac{1}{\alpha RC - 1} \left[\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - \exp(-\alpha t) \right].$$

График $u_{\text{ВЫХ}}(t)$ показан на рис. 1.4.

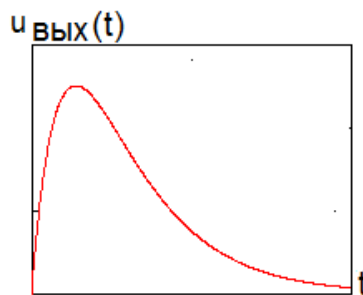


Рис. 1.4

1.4. Временной метод

1.4.1. Временные характеристики цепи

Свойства электрической цепи могут быть описаны во временной области в виде переходной $h(t)$ и импульсной $g(t)$ характеристик.

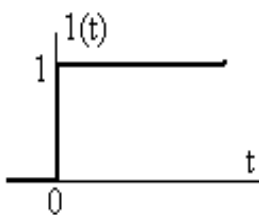


Рис. 1.5

Переходная характеристика цепи $h(t)$ – это отношение реакции цепи на входное воздействие в виде единичной функции (функции Хевисайда) к единице размерности входного воздействия (1 В или 1 А). График единичной функции показан на рис. 1.5.

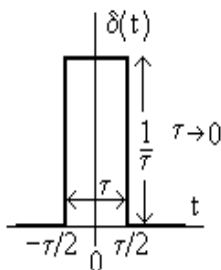


Рис. 1.6

Импульсная характеристика цепи $g(t)$ – это отношение реакции цепи на входное воздействие в виде единичного импульса (функции Дирака или δ -функции) к единице размерности входного воздействия (1 В или 1 А). График δ -функции Дирака показан на рис. 1.6, она представляет собой прямоугольный импульс длительностью τ и амплитудой $1/\tau$ при $\tau \rightarrow 0$, ее размерность равна 1/с.

Входное воздействие имеет размерность сигнала (1 В или 1 А), деленную на секунду.

Переходная характеристика $h(t)$ **безразмерна**, а импульсная $g(t)$ измеряется в **1/с**.

Временные характеристики цепи определяются через операторный коэффициент передачи $K(p)$ с помощью преобразования Лапласа:

- импульсная характеристика является оригиналом операторного коэффициента передачи,

$$g(t) \leftrightarrow K(p); \quad (1.9)$$

- переходная характеристика является оригиналом операторного коэффициента передачи, деленного на p ,

$$h(t) \leftrightarrow H(p) = \frac{K(p)}{p}. \quad (1.10)$$

В качестве примера рассмотрим цепь, показанную на рис. 1.7,а.

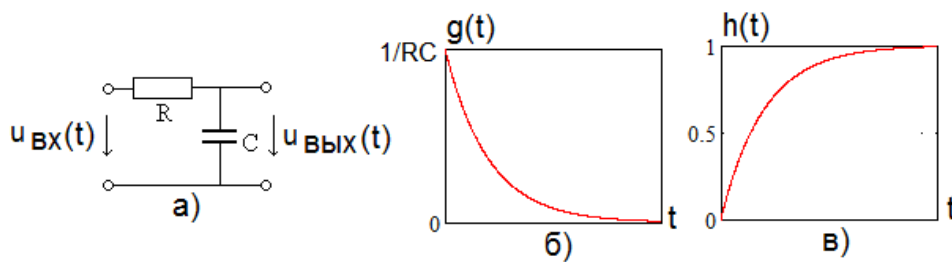


Рис. 1.7

Ее операторный коэффициент передачи определяется выражением

$$K(p) = \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{RC}},$$

тогда

$$H(p) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{RC} \right)}.$$

В результате по таблице преобразования Лапласа получим

$$g(t) = \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right),$$

$$h(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Переходная и импульсная характеристики связаны соотношением (удобно для проверки правильности расчетов)

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (1.11)$$

Графики временных характеристик показаны на рис. 1.7б и 1.7в. При воздействии в момент времени $t=0$ на вход цепи рис. 1.7а скачка напряжения в 1 В емкость заряжается по экспоненциальному закону до напряжения 1 В. При подаче на вход сигнала в виде δ -функции (бесконечно короткого импульса) емкость мгновенно заряжается до напряжения $1/RC$, а затем экспоненциально разряжается.

Переходная и импульсная характеристики используются при временном методе анализа реакции цепи на сложное входное воздействие.

1.4.2. Интеграл Дюамеля

Для выходного сигнала четырехполюсника можно записать

$$u_{ВЫХ}(t) = u_{ВХ}(0)h(t) + \int_0^t u'_{ВХ}(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (1.12)$$

или

$$u_{ВЫХ}(t) = u_{ВХ}(t)h(0) + \int_0^t u_{ВХ}(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (1.13)$$

где не требуется дифференцирования входного сигнала. Это удобно, если входной сигнал изменяется скачкообразно.

В качестве примера рассмотрим цепь на рис. 1.8,а при воздействии на нее сигнала $u_{ВХ}(t) = U_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$, показанного на рис. 1.8,б.

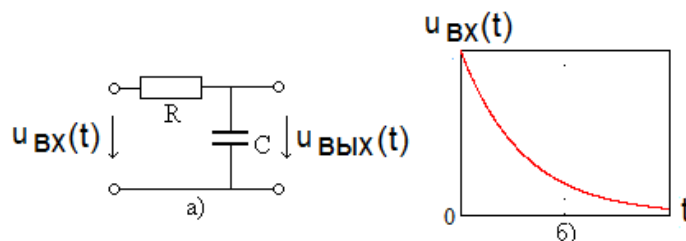


Рис. 1.8

Полученные ранее переходная и импульсная характеристики имеют вид

$$g(t) = \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right),$$

$$h(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right),$$

и с учетом $h(0) = 0$ получим

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t \exp(-a\tau) \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t-\tau}{RC}\right) d\tau.$$

Учитывая, что переменная t не зависит от переменной интегрирования и соответствующая экспонента может быть вынесена за знак интеграла, получим

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(t) &= \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \int_0^t \exp\left[\tau\left(\frac{1}{RC} - a\right)\right] d\tau = \\ &= \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \frac{1}{\frac{1}{RC} - a} \left\{ \exp\left[t\left(\frac{1}{RC} - a\right)\right] - 1 \right\} = \\ &= \frac{1}{1 - aRC} \left[\exp(-at) - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]. \end{aligned}$$

Это выражение совпадает с полученным операторным методом, соответствующий график показан на рис. 1.4.

Как видно, временной метод является весьма эффективным для расчета реакции цепи на сложное входное воздействие.

1.5. Матричные методы расчета

1.5.1. Применение ЭВМ для расчета цепей

При расчете сложных электрических цепей необходимо применение ЭВМ. В этом случае необходимо формализовать описание схемы цепи и уравнений электрического равновесия. Для этого широко используется матричное описание цепи.

1.5.2. Топологические матрицы цепи и графы

Топологические матрицы описывают топологию цепи – характер соединения ее элементов (ветвей). В цепи выделяются все узлы и соединяющие их ветви (реальные источники объединяются в **одну ветвь**). Все ветви и узлы нумеруются, m - номер узла, n - номер ветви и в них задаются одинаковые **положительные направления** тока и напряжения. Выбирается **базисный** узел, ему присваивается номер 0.

Полная матрица инцидентностей (соединений) имеет вид рис. 1.9, где элемент $a_{mn} = 1$, если m -я ветвь инцидентна узлу n и направлена **от него**, $a_{mn} = -1$, если m -я ветвь инцидентна узлу n и направлена **к нему** и $a_{mn} = 0$, если m -я ветвь **не инцидентна** узлу n .

$$[A] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & p \leftarrow \text{номер ветви} \end{matrix} \\ \begin{matrix} q-1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \uparrow \begin{matrix} \text{номер узла} \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{(q-1)1} & a_{(q-1)2} & \dots & a_{(q-1)p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0p} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Рис. 1.9

В качестве примера рассмотрим цепь, показанную на рис. 1.10,а.

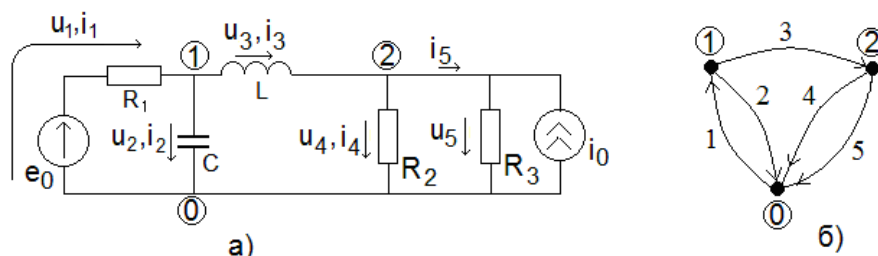


Рис. 1.10

В цепи 3 узла и 5 ветвей (ветвь с источником тока и сопротивлением R_3 образует реальный источник тока). **Ветви с идеальным источником тока не используются.** Для ветвей обозначены их токи и напряжения с соответствующими номерами и заданы положительные направления. Полная матрица инцидентностей имеет вид

$$[A_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

В полной матрице инцидентий сумма элементов столбца равна нулю (в нем по одному элементу 1 и -1).

Полную матрицу инцидентий можно отобразить **направленным графом**, показанным на рис. 1.10,б, в котором линии со стрелками указывают ветви цепи с положительными направлениями токов и напряжений, а узлы цепи отображаются узлами графа. Граф является топологическим отображением структуры цепи.

Полная матрица избыточна, так как при удалении любой строки она однозначно восстанавливается по остальным строкам. Поэтому на практике используют **сокращенную матрицу инцидентий**, удаляя из полной матрицы нулевую строку. Для рассматриваемого примера на рис. 1.10а получим сокращенную матрицу инцидентий в виде

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Умножая сокращенную матрицу инцидентий на матрицу-столбец токов ветвей i_m , $m = \overline{1, p}$, получим систему уравнений первого закона Кирхгофа в матричной форме

$$[A] \times [i] = 0 \quad (1.14)$$

или

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{(q-1)1} & a_{(q-1)2} & \dots & a_{(q-1)p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_p \end{bmatrix} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^p a_{mn} i_n = 0, \quad m = \overline{1, (q-1)}.$$

Для графа цепи вводится понятие **контура** (замкнутого соединения ветвей). **Деревом графа** называют часть графа (подграф), содержащую все узлы исходного графа и ни одного контура, оно формируется последовательным удалением ветвей, образующих контуры. Очевидно возможны различные эквивалентные деревья графа.

Для графа на рис. 1.10,б (он повторно показан на рис. 1.11,а) дерево представлено на рис. 1.11,б (цифрами в кружках отмечены узлы, а без кружков – ветви). Можно построить и другие варианты дерева графа, результаты расчета при этом не изменятся.

Ветви, вошедшие в дерево графа называют **ветвями дерева** (в примере их

номера 3 и 5), а не вошедшие – **хордами** (связями), в примере их номера 1, 2 и 4.

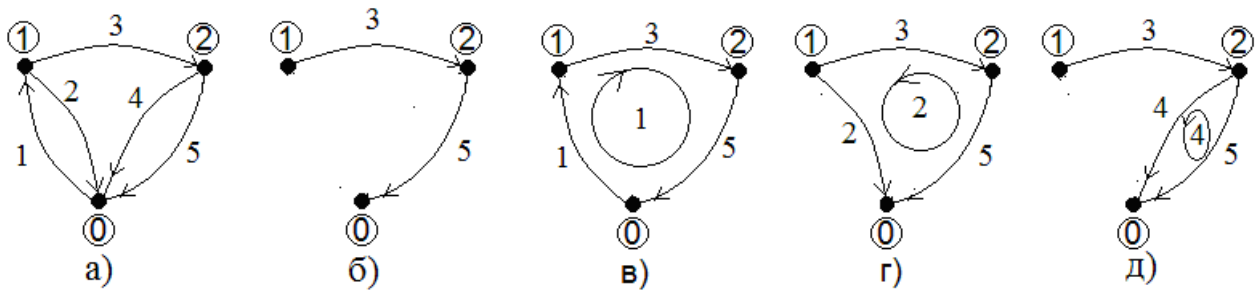


Рис. 1.11

Дерево графа имеет q узлов, $(q-1)$ ветвей дерева и $p-q+1$ хорд. В ветви графа не включают ветви с идеальными источниками тока, используются реальные источники. Добавление к дереву графа одной хорды создает контур, который называют **главным контуром**, их число равно $p-q+1$, в примере они показаны на рис. 1.11,в – 1.11,д. Главные контуры обозначены кружками со стрелками, задающими направление обхода, внутри указан номер контура, равный номеру хорды.

Сечением графа называется минимальная совокупность ветвей, удаление которой разделяет множество узлов на **два несвязанных подмножества**.

Главным сечением называется сечение, в которое входит только **одна ветвь дерева**, а остальные являются хордами. Число главных сечений равно $(q-1)$. Примеры главных сечений для дерева на рис. 1.11,б показаны на рис. 1.12.

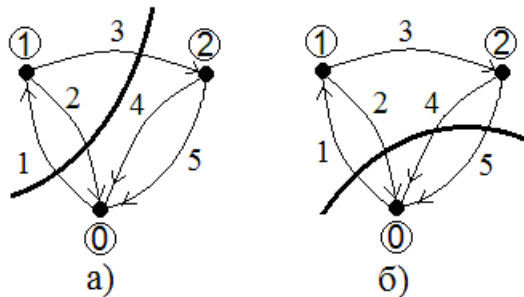


Рис. 1.12

Главным сечениям графа присваивают номера ветвей дерева (3 и 5 на рис. 1.12,а и рис. 1.12,б соответственно) и направления, соответствующие ветвям дерева. Главные сечения и главные контуры цепи можно представить в матричной форме. **Матрица главных сечений** имеет вид

$$[Q] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & p \leftarrow \text{номер ветви} \end{matrix} \\ \begin{matrix} q-1 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} q_{(q-1)1} & q_{(q-1)2} & \dots & q_{(q-1)p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2p} \\ q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1p} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

↑
номер сечения

где $q_{ij} = 1$, если j -я ветвь входит в состав i -го сечения и ее ориентация **совпадает** с ориентацией сечения, $q_{ij} = -1$, если j -я ветвь входит в состав i -го сечения и ее ориентация **не совпадает** с ориентацией сечения, $q_{ij} = 0$, если j -я ветвь **не входит** в состав i -го сечения. Здесь номера сечений перебираются по порядку.

Для примера на рис. 1.10,а получим

$$[Q] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений по первому закону Кирхгофа имеет вид

$$[Q] \times [i] = 0, \quad (1.15)$$

где $[i]$ - вектор-столбец токов ветвей.

Матрица главных контуров имеет вид

$$[B] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & p \leftarrow \text{номер ветви} \end{matrix} \\ \begin{matrix} p-q+1 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} b_{(p-q+1)1} & b_{(p-q+1)2} & \dots & b_{(p-q+1)p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

↑
номер контура

где $b_{ij} = 1$, если j -я ветвь входит в состав i -го контура и ее ориентация **совпадает** с ориентацией контура, $b_{ij} = -1$, если j -я ветвь входит в состав i -го контура и ее ориентация **не совпадает** с ориентацией контура, $b_{ij} = 0$, если j -я ветвь **не входит** в состав i -го контура. Здесь номера контура перебираются по порядку.

Для примера на рис. 1.10 получим

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений второго закона Кирхгофа имеет вид

$$[B] \times [u] = 0, \quad (1.16)$$

где $[u]$ - матрица-столбец напряжений ветвей.

Если в ветви присутствует источники тока и напряжения, то они входят в состав напряжений и токов ветвей.

Компонентные уравнения для ветвей цепи без источников и при нулевых начальных условиях (повторите необходимый материал ОТЦ) для мгновенных значений токов и напряжений можно записать в виде табл. Если ввести операторы дифференцирования и интегрирования

$$p = \frac{d}{dt}, \quad p^{-1} = \frac{1}{p} = \int_{-\infty}^t d\tau,$$

то компонентные уравнения можно записать в операторной форме в той же табл.

Элемент	Для напряжений	Для токов
R	$u = Ri$	$i = \frac{1}{R}u$
L	$u = L \frac{di}{dt} \quad U(p) = pLI(p)$	$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad I(p) = \frac{1}{pL} U(p)$
C	$u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad U(p) = \frac{1}{pC} I(p)$	$i = C \frac{du}{dt} \quad I(p) = pCU(p)$

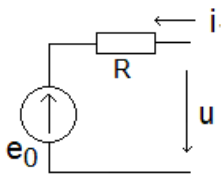


Рис. 1.13

Для ветви с источником напряжения вида рис. 1.13 при указанных положительных направлениях можно записать

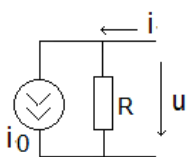


Рис. 1.14

$$u = Ri + e_0 \quad \text{или} \quad i = \frac{1}{R}u - \frac{1}{R}e_0.$$

Для ветви с источником тока вида рис. 1.14 при указанных положительных направлениях можно записать

$$u = Ri - Ri_0 \quad \text{или} \quad i = \frac{1}{R}u + i_0.$$

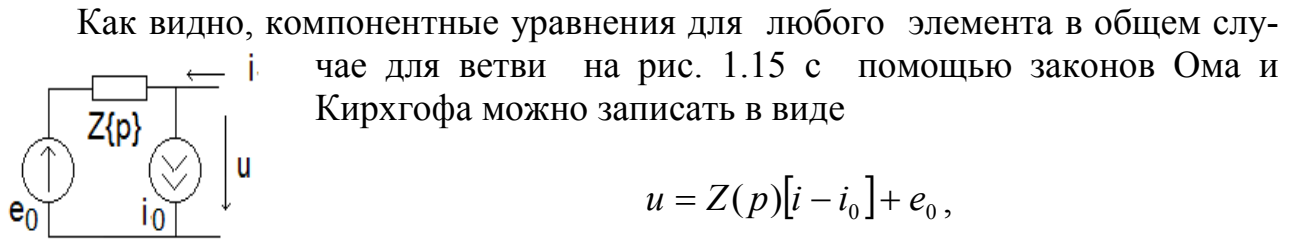


Рис. 1.15

$$u = Z(p)[i - i_0] + e_0,$$

$$i = Y(p)[u - e_0] + i_0,$$

где $Z(p)$ и $Y(p) = 1/Z(p)$ - операторные сопротивление и проводимость элемента.

Если рассматриваются мгновенные значения токов $i(t)$ и $u(t)$ напряжений, то под переменной p понимаем операторы

$$p = \frac{d}{dt}, \quad p^{-1} = \frac{1}{p} = \int_{-\infty}^t d\tau.$$

Для изображений по Лапласу токов $I(p)$ и напряжений $U(p)$ величины $Z(p)$ и $Y(p)$ - операторные сопротивление и проводимость, если рассматриваются гармонические токи и напряжения, то речь идет об их комплексных амплитудах, сопротивлениях и проводимостях.

Величины e_0 и i_0 - это либо источники напряжения и тока, либо начальные условия для реактивных элементов.

Для **всех ветвей** цепи компонентные уравнения можно записать в матричной форме

$$[u] = [Z] \times \{[i] - [i_0]\} + [e_0], \quad (1.17)$$

где $[u]$ и $[i]$ - матрицы-столбцы (векторы) напряжений и токов ветвей, $[e_0]$ и $[i_0]$ - матрицы-столбцы (векторы) ЭДС и токов источников или начальных условий в ветвях, а $[Z]$ - квадратная диагональная матрица сопротивлений ветвей,

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Z_{pp} \end{bmatrix},$$

где Z_{ii} сопротивление i -й ветви.

Рассмотрим показанную на рис. 1.10,а цепь (рис. 1.16).

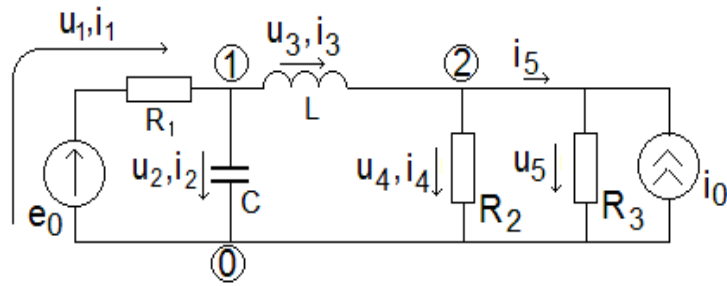


Рис. 1.16

Ранее были получены сокращенная матрица инциденций

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

матрица главных сечений

$$[Q] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и матрица главных контуров

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Введем матрицы напряжений и токов ветвей

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}, \quad [i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}.$$

Компонентные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
u_1 &= R_1 i_1 + e_0, \\
u_2 &= \frac{1}{pC} i_2, \\
u_3 &= pL i_3, \\
u_4 &= R_2 i_4, \\
u_5 &= R_3 (i_5 + i_0).
\end{aligned}$$

Введем матрицы ЭДС и токов источников

$$[e] = \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad [i_0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i_0 \end{bmatrix},$$

и матрицу сопротивлений ветвей

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/pC & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix}.$$

Тогда в матричной форме компонентные уравнения из

$$[u] = [Z] \times \{[i] - [i_0]\} + [e_0]$$

примут вид

$$[u] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/pC & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i_0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и далее

$$[u] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/pC & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 - i_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 i_1 + e_0 \\ (1/pC) \cdot i_2 \\ pL \cdot i_3 \\ R_2 i_4 \\ R_3 (i_5 - i_0) \end{bmatrix}.$$

Для матричных уравнений первого закона Кирхгофа $[Q] \times [i] = 0$ получим 2 уравнения

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогично для уравнений второго закона Кирхгофа $[B] \times [u] = 0$ (три уравнения)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/pC & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i_0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Всего получаем $p = 5$ уравнений для токов ветвей.

Таким образом, матричные методы формирования уравнений электрического равновесия цепи с использованием элементов теории графов позволяют получить алгоритмы, удобные для формирования уравнений и расчета цепей с использованием ЭВМ.

Рассмотренные матричные методы могут использоваться для автоматизированного формирования и решения уравнений электрического равновесия цепи. На этой основе можно получить **интегродифференциальные** уравнения, трактуя переменную p как оператор дифференцирования, и проводить анализ нестационарных процессов.

Если необходимо исследовать стационарные гармонические процессы с частотой ω , то переменную p необходимо заменить выражением

$$p = j\omega.$$

2. МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

2.1. Методы анализа нестационарных процессов

Для расчета нестационарных (переходных) процессов в теории цепей широко используются ранее изученные классический и операторных методы. Для сложных цепей целесообразно разработать методы, удобные для использования современных средств вычислительной техники. Примером может служить метод переменных состояния.

2.2. Метод переменных состояния

Метод переменных состояния базируется на системе уравнений для **переменных состояния цепи**, в качестве которых используются **токи индуктивностей и напряжения емкостей** (они подчиняются законам коммутации и полностью определяют энергетическое состояние цепи в любой момент времени),

$$W_L = \frac{Li_L^2(t)}{2}, \quad W_C = \frac{Cu_C^2(t)}{2}.$$

Уравнения состояния содержат переменные состояния $u_C(t)$, $i_L(t)$ и их **первые** производные. Число уравнений равно порядку цепи. Уравнения записываются в **канонической форме**, в которой в левой части содержатся только первые производные переменных состояния, а в правой части – первые степени этих переменных. Такая структура уравнений удобна для их решения численными методами на ЭВМ.

В качестве примера рассмотрим цепь, показанную на рис. 2.1.

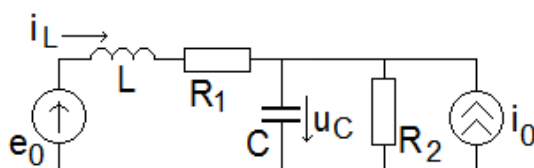


Рис. 2.1

По законам Ома и Кирхгофа можно записать

$$L \frac{di_L}{dt} + R_1 i_L + u_C = e_0,$$

$$C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R_2} - i_L - i_0 = 0,$$

тогда для первых производных получим

$$L \frac{di_L}{dt} = -R_1 i_L - u_C + e_0,$$

$$C \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{R_2} + i_L + i_0,$$

или в канонической форме

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1}{L} i_L - \frac{1}{L} u_C + \frac{1}{L} e_0,$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L - \frac{1}{R_2 C} u_C + \frac{1}{C} i_0.$$

Полученная система дифференциальных уравнений в канонической форме может численно решаться методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Эта процедура реализована в программе MathCAD [6] функцией `odesolve(...)`, для рассматриваемого примера программа показана на рис. 2.2 (проделайте вычисления самостоятельно).

При численных расчетах необходимо грамотно выбирать интервал и шаг интегрирования. В рассматриваемой функции конечный интервал интегрирования T_0 должен быть целым числом. При указанных параметрах цепи в ней возможны резонансные явления на частоте

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 159 \text{ кГц},$$

следовательно, шаг дискретизации токов и напряжений при решении дифференциальных уравнений должен быть около 1 мкс. В этом случае текущее время в решениях целесообразно измерять в мкс, то есть необходимо ввести масштаб времени $t' = 10^6 t$. При дифференцировании этот множитель появляется в системе дифференциальных уравнений (рис. 2.2).

2.3. Матричная запись метода переменных состояния

Систему уравнений метода переменных состояния можно представить в матричной форме. В рассмотренном примере уравнения имеют вид

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1}{L} i_L - \frac{1}{L} u_C + \frac{1}{L} e_0,$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{R_2C}u_C + \frac{1}{C}i_0.$$

$$\begin{aligned} T0 &:= 100 & R1 &:= 10 & R2 &:= 10000 & L &:= 10^{-3} & C &:= 10^{-9} \\ E0 &:= 10 & I0 &:= 1 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Given

$$\frac{d}{dt}i_L(t) = \frac{1}{10^6} \cdot \left(-\frac{R1}{L} \cdot i_L(t) - \frac{1}{L} \cdot u_C(t) + \frac{1}{L} \cdot E0 \right) \quad i_L(0) = 0$$

$$\frac{d}{dt}u_C(t) = \frac{1}{10^6} \cdot \left(\frac{1}{C} \cdot i_L(t) - \frac{1}{R2 \cdot C} \cdot u_C(t) + \frac{1}{C} \cdot I0 \right) \quad u_C(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{i} \\ \ddot{u} \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} i_L \\ u_C \end{pmatrix}, t, T0, 1 \cdot 10^4 \right] \quad t1 := 0, \frac{T0}{1 \cdot 10^4} .. T0$$

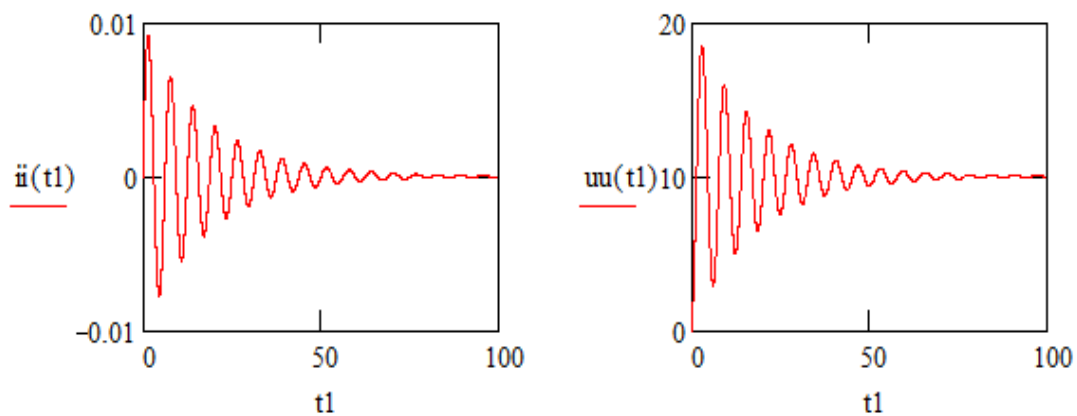


Рис. 2.2

В матричной форме получим

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R2C} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_0 \\ e_0 \end{bmatrix}.$$

3. СИСТЕМНЫЕ ФУНКЦИИ И СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

3.1. Синтез цепи

В радиотехнике часто необходимо спроектировать электрическую цепь с заданными свойствами, например, двухполосник с заданной зависимостью сопротивления от частоты или четырехполосника (фильтра) с заданной АЧХ. Требуется разработать схему цепи и определить параметры элементов.

Синтез цепи проводится в **два этапа**.

Первый этап – аппроксимация характеристик цепи. Прежде всего выбирается характеристика цепи, которая **удовлетворяет** требованиям к синтезируемой цепи. Выбирается форма записи этих характеристик, вид функций, полиномов и др.

Второй этап – реализация цепи (ее схемы и параметров элементов), обеспечивающей заданные характеристики.

Синтез может проводиться по временным или частотным характеристикам. В основе синтеза цепи обычно лежат **операторные** характеристики цепи (сопротивления, коэффициенты передачи), которые называют **системными функциями**.

Синтез цепи может проводиться при заданной структуре проектируемой цепи (например, фильтра) или для выбранного вида системной функции (например, на основе полиномов Чебышева).

В программе MicroCAP реализована процедура синтеза частотного фильтра с заданной АЧХ (познакомьтесь с ее возможностями).

3.2. Системные функции цепи

Электрическая цепь описывается соотношениями, связывающими между собой воздействия на цепь (сигналы источников, входные сигналы) и выбранные (выходные) сигналы. Эта связь может рассматриваться в частотной, временной или операторной форме и одна форма может преобразовываться в другую. Наиболее универсальной и удобной является **операторная** форма взаимосвязи сигналов, и соотношения между ними называют **системной функцией цепи**. Применительно к двухполоснику в качестве **системной функции** чаще всего рассматривается его **операторное сопротивление** $Z(p)$ или **проводимость** $Y(p)$. Для четырехполосника обычно рассматривают **операторный коэффициент передачи** $H(p)$ напряжения (или тока).

3.3. Положительная вещественная функция

Операторные характеристики линейной цепи можно представить в виде дробнорациональной функции (отношения двух полиномов) с вещественными

коэффициентами

$$H(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i p^i}{\sum_{i=0}^m b_i p^i}.$$

Чтобы она соответствовала входному сопротивлению (или проводимости, коэффициенту передачи) **физически реализуемой цепи**, необходимо и достаточно, чтобы $H(p)$ была **положительной вещественной функцией (ПВФ)**.

Функция $H(p)$ является **положительной вещественной функцией комплексной переменной p** , если действительная часть $H(p)$ неотрицательна при неотрицательной действительной части p ,

$$\operatorname{Re}\{H(p)\} \geq 0 \text{ при } \operatorname{Re}\{p\} \geq 0,$$

а мнимая часть равна нулю при действительных значениях p

$$\operatorname{Im}\{H(p)\} = 0 \text{ при } \operatorname{Im}\{p\} = 0.$$

Чтобы функция $H(p)$ была положительной вещественной функцией, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) коэффициенты полиномов числителя a_i , $i = \overline{1, n}$ и знаменателя b_j , $j = \overline{1, m}$ вещественны и неотрицательны

$$a_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad b_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m};$$

2) степени полиномов числителя n и знаменателя m различаются не более, чем на единицу

$$|n - m| \leq 1, \text{ иначе } n - m = -1, 0 \text{ или } 1;$$

3) нули p_{0i} , $i = \overline{1, n}$ и полюсы $p_{\infty j}$, $j = \overline{1, m}$ $H(p)$ не могут располагаться в правой комплексной полуплоскости

$$\operatorname{Re}\{p_{0i}\} \leq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \operatorname{Re}\{p_{\infty j}\} \leq 0, \quad j = \overline{1, m};$$

4) мнимые нули и полюсы на мнимой оси должны быть **некратными**;

5) вещественная часть $H(p)$ должна быть неотрицательной на мнимой оси

переменной p ,

$$\operatorname{Re}\{H(p)\} \geq 0 \text{ при } \operatorname{Re}\{p\} = 0.$$

3.4. Примеры системной функции

Рассмотрим пример двухполюсника, показанного на рис. 3.1.

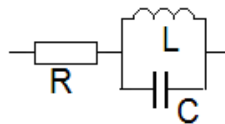


Рис. 3.1

Его операторное сопротивление равно

$$Z(p) = R + \frac{pL \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = R + \frac{pL}{p^2LC + 1} = \frac{p^2RLC + pL + R}{p^2LC + 1} = \frac{Ap^2 + Bp + D}{Ep^2 + F}.$$

Это и есть **системная функция** цепи, удовлетворяющая условиям физической реализуемости (убедитесь в этом самостоятельно).

Аналогично можно рассматривать операторную проводимость двухполюсника, равную

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{p^2LC + 1}{p^2RLC + pL + R} = \frac{Ep^2 + F}{Ap^2 + Bp + D}.$$

Цепь, не содержащая активных сопротивлений, называется **реактивной**, а ее системная функция – **реактансной**. Пример цепи показан на рис. 3.2.

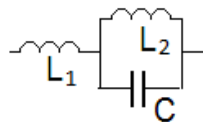


Рис. 3.2

Сопротивление цепи на рис. 3.2 равно

$$Z(p) = pL_1 + \frac{pL_2 \frac{1}{pC}}{pL_2 + \frac{1}{pC}} = pL_1 + \frac{pL_2}{p^2L_2C + 1} = p \frac{p^2L_1L_2C + L_1 + L_2}{p^2L_2C + 1} = p \frac{Ap^2 + B}{Dp^2 + E}.$$

Полюсы реактансной функции находятся на положительной части **мнимой** оси.

3.5. Синтез двухполюсников

3.5.1. Метод Фостера

Заданная **реактансная** системная функция представляется в виде суммы простых функций, соответствующих простейшим цепям. Для **сопротивления** получим

$$Z(p) = a_1 p + \frac{a_2}{p} + \sum_{k=1}^N \frac{b_k p}{p^2 + \omega_k^2}, \quad (3.1)$$

где N - **число пар** комплексно-сопряженных полюсов. Как видно, соответствующая цепь представляет собой последовательное соединение индуктивности $L_0 = a_1$, емкости $C_0 = 1/a_2$ и N параллельных колебательных контуров (LC цепей) с резонансными частотами ω_k

$$Z_k = \frac{\frac{L_k}{C_k}}{pL_k + \frac{1}{pC_k}} = \frac{pL_k}{p^2 L_k C_k + 1} = \frac{\frac{1}{C_k} p}{p^2 + \frac{1}{L_k C_k}} = \frac{b_k p}{p^2 + \omega_k^2},$$

тогда

$$C_k = \frac{1}{b_k} \quad \text{и} \quad L_k = \frac{b_k}{\omega_k^2}.$$

Разложение (3.1) соответствует первой канонической схеме Фостера, показанной на рис. 3.3.

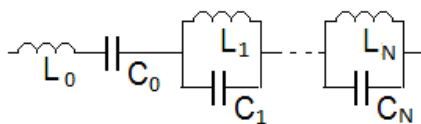


Рис. 3.3

Для определения параметров разложения заданной системной функции сопротивления

$$Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$$

используют соотношения

$$a_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \frac{Z(p)}{p} \right\},$$

$$a_2 = \operatorname{Res}_{p=0} \langle Z(p) \rangle = \left\{ \frac{N(p)}{dM(p)/dp} \right\}_{p=0},$$

$$a_k = 2 \operatorname{Res}_{p=\pm j\omega_k} \langle Z(p) \rangle = 2 \left\{ \frac{N(p)}{dM(p)/dp} \right\}_{p=\pm j\omega_k},$$

где $p=0$ и $p=\pm j\omega_k$ - **полюсы системной функции** (если они имеются).

Например, для операторного сопротивления вида

$$Z(p) = p \frac{Ap^2 + B}{Dp^2 + E} = \frac{Ap^3 + Bp}{Dp^2 + E} = \frac{N(p)}{M(p)}$$

полюсы системной функции равны

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{E}{D}} = \pm j\omega_1, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{E}{D}},$$

и образуют **одну комплексно-сопряженную пару** (E и D - действительные положительные числа).

Для коэффициента a_1 получим

$$a_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \frac{Z(p)}{p} \right\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \frac{Ap^2 + B}{Dp^2 + E} \right\} = \frac{A}{D}.$$

Величина a_1 определяет индуктивность $a_1 = L_0$,

$$L_0 = \frac{A}{D}.$$

Полюс $p=0$ а значит и коэффициент a_2 **отсутствует**.

Для коэффициента b_1 получим ($\operatorname{Res}_{p=p_1} \langle Z(p) \rangle$ - вычет функции $Z(p)$ в полюсе $p=p_1$)

$$\begin{aligned}
 b_1 = 2 \operatorname{Res}_{p=p_1} \langle Z(p) \rangle &= 2 \left\{ \frac{N(p)}{dM(p)/dp} \right\}_{p=\pm o\omega_1} = 2 \left\{ \frac{Ap^3 + Bp}{2Dp} \right\}_{p=\pm o\omega_1} = \\
 &= \left\{ \frac{Ap^2 + B}{D} \right\}_{p=\pm o\omega_1} = \frac{A \left(-\frac{E}{D} \right) + B}{D} = \frac{BD - AE}{D^2}.
 \end{aligned}$$

Обратная ей величина является емкостью параллельного соединения $L_1 C_1$ элементов

$$C_1 = \frac{1}{b_1} = \frac{D^2}{BD - AE}, \quad L_1 = \frac{b_1}{\omega_1^2} = \frac{BD - AE}{D^2} \cdot \frac{D}{E} = \frac{BD - AE}{DE}.$$

Схема синтезированной цепи имеет вид рис. 3.2.

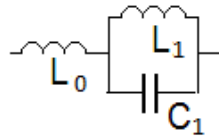


Рис. 3.4

Из выражения для сопротивления схемы рис. 3.2 вида

$$Z(p) = p \frac{p^2 L_1 L_2 C + L_1 + L_2}{p^2 L_2 C + 1} = p \frac{Ap^2 + B}{Dp^2 + E}$$

определим $A = L_1 L_2 C$, $B = L_1 + L_2$, $D = L_2 C$ и $E = 1$, тогда для схемы рис. 3.4 получим те же параметры, что и в цепи рис. 3.2.

При синтезе цепи по ее операторной проводимости $Y(p)$ реализуется вторая каноническая схема Фостера, показанная на рис. 3.5.

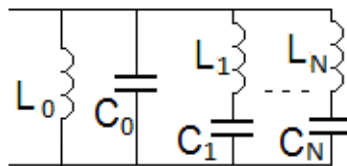


Рис. 3.5

3.5.2. Метод Кауэра

Метод Кауэра предполагает представление системной функции (проводимости или сопротивления) в виде цепных дробей вида, например

$$Z(p) = pL_1 + \frac{1}{pC_1 + \frac{1}{pL_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

которой соответствует цепь на рис. 3.6,а. Возможны и другие варианты разложения и синтеза (например, рис. 3.6,б).

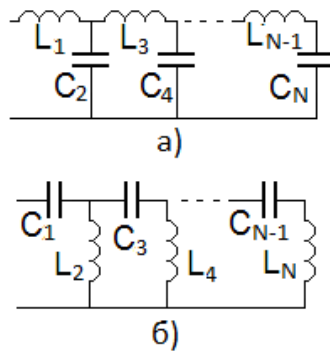


Рис. 3.6

Например, для операторного сопротивления вида (для схемы рис. 3.2, при $A = L_1L_2C$, $B = L_1 + L_2$, $D = L_2C$ и $E = 1$)

$$Z(p) = p \frac{Ap^2 + B}{Dp^2 + E} = \frac{Ap^3 + Bp}{Dp^2 + E},$$

Разделив полином числителя на полином знаменателя, получим

$$\frac{Ap^3 + Bp}{Dp^2 + E} = \frac{A}{D}p + \frac{\frac{BD - AE}{D}p}{Dp^2 + E} = \frac{A}{D}p + \frac{1}{\frac{D^2}{BD - AE}p + \frac{1}{\frac{BD - AE}{E}p}}.$$

В результате синтеза получим цепь на рис. 3.6,а, соответствующую цепи на рис. 3.2.

3.6. Синтез четырехполюсников

Синтез четырехполюсника чаще всего проводится по заданным границам АЧХ, как для примера показано на рис. 3.7, где зачерненная область отображает зону, в которой должна находиться АЧХ синтезируемой цепи.

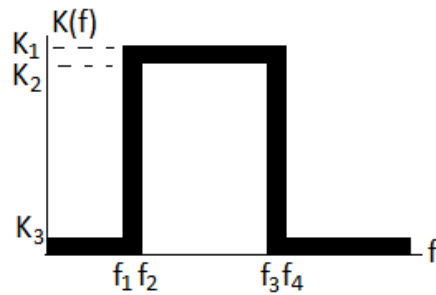


Рис. 3.7

Вариант четырехполюсника (фильтр сосредоточенной селекции – ФСС) показан на рис. 3.8.

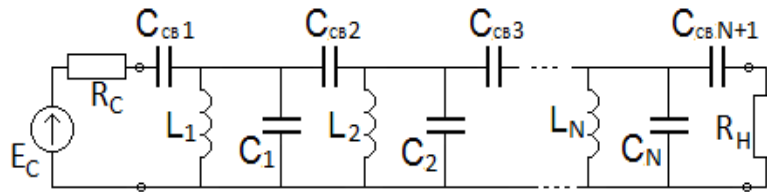


Рис. 3.8

Синтез четырехполюсника – сложная задача, требующая сложных и точных расчетов. Выполняется, например, в программе MicroCAP [7] или Workbench [8].

3.7. Пример синтеза четырехполюсника в программе MicroCAP

В режиме «Создание» и далее «Пассивные фильтры» выбран фильтр Чебышева и установлены требуемые параметры, как показано на рис. 3.9:

- центральная частота 1 МГц;
- полоса пропускания на уровне -3 дБ 10 кГц;
- полоса подавления сигнала на уровне 25 дБ 20 кГц.

Полученная модель фильтра показана на рис. 3.10.

В цепь включен источник V1 входного сигнала с внутренним сопротивлением $R_S=50$ Ом, сопротивление нагрузки R_L также равно 50 Ом.

Синтезированный фильтр отличается от показанного на рис. 3.8, вместо емкости связи используется последовательный колебательный контур. Результат моделирования АЧХ показан на рис. 3.11.

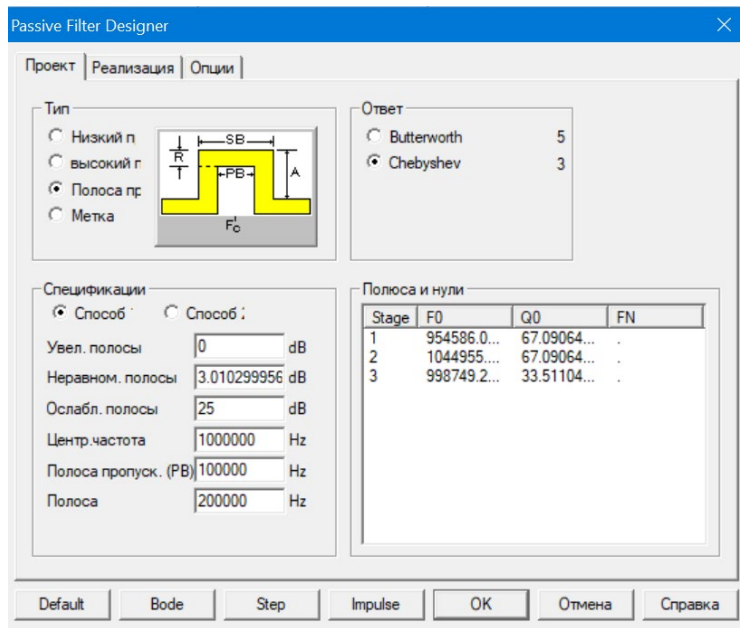


Рис. 3.9

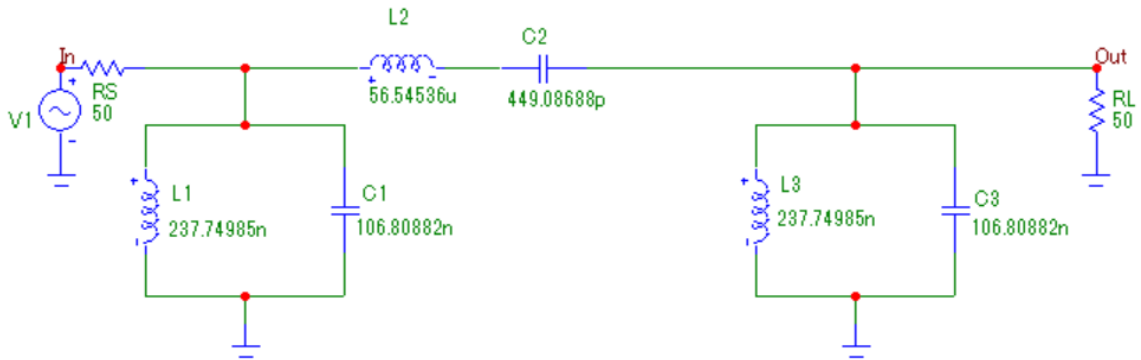


Рис. 3.10

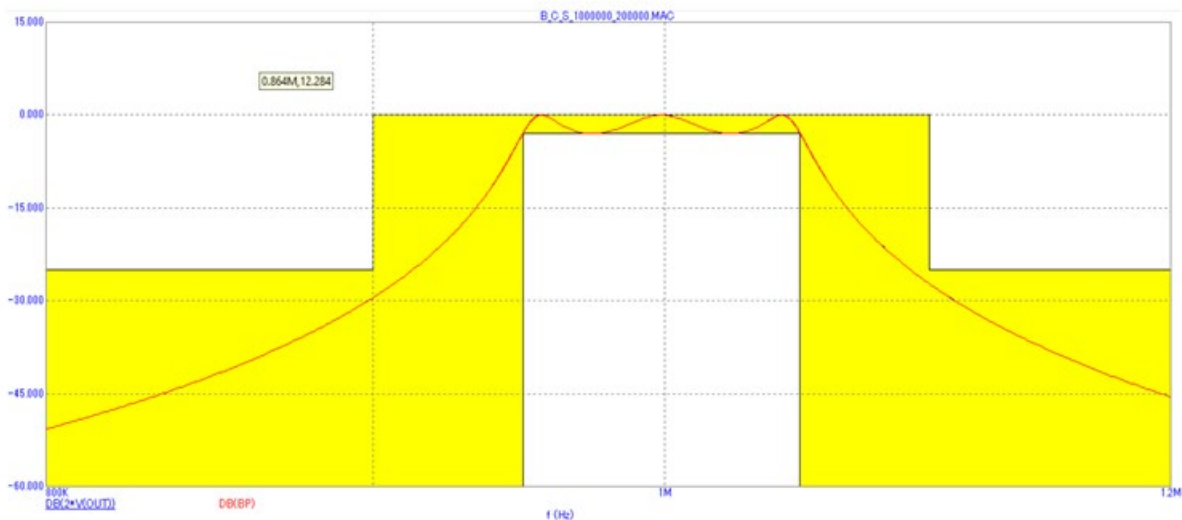


Рис. 3.11

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗИСТИВНЫЕ ЦЕПИ

4.1. Нелинейные резистивные элементы, вольтамперные характеристики

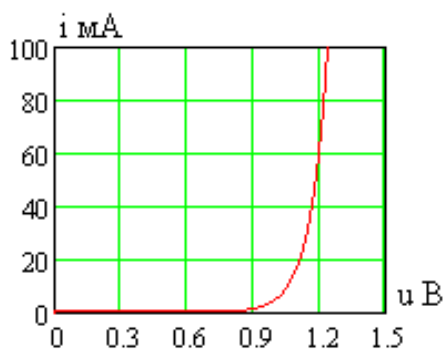


Рис. 4.1

Нелинейные элементы (НЭ) подразделяются на резистивные, емкостные и индуктивные. Резистивные нелинейные элементы описываются вольтамперными характеристиками (ВАХ) - зависимостями тока через элемент от приложенного к нему напряжения.

В линейном сопротивлении R имеется прямолинейная зависимость тока от напряжения $i = Gu$ (закон Ома). Нелинейное сопротивление имеет непрямолинейную ВАХ. В качестве примера на рис. 4.1 показана ВАХ полупроводникового диода.

В современной электронной технике используются НЭ с разнообразными ВАХ. Нелинейные элементы классифицируются по числу полюсов: двухполюсники (полупроводниковый диод), трехполюсники (биполярный транзистор), четырехполюсники (биполярный транзистор в схеме с общим эмиттером) и т.д. Они могут быть неуправляемыми (полупроводниковый диод) и управляемыми (биполярный транзистор).

4.2. Расчет нелинейных цепей

Расчет нелинейных цепей проводится на основе законов Ома и Кирхгофа. В качестве примера рассмотрим цепь с полупроводниковым диодом, показанную на рис. 4.2. ВАХ нелинейного элемента показана на рис. 4.1.

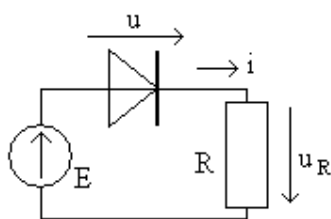


Рис. 4.2

Для полупроводникового диода известна аппроксимация ВАХ вида

$$i = f(u) = I(\exp(ku) - 1), \quad (4.1)$$

где I - обратный ток насыщения, равный, например, $100 \cdot 10^{-10}$ А, k - параметр модели. Они зависят от типа диода. Запишем систему уравнений цепи на основе законов Ома и Кирхгофа

$$\begin{cases} i = f(u), \\ u_R = iR, \\ u + u_R = E. \end{cases} \quad (4.2)$$

В результате получим уравнение

$$I \cdot R \cdot (\exp(ku) - 1) + u = E, \quad (4.3)$$

которое не имеет аналитического решения и для определения напряжения u необходимо использовать численные методы решения нелинейных уравнений.

Для решения уравнения (4.3) можно использовать пакет программ MathCAD, листинг программы показан на рис. 4.3. В примере выбраны значения $I = 10^{-4}$ А, $k = 10$ 1/В, $E = 5$ В и $R = 100$ Ом. Программе необходимо задать начальное приближение искомой величины (принято $u = 0,5$ В). Решение уравнения осуществляется функцией $\text{root}(g(u), u)$, в которой решается уравнение $g(u) = 0$ для переменной u , и результат передается в переменную $u0$, в рассматриваемом примере получим решение $u0 = 0,609$ В.

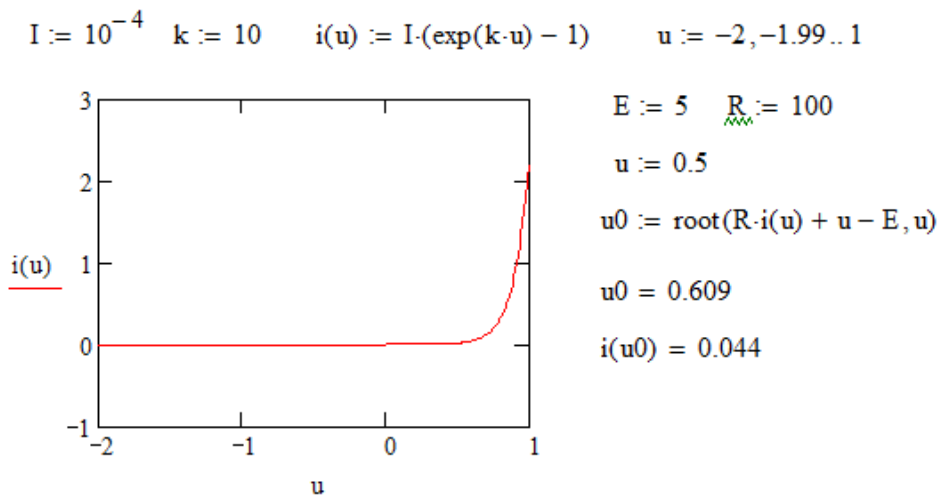


Рис. 4.3

Численные расчеты требуют применения современной вычислительной техники и не дают общей панорамы полученных решений и влияния на них параметров цепи.

4.3. Соединения нелинейных элементов

В цепи могут присутствовать несколько двухполюсных нелинейных элементов, которые целесообразно заменить одним эквивалентным НЭ.

При последовательном соединении двух НЭ (НЭ₁ и НЭ₂), как показано на рис. 4.4,а, с вольтамперными характеристиками $i_1 = f_1(u_1)$ и $i_2 = f_2(u_2)$ у них общий ток $i = i_1 = i_2$, а общее напряжение складывается из напряжений на элементах $u = u_1 + u_2$. Для расчета ВАХ эквивалентного нелинейного элемента НЭ₃ на рис. 4.4,б необходимо определить обратные характеристики $u_1 = \varphi_1(i)$ и $u_2 = \varphi_2(i)$, тогда общее напряжение будет равно

$$u = \varphi_1(i) + \varphi_2(i),$$

а эквивалентная ВАХ будет обратной функцией $i = f(u)$.

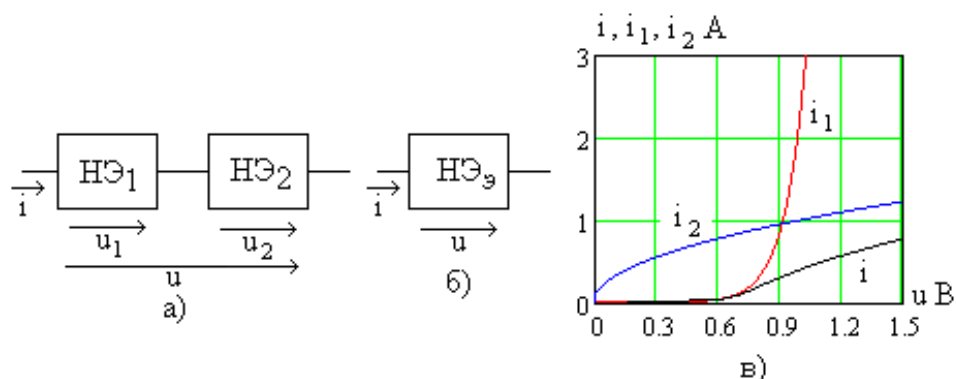


Рис. 4.4

На рис. 4.4,в в качестве примера показаны ВАХ нелинейных элементов НЭ₁ $i_1 = I(\exp(ku) - 1)$ при $I = 10^{-4}$ А и $k = 10$ 1/В, НЭ₂ $i_2 = \sqrt{u}$ и эквивалентного НЭ₃ $i = f(u)$ для последовательного соединения элементов.

При параллельном соединении НЭ (рис. 4.5,а) общее напряжение u равно напряжениям на каждом из НЭ, а общий ток i равен сумме токов каждого НЭ,

$$i = i_1 + i_2 = f_1(u) + f_2(u),$$

то есть общая ВАХ эквивалентного НЭ₃ (рис. 4.5,б) равна сумме ВАХ отдельных нелинейных элементов.

На рис. 4.6,а показаны ВАХ рассмотренных ранее элементов НЭ₁ $i_1 = I(\exp(ku) - 1)$ при $I = 10^{-4}$ А и $k = 10$ 1/В, НЭ₂ $i_2 = \sqrt{u}$ и эквивалентного НЭ₃ $i = f(u)$ для параллельного соединения.

На рис. 4.6,б показаны аналогичные ВАХ для двух одинаковых НЭ $i_1 = i_2 = I(\exp(ku) - 1)$ при $I = 10^{-4}$ А и $k = 10$ 1/В (двух полупроводниковых диодов) и эквивалентная ВАХ $i(u)$ их параллельного соединения.

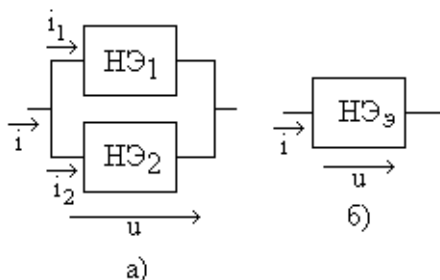


Рис. 4.5

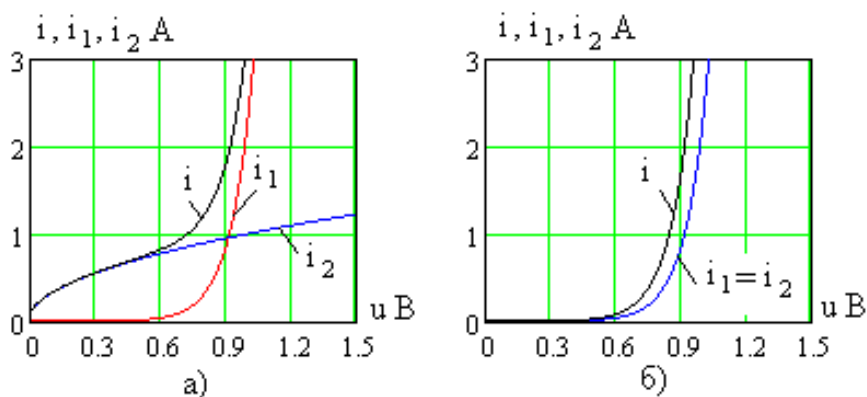


Рис. 4.6

При смешанном соединении НЭ в цепи выделяются простые фрагменты, которые заменяются эквивалентными НЭ. Эта процедура продолжается до получения одного эквивалентного НЭ, при этом в цепи могут присутствовать и линейные элементы.

4.4. Графоаналитический метод расчета нелинейных резистивных цепей

Графоаналитический метод расчета предполагает использования графических построений на ВАХ нелинейного элемента. Рассматриваемая цепь **разделяется на две двухполюсные части** – линейную и нелинейную (рис. 4.7).

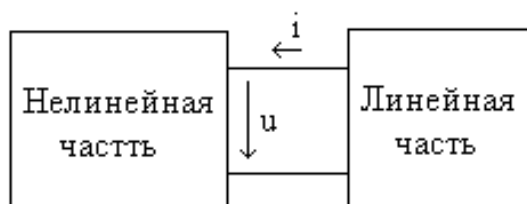


Рис. 4.7

Нелинейная часть описывается своей ВАХ $i(u)$, которая изображается **графически**. Для линейной части записывается система уравнений по законам Ома и Кирхгофа, на основе которой формируется **аналитическое** линейное уравнение связи между током i и напряжением u (рис. 4.7). Оно изображается в виде прямой линии на ВАХ нелинейной части цепи. Линейная часть рассматривается как нагрузка нелинейной части, поэтому полученную линию называют **нагрузочной**. Точка пересечения ВАХ и нагрузочной линии геометрически определяет значения тока i и напряжения u .

В качестве примера рассмотрим цепь, показанную на рис. 4.2 при ВАХ диода, показанной на рис. 4.1. Видоизмененная схема цепи с выделенными линейной и нелинейной частями показана на рис. 4.8.

На рис. 4.9,а показана ВАХ нелинейной части (диода) $i = f(u)$.

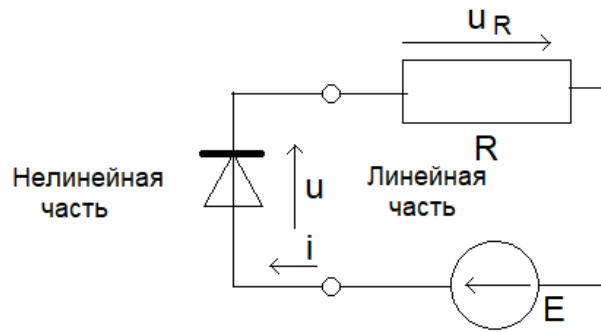


Рис. 4.8

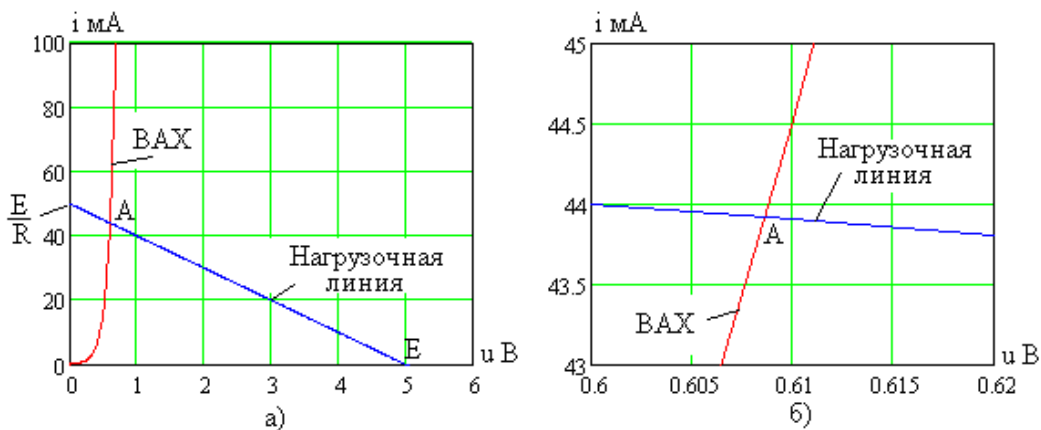


Рис. 4.9

Для линейной части запишем систему уравнений по законам Ома и Кирхгофа в виде

$$\begin{cases} u_R = Ri, \\ u_R + u = E, \end{cases}$$

откуда следует выражение, связывающее общие ток и напряжение в линейной части цепи

$$i = \frac{E - u}{R} = \frac{E}{R} - \frac{u}{R}.$$

Эта зависимость в виде падающей прямой (нагрузочной линии) показана на рис. 4.9,а. Она пересекается с ВАХ в точке А (рис. 4.9). На рис. 4.9,б показана та же зависимость в укрупненном масштабе. Полученные на рис. 4.9 результаты (координаты точки А) соответствуют результатам численных расчетов, показанным на рис. 4.3 ($i = 44$ мА, $u = 0,609$ В).

4.5. Воздействие переменного сигнала на нелинейную цепь

Если на нелинейную резистивную цепь воздействует переменное напряжение, то аналитический расчет токов и напряжений может быть проведен так же, как и для постоянных воздействий.

Для цепи на рис. 4.2 с ВАХ вида рис. 4.1 при переменной ЭДС источника $e(t)$ уравнение (4.3) для напряжения $u(t)$ принимает вид

$$IR(\exp(ku(t)) - 1) + u(t) = e(t). \quad (4.4)$$

Вычисления проводятся отдельно для каждого момента времени t , соответствующая программа и результаты ее работы показана на рис. 4.10. Слева внизу на рис. 4.10 показана временная диаграмма напряжения, а справа – тока в цепи на рис. 4.2.

```

I := 10-4      k := 10      i(u) := I · (exp(k · u) - 1)      t := 0, 10-5 .. 0.002
s(t) := 5 · sin(2 · π · 1000 · t)      uu := 0.5      u0(t) := root(R · i(uu) + uu - s(t), uu)      ii(t) := i(u0(t))

```

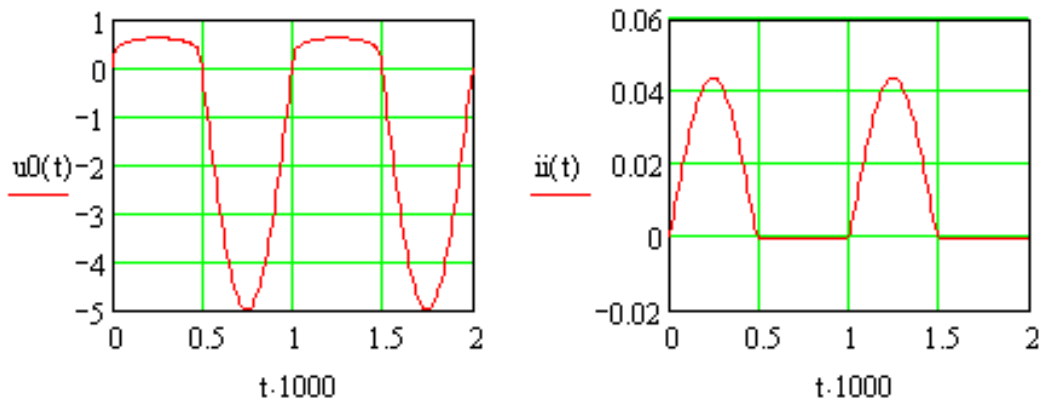


Рис. 4.10

Эти же расчеты можно провести графоаналитическим методом. Для этого заданный интервал времени разбивается на несколько значений, для которых вычисляется ЭДС источника и строятся соответствующие им нагрузочные линии, как показано на рис. 4.11,а для положительных значений ЭДС, равных 1, 2, 3, 4 и 5 В, и на рис. 4.11,б для значений -1, -2, -3, -4 и -5 В. На рис. 4.11,б ВАХ диода не видна из-за малости обратного тока $i \leq 10^{-4}$ А, для ее отображения необходимо укрупнить масштаб, как показано на рис. 4.11,в, при этом нагрузочные линии становятся практически вертикальными.

Точки пересечения нагрузочных линий с ВАХ нелинейного элемента дают значения тока $i(t)$ и напряжения $u(t)$ в выбранные моменты времени.

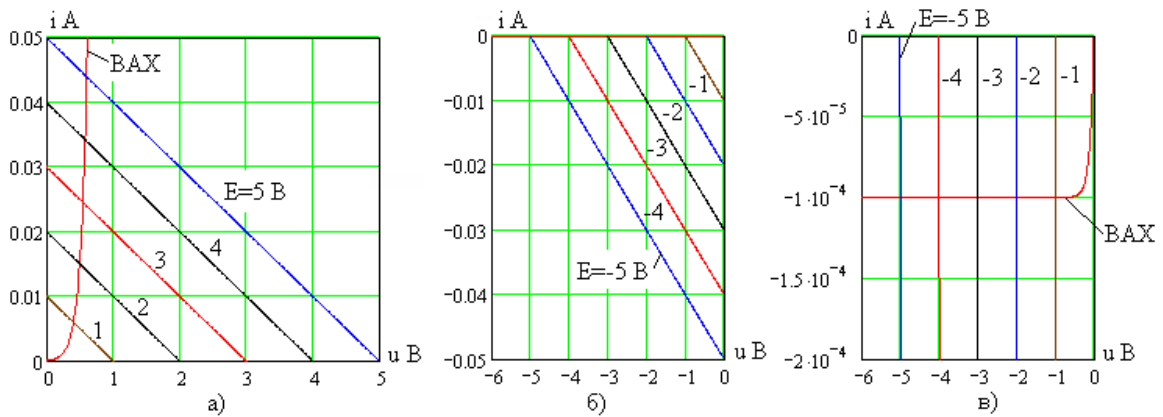


Рис. 4.11

Как видно, с ростом ЭДС напряжение u на НЭ изменяется слабо (рис. 4.11,а), а при $e(t) < 0$ оно практически равно ЭДС (рис. 4.11,в), что вполне соответствует левой кривой на рис. 4.10. Аналогично можно проанализировать временную диаграмму тока, показанную в правой части рис. 4.10. Графические построения иллюстрирует рис. 4.12.

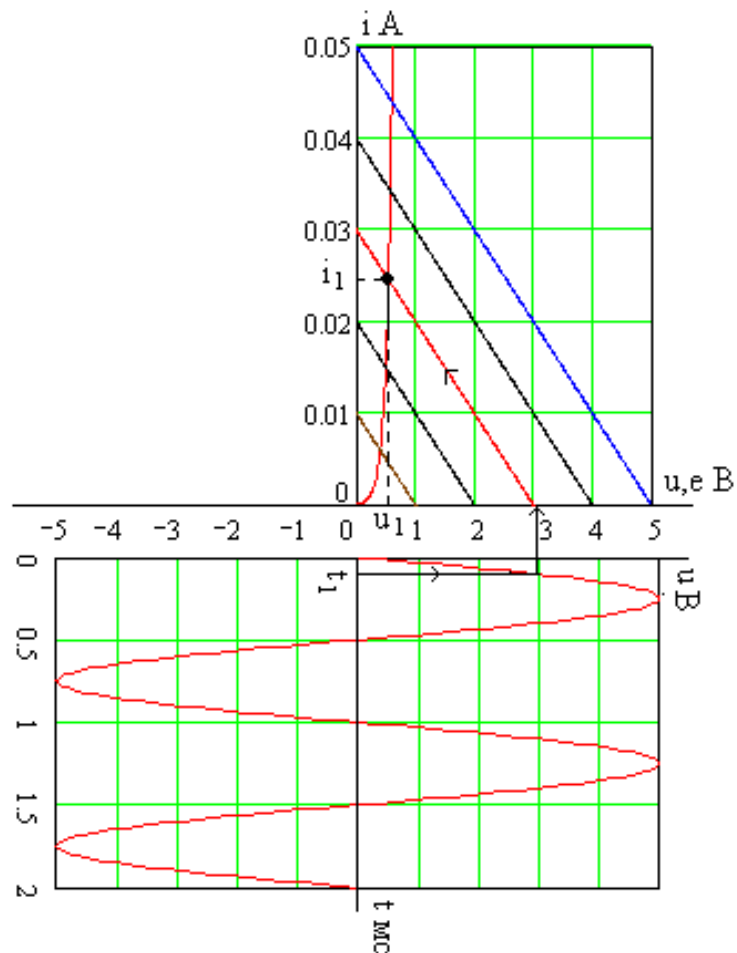


Рис. 4.12

В момент времени t_1 определяется ЭДС источника, по которой строится соответствующая нагрузочная линия, точка пересечения которой с ВАХ определяет значения тока i_1 и напряжения u_1 . Этот процесс показан на рис. 4.12 стрелками начиная с точки t_1 .

Как видно, подобные построения достаточно трудоемки и их необходимо повторять снова для другого сигнала.

4.6. Динамические вольтамперные характеристики

Динамические ВАХ нелинейного элемента описывают его свойства с учетом нагрузки в виде зависимости тока НЭ от ЭДС действующего в цепи источника напряжения.

При построении динамической ВАХ $i(e)$ в цепи выделяются **источник, нелинейная часть (НЭ) и нагрузка R** , как показано на рис. 4.13,а. Выбирается несколько значений ЭДС, для каждого из них строятся нагрузочные линии (рис. 4.13,б), определяются соответствующие значения тока и строятся точки, соответствующие полученным значениям тока i и ЭДС e . Зависимость $i(e)$ показана на рис. 4.13,б жирной линией.

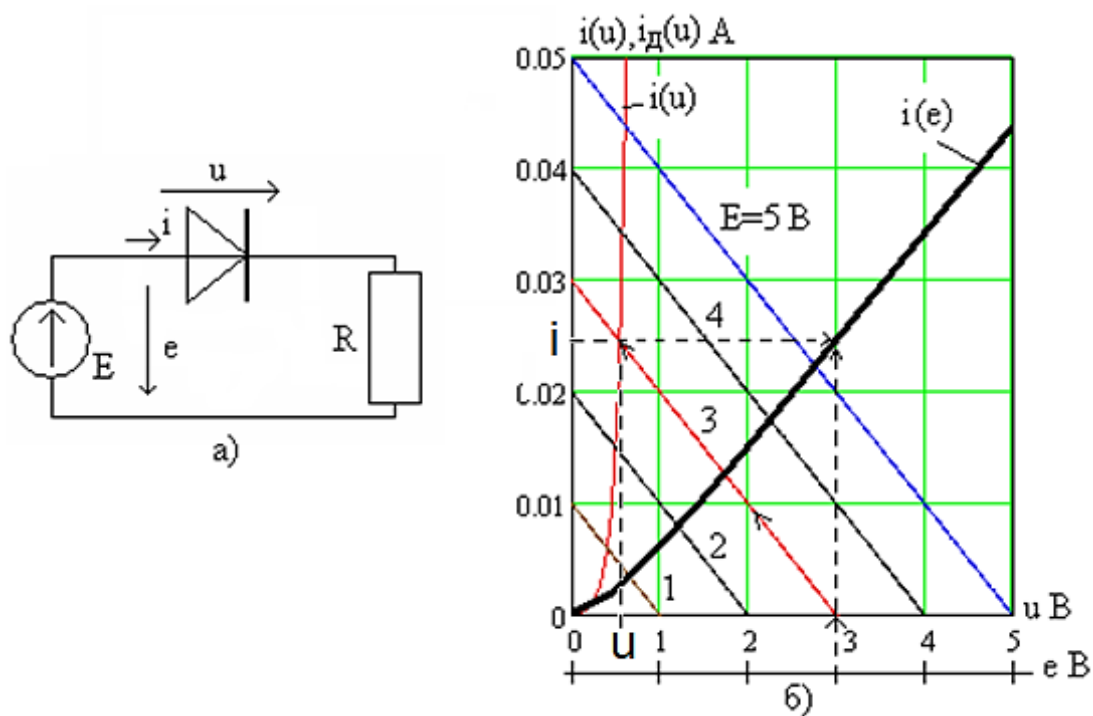


Рис. 4.13

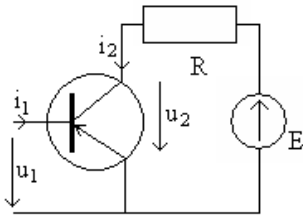
Динамическая ВАХ позволяет проводить анализ воздействия на цепь различных источников сигнала, не прибегая к повторным построениям серии нагрузочных линий.

4.7. Анализ нелинейных цепей с управляемым нелинейным трехполюсником

Рассмотрим цепь с нелинейным трехполюсником (биполярным транзистором, который будет изучаться в дальнейшем), показанную на рис. 4.14. На рис. 4.15 показаны два семейства вольтамперных характеристик нелинейного элемента – входные (рис. 4.15,а) и выходные (рис. 4.15,б).

Для выходной цепи можно записать уравнения второго закона Кирхгофа

$$u_2 + Ri_2 = E,$$



откуда следует выражение для нагрузочной линии

$$i_2 = \frac{E - u_2}{R},$$

Рис. 4.14

график которой в виде падающей прямой линии показан на рис. 4.15,б.

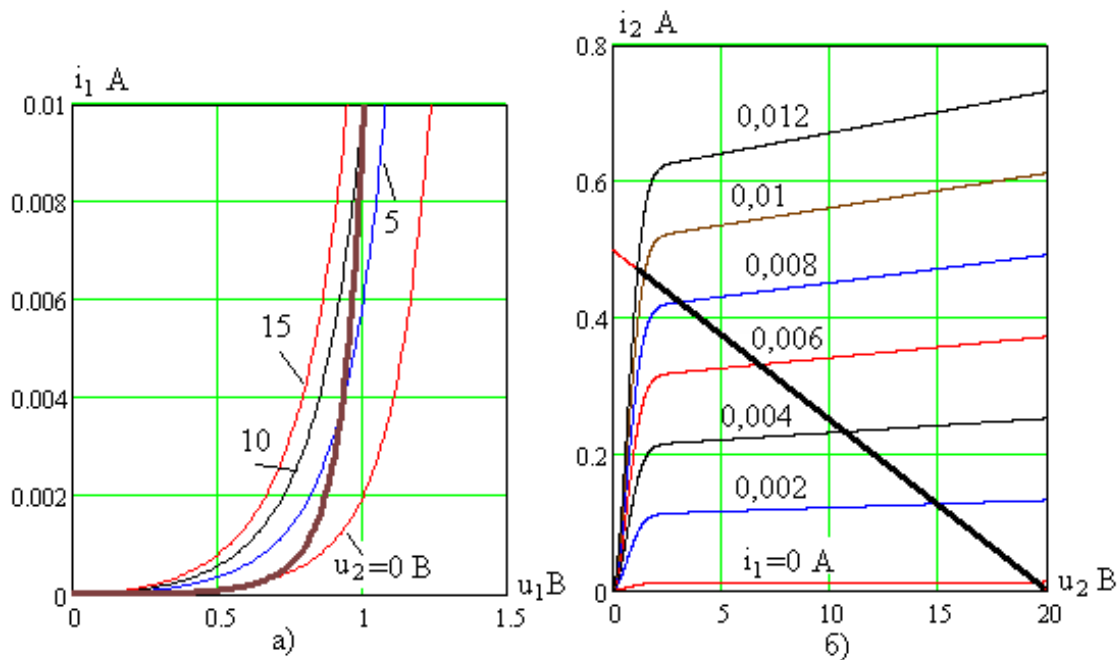


Рис. 4.15

Точки пересечения нагрузочной линии с семейством выходных ВАХ образуют выходную динамическую характеристику нагруженного НЭ (показана жирной прямой линией на рис. 4.15,б). Каждой из точек пересечения семейства выходных ВАХ с нагрузочной линией (рис. 4.15,б) соответствуют значения выходного напряжения u_2 и входного тока i_1 . Перенося эти точки на семейство

входных ВАХ на рис. 4.15,а (при выбранных значениях i_1 проводится горизонтальная линия до пересечения с входной ВАХ, соответствующей напряжению u_2), получим динамическую входную ВАХ, показанную жирной линией на рис. 4.15,а.

Динамические ВАХ можно использовать для построения временных диаграмм токов и напряжений в нелинейной цепи, как показано на рис. 4.16 и рис. 4.17 при гармоническом входном воздействии $e(t)$ в сумме с постоянным напряжением смещения u_0 . Входное напряжение равно $u_1(t) = u_0 + e(t)$.

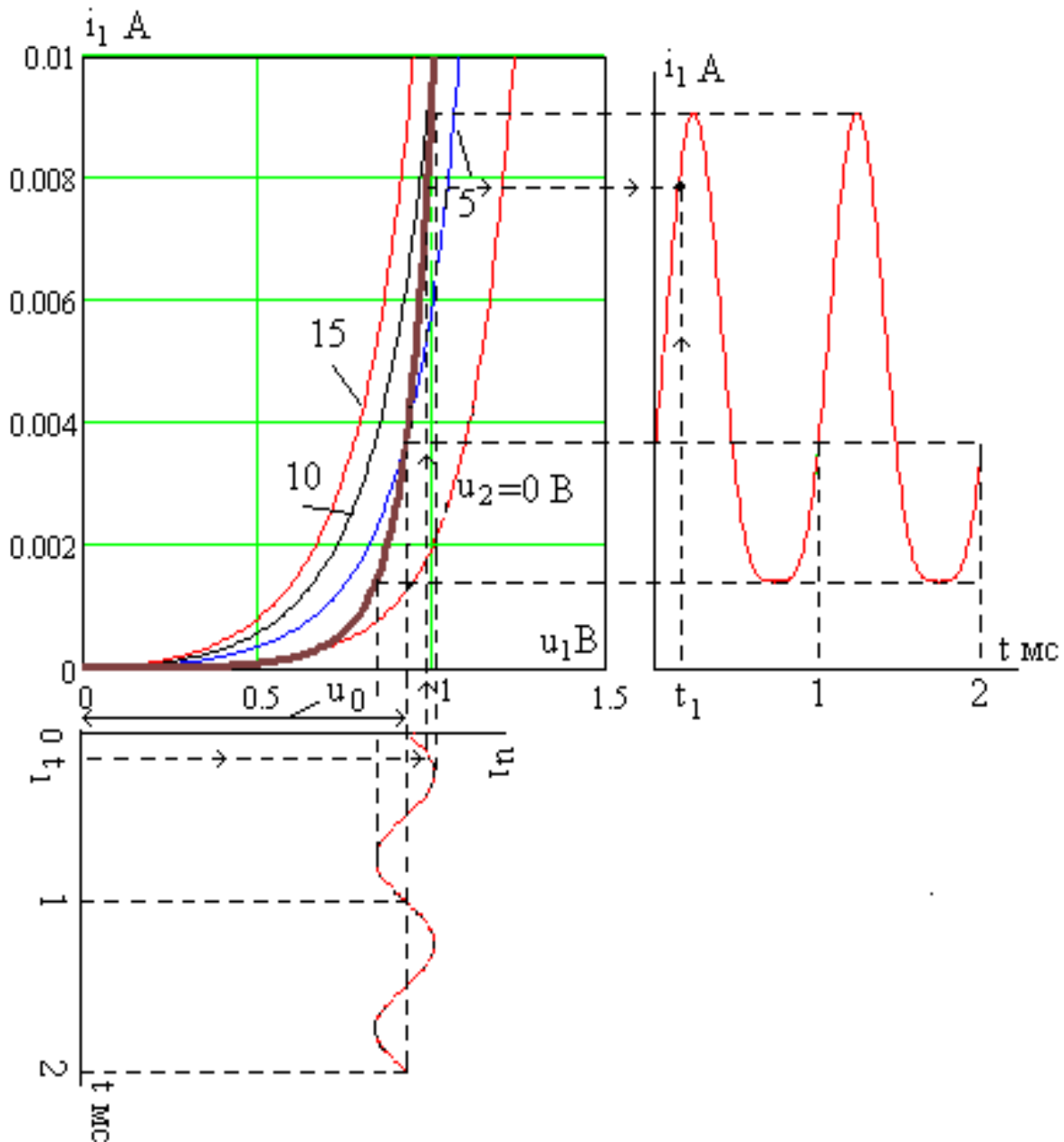


Рис. 4.16

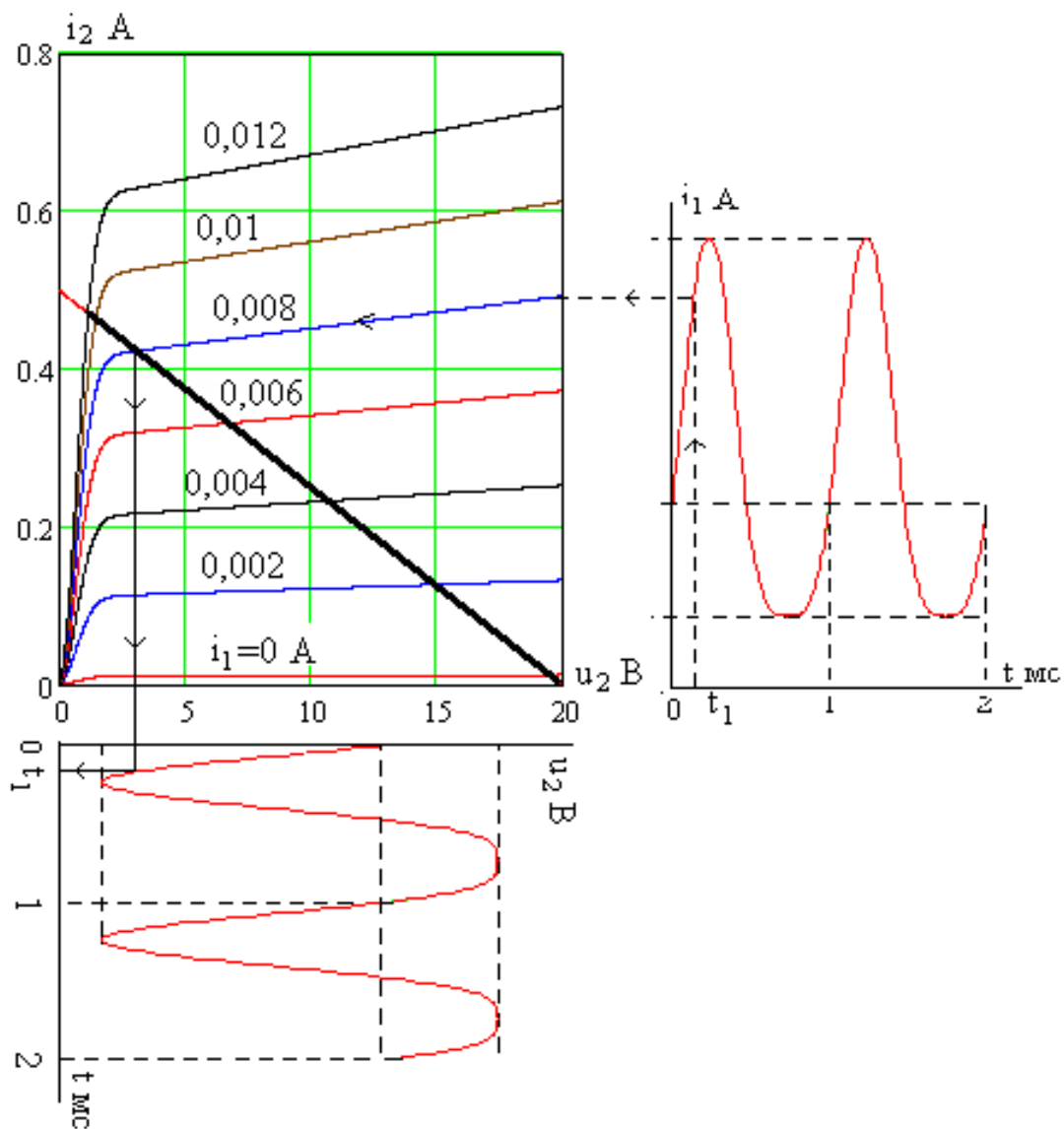


Рис. 4.17

Графоаналитический метод эффективен для анализа нелинейных цепей с управляемыми НЭ. Он позволяет формировать временные диаграммы токов и напряжений при любых воздействиях.

5. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

5.1. Распределенные параметры

Цепью с распределенными параметрами называют электромагнитное устройство, геометрические размеры которого **соизмеримы** с длиной волны λ электромагнитных колебаний.

В вакууме величина λ определяется частотой сигнала

$$\lambda = \frac{c}{f}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} - \text{ скорость света.}$$

Удобно использовать выражение

$$\lambda(\text{м}) = \frac{300}{f(\text{МГц})}.$$

Если с длиной волны соизмерима только **длина** устройства (например, тракта передачи сигнала – фидера), а остальные размеры **много меньше** λ , то его называют **длинной линией**.

В дальнейшем будем рассматривать длинные линии.

При $f = 10 \text{ МГц}$ получим $\lambda = 10 \text{ м}$, и если длина фидера больше 1 м, то он является длинной линией, а если она меньше 10 см, то фидер можно рассматривать просто как **соединительный проводник**.

Примеры конструкций **двухпроводной длинной линии** и **коаксиального кабеля** показаны на рис. 5.1,а и рис. 5.1,б соответственно.

Представим длинную линию как каскадное соединение бесконечно малых ее отрезков длиной $dx \rightarrow 0$, эквивалентная схема показана на рис. 5.2.

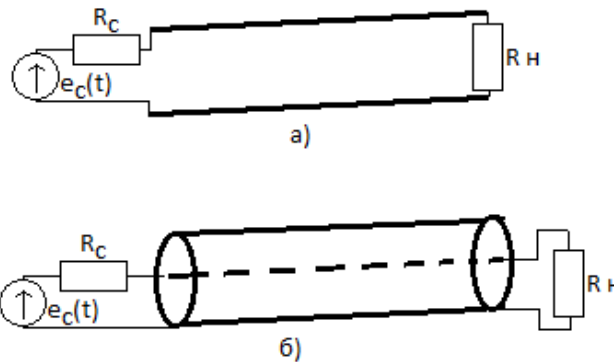


Рис. 5.1

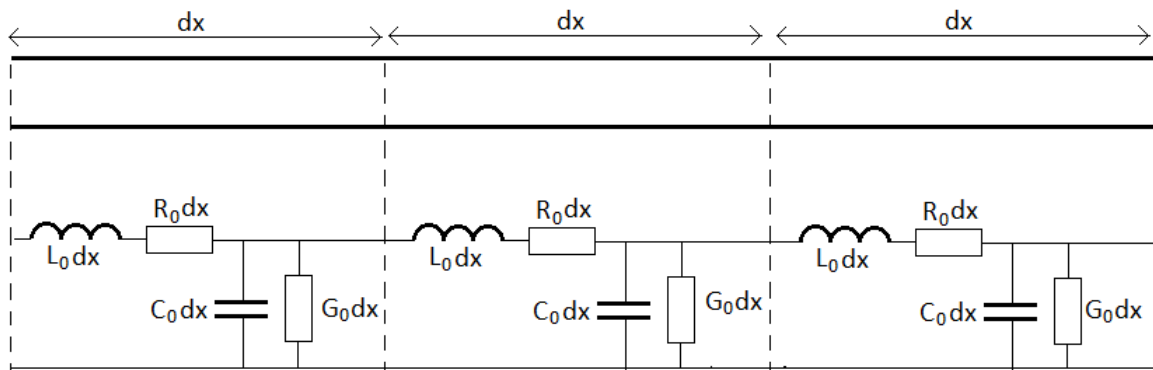


Рис. 5.2

Каждый отрезок можно представить эквивалентной схемой, в которой присутствуют бесконечно малые индуктивность линии $L_0 dx$, сопротивление потерь $R_0 dx$, емкость $C_0 dx$ и проводимость утечки $G_0 dx$. Величины L_0 (Гн/м), R_0 (Ом/м), C_0 (Ф/м) и G_0 (Сим/м) называют **погонными параметрами** длинной линии. Они определяются конструкцией линии, материалом проводов, их диаметром, расстоянием между ними, свойствами диэлектрика.

5.2. Телеграфные уравнения

Каждый отрезок длинной линии в точке x от начала линии или в точке x' от ее конца ($x' = L - x$, L - **длина линии**) можно представить показанной на рис. 5.3 эквивалентной схемой, в которой обозначены мгновенные значения входных и выходных токов и напряжений.

По первому закону Кирхгофа

$$i = i + di + C_0 dx \frac{du}{dt} + G_0 dx \cdot u ,$$

тогда

$$- di = C_0 dx \frac{du}{dt} + G_0 dx \cdot u ,$$

и в результате получим первое телеграфное уравнение

$$-\frac{di}{dx} = C_0 \frac{du}{dt} + G_0 \cdot u .$$

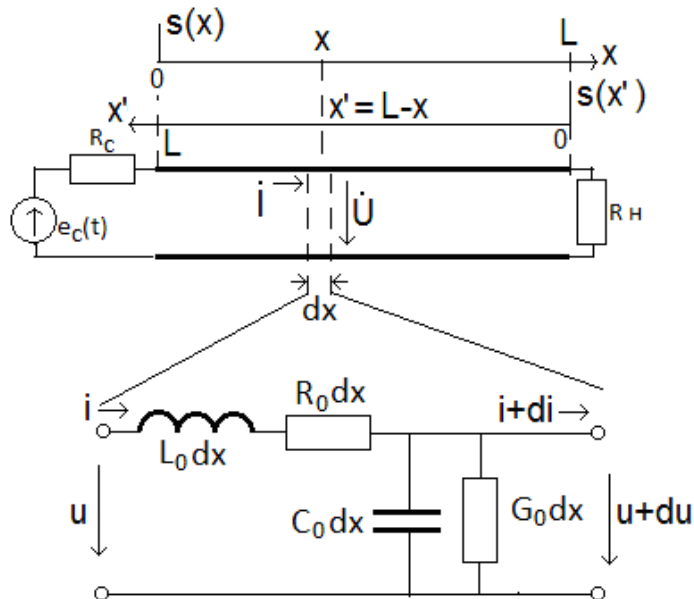


Рис. 5.3

По второму закону Кирхгофа

$$L_0 dx \frac{di}{dt} + R_0 dx \cdot i + u + du = u ,$$

тогда

$$L_0 dx \frac{di}{dt} + R_0 dx(i + di) = -du ,$$

и получим второе телеграфное уравнение

$$-\frac{du}{dx} = L_0 \frac{di}{dt} + R_0 i .$$

Телеграфные уравнения длинной линии имеют вид

$$\begin{cases} -\frac{di}{dx} = C_0 \frac{du}{dt} + G_0 \cdot u, \\ -\frac{du}{dx} = L_0 \frac{di}{dt} + R_0 i. \end{cases} \quad (5.1)$$

Ток и напряжение являются функциями двух переменных

$$i = i(x, t) \text{ и } u = u(x, t) ,$$

Тогда

$$\begin{cases} -\frac{di(x, t)}{dx} = C_0 \frac{du(x, t)}{dt} + G_0 \cdot u(x, t), \\ -\frac{du(x, t)}{dx} = L_0 \frac{di(x, t)}{dt} + R_0 i(x, t). \end{cases}$$

Для гармонических сигналов целесообразно ввести комплексные амплитуды тока $\dot{I}(x)$ и напряжения $\dot{U}(x)$, как показано в схеме на рис. 5.4.

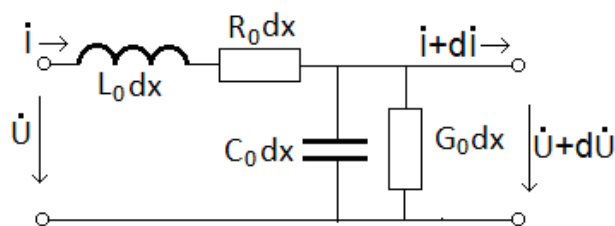


Рис. 5.4

В результате получим

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{I}(x)}{dx} = j\omega C_0 \dot{U}(x) + G_0 \cdot \dot{U}(x), \\ -\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = j\omega L_0 \dot{I}(x) + R_0 \dot{I}(x), \end{cases} \quad (5.2)$$

а после приведения подобных можно записать

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{I}(x)}{dx} = [j\omega C_0 + G_0] \cdot \dot{U}(x), \\ -\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = [j\omega L_0 + R_0] \dot{I}(x). \end{cases}$$

Введем обозначения

$$Y_0 = j\omega C_0 + G_0 \quad \text{и} \quad Z_0 = j\omega L_0 + R_0, \quad (5.3)$$

тогда получим телеграфные уравнения в виде

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{I}(x)}{dx} = Y_0 \cdot \dot{U}(x), \\ -\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = Z_0 \dot{I}(x). \end{cases} \quad (5.4)$$

Подставляя одно уравнение в другое, получим телеграфные уравнения с разделенными током и напряжением

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{I}(x)}{dx^2} - \gamma^2 \dot{I}(x) = 0, \\ \frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} - \gamma^2 \dot{U}(x) = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

где

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0}. \quad (5.6)$$

Комплексную величину $\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \alpha + j\beta$ называют **постоянной распространения** длинной линии, где α - **коэффициент затухания** волны в линии, а β - **коэффициент фазы**,

$$\alpha = \operatorname{Re}\{\gamma\} = \operatorname{Re}\left\{\sqrt{[j\omega L_0 + R_0][j\omega C_0 + G_0]}\right\}, \quad (5.7)$$

$$\beta = \operatorname{Im}\{\gamma\} = \operatorname{Im}\left\{\sqrt{[j\omega L_0 + R_0][j\omega C_0 + G_0]}\right\}. \quad (5.8)$$

В линии без потерь (при $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$) получим

$$\gamma = \sqrt{[j\omega L_0][j\omega C_0]} = j\omega\sqrt{L_0 C_0}, \quad (5.9)$$

тогда

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}. \quad (5.10)$$

5.3. Решение телеграфных уравнений

Для телеграфных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд тока и напряжения в длинной линии вида

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{I}(x)}{dx^2} - \gamma^2 \dot{I}(x) = 0, \\ \frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} - \gamma^2 \dot{U}(x) = 0, \end{cases}$$

получим характеристическое уравнение

$$p^2 - \gamma^2 = 0,$$

у которого корни равны

$$\begin{cases} p_1 = \gamma, \\ p_2 = -\gamma. \end{cases} \quad (5.11)$$

Общее решение для напряжения имеет вид

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}. \quad (5.12)$$

Используя из (5.4) уравнение,

$$-\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = Z_0 \dot{I}(x),$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{I}(x) &= \frac{1}{Z_0} [-A_1 \gamma \cdot e^{jx} + A_2 \gamma \cdot e^{-jx}] = \frac{\gamma}{Z_0} [-A_1 \cdot e^{jx} + A_2 \cdot e^{-jx}] = \\ &= \frac{1}{Z_C} [-A_1 \cdot e^{jx} + A_2 \cdot e^{-jx}] \end{aligned} \quad (5.13)$$

где, с учетом $\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0}$,

$$Z_C = \frac{Z_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{j\omega L_0 + R_0}{j\omega C_0 + G_0}} \quad (5.14)$$

- комплексное **волновое сопротивление** длинной линии. Для линии без потерь волновое сопротивление **активно** и равно

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (5.15)$$

Для **стандартных фидеров** – коаксиальных кабелей волновое сопротивление равно **50 Ом** или **75 Ом**.

Волновое сопротивление может быть активным и при наличии потерь, которые всегда присутствуют в реальной длинной линии. Из (5.14) получим

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{\frac{j\omega + R_0/L_0}{j\omega + G_0/C_0}},$$

тогда при условии $R_0/L_0 = G_0/C_0$ волновое сопротивление будет равно (5.15) и оно обеспечивается при изготовлении качественных фидеров.

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 определяются из начальных условий, в качестве которых используются значения тока и напряжения в **начале** (\dot{I}_1, \dot{U}_1) или чаще всего в **конце** (\dot{I}_2, \dot{U}_2) линии. Пусть заданы \dot{I}_2, \dot{U}_2 в конце линии (в точке $x = L$), тогда из (5.12) и (5.13)

$$\dot{i}_2 = \frac{1}{Z_C} [-A_1 \cdot e^{\gamma L} + A_2 \cdot e^{-\gamma L}],$$

$$\dot{U}_2 = A_1 e^{\gamma L} + A_2 e^{-\gamma L}.$$

Решая систему уравнений (складывая и вычитая уравнения), найдем постоянные интегрирования

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\dot{U}_2 - Z_C \dot{i}_2}{2} e^{-\gamma L}, \\ A_2 = \frac{\dot{U}_2 + Z_C \dot{i}_2}{2} e^{\gamma L}. \end{cases} \quad (5.16)$$

и получим

$$\begin{cases} \dot{i}(x) = \frac{1}{Z_C} [-A_1 \cdot e^{\gamma x} + A_2 \cdot e^{-\gamma x}] = -B_1 e^{\gamma x} + B_2 e^{-\gamma x}, \\ \dot{U}(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}, \end{cases} \quad (5.17)$$

где

$$\begin{cases} B_1 = \frac{A_1}{Z_C} = \frac{\dot{U}_2 - Z_C \dot{i}_2}{2Z_C} e^{-\gamma L}, \\ B_2 = \frac{A_2}{Z_C} = \frac{\dot{U}_2 + Z_C \dot{i}_2}{2Z_C} e^{\gamma L}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Подставляя в (5.17) значения (5.16) и (5.18), получим

$$\dot{U}(x) = \frac{\dot{U}_2 - Z_C \dot{i}_2}{2} e^{-\gamma(L-x)} + \frac{\dot{U}_2 + Z_C \dot{i}_2}{2} e^{\gamma(L-x)}, \quad (5.19)$$

$$\dot{i}(x) = -\frac{\dot{U}_2 - Z_C \dot{i}_2}{2Z_C} e^{-\gamma(L-x)} + \frac{\dot{U}_2 + Z_C \dot{i}_2}{2Z_C} e^{\gamma(L-x)}. \quad (5.20)$$

Используя соотношение для сопротивления нагрузки,

$$Z_H = \frac{\dot{U}_2}{\dot{i}_2}, \quad (5.21)$$

получим

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \left[\frac{Z_H - Z_C}{2Z_H} e^{-\gamma(L-x)} + \frac{Z_H + Z_C}{2Z_H} e^{\gamma(L-x)} \right], \quad (5.22)$$

$$i(x) = \dot{I}_2 \left[-\frac{Z_H - Z_C}{2Z_C} e^{-\gamma(L-x)} + \frac{Z_H + Z_C}{2Z_C} e^{\gamma(L-x)} \right]. \quad (5.23)$$

По комплексным амплитудам тока и напряжения найдем их мгновенные значения

$$\begin{cases} i(t, x) = \operatorname{Re}\{\dot{I}(x)e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{-B_1 \cdot e^{\gamma x} e^{j\omega t} + B_2 \cdot e^{-\gamma x} e^{j\omega t}\}, \\ u(t, x) = \operatorname{Re}\{\dot{U}(x)e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{A_1 e^{\gamma x} e^{j\omega t} + A_2 e^{-\gamma x} e^{j\omega t}\}, \end{cases}$$

тогда получим

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \operatorname{Re}\{A_1 e^{\gamma x} e^{j\omega t} + A_2 e^{-\gamma x} e^{j\omega t}\} = \\ &= A_1 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x) + A_2 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) = \\ &= u_{\text{ОТР}}(t, x) + u_{\text{ПАД}}(t, x), \end{aligned} \quad (5.24)$$

где $u_{\text{ПАД}}(t, x)$ и $u_{\text{ОТР}}(t, x)$ - падающая и отраженная волны напряжения. Аналогично для тока проведите расчет самостоятельно.

5.4. Падающая и отраженная волны

Падающая волна напряжения представляет собой гармоническую функцию двух аргументов

$$u_{\text{ПАД}}(t, x) = A_2 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x). \quad (5.25)$$

Под движением волны понимают перемещение (по оси x) точки фиксированной фазы волны

$$\theta = \omega t - \beta x = \text{const}.$$

Скорость ее движения V_ϕ называют фазовой скоростью волны. Продифференцируем фазу θ по времени, тогда

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0$$

и фазовая скорость равна

$$V_{\phi} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (5.26)$$

Направление распространения волны – от источника к нагрузке, так как $V_{\phi} > 0$ и эту волну называют **падающей**.

Другую часть волнового процесса (5.16) называют **отраженной волной**,

$$u_{\text{отр}}(t, x) = A_1 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x), \quad (5.27)$$

так как ее фазовая скорость

$$V_{\phi \text{ отр}} = \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{\beta}. \quad (5.28)$$

отрицательна (получите результат самостоятельно) и волна распространяется от нагрузки к источнику. Направления распространения этих волн показаны на рис. 5.5, а их пространственные диаграммы для разных моментов времени – на рис. 5.6.

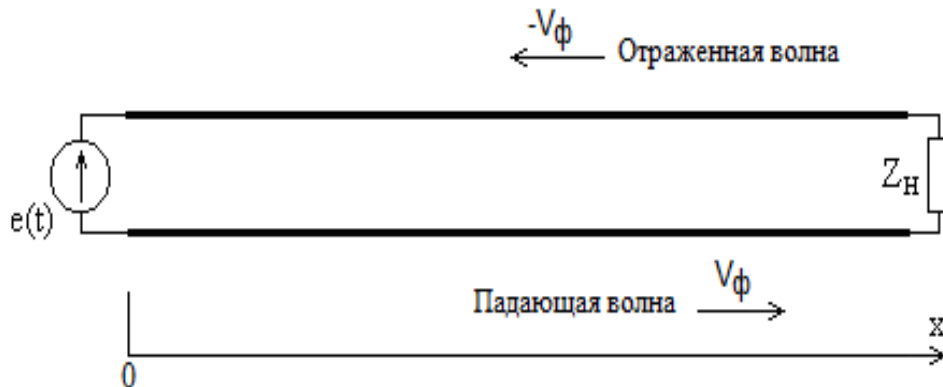


Рис. 5.5

Как видно, падающая и отраженная волны **затухают** по направлению распространения, затухание определяется **коэффициентом затухания α**

$$\alpha = \operatorname{Re}\{\sqrt{Z_0 Y_0}\} = \operatorname{Re}\{\sqrt{[j\omega L_0 + R_0][j\omega C_0 + G_0]}\}.$$

При отсутствии потерь $\alpha = 0$.

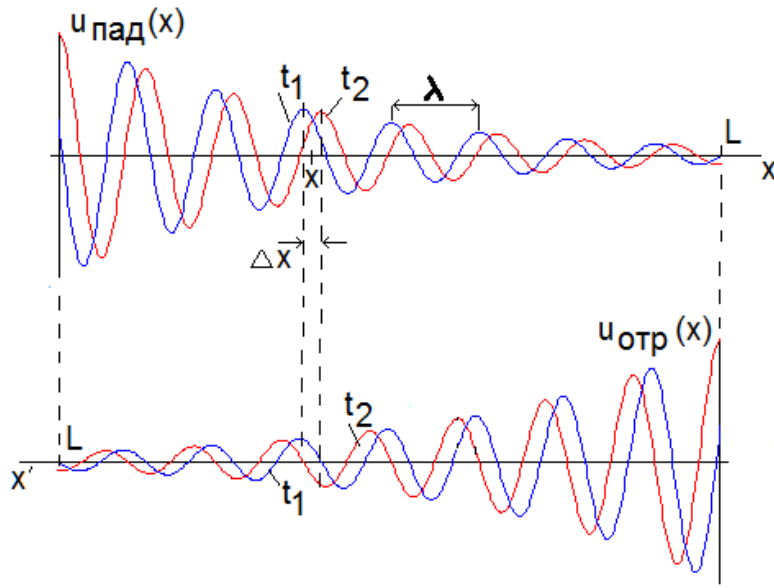


Рис. 5.6

Длина волны λ – это расстояние между точками с одинаковой фазой (рис. 5.6). Фаза в точке x равна $(\omega t - \beta x + \psi)$, а в точке $x + \lambda$ соответственно $(\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi)$, а их разность равна 2π , тогда получим уравнение

$$(\omega t - \beta x + \psi) - (\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi) = 2\pi,$$

и в результате коэффициент фазы связан с длиной волны колебаний λ в линии выражением

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (5.29)$$

5.5. Коэффициент отражения

Комплексные амплитуды падающей и отраженной волн равны

$$\begin{cases} \dot{I}_{\text{отр}}(x) = -B_1 e^{\gamma x}, & \dot{I}_{\text{пад}}(x) = B_2 e^{-\gamma x}, \\ \dot{U}_{\text{отр}}(x) = A_1 e^{\gamma x}, & \dot{U}_{\text{пад}}(x) = A_2 e^{-\gamma x}. \end{cases}$$

Комплексные коэффициенты отражения по напряжению и току равны

$$\dot{\rho}_u(x) = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \frac{A_1 e^{\gamma x}}{A_2 e^{-\gamma x}} = \frac{A_1}{A_2} e^{2\gamma x},$$

$$\dot{\rho}_i(x) = \frac{\dot{I}_{ОТР}}{\dot{I}_{ПАД}} = \frac{-B_1 e^{\gamma x}}{B_2 e^{-\gamma x}} = -\frac{B_1}{B_2} e^{2\gamma x} = -\frac{A_1}{A_2} e^{2\gamma x}.$$

Ранее, исходя из начальных условий в конце линии, были определены постоянные интегрирования

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\dot{U}_2 - Z_C \dot{I}_2}{2} e^{-\gamma L}, \\ A_2 = \frac{\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2}{2} e^{\gamma L}. \end{cases}$$

Тогда для коэффициентов отражения получим

$$\dot{\rho}_u(x) = \frac{A_1}{A_2} e^{2\gamma x} = \frac{\dot{U}_2 - Z_C \dot{I}_2}{\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2} e^{-2\gamma(L-x)} = \frac{Z_H - Z_C}{Z_H + Z_C} e^{-2\gamma(L-x)},$$

$$\dot{\rho}_i(x) = -\frac{A_1}{A_2} e^{2\gamma x} = -\frac{Z_H - Z_C}{Z_H + Z_C} e^{-2\gamma(L-x)}.$$

Модули коэффициентов отражения одинаковы и равны отношению амплитуд отраженной и падающей волн,

$$\rho(x) = |\dot{\rho}_u(x)| = |\dot{\rho}_i(x)| = \left| \frac{Z_H - Z_C}{Z_H + Z_C} \right| e^{-2\alpha(L-x)} = \left| \frac{Z_H - Z_C}{Z_H + Z_C} \right| e^{-2\alpha x'}.$$

На конце линии (при $x = L$ или $x' = L - x = 0$) модуль коэффициента отражения равен

$$\rho_2 = \rho(x = L) = \left| \frac{Z_H - Z_C}{Z_H + Z_C} \right|. \quad (5.30)$$

При удалении от нагрузки модуль коэффициента отражения **падает**. Как видно, имеется особое значение сопротивления нагрузки $Z_H = Z_C$, при котором **коэффициент отражения равен нулю во всех точках линии**.

5.6. Режимы работы длинной линии

5.6.1. Режим бегущих волн

В режиме бегущих волн в линии присутствует только **падающая** волна напряжения или тока. Он возникает в линии с согласованной нагрузкой

$$Z_H = Z_C. \quad (5.31)$$

В этом случае коэффициент отражения и амплитуда отраженной волны **равны нулю** во всех точках линии. Комплексные амплитуды падающей волны равны

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{ПАД}}(x) &= A_2 e^{-\gamma x} = \frac{\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2}{2} e^{\gamma(L-x)} = \dot{U}_2 \frac{1 + Z_C \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}}{2} e^{\gamma(L-x)} = \\ &= \dot{U}_2 \frac{Z_H + Z_C}{2Z_H} e^{\gamma(L-x)} = \dot{U}_2 e^{\gamma(L-x)}, \end{aligned}$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{\text{ПАД}}(x) = B_2 e^{-\gamma x} = \frac{\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2}{2Z_C} e^{\gamma(L-x)} = \frac{\dot{U}_2}{Z_H} e^{\gamma(L-x)}.$$

Для амплитуд напряжения и тока в линии получим

$$U(x) = U_2 e^{\alpha(L-x)},$$

$$I(x) = \frac{U_2}{|Z_H|} e^{\alpha(L-x)}.$$

Графики для амплитуды напряжения показаны на рис. 5.7.

В линии без потерь $\alpha = 0$ и тогда

$$U(x) = U_2, \quad I(x) = \frac{U_2}{|Z_H|},$$

то есть в согласованной длинной линии без потерь амплитуды напряжения и тока **не зависят** от расстояния.

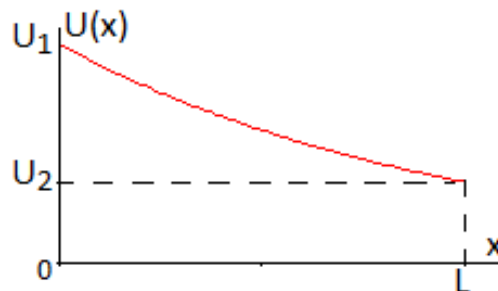


Рис. 5.7

В режиме бегущих волн отражения отсутствуют и при отсутствии потерь

мощность от источника полностью передается от источника к нагрузке. В линии с потерями часть мощности источника рассеивается (сигнал затухает).

Режим бегущих волн используется для **передачи сигнала** от источника к нагрузке. Такую длинную линию называют **фидером**.

5.6.2. Режим стоячих волн в линии без потерь

При отсутствии потерь $R_0=0$ и $G_0=0$ получим

$$\gamma = j\omega L_0 C_0 = j\beta, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \omega L_0 C_0,$$

$$V_\phi = \frac{1}{L_0 C_0}, \quad Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Эти выражения приближенно справедливы и в длинной линии с малыми потерями при условии $R_0 \ll \omega L_0$, $G_0 \ll \omega C_0$.

Режим стоячих волн возникает в линии без потерь, когда модуль коэффициента отражения равен 1,

$$\rho(x) = \left| \frac{Z_H - R_C}{Z_H + R_C} \right| = 1,$$

что можно обеспечить при следующих нагрузках:

- короткое замыкание ($Z_H = 0$);
- холостой ход ($Z_H \rightarrow \infty$);
- реактивная нагрузка ($Z_H = jX_H$).

В режиме стоячих волн амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей.

В общем случае при $Z_H = jX_H$ получим

$$\rho(x) = \left| \frac{jX_H - R_C}{jX_H + R_C} \right| = \frac{\sqrt{(X_H)^2 + (R_C)^2}}{\sqrt{(X_H)^2 + (R_C)^2}} = 1.$$

Для комплексных амплитуд напряжения и тока, согласно (5.12) и (5.13)

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x},$$

$$\dot{i}_2 = \frac{1}{Z_C} [-A_1 \cdot e^{\gamma L} + A_2 \cdot e^{-\gamma L}],$$

где

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\dot{U}_2 - Z_C \dot{I}_2}{2} e^{-\gamma L}, \\ A_2 = \frac{\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2}{2} e^{\gamma L}, \end{cases}$$

тогда получим

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \frac{\dot{U}_2 - Z_C \dot{I}_2}{2} e^{-\gamma L} e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2}{2} e^{\gamma L} e^{-\gamma x} = \\ &= \frac{\dot{U}_2 - Z_C \dot{I}_2}{2} e^{-j\beta(L-x)} + \frac{\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2}{2} e^{j\beta(L-x)} = \\ &= \dot{U}_2 \cos[\beta(L-x)] + jZ_C \dot{I}_2 \sin[\beta(L-x)] = \\ &= \dot{U}_2 \cos[\beta \cdot x'] + jZ_C \dot{I}_2 \sin[\beta \cdot x'] = \\ &= \dot{U}_2 \left[\cos[\beta \cdot x'] + \frac{R_C}{X_H} \dot{I}_2 \sin[\beta \cdot x'] \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}(x) &= \frac{1}{Z_C} [-A_1 \cdot e^{\gamma L} + A_2 \cdot e^{-\gamma L}] = \\ &= -\frac{\dot{U}_2 - Z_C \dot{I}_2}{2Z_C} e^{-j\beta(L-x)} + \frac{\dot{U}_2 + Z_C \dot{I}_2}{2Z_C} e^{j\beta(L-x)} = \\ &= \dot{I}_2 \cos[\beta(L-x)] + j \frac{Z_H}{Z_C} \sin[\beta(L-x)] = \\ &= \dot{I}_2 \left[\cos[\beta(L-x)] - \frac{X_H}{Z_C} \sin[\beta(L-x)] \right] = \\ &= \dot{I}_2 \left[R_C \cos[\beta \cdot x'] - \frac{X_H}{Z_C} \sin[\beta \cdot x'] \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим короткое замыкание нагрузки ($Z_H = 0$), тогда при $\dot{U}_2 = 0$ для комплексных амплитуд получим

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_2 \cos[\beta \cdot x'] + jZ_C \dot{I}_2 \sin[\beta \cdot x'] = jR_C \dot{I}_2 \sin[\beta \cdot x'], \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}_2 \left[\cos[\beta \cdot x'] - \frac{X_H}{Z_C} \sin[\beta \cdot x'] \right] = \dot{I}_2 \cos[\beta \cdot x'], \end{aligned}$$

а для амплитуд

$$U(x) = R_c I_2 |\sin(\beta \cdot x')|, \quad (5.32)$$

$$I(x) = I_2 |\cos(\beta \cdot x')|. \quad (5.33)$$

Зависимости амплитуд тока и напряжения показаны на рис. 5.8.

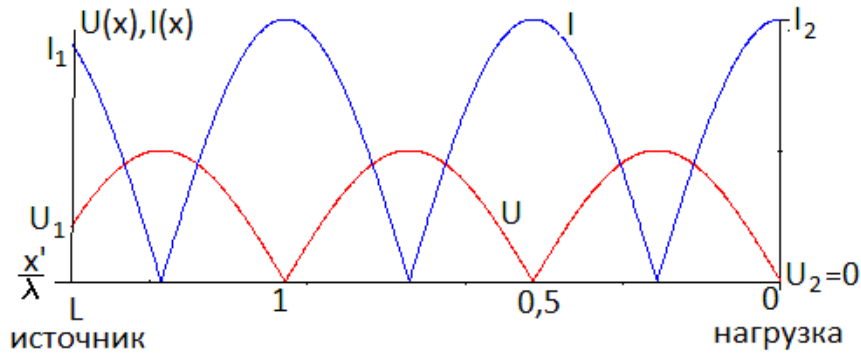


Рис. 5.8

Как видно, на нагрузке имеется максимум (его называют **пучность**) тока и ноль (**узел**) напряжения. При удалении от нагрузки ток падает, а напряжение растёт, и при

$$x' = \frac{\lambda}{4} \quad \text{или} \quad \frac{x'}{\lambda} = \frac{1}{4}$$

имеется узел тока и пучность напряжения.

В общем случае для напряжения узлы расположены на расстоянии

$$x'_k = k \frac{\lambda}{2}, \quad k = \overline{0, 1, 2, \dots},$$

а пучности при

$$x'_k = k \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}, \quad k = \overline{0, 1, 2, \dots}.$$

Для тока положение узлов и пучностей противоположно.

При **холостом ходе нагрузки** ($Z_H \rightarrow \infty$) $I_2 = 0$, тогда аналогично предыдущему получим

$$U(x) = U_2 |\cos(\beta \cdot x')|, \quad (5.34)$$

$$I(x) = \frac{U_2}{R_c} |\sin(\beta \cdot x')|. \quad (5.35)$$

Зависимости амплитуд тока и напряжения показаны на рис. 5.9.

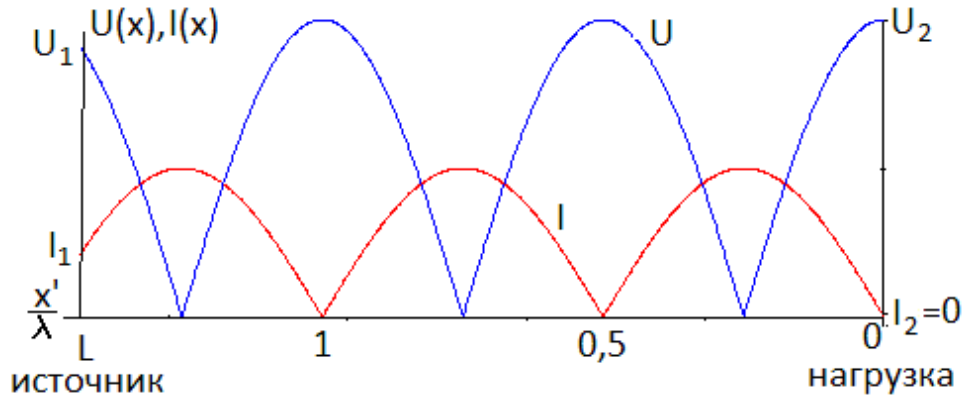


Рис. 5.9

Положение узлов и пучностей противоположно предыдущему.

5.6.3. Линия без потерь при реактивной нагрузке

Решение телеграфных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{U}(x') &= \dot{U}_2 \cos[\beta \cdot x'] + jZ_c \dot{I}_2 \sin[\beta \cdot x'] = \\ &= \dot{U}_2 \left\{ \cos[\beta \cdot x'] + \frac{Z_c}{X_H} \sin[\beta \cdot x'] \right\}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\dot{I}(x') = \dot{I}_2 \left[\cos[\beta \cdot x'] - \frac{X_H}{Z_c} \sin[\beta \cdot x'] \right]. \quad (5.37)$$

Рассмотрим напряжение в линии (5.28) (ток проанализируйте самостоятельно):

$$\dot{U}(x') = \dot{U}_2 \left\{ \cos[\beta \cdot x'] + \frac{Z_c}{X_H} \sin[\beta \cdot x'] \right\} = \dot{U}_2 \cos[\beta \cdot x' + \psi],$$

$$\psi = \arctg\left(\frac{Z_c}{X_H}\right),$$

а для амплитуды получим

$$U(x') = U_2 \left| \cos(\beta \cdot x' + \psi) \right| = U_2 \left| \cos \left[\beta \cdot \left(x' + \frac{\psi}{\beta} \right) \right] \right| = \quad (5.38)$$

$$= U_2 \left| \cos[\beta \cdot (x' - \Delta)] \right|,$$

$$\Delta = -\frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left(\frac{Z_C}{X_H} \right) = -\frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{Z_C}{X_H} \right). \quad (5.39)$$

Зависимости $U(x')$ (5.30) показаны на рис. 5.10 для различных значений Δ (на рис. 5.10,а $\Delta = 0$, на рис. 5.10,б $\Delta > 0$, а на рис. 5.10,в $\Delta < 0$).

Как видно, при подключении реактивной нагрузки происходит смещение узлов и пучностей тока и напряжения. На рис. 5.10,а показана зависимость $U(x')$ для разомкнутой на конце линии. При подключении к линии емкостной нагрузки (рис. 5.10,б)

$$X_H = -\frac{1}{\omega C_H}$$

с отрицательным реактивным сопротивлением происходит смещение узлов и пучностей **в сторону генератора** ($\Delta > 0$). При этом линия как будто становится короче (**укорочение длинной линии**), как показано на рис. 5.11.

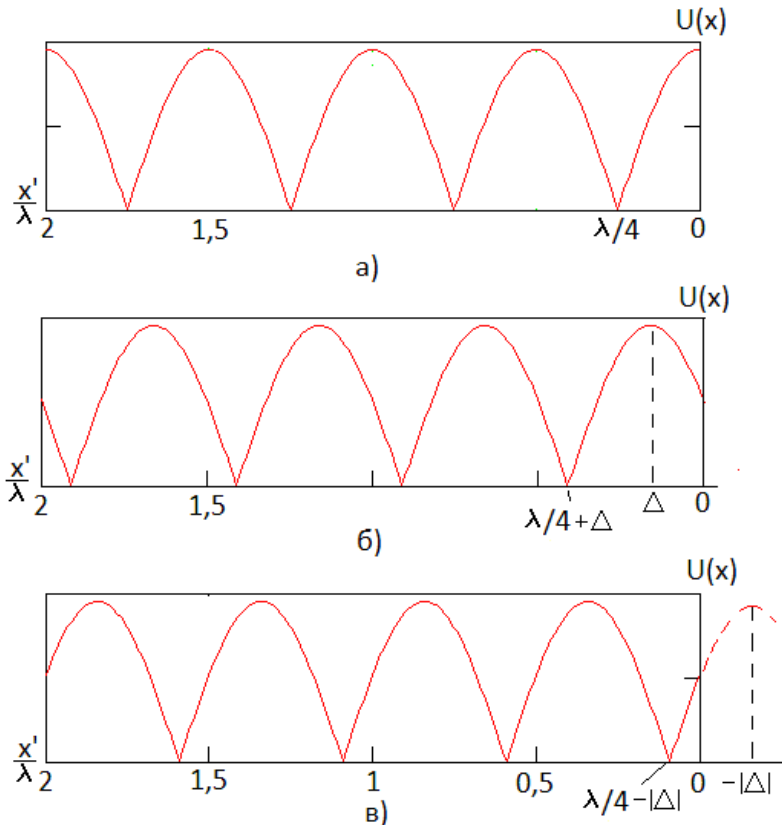


Рис. 5.10

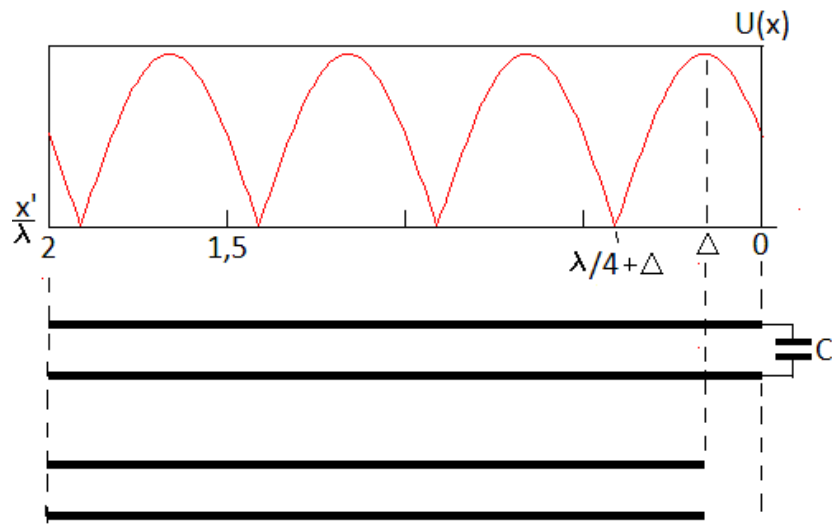


Рис. 5.11

Аналогично, при подключении к разомкнутой длиной линии индуктивности происходит ее удлинение (рис. 5.10,в).

Смещение узлов и пучностей можно использовать для измерения неизвестных индуктивностей и емкостей. Например, если при подключенной емкости C к разомкнутой длинной линии узел напряжения сместился к источнику на величину Δ , то значение емкости определится из уравнения

$$\Delta = -\frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{Z_C}{X_H}\right), \quad (5.40)$$

тогда

$$X_H = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{Z_C}{\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right)} \quad \text{или} \quad C = \frac{1}{\omega Z_C} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right).$$

Если в короткозамкнутой линии вместо замыкателя подключить индуктивность L , то узлы и пучности сместятся ближе к нагрузке на расстояние

$$\Delta = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{Z_C}\right). \quad (5.41)$$

Полученное выражение следует из того, что индуктивность L можно заменить отрезком короткозамкнутой линии длиной Δ .

5.6.4. Линия без потерь при несогласованной активной нагрузке

Рассмотрим напряжение в линии при несогласованной активной нагрузке R_H ,

$$\dot{U}(x') = \dot{U}_2 \left\{ \cos[\beta \cdot x'] + j \frac{Z_C}{R_H} \sin[\beta \cdot x'] \right\},$$

тогда для амплитуды (модуля) получим, при $Z_C = R_C$,

$$\begin{aligned} U(x') &= U_2 \sqrt{\cos^2[\beta \cdot x'] + \left(\frac{R_C}{R_H}\right)^2 \sin^2[\beta \cdot x']} = \\ &= U_2 \sqrt{1 + \left[\left(\frac{R_C}{R_H}\right)^2 - 1\right] \sin^2[\beta \cdot x']}. \end{aligned}$$

При $R_H = R_C$, получим $U(x') = U_2 = const$, как это имеет место в режиме бегущих волн. Зависимости $U(x')$ для различных R_H показаны на рис. 5.12.

Как видно из рис. 5.12, при несогласованном режиме работы длинной линии имеют место **и падающая и отраженная** волны и его называют режимом **смешанных волн**.

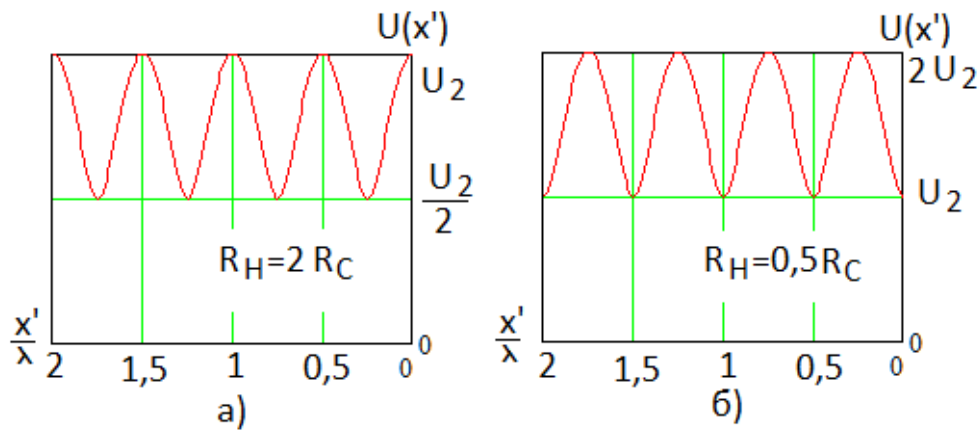


Рис. 5.12

5.7. Коэффициент стоячей волны и коэффициент бегущей волны

Соотношение между амплитудами **стоячей и бегущей волн** в длинной линии характеризуется коэффициентом бегущей волны (КБВ)

$$КБВ = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} \quad (5.42)$$

или коэффициентом стоячей волны (КСВ)

$$КСВ = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1}{КБВ}, \quad (5.43)$$

где U_{\min} и U_{\max} - соответственно наименьшая и наибольшая амплитуды напряжения вдоль линии. На рис. 5.12 $КБВ=0,5$, а $КСВ=2$.

В длинной линии без потерь при **активной** нагрузке R_H можно записать

$$КБВ = \begin{cases} \frac{R_H}{R_C} & \text{при } R_H < R_C, \\ \frac{R_C}{R_H} & \text{при } R_H > R_C. \end{cases} \quad (5.44)$$

Эти коэффициенты легко измеряются, тогда, зная волновое сопротивление линии R_C , можно измерять активное сопротивление неизвестной нагрузки на высокой частоте сигнала.

Величина КСВ широко используется как мера близости режима работы линии к согласованному, приемлемым считаются значения $КСВ < 2$.

5.8. Входное сопротивление линии

Входное сопротивление $Z_{вх}$ линии в этом случае определяется выражением (получите его самостоятельно)

$$Z_{вх}(x') = \frac{\dot{U}(x')}{\dot{I}(x')} = Z_C \frac{R_H + j \cdot Z_C \operatorname{tg}(\beta x')}{Z_C + j \cdot R_H \operatorname{tg}(\beta x')}. \quad (5.45)$$

При $R_H = Z_C$ (в режиме бегущих волн), входное сопротивление линии равно характеристическому $Z_{вх} = Z_C$, а, например, при коротком замыкании линии ($R_H = 0$) входное сопротивление реактивно и равно

$$Z_{вх} = j \cdot Z_C \operatorname{tg}(\beta x') = jX_{вх}. \quad (5.46)$$

Зависимость $X_{вх}$ от x' показана на рис. 5.13.

Как видно, по мере удаления от короткозамкнутой нагрузки входное сопротивление линии без потерь становится сначала индуктивным, потом емкостным и т.д. Анализ разомкнутой на конце длинной линии проведите самостоятельно.

Волновое сопротивление двухпроводной длинной линии, размещенной в вакууме (в воздухе) активно и равно

$$Z_c = 276 \cdot \lg(D/d) \quad [OM], \quad (5.47)$$

где d - радиус проводов линии, D - расстояние между центрами проводов линии.

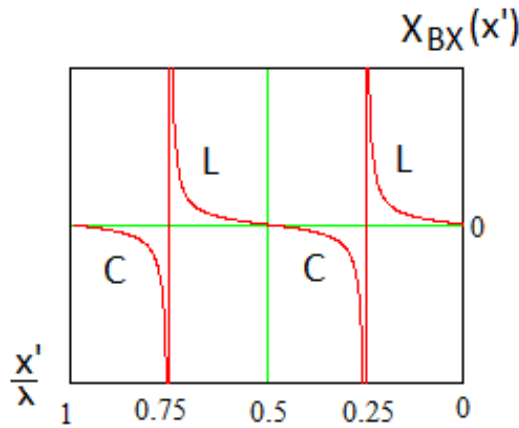


Рис. 5.13

5.9. Применение длинной линии

5.9.1. Фидер

Фидер предназначен для передачи сигнала от источника в нагрузку (рис. 5.14).

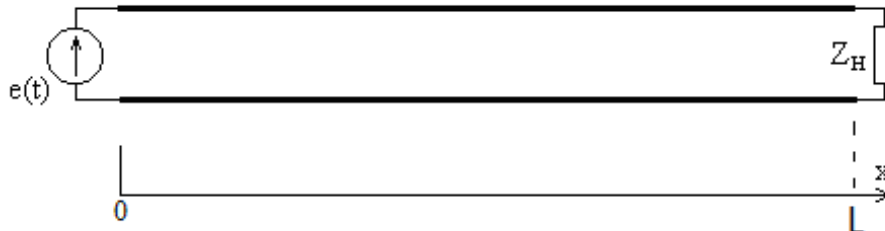


Рис. 5.14

Если длина фидера L соизмерима с длиной волны λ , то он является длинной линией.

$$\lambda = \frac{V_\phi}{f},$$

где V_ϕ - фазовая скорость, в вакууме $V_\phi = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ - скорость света.

В длинной линии присутствуют потери мощности сигнала и его напряжение падает при удалении от источника,

$$U(x) = U_1 \exp(-\alpha x),$$

α - коэффициент затухания с размерностью 1/м, часто используется размерность дБ/м. Зависимость $U(x)$ показана на рис. 5.15.

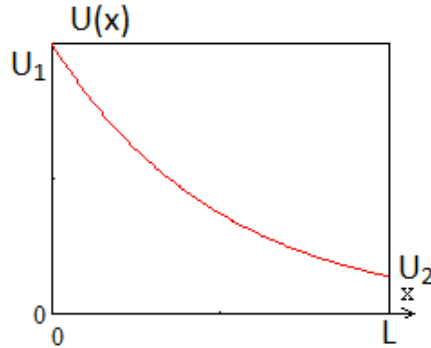


Рис. 5.15

Например, если в коаксиальном кабеле затухание равно $\alpha=0,1$ дБ/м, то для фидера длиной $L=100$ м затухание сигнала составит 10 дБ или 10 раз по мощности, а по напряжению $\sqrt{10} = 3,16$ раза. Чем длиннее фидер, тем выше затухание.

5.9.2. Отрезок длинной линии

Отрезок разомкнутой на конце длинной линии длиной L имеет емкостное сопротивление, равное

$$Z_{BX} = -j \cdot Z_C \operatorname{ctg}(\beta x') = jX_{BX}.$$

Зависимость X_{BX} от x' показана на рис. 5.16.

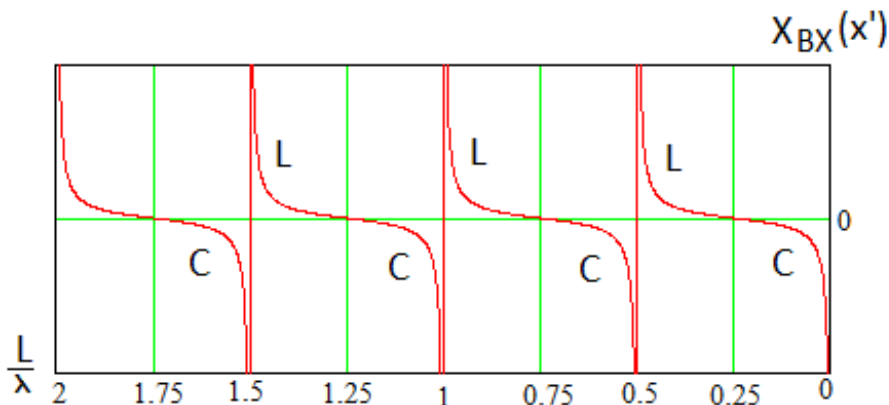


Рис. 5.16

Как видно, с его помощью можно реализовать любое реактивное сопротивление (индуктивное или емкостное). Для емкостного сопротивления чаще всего используют $L < \lambda/4$, а для индуктивного применяют короткозамкнутый отрезок линии.

Разомкнутый на конце отрезок линии при

$$L = \frac{\lambda}{4} + k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

ведет себя как **последовательный колебательный контур**, а при

$$L = k \frac{\lambda}{2}$$

- как **параллельный**. Для короткозамкнутого отрезка эти формулы меняются местами.

Короткозамкнутый отрезок линии без потерь длиной

$$L = \frac{\lambda}{4} + k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

имеет бесконечное входное сопротивление и используется как крепежная подставка для двухпроводной линии (рис. 5.17).

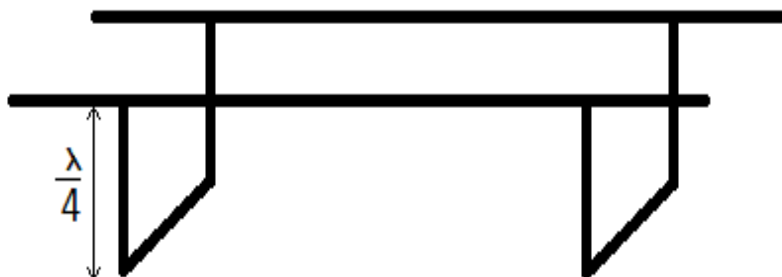


Рис. 5.17

5.9.3. Четвертьволновый трансформатор

Отрезок линии длиной

$$L = \frac{\lambda}{4}$$

с волновым сопротивлением Z_0 можно использовать для трансформации со-

противления нагрузки фидера с целью обеспечения в нем режима бегущих волн, как показано на рис. 5.18.

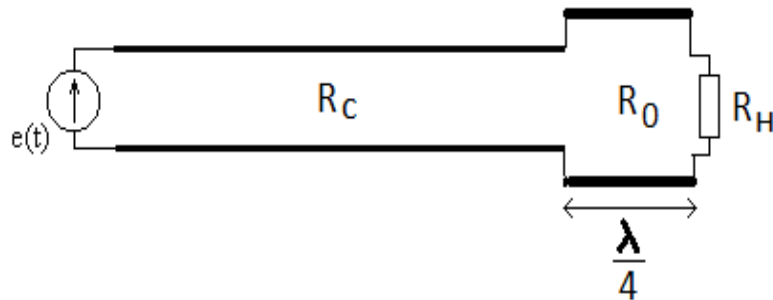


Рис. 5.18

При отсутствии потерь для четвертьволнового отрезка получим

$$Z_{BX}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \lim_{\beta x' \rightarrow \pi/2} \left\{ R_0 \frac{R_H + j \cdot R_0 \operatorname{tg}(\beta x')}{R_0 + j \cdot R_H \operatorname{tg}(\beta x')} \right\} = \frac{R_0^2}{R_H},$$

и это сопротивление должно быть равно волновому сопротивлению фидера

$$Z_{BX}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{R_0^2}{R_H} = R_C,$$

тогда волновое сопротивление четвертьволнового трансформатора должно быть равно

$$R_0 = \sqrt{R_C R_H}$$

5.9.4. Согласующий шлейф

Если нагрузка линии не согласована ($Z_H \neq Z_C$), то для обеспечения режима бегущих волн в основной части фидера используют согласование шлейфом, как показано на рис. 5.19.

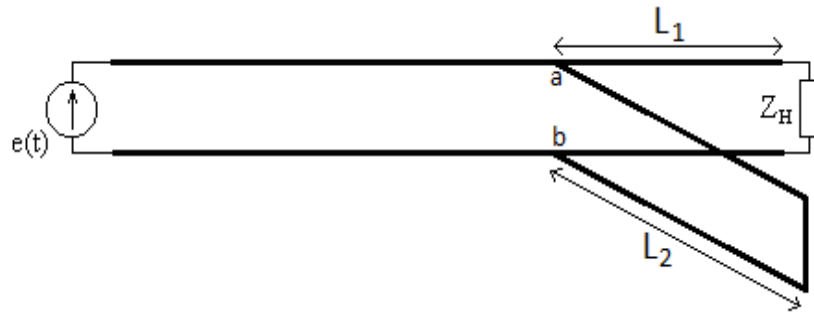


Рис. 5.19

В точках подключения фидера ab входная проводимость его отрезка с нагрузкой должна быть равна

$$Y_{BX}(L_1) = \frac{1}{Z_{BX}(L_1)} = \frac{1}{R_C} \frac{R_C + j \cdot R_H \operatorname{tg}(\beta L_1)}{R_H + j \cdot R_C \operatorname{tg}(\beta L_1)} = \frac{1}{R_C} + j b_{BX},$$

где b_{BX} - получившаяся реактивная входная проводимость. Из уравнения

$$\operatorname{Re}\{Y_{BX}(L_1)\} = \frac{1}{R_C}$$

найдем величину L_1 , а реактивная проводимость будет равна

$$b_{BX} = \operatorname{Im}\{Y_{BX}(L_1)\}.$$

Для ее **компенсации** и используется шлейф, реактивная проводимость которого должна быть равна $-b_{BX}$.

Для короткозамкнутого шлейфа

$$b_{BX \text{ ШЛЕЙФА}} = \frac{1}{R_C \operatorname{tg}(\beta L_2)},$$

тогда из уравнения

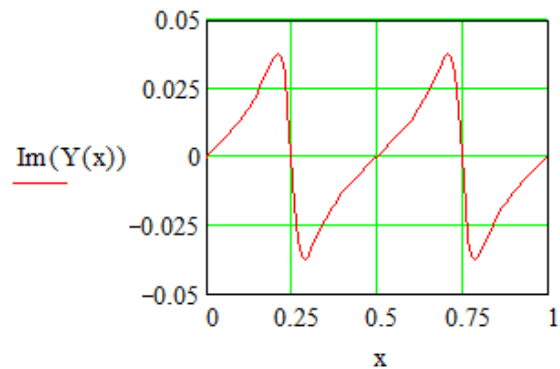
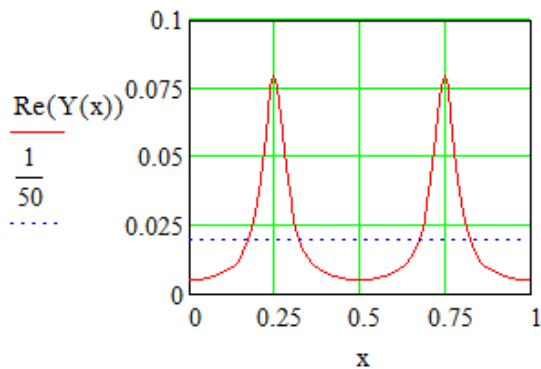
$$b_{BX} = -\frac{1}{R_C \operatorname{tg}(\beta L_2)}$$

найдем длину шлейфа L_2 .

Пример программы расчета шлейфа показан на рис. 5.20.

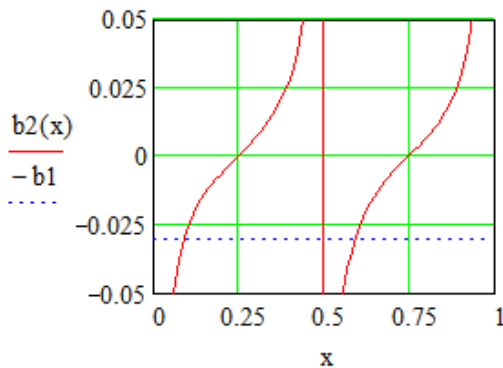
$$R_c := 50 \quad R_n := 200 \quad x := 0, 0.01 \dots 1$$

$$Y(x) := \frac{1}{50} \cdot \frac{R_c + i \cdot R_n \cdot \tan(2 \cdot \pi \cdot x)}{R_n + i \cdot R_c \cdot \tan(2 \cdot \pi \cdot x)}$$



$$x := 0.2 \quad L1 := \text{root}\left(\text{Re}(Y(x)) - \frac{1}{R_c}, x\right) \quad L1 = 0.176 \quad b1 := \text{Im}(Y(L1)) \quad b1 = 0.03$$

$$b2(x) := -\frac{1}{(R_c \cdot \tan(2 \cdot \pi \cdot x))} \quad x := 0, 0.01 \dots 1$$



$$x := 0.2$$

$$L2 := \text{root}(b2(x) + b1, x)$$

$$L2 = 0.094$$

Рис. 5.20

Как видно, при $R_c = 50 \text{ Ом}$ и $R_n = 200 \text{ Ом}$ нагрузка не согласована. На расстоянии $L_1 = 0,176 \cdot \lambda$ от нее активная составляющая проводимости равна $b_1 = 0,03 \text{ Сим}$ и имеет емкостный характер ($b_1 > 0$). Тогда шлейф должен иметь индуктивный характер проводимости, равный $b_2 = -b_1 = -0,03 \text{ Сим}$, что имеет место на расстоянии $L_2 = 0,094 \cdot \lambda$ от короткого замыкания. В этом случае в основной части фидера реализуется режим **бегущих волн**, от точек подключения шлейфа до нагрузки – **режим смешанных волн**, а в шлейфе – **режим стоячих волн**.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В третьей части учебного пособия рассмотрены частотный, операторный и временной методы расчета реакции цепи на негармоническое входное воздействие. Проведен анализ нестационарных процессов методом переменных состояния, рассмотрены элементы теории синтеза электрических цепей, методы анализа нелинейных резистивных цепей, основы теории цепей с распределенными параметрами.

Теоретический материал сопровождается примерами, рекомендуется проводить схемотехническое моделирование и использовать программирование на языках высокого уровня.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Попов В. П. Основы теории цепей: учебник для академического бакалавриата. В 2 ч. / В. П. Попов. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – Ч. 1 – 378 с.
2. Попов В. П. Основы теории цепей / В. П. Попов. – М.: Высш. шк., 2003. – 575 с.
3. Литвиненко В. П. Основы теории цепей: учебное пособие. В 3 ч. / В. П. Литвиненко, О. В. Чернояров. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2016.– Ч. 1. – 230 с.
4. Литвиненко В. П. Основы теории цепей: учебное пособие В 3 ч. / В. П. Литвиненко, Ю. В. Литвиненко. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2018.– Ч. 2. –194 с.
5. Литвиненко В. П. Лабораторный практикум по теории цепей: учебное пособие / В. П. Литвиненко, Ю. В. Литвиненко. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2014. –104 с.
6. Макаров Е. Г. Mathcad: учебный курс / Е. Г. Макаров. СПб: Питер, 2006. – 394 с.
7. Амелина М. А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8 / М. А. Амелина, С. А. Амелин. – М.: Горячая линия – Телеком, 2011. – 464 с.
8. Карлащук В. И. Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Electronics Workbench и ее применение / В. И. Карлащук. – М.: Солон-Р, 1996. – 506 с.
9. Литвиненко В. П. Расчет линейных электрических цепей: учебное пособие / В. П. Литвиненко, Ю. В. Литвиненко. – Воронеж: ГОУВПО ВГТУ, 2006. – 243 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. МЕТОДЫ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ.....	3
1.1. Сложные сигналы и цепи.....	3
1.2. Частотный (спектральный) метод.....	3
1.3. Операторный метод.....	5
1.4. Временной метод	7
1.4.1. Временные характеристики цепи.....	7
1.4.2. Интеграл Дюамеля.....	9
1.5. Матричные методы расчета.....	10
1.5.1. Применение ЭВМ для расчета цепей.....	10
1.5.2. Топологические матрицы цепи и графы.....	11
2. МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	20
В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	
2.1. Методы анализа нестационарных процессов.....	20
2.2. Метод переменных состояния.....	20
2.3. Матричная запись метода переменных состояния.....	21
3. СИСТЕМНЫЕ ФУНКЦИИ И СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ.....	23
3.1. Синтез цепи.....	23
3.2. Системные функции цеп.....	23
3.3. Положительная вещественная функция.....	23
3.4. Примеры системной функции.....	25
3.5. Синтез двухполюсников.....	26
3.5.1. Метод Фостера.....	26
3.5.2. Метод Кауэра.....	28
3.6. Синтез четырехполюсников.....	29
3.7. Пример синтеза четырехполюсника в программе MicroCAP.....	30
4. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗИСТИВНЫЕ ЦЕПИ.....	32
4.1. Нелинейные резистивные элементы, вольтамперные характеристики.....	32
4.2. Расчет нелинейных цепей.....	32
4.3. Соединения нелинейных элементов.....	33
4.4. Графоаналитический метод расчета нелинейных резистивных цепей	35
4.5. Воздействие переменного сигнала на нелинейную цепь.....	37
4.6. Динамические вольтамперные характеристики.....	39
4.7. Анализ нелинейных цепей с управляемым нелинейным трехполюсником.....	40
5. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	42
5.1. Распределенные параметры.....	42
5.2. Телеграфные уравнения.....	44

5.3. Решение телеграфных уравнений.....	47
5.4. Падающая и отраженная волны.....	50
5.5. Коэффициент отражения.....	52
5.6. Режимы работы длинной линии.....	53
5.6.1. Режим бегущих волн.....	53
5.6.2. Режим стоячих волн в линии без потерь.....	55
5.6.3. Линия без потерь при реактивной нагрузке.....	58
5.6.4. Линия без потерь при несогласованной активной нагрузке.....	61
5.7. Коэффициент стоячей волны и коэффициент бегущей волны	61
5.8. Входное сопротивление линии.....	62
5.9. Применение длинной линии.....	63
5.9.1. Фидер.....	63
5.9.2. Отрезок длинной линии.....	64
5.9.3. Четвертьволновый трансформатор.....	65
5.9.4. Согласующий шлейф.....	66
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	69
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	70

Учебное издание

Литвиненко Владимир Петрович
Литвиненко Юлия Владимировна
Глушков Алексей Николаевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Учебное пособие

В 3-х частях

Часть 3

Редактор Проняева О. В.

Подписано к изданию 26.07.2022.
Объем данных 1,7 Мб

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84