Введение

В современной науке и технике математические методы исследования имеют все большую роль. Это обусловлено прежде всего быстрым ростом вычислительной техники, благодаря которой существенно расширяются возможности успешного применения математики при решении многих задач.

Настоящие методические указания ставят своей задачей помочь студентам первого курса дневной и заочной форм обучения овладеть приёмами решения задач по теме «Введение в математический анализ», а также обеспечить самостоятельность выполнения типового расчета.

Методические указания содержат теоретические вопросы, решения типовых задач и варианты заданий типового расчета. Решение последних аккуратно выполняются в отдельной тетради, с краткими пояснениями решения задач, четкими чертежами и рисунками.

Каждый вариант контрольного задания содержит 7 задач.

Задача первая – найти область определения функции.

Задача вторая – найти пределы функции.

Задача третья – исследовать функции на непрерывность.

Задача четвертая – найти производные данных функций.

Пятая задача – вычислить приближенно значение функции с помощью дифференциала.

Шестая задача – исследовать функцию и построить её график.

Седьмая задача – применение производной для решения задач с геометрическим и физическим содержанием.

Прежде чем приступить к выполнению типового расчета, студенту необходимо изучить конспекты лекций и рекомендуемую учебную литературу.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

I. Отыскание области определения функции

Напомним, что такая функция составляется из основных элементарных функций с помощью арифметических действий и подстановки одной функции в аргумент другой. Поэтому в область определения войдут те x, для которых:

1) аргументы всех основных элементарных функций, присутствующие в формуле, будут находиться в пределах их областей определения;

2) все арифметические действия могут быть выполнены.

Рассмотрим функцию $\quad y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\sqrt[8]{\dfrac{\pi^2}{4}-x^2}$.

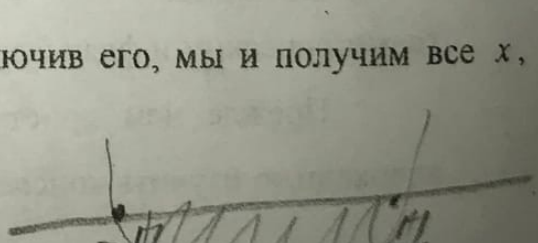
Возьмем некоторое x. Согласно формуле для вычисления $y(x)$ надо:

1) найти x^2 (выполнимо для любого x);

2) выполнить вычитание $\dfrac{\pi^2}{4}-x^2$ (можно всегда);

$x^2 \le \frac{\pi}{4}$

3) извлечь $\sqrt[8]{\dfrac{\pi^2}{4}-x^2}$ (выполнимо только тогда, когда $\dfrac{\pi^2}{4}-x^2\ge 0$). Отсюда $x^2\le\dfrac{\pi^2}{4}$ или $|x|\le\dfrac{\pi^2}{4}$. Последнее неравенство означает, что $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$. Но $y(x)$ будет существовать лишь тогда, когда отношение $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ существует. Так как $\sin x$, $\cos x$ определены для всех x, а вычитание выполнимо всегда, остается выбрать x так, чтобы выполнялось деление $\sin x$ на $(1-\cos x)$. Это возможно лишь тогда, когда $(1-\cos x)\ne 0$. Так как среди интервала на $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ $\cos x=1$ только при $x=0$, то, исключив его, мы и получим все x, при которых $y(x)$ определена.



Ответ: $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Разберем решение еще одного примера: $y = ctg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{x}{\ln x}$.

Функция $y(x)$ существует тогда, когда существуют оба слагаемых:

1) $y = ctg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ определен только тогда, когда $x + \frac{\pi}{4} \neq \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Отсюда $x \neq \pi k - \frac{\pi}{4}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

2) $y = \frac{x}{\ln x}$ существует тогда, когда существует $\ln x$, т.е. только при $x > 0$, а также, когда выполнимо деление, т.е. $\ln x \neq 0$. Т.к. $\ln x = 0$ при $x = 1$, то это значение необходимо исключить из области определения.

Ответ: область определения состоит из положительных x, за исключением $x = 1$, $x = \pi k - \frac{\pi}{4}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

II. <u>Нахождение пределов для неопределенностей различных типов</u>

При решении этих примеров надо знать, как раскрываются неопределенности $\frac{многочлен}{многочлен}$, типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, и опираться на 1-й и 2-й замечательные пределы вместе с их следствиями.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 5x}$ есть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, составленная из тригонометрических функций. Преобразуем это выражение так, чтобы можно было воспользоваться 1-м замечательным пределом $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{\sin^2 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x \cdot x^2 25}{25x^2 \cdot \sin^2 5x} =$ (домножили и разделили на $25x^2$) $= \lim\limits_{x \to 0} 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)^2 \cdot \frac{1}{25}$.

В силу 1-го замечательного предела при $x \to 0$ первая и вторая скобки стремятся к 1, а все выражение к $\frac{2}{5^2} = \frac{2}{25}$;

2) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{6+x} - x}{x^3 - 27}$ есть неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Здесь надо сначала избавиться от корня в числителе. С этой целью умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{6+x} + x$, сопряженное числителю. Тогда по формуле «разности квадратов» в числителе будет $\left(\sqrt{6+x}\right)^2 - x^2 = 6 + x - x^2$. Знаменатель при этом примет вид $\left(x^3 - 27\right) \cdot \left(\sqrt{6+x} - x\right)$. Далее выражение $\frac{6 + x - x^2}{\left(x^3 - 27\right) \cdot \left(\sqrt{6+x} - x\right)}$ преобразуем, раскладывая числитель и знаменатель на множители. По теореме Виета: $6 + x - x^2 = -(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, где x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 - x + 6 = 0$. Так как $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, то $6 + x - x^2 = -(x-3) \cdot (x+2)$. В свою очередь $x^3 - 27$ разложим по формуле сокращенного умножения $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$:

$$x^3 - 27 = (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9).$$

Окончательно $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{6+x} - x}{x^3 - 27} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{6 + x - x^2}{(x^3 - 27) \cdot (\sqrt{6+x} + x)} =$

$$= -\lim_{x \to 3} \frac{(x-3) \cdot (x+2)}{(x-3) \cdot (x^2 + 3x + 9) \cdot (\sqrt{6+x} + x)} = -\lim_{x \to 3} \frac{x+2}{(x^2 + 3x + 9) \cdot (\sqrt{6+x} + x)}.$$

Если теперь устремить $x \to 3$, то в последнем выражении неопределенность не возникает. Числитель равен 5, а знаменатель $(3^2 + 3 \cdot 3 + 9) \cdot (\sqrt{6+3} + 3) = 27 \cdot 6 = 162$. Поэтому $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{6+x} - x}{x^3 - 27} = \frac{5}{162}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{100x^3 - 8x + 197}{5x^4 + 1}$ есть неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия поделим числитель и знаменатель на старшую степень x^4.

В силу 1-го замечательного предела при $x \to 0$ первая и вторая скобки стремятся к 1, а все выражение к $\frac{2}{5^2} = \frac{2}{25}$;

2) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{6+x} - x}{x^3 - 27}$ есть неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Здесь надо сначала избавиться от корня в числителе. С этой целью умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{6+x} + x$, сопряженное числителю. Тогда по формуле «разности квадратов» в числителе будет $\left(\sqrt{6+x}\right)^2 - x^2 = 6 + x - x^2$. Знаменатель при этом примет вид $\left(x^3 - 27\right) \cdot \left(\sqrt{6+x} - x\right)$. Далее выражение $\frac{6 + x - x^2}{\left(x^3 - 27\right) \cdot \left(\sqrt{6+x} - x\right)}$ преобразуем, раскладывая числитель и знаменатель на множители. По теореме Виета: $6 + x - x^2 = -(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, где x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 - x + 6 = 0$. Так как $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, то $6 + x - x^2 = -(x-3) \cdot (x+2)$. В свою очередь $x^3 - 27$ разложим по формуле сокращенного умножения $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$:

$$x^3 - 27 = (x-3) \cdot (x^2 + 3x + 9).$$

Окончательно $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{6+x} - x}{x^3 - 27} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{6 + x - x^2}{(x^3 - 27) \cdot (\sqrt{6+x} + x)} =$

$$= -\lim_{x \to 3} \frac{(x-3) \cdot (x+2)}{(x-3) \cdot (x^2 + 3x + 9) \cdot (\sqrt{6+x} + x)} = -\lim_{x \to 3} \frac{x+2}{(x^2 + 3x + 9) \cdot (\sqrt{6+x} + x)}.$$

Если теперь устремить $x \to 3$, то в последнем выражении неопределенность не возникает. Числитель равен 5, а знаменатель $(3^2 + 3 \cdot 3 + 9) \cdot (\sqrt{6+3} + 3) = 27 \cdot 6 = 162$. Поэтому $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{6+x} - x}{x^3 - 27} = \frac{5}{162}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{100x^3 - 8x + 197}{5x^4 + 1}$ есть неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия поделим числитель и знаменатель на старшую степень x^4.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^3-8x+197}{5x^4+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{100}{x}-\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{197}{x^4}}{5+\dfrac{1}{x^4}}$.

Так как $\dfrac{10}{x}$, $\dfrac{8}{x^3}$, $\dfrac{197}{x^4}$, $\dfrac{1}{x^4}\to 0$ при $x\to\infty$, то наша дробь стремится к $\dfrac{0}{5}=0$.

Окончательно $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^3-8x+197}{5x^4+1}=0$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{3x}$ – это неопределенность типа 1^∞. Применим 2-й замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$. Для этого постараемся привести величину $\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)\to 1$ при $x\to\infty$ к виду $(1+a)$, где $a\to 0$. Это делается выделением $x+3$ в числителе:

$$\frac{x+1}{x+3}=\frac{(x+3)-3+1}{x+3}=\frac{(x+3)}{(x+3)}-\frac{2}{x+3}=1-\frac{2}{x+3}.$$

Здесь $a=-\dfrac{2}{x+3}\to 0$ при $x\to\infty$. После этого представляем выражение $\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{3x}$ в виде $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$: $\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{3x}=\left[\left(1-\dfrac{2}{x+3}\right)^{\left(-\frac{x+3}{2}\right)}\right]^{\left(-\frac{2}{x+3}\right)\cdot 3x}$.

Так как по 2-му замечательному пределу выражение в квадратных скобках стремится к e при $x\to\infty$, а $\left(-\dfrac{2}{x+3}\right)\cdot 3x=-6\cdot\dfrac{x}{x+3}=-6\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{x}}\to -6$ при $x\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{3x}=e^{-6}$;

5) $\lim\limits_{x\to -1}(1+x)^{x^2-1}$. Это неопределенность вида 0^0, которая сводится к неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$ с помощью логарифмирования. Для этого обозначим за $u=(1+x)^{x^2-1}$ и вычислим $\ln u=(x^2-1)\ln(1+x)$. При $x\to -1$ $1+x\to 0$. Обозначим за $\dfrac{1}{z}=1+x$. Тогда при $x\to -1$ $z=\dfrac{1}{x+1}\to\infty$, а из соотношения $1+x=\dfrac{1}{z}$ будем иметь $x=\dfrac{1}{z}-1$. Заменяя x его выражением через z, получаем

$$\ln u=(x^2-1)\ln(1+x)=(x+1)\cdot(x-1)\ln(1+x)=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}-2\right)\ln\frac{1}{z}=-\frac{\ln z}{z}\cdot\left(\frac{1}{z}-2\right).$$

Т.к. при $z\to\infty$ $\dfrac{\ln z}{z}\to 0$, а $\left(\dfrac{1}{z}-2\right)\to -2$, то $\ln u\to 0$, откуда $\ln\lim\limits_{u\to 0}u=0$.

Окончательно $\lim\limits_{x\to -1}(1+x)^{x^2-1}=1$.

III. <u>Исследовать функцию на непрерывность</u>

1) $y=\dfrac{1}{1-4^{1/(x+2)}}$ в точках $x=0$ и $x=-2$.

Эта функция элементарная, следовательно, она непрерывна всюду, где определена. Так как $y(0)=\dfrac{1}{1-4^{1/2}}=\dfrac{1}{1-2}=-1$ существует, то в этой точке $y(x)$ непрерывна.

При $x=-2$ функция $y(x)$ не определена и, следовательно, разрывна. Исследуем характер разрыва. Для этого найдем левый $y(-2-0)$ и правый $y(-2+0)$ пределы в точке $x=-2$.

При отыскании правого предела надо считать, что $x\to -2$ справа, т.е. $x\to -2$, оставаясь больше -2. Поэтому $x+2\to 0$, но $x+2>0$. Тогда

$\frac{1}{x+2} \to +\infty$ и значит $4^{1/x+2} \to +\infty$. Отсюда $y(-2+0)=0$, т.к. знаменатель $1-4^{1/x+2}$ неограниченно растет, когда $x \to -2$.

Найдем $y(-2-0)$. Теперь полагаем, что $x \to -2$, но $x < -2$. Тогда $x+2 \to 0$, но $x+2<0$, откуда $\frac{1}{x+2} \to -\infty$ и $4^{\frac{1}{x+2}} \to 0$. Значит, $y(-2-0) = \frac{1}{1-0} = 1$. Итак, $y(-2-0)=1 \neq y(-2+0)=0$. Следовательно, в точке $x=-2$ функция имеет разрыв первого рода.

2) $$y = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ -3x, & 0 < x < \pi \\ \sin x, & x \ge \pi \end{cases}.$$

Как известно, элементарные функции непрерывны всюду, где определены. Наша функция совпадает с элементарными функциями x^2 и $(-3x)$ на промежутках $]-\infty, 0[$, $]0, \pi[$, $\sin x$ на промежутке $]\pi, \infty[$. Следовательно, во всех точках этих промежутков наша функция непрерывна так же, как и перечисленные элементарные функции.

Остаются только две точки $x=0$ и $x=\pi$, где происходит стыковка разных функций и где непрерывность не гарантирована.

Рассмотрим точку $x=0$. По определению $y(x)$ непрерывна в точке $x=a$, если левый предел в этой точке $y(a-0)$ равен правому пределу $y(a+0)$ и равен значению $y(a)$. Вычислим все три величины для $x=0$.

$$y(0-0) = \lim_{\substack{x\to a \\ x<0}} y(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad (\text{т.к. при } x<0 \;\; y(x)=x^2);$$

$$y(0+0) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>0}} y(x) = \lim_{x\to 0} (-3x) = 0 \qquad (\text{т.к. при } x>0 \;\; y(x)=-3x);$$

$$y(0) = 0^2 = 0 \qquad (\text{т.к. при } x=0 \;\; y(x)=x^2).$$

Все три числа равны, следовательно, функция непрерывна в точке $x=0$.

Проверим точку $x = \pi$:

$$y(\pi - 0) = \lim_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} y(x) = \lim_{x \to \pi} (-3x) = -3\pi; \quad y(\pi + 0) = \lim_{\substack{x \to \pi \\ x > \pi}} y(x) = \lim_{x \to \pi} \sin x = 0;$$

$$y(\pi) = \sin \pi = 0.$$

Левый предел не равен правому, значит, функция имеет разрыв первого рода в точке $x = \pi$. График функции $y(x)$ приведен на рис. 1

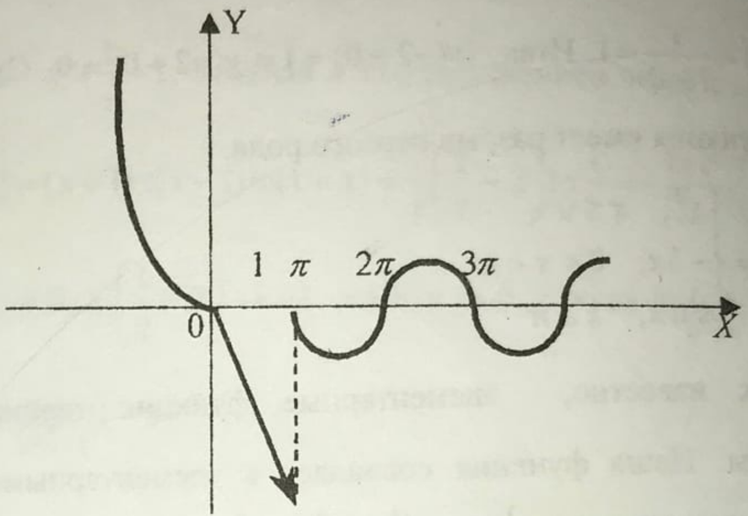


Рис.1

IV. Найти производные функции:

1) $y = 4x^5 - 3\sqrt[4]{x} + 2$.

Для нахождения производной применим формулы:

а) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$; б) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

в) $(u^\alpha) = \alpha \cdot u^{\alpha - 1}$; с) $(c)' = 0$.

$$y' = (4x^5 - 3\sqrt[4]{x} + 2)' = (4x^5)' - (3\sqrt[4]{x})' + (2)' =$$

$$= 4(x^5)' - 3(\sqrt[4]{x})' + (2)' = 4 \cdot 5x^4 - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-3/4} + 0 = 20x^4 - \frac{3}{4}x^{-3/4}.$$

2) $y = (x^3 + 4) \cdot (5x - 1)$.

Применим формулу производной произведения двух функций $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ и формулы б) и в) из примера 1. В нащем случае $u = x^3 + 4$, $v = 5x - 1$.

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$$y' = (x^3+4)'(5x-1)+(x^3+4)(5x-1)' = 3x^2\cdot(5x-1)+(x^3+4)\cdot 5 =$$
$$= 15x^3-3x^2+5x^3+20 = 20x^3-3x^2+20.$$

$tg x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$ctg x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

3) $\quad y = \dfrac{3x^5}{a^2-x^4}.$

Воспользуемся формулой произведения частного двух функций $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$. В данном примере $u = x^5$, $\quad v = a^2 - x^4$.

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y' = 3\cdot\left(\frac{x^5}{a^2-x^4}\right)' = 3\cdot\frac{(x^5)'\cdot(a^2-x^4)-x^5\cdot(a^2-x^4)'}{(a^2-x^4)^2} =$$
$$= 3\cdot\frac{5x^4(a^2-x^4)-x^5(-4x^3)}{(a^2-x^4)^2} = 3\cdot\frac{5x^4a^2-5x^8+4x^8}{(a^2-x^4)^2} = 3\cdot\frac{5x^4a^2-x^8}{(a^2-x^4)^2} =$$
$$= \frac{15x^4a^2-3x^8}{(a^2-x^4)^2}.$$

$arctg x = \frac{1}{1+x^2}$,

$arcctg x = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

4) $\quad y = \dfrac{\cos(7x-2)}{x^2}.$

В этом примере необходимо применять формулы для производной частного двух функций и для производной функции от функции, т.е. если $y = f(\varphi(x))$, то $y' = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.

$$y' = \frac{(\cos(7x-2))'x^2-\cos(7x-2)(x^2)'}{x^4} = \frac{-\sin(7x-2)(7x-2)'x^2-2x\cos(7x-2)}{x^4} =$$
$$= \frac{-7x^2\cdot\sin(7x-2)-2x\cdot\cos(7x-2)}{x^4} = \frac{-7x\cdot\sin(7x-2)-2x\cdot\cos(7x-2)}{x^3}.$$

5) $\quad y = \arcsin\sqrt{x-3}.$

По формуле для производной сложной функции имеем:

$$y' = (\arcsin\sqrt{x-3})' = (\arcsin\sqrt{x-3})'\cdot\left(\sqrt{x-3}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x-3}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-3}}\cdot(x-3)' =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x-3)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-3}}\cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{(4-x)(x-3)}}.$$

6) $y = 2^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Применяя формулу для производной сложной функции получим:

$$y' = \left(2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right)' \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)' = 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\sin^{-2} x\right)' = 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot$$

$$\cdot(-2) \cdot \sin^{-3} x \cdot (\sin x)' = -2 \cdot 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \sin^{-3} x \cdot \cos x =$$

$$= -2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x}.$$

7) $y = \lg\left(\frac{1}{x} - \sin 2x\right)$.

По формуле для производной сложной функции получим:

$$y' = \lg'\left(\frac{1}{x} - \sin 2x\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - \sin 2x\right)' = \frac{1}{\frac{1}{x} - \sin 2x} \cdot \frac{1}{\ln 10}\left(\left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin 2x)'\right) =$$

$$= \frac{x}{1 - x\sin 2x} \cdot \frac{1}{\ln 10}\left(\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos 2x\right) = -\frac{x}{1 - x\sin 2x} \cdot \frac{1}{\ln 10}\left(\frac{1}{x^2} + 2\cos 2x\right).$$

8) $y = (\cos x)^{\sin x}$.

Так как в этом примере основание и показатель степени зависят от x, то применим правило логарифмического дифференцирования: $y = u(x)^{v(x)}$; $\ln y = \ln\left(u(x)^{v(x)}\right)$; $\ln y = v(x) \cdot \ln(u(x))$. Продифференцируем левую и правую части последнего равенства $\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$ и окончательно получим:

$$y' = y \cdot \left(v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right), \quad y' = u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

В данном примере $u(x) = \cos x$, $v(x) = \sin x$.

$$y' = (\cos x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln\cos x + \sin x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}\right) = (\cos x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right).$$

9) $\arccos(2x \cdot y) = 2^x$.

Это уравнение не разрешимо относительно y, следовательно, функция $y(x)$ задана неявно. В общем виде это записывается так: $F(x, y) = 0$. Чтобы найти производную $y'(x)$, нужно обе части уравнения $F(x, y) = 0$ продифференцировать по x, рассматривая y как функцию от x. А потом из полученного уравнения выразить искомую производную y'.

$$\left(\arccos(2x \cdot y)\right)' = (2^x)'; \quad -\frac{1}{\sqrt{1-(2xy)^2}} \cdot (2xy)' = 2^x \cdot \ln 2;$$

$$-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2y^2}} \cdot (y + xy') = 2^x \cdot \ln 2;$$

$$-\frac{2xy'}{\sqrt{1-4x^2y^2}} = \frac{2y}{\sqrt{1-4x^2y^2}} + 2^x \cdot \ln 2;$$

$$y' = -\frac{y}{x} - \frac{2^x \cdot \ln 2\sqrt{1-4x^2y^2}}{2x}.$$

10) $\begin{cases} x = 2\sin t^2 \\ y = 3\cos t^2 \end{cases}$

Если функция задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \qquad y''_{xx} = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3}.$$

$$y'_x = \frac{\left(3\cos t^2\right)'_t}{\left(2\sin t^2\right)'_t} = \frac{-3\sin t^2 \left(t^2\right)'}{2\cos t^2 (t^2)'} = \frac{-3\sin t^2 \cdot 2t}{2\cos t^2 \cdot 2t} = -\frac{3\sin t^2}{2\cos t^2} = -\frac{3}{2} tg t^2.$$

V. <u>Приближенное вычисление с помощью дифференциала</u>

Для решения примеров из пункта V необходимо знать, что при малых приращениях аргумента $\Delta x = x - x_0$ приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ приближенно равно дифференциалу $dy = f'(x_0)\Delta x$. Т.е. $\Delta y \approx dy$ или $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$, откуда

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \qquad (1)$$

1. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{8{,}02}$. Рассмотрим функцию $y=\sqrt[3]{x}$. За x_0 выбираем значение, наиболее близкое к подкоренному выражению, корень кубический из которого есть целое число. В нашем случае $x_0=8$, тогда $\Delta x=0{,}02$, $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, а $f'(x_0)=f'(8)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\dfrac{1}{12}$. Итак, по формуле (1) имеем: $\sqrt[3]{8{,}02}=\sqrt[3]{8}+\dfrac{1}{12}\cdot 0{,}02\approx 2{,}02$.

2. Вычислить приближенно $\cos 59^0$. Рассмотрим функцию $y=\cos x$, $x_0=60^0$, $\Delta x=-1^0$. Перейдем к радианной мере $x_0=\dfrac{\pi}{3}$, $\Delta x=-\dfrac{\pi}{180}=-\dfrac{3{,}14}{180}$;

$f'(x)=(\cos x)'=-\sin x$, $\quad f'(x_0)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1{,}732}{2}=-0{,}866$;

$$\cos 59^0\approx\cos\frac{\pi}{3}+(-\sin\frac{\pi}{3})\cdot(-0{,}017)=0{,}5+0{,}866\cdot 0{,}017=0{,}5+0{,}0147=0{,}5147$$

$\Rightarrow \quad \cos 59^0\approx 0{,}5147$.

VI. Исследование функции и построение графика

Рассмотрим функцию $\qquad y=(x+2)e^{1/x}$.

1. Область определения: вся числовая ось за исключением $x=0$, или $x\in]-\infty,\ 0[\cup]0,\ +\infty[$.

2. Изучим поведение функции на границе области определения, то есть выясним, к чему приближается y, если x приближается к одной из границ области определения. Это также связано и с нахождением наклонных или вертикальных асимптот графика.

Пусть $x\to-\infty$, тогда $\dfrac{1}{x}\to 0$, $\quad e^{1/x}\to e^0=1$, $\quad x+2\to-\infty$. Таким образом, при $x\to-\infty$ $\ y\to-\infty$. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что при $x\to+\infty$ $\ y\to+\infty$.

Проверим наличие наклонных асимптот вида $y = kx + b$ при $x \to \pm\infty$. Как известно, коэффициенты k и b надо находить по формулам

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Если хотя бы один из этих пределов не существует или равен $\pm\infty$, то асимптоты на этом конце числовой оси у графика нет.

В нашем примере

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+2)e^{1/x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) \cdot e^{1/x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) \cdot \lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left((x+2)e^{1/x} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) + \lim_{x \to \pm\infty} 2 \cdot e^{1/x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} + 2 = 1 + 2 = 3$$

(здесь использовано следствие из 2-го замечательного предела $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$).

Коэффициенты k и b найдены, значит, y графика нашей функции при $x \to \pm\infty$ есть наклонная асимптота $y = x + 3$.

Теперь перейдем к граничной точке $x = 0$. Определим предел $y(x)$ в $x = 0$ слева:

$$y(0-0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (x+2)e^{1/x} = \lim_{x \to 0} (x+2) \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^{1/x} = 2 \cdot 0 = 0.$$

При $x \to 0$ слева $\quad \frac{1}{x} \to -\infty, \quad$ а $\quad e^{1/x} \to 0$.

Рассмотрим теперь предел в $x = 0$ справа. В этом случае $x \to 0$, оставаясь положительным. Поэтому, $\frac{1}{x} \to +\infty$, и $e^{1/x} \to +\infty$. Отсюда

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x+2)e^{1/x} = \lim_{x \to 0} (x+2) \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^{1/x} = 2 \cdot \infty = +\infty.$$

Тот факт, что при приближении x к конечной точке функция уходит в ∞, означает, что в этой точке y графика есть вертикальная асимптота. В нашем случае вертикальной асимптотой является прямая $x=0$, то есть ось OY.

3. Рассмотрим особенности поведения функции внутри области определения. Определим точки максимума, минимума, а также точки перегиба.

Сначала найдем первую и вторую производные

$$y' = e^{1/x} - \frac{x+2}{x^2}\cdot e^{1/x} = e^{1/x}\cdot\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right);$$

$$y'' = -e^{1/x}\cdot\frac{\left(x^2-x-2\right)}{x^4} + e^{1/x}\cdot\frac{(2x-1)x^2-\left(x^2-x-2\right)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= e^{1/x}\cdot\frac{\left(-x^2+x+2+2x^3-x^2-2x^3+2x^2+4x\right)}{x^4} = e^{1/x}\cdot\frac{5x+2}{x^4}.$$

Как известно, точки максимума и минимума функции находятся среди тех точек области определения, в которых производная первого порядка равна нулю или не существует. В нашем примере таких точек две. Это $x=2$ и $x=-1$. Точка $x=0$, в которой производная не существует, не входит в область определения и поэтому не учитывается.

Для того чтобы определить, имеет ли в этих точках функция максимум или минимум, следует определить знак производной на интервалах, на которые разбивают область определения критические точки (в нашем случае точки $x=-1$ и $x=2$). Таких интервалов четыре, причем на каждом интервале знак производной, как известно, не меняется. Поэтому на интервале $]-\infty,-1[$ знак производной совпадает со знаком

$$y'(-2) = e^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(-2)^2-(-2)-2}{(-2)^2} = e^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{4+2-2}{4} = e^{-\frac{1}{2}}\ (>0).$$

На интервале $]-1,0[$ знак производный совпадает со знаком

$$y'\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{-2}\cdot\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2}{1/4}=(-5)\cdot e^{-2}\ \ (<0).$$

На интервале $]0,\ 2[$ знак $y'(x)$ совпадает со знаком $y'(1)=-2\cdot e\ \ (<0)$. А на интервале $]2,\ +\infty[$ знак $y'(x)$ совпадает со знаком $y'(3)=e^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{9-3-2}{9}=\frac{4}{9}\cdot e^{\frac{1}{3}}\ \ (>0)$.

Так как при переходе через точку $x=-1$ слева направо знак y' меняется с "+" на "–", то в этой точке функция имеет максимум (до $x=-1$ функция возрастает, а после $y(x)$ – убывает).

Так как при переходе слева направо через точку $x=2$ знак y' меняется с "–" на "+", то в этой точке функция имеет минимум (до точки $x=2$ она убывает, а далее возрастает).

Величина локального максимума равна $y(-1)=e^{-1}(-1+2)=\frac{1}{e}=0{,}37$. Величина локального минимума равна $y(2)=e^{1/2}(2+2)=4e^{1/2}=6{,}59$.

Для определения точек перегиба надо отыскать те значения x, при которых $y''(x)=0$ или не существует. Такой точкой в области определения является только $x=-\frac{2}{5}$. Левее этой точки $y''(x)<0$, график функции $y(x)$ выпуклый вверх; правее точки $x=-\frac{2}{5}$ $y''(x)>0$, график функции $y(x)$ выпуклый вниз. Значение функции в точке перегиба $y\left(-\frac{2}{5}\right)=e^{-\frac{5}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{5}+2\right)=0{,}13$.

4. Полезно посмотреть точки, где график пересекает оси координат, а также учесть периодичность, четность или нечестность функции.

В нашем примере функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической. Ищем точки, в которых ее график пересекает оси OX и OY.

Пересечение с осью OX определяют точки, в которых $y(x)=0$. В нашем случае $(x+2)e^{1/x}=0$ при $x=-2$. Пересечение графика с осью OY происходит при $x=0$. В нашем случае это невозможно, т.к. $x=0$ не входит в область определения.

На этом исследование функции $y=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$ закончено и остается построить ее график.

На координатную плоскость XOY наносим те точки графика, в которых имеются локальные максимум, минимум и точки перегиба, а также проводим наклонные и вертикальные асимптоты. Далее по поведению функции вблизи границ области определения и на промежутках между особыми точками (возрастание, убывание, выпуклость, вогнутость) строим сам график, внимательно следя за тем, чтобы не получилось противоречие с проведенными исследованиями о характере поведения функции. Необходимые результаты построения представлены на рис.2.

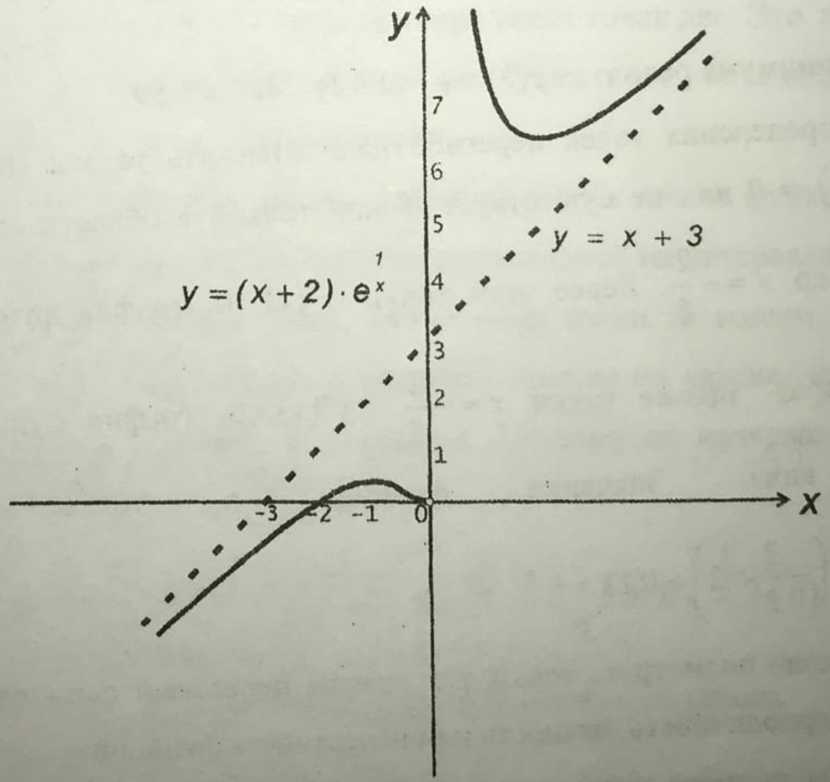


Рис. 2

Варианты типовых расчетов

Вариант N 1

√**1. Найти область определения функции:**

1) $\cos x + \sqrt[4]{1-x}$; 2) $tgx + \dfrac{1}{\lg x}$.

√**2. Найти пределы функций:**

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{4x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-x}{x^2-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2}{x+x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^{2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{x^2-1}$.

√**3. Исследовать функции на непрерывность:**

1) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ -(x-2)^2, & 0<x<1 \\ x-2, & x\ge 1 \end{cases}$

2) $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x+1}}}$, $x=-1$, $x=-2$.

√**4. Найти производные данных функций:**

1) $y=3x^2-5\sqrt[3]{x}+1$; 2) $y=(x^2-3)\cdot(2x+1)$; 3) $y=\dfrac{2x^4}{b^2-x^4}$;

4) $y=\dfrac{\sin(3x+5)}{x}$; 5) $y=x\cdot\arcsin x^3$; 6) $y=\sqrt{\ln x}$;

7) $y=\ln\left(\dfrac{1-e^x}{e^x}\right)$; 8) $y=(\sin x)^{\cos x}$; 9) $y=arctg(x\cdot y)=5^x$;

10) $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=\log_3 t \end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{25{,}01}$; 2) $arctg\ 0{,}98$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{9}{x^2-9}$; 2) $y=e^{2x-x^2}$.

7. Задан закон прямолинейного движения точки $x=5\sin^2 t-t^2$. Найти скорость и ускорение точки для моментов времени $t_1=\dfrac{\pi}{4}$, $t_2=\dfrac{2}{3}\pi$.

Вариант N 2

1. Найти область определения функции:

1) $\arcsin\frac{x}{5}+5^{x}$; 2) $ctg\,2x-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx^2}{2x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-2}{x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{x^3+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{4+2x}\right)^{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\le 1\\ x^2, & 1<x\le 2.\\ 3x-4, & x>2\end{cases}$

2) $y=\frac{2}{3+2^{\frac{1}{x+1}}}$, $x=-1$, $x=2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=3x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}+x^{-1}$;

2) $y=x\sqrt{4-x}$;

3) $y=2\cdot\arccos\frac{x}{2}$;

4) $y=\frac{ctgx}{x^2+1}$;

5) $y=5^{\frac{x}{\sin x}}$;

6) $y=(\lg x)^3$;

7) $y=tg(3x-5)$;

8) $y=x^{(x+5)}$;

9) $x\cdot\ln y=y$;

10) $\begin{cases}x=5\cos t^2\\ y=7\sin t^2\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{63{,}98}$; 2) $\sin 31^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=x\cdot\ln x$; 2) $y=\frac{2x}{2-x^2}$.

7. Найти наклоны касательной к параболе $y=x^2$ в точках $x=\pm 2$.

Вариант N 3

1. Найти область определения функции:

1) $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}+(x-1)^3$; 2) $\ln\left(x^2+1\right)+\arcsin(5^{-x})$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{\left(x^2-\dfrac{\pi}{4}\right)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x+1}{x-x^3+x^2+5}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)\cdot\left(x^2-\dfrac{\pi^2}{4}\right)$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 1\\ x^3, & 1<x\le 2\\ \sqrt{x}, & x>2\end{cases}$.

2) $y=\dfrac{2}{4+3^{\frac{1}{x+3}}}$, $x=0$, $x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=5{,}4\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}$;

2) $y=5\left(x^3-3x\right)\cdot\left(x^2-1\right.$;

3) $y=\dfrac{3x^2+1}{\sin x}$;

4) $y=e^x\sin 3x$;

5) $y=arctg\sqrt{x+10}$;

6) $y=\dfrac{x}{4^x}$;

7) $y=\cos(\arcsin x)$;

8) $y=(x+1)^{2/x}$;

9) $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=x\cdot y$;

10) $\begin{cases}x=\dfrac{t+1}{t}\\ y=\dfrac{t-1}{t}\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{15{,}97}$; 2) $\sin 62^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-4}}$; 2) $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

7. По прямой OX двигаются точки, имеющие закон движения $x_1(t)=5t-3{,}5$ и $x_2(t)=t^2-5$, $t\ge 0$. Чему равна их скорость и ускорение в момент встречи?

Вариант N 4

1. Найти область определения функции:

1) $tg(x-\pi)-\dfrac{3}{\ln(x^2+1)}$; 2) $\sqrt[3]{x}+\arcsin(x+1)$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\arcsin(4-x)}{\sin(4-x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^2-1}{2x^2-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{x/(x-2)}$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos x}-tgx$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases} x^2+3, & x\le 0 \\ \sin x, & 0<x\le\pi \\ x-\pi, & x>\pi \end{cases}$.

2) $y=\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x-4}}}$, $x=5$, $x=4$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=\dfrac{1}{2}x^{-2}+\sqrt[4]{x^3}-9$;

2) $y=(x^2+5)^{10}$;

3) $y=\sqrt{1+tg^2x}$;

4) $y=x\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}}$;

5) $y=\log_5(x+1)$;

6) $y=2^{x^2}$;

7) $y=\arcsin\sqrt{x+1}$;

8) $y=(tgx)^x$;

9) $ctg(x^2+y^2)=1$;

10) $\begin{cases} x=\sin(2t+5) \\ y=\cos 3t \end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{27{,}02}$; 2) $\cos 31^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=e^{\frac{1}{x}}$; 2) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

7. Написать уравнение касательной и нормали к параболе $y=4-x^2$ в точке пересечения ее с осью OX $(x>0)$ и построить эту параболу, касательную и нормаль.

Вариант N 5

1. Найти область определения функции:

1) $\sqrt[4]{1-x^2}+arctgx$;   2) $\lg\frac{x-1}{x+1}-\sin(2x+5)$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos\left(x^2\right)}{x^2}$;   2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^2-x^2}{x-\sqrt{8+2x}}$;   3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-4x^2+1}{x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x-2)-\ln x)$;   5) $\lim\limits_{x\to 0}x^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases} x/2, & x\le 2 \\ x^3-7, & 2<x<3. \\ 2x-3, & x\ge 3 \end{cases}$

2) $y=\frac{2}{1-2^{\frac{1}{x+4}}}$, $x=5$, $x=-4$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=\frac{1}{x}+\sqrt[3]{3}-5x^{\frac{1}{2}}$;

2) $y=(x-1)^2\cdot\left(x^2+1\right.$;

3) $y=(\arcsin x)^2$;

4) $y=x^2\cdot\log_3 x$;

5) $y=\frac{\sin(e^x)}{x+1}$;

6) $y=10^{tgx}$;

7) $y=\lg(x+\cos x)$;

8) $y=x^{x^2}$;

9) $y=\sin(x\cdot y)$;

10) $\begin{cases} x=e^t \\ y=\ln t \end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{121{,}2}$;   2) $\cos 62^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=x\cdot e^{-\frac{x}{2}}$;   2) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$.

7. По прямой OX движутся две точки, имеющие законы движения $x_1(t)=5t-3{,}5$; $x_2(t)=t^2-5$, $t\ge 0$. В какой момент их скорость и ускорение будут равны?

Вариант N 6

1. Найти область определения функции:

1) $\dfrac{1}{x^2+1}+\lg(x+3)$; 2) $3x^2-tg(2x-5)$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{arctgx}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\arcsin x^3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{3+4x}\right)^{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx^2\right)^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\cos 3x, & x\le 0\\ x+1, & 0< x<1\\ \ln x, & x\ge 1\end{cases}$.

2) $y=\dfrac{3}{2+3^{\frac{1}{x-2}}}$, $x=2$, $x=-2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=11\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$;

2) $y=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\cdot\left(\sqrt[5]{x}-1\right)$;

3) $y=\dfrac{1}{\arcsin x}$;

4) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

5) $y=x\cdot\cos^2(x-1)$;

6) $y=2^{\frac{x}{\log_2 5}}$;

7) $y=tg(x^2-5$;

8) $y=x^{\ln x}$;

9) $8^{x+y}=x\cdot y$;

10) $\begin{cases}x=t\cos t\\ y=t(1-\sin t)\end{cases}$

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{168{,}02}$; 2) $\cos 46^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; 2) $y=x\cdot e^{-x^2}$.

7. Под каким углом кривая $y=\sin x$ пересекает ось OX в точке $x=\pi$?

Вариант N 7

1. Найти область определения функции:

1) $\sqrt{x^2-4x+3}+arctgx$; 2) $\sin x\cdot\ln(-x)$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{3+x}-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg^2x}{\ln x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{x^2-\frac{\pi^2}{16}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\ln x-\ln(x+1))$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{x-\frac{\pi}{4}}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\le0\\ tgx, & 0<x\le\dfrac{\pi}{4};\\ 2, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{3}{2-3^{\frac{1}{x+2}}}$, $x=2$, $x=-2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=0{,}8\sqrt[4]{x}+\dfrac{x^3}{0{,}3}+\dfrac{1}{5}$; 6) $y=\log_3(tgx)$;

2) $y=(x^2-1)\cdot(x+4)$; 7) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$;

3) $y=\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$; 8) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

4) $y=\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3x$; 9) $5^{x\cdot y}=x\cdot y$;

5) $y=x\cdot arctgx$; 10) $\begin{cases}x=-\arcsin t\\ y=t^2-5\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{26{,}98}$; 2) $\sin 46^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{1}{x^2+2x}$; 2) $y=x\cdot e^{2x-1}$.

7. Найти точку на линии $y=2x^2-x+3$, в которой касательная параллельна прямой $5x+y-7=0$. Составить уравнение касательной. Сделать чертеж.

Вариант N 8

1. Найти область определения функции:

1) $\lg(x+5)-10^{\frac{1}{x}}$; 2) $ctgx+8^{-x^2}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x+5}{x^2+x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctgx^2}{\arcsin x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{4+3x}\right)^{x^3}$; 5) $\lim\limits_{x\to2}(\sin(x-2))^{x^2-4}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\le\dfrac{\pi}{4}\\ ctgx, & \dfrac{\pi}{4}< x\le\dfrac{\pi}{2}\\ x-1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

2) $y=\dfrac{2}{1+3^{\frac{1}{x+6}}}$, $x=6$, $x=-6$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=1{,}3x^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[5]{x}-\sqrt{3}$;

2) $y=(x+1)\cdot\left(x^2-5\right)$;

3) $y=\dfrac{x^5}{x^3-2}$;

4) $y=arctg\sqrt{x}$;

5) $y=2^{\frac{x}{\sin x}}$;

6) $y=(\cos 2x)^3$;

7) $y=\lg(x-\sin x)$;

8) $y=(\ln x)^{\ln x}$;

9) $ctg\left(x^2+y^2\right)=1$;

10) $\begin{cases}x=e^t\\ y=\ln t\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[5]{32{,}03}$; 2) $arctg\ 1{,}1$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\ln\left(x^2+2x+2\right)$; 2) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$.

7. Под каким углом пересекаются кривые $2y=x^2$ и $2y=8-x^2$?

Вариант N 9

1. Найти область определения функции:

1) $\arcsin\frac{\pi}{2}+\cos 3x$; 2) $\frac{1}{x^2+x-6}-\sqrt[3]{x^2-5}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+x+1}{2x^4+x^3+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} ctg(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^x$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}2x^2+1, & x\le 0\\ \cos 2x, & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ x-2, & x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$. 2) $y=\frac{2}{1+3^{\frac{1}{x-6}}}$, $x=6$, $x=-6$;

4. Найти производные данных функций:

$-\frac{2}{3}\,0{,}1x^{-\frac{2}{3}-1}$ $-\frac{5,2}{2\sqrt{x}}$

1) $y=0{,}1x^{-\frac{2}{3}}-5{,}2\sqrt{x}$;

2) $y=(1+\sqrt{x})\cdot(1+x^3)$;

3) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$;

4) $y=\frac{\arccos x}{x}$;

5) $y=\frac{\log_2(x+5)}{5}$;

6) $y=x\cdot arctg\sqrt{x-1}$;

7) $y=2^{\frac{\ln x}{x}}$;

8) $y=(tgx)^{8x}$;

9) $y=5^{xy+1}$;

10) $\begin{cases}x=t\sin t^2\\ y=1+t\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{1{,}02}$; 2) $\arcsin\ 0{,}54$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\frac{1-2x}{x^2-x-2}$; 2) $y=(x+4)\cdot e^{2x}$.

7. Материальная точка колеблется на оси OX по закону: $x=A\cdot e^{-4t}\sin(\omega t+a)$. Найти скорость и ускорение точки в любой момент времени.

Вариант N 10

1. Найти область определения функции:

1) $x^{-2}-\dfrac{1}{9^{\sin x}}$; 2) $\sqrt{1-x}+\lg\left(3+x^2\right)$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x-5}{\sqrt{5+x}-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+x^3+2x+1}{5x^5+x^4+2x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\pi\right)}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^{3x-4}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\cdot\dfrac{1}{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\le -1\\ x^2-1, & -1< x<2\\ 2x-1, & x\ge 2\end{cases}$.

2) $y=\dfrac{2}{3+2^{\frac{1}{x-3}}}$, $x=3$, $x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=1{,}8\sqrt[3]{x}-\dfrac{x}{5}+3$;

2) $y=\left(x^2+5\right)^5$;

3) $y=\dfrac{2x}{arctgx}$;

4) $y=x\cdot\sin x^3$;

5) $y=5^{tgx}$;

6) $y=\lg\left(x^2+1\right)$;

7) $y=\cos 2x\cdot\arccos x$;

8) $y=(\ln x)^x$;

9) $x^2+y^2=x\cdot\sin y$;

10) $\begin{cases}x=2^t\\ y=t^2\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{1{,}02}$; 2) $\arccos 0{,}54$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{3x^2}{2x^2-1}$; 2) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

7. Найти уравнения касательной и нормали кривой к $y^2=x^3$ в точке $x=1$.

4^x 470
4,18

Вариант N 11

1. Найти область определения функции:

1) $4^x + 2\arcsin 3x$; [-1;+1]   2) $\ln\dfrac{x-3}{x^2+1} - tgx$;

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}$;   2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctg 2x}{\sin 4x}$;   3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6 - x^3 + x + 1}{x^6 + x^4 + x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{x^2-4}}$;   5) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x\cdot\dfrac{1}{x^3}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le 1\\ 2, & 1<x\le 3.\\ x-1, & x>3\end{cases}$

2) $y=\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x-5}}}$, $x=5$, $x=-5$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=3\sqrt{x}-1{,}5x^{-2}+8$;

2) $y=\left(x^2+2x\right)^{10}$;

3) $y=\dfrac{1-x^3}{\sqrt{\pi}\cdot x}$;

4) $y=tg(x\cdot\sin x)$;

5) $y=\lg x - x\arccos x$;

6) $y=\cos 2^x$;

7) $y=x\cdot\log_2(\cos x)$;

8) $y=x^{(-x)}$;

9) $arctg\left(x^2-y^2\right)=1$;

10) $\begin{cases} x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{1{,}02}$;   2) $\arcsin 0{,}07$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{x^3-4}{4x^2}$;   2) $y=x^3\cdot e^{-x}$.

7. Тело движется по закону $S(t)=29-6t+3t^2$. Какой путь прошло тело за время движения до момента, когда скорость его движения стала равна нулю? Чему равно ускорение в этот момент времени?

Вариант N 12

1. Найти область определения функции:

1) $\cos(3-x)-19\lg(3-x)$;   2) $8^{-\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^2-2x+1}$;

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\cos x+1}{\sin 4x}$;   2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^4+1}{2x^4+2x+4}$;   3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctgx}{\sin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{1/(x^2-9)}$;   5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)^{x-1}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\le 0\\ 2\sin 2x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}.\\ \cos x, & x\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

2) $y=\dfrac{1}{2-3^{\frac{1}{x+5}}}$, $x=5$, $x=-5$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=(x-0{,}5)^2$;

2) $y=3x^{-1}+\sqrt[5]{x^2}+2{,}4\sqrt{5}$;

3) $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$;

4) $y=\sqrt{\log_3 x}$;

5) $y=x\cdot 5^x$;

6) $y=arctg(\sin x)$;

7) $y=\dfrac{1}{tg^2 2x}$;

8) $y=(\cos x)^x$;

9) $\sqrt{x+\sqrt{y}}=x\cdot y$;

10) $\begin{cases}x=5^t\\ y=t^2-\sqrt{5}\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{16{,}3}$;   2) $\arccos 0{,}05$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$;   2) $y=x-\ln x$.

7. В уравнении параболы $y=x^2+bx+c$ определить b и c, если парабола касается прямой $y=x$ в точке $x=2$.

Вариант N 13

1. Найти область определения функции:

1) $tgx + 3^x$; 2) $\arcsin(x+3) - \lg(-x)$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 6x + 4}$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos^2(2x)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5 + x^4 - x^2 + 1}{3x^4 + 2x^2 - 1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 4} (x-3)^{1/(x-4)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (tg2x)\cdot\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \le 0 \\ tgx, & 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \\ \cos 2x, & x \ge \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

2) $y = \dfrac{1}{2 - 3^{\frac{1}{x-3}}}$, $x = 3$, $x = -3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y = 0{,}7\sqrt[3]{x} - \dfrac{x^2}{1{,}3} + 1$;

2) $y = \left(\sqrt{x} + x^2\right)\cdot(x-2)$;

3) $y = \dfrac{x}{4^x}$;

4) $y = x \cdot arctgx$;

5) $y = \sin\dfrac{x}{2} \cdot \sin 2x$;

6) $y = 10^{\sqrt{x}}$;

7) $y = \lg(\cos 3x)$;

8) $y = x^{\arcsin x}$;

9) $y = ctg(x \cdot y - 2x)$;

10) $\begin{cases} x = 5^t - t \\ y = \ln t \end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{9{,}02}$; 2) $arctg\ 1{,}2$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; 2) $y = x^2 \cdot \ln x$.

7. Тело движется на прямой OX по закону $x = \dfrac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$.

Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты тело меняет направление движения?

Вариант N 14

1. Найти область определения функции:

1) $arctg\sqrt{2x} - \dfrac{1}{5^x}$; 2) $ctg3x + \sqrt[3]{8-x}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x-2}}{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2-7x+3}{x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x}{2^x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1} (2+x)^{\frac{1}{x+1}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x) = \begin{cases} arctgx, & x \le 0 \\ 3x-1, & 0 < x \le 2. \\ x^2+1, & x > 2 \end{cases}$

2) $y = \dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x+3}}}$, $x=3$, $x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{x} + 37$,

2) $y = \left(x^2+1\right)^3$;

3) $y = \dfrac{x^5}{x^3-2}$;

4) $y = x \cdot \lg x$;

5) $y = \dfrac{3^x}{x^5}$;

6) $y = 6 \cdot e^{-3x^2}$;

7) $y = tg\left(\sqrt{3x}\right.$;

8) $y = x^{x^3}$;

9) $x \cdot y + arcctg(x+y) = 5$;

10) $\begin{cases} x = arctgt \\ y = t \cdot \sin t \end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{8{,}02}$; 2) arcsin 0,03.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y = x \cdot \ln x$; 2) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

7. Найти расстояние от вершины параболы $y = x^2 - 4x + 5$ до касательной к ней в точке пересечения параболы с осью OY.

Вариант 15.

1. Найти область определения функции:

1) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}-\cos x$; 2) $\lg\left(9-x^2\right)+tg\,\dfrac{x}{3}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 2x+\cos 4x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{x^2-x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+x^4-3x+1}{6x^5-3x^4+2x}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\cos x)^{(x-\pi/2)}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases} arcctgx, & x\le 0\\ 2x+1, & 0<x\le 2.\\ 2x^2-3, & x>2\end{cases}$

2) $y=\dfrac{1}{4+2^{\frac{1}{x+1}}}$, $x=1$, $x=-1$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=3x^2-5\sqrt{x^{-3}}+5$;

2) $y=\left(x+3x^2\right)^3$;

3) $y=\dfrac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$;

4) $y=\sqrt{\ln x}$;

5) $y=x\cdot\arcsin x$;

6) $y=(\ln x)^2\cdot arctgx$;

7) $y=\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{tgx}$;

8) $y=(1+\ln x)^x$;

9) $\arcsin x+x\cdot y=5^y$;

10) $\begin{cases} x=8t^2+2\\ y=\log_3 t\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{7{,}99}$; 2) $\arccos 0{,}03$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{3x^2}{1-2x^2}$; 2) $y=e^{\frac{1}{x+2}}$.

7. Колебательное движение материальной точки совершается по закону $x=a\cdot\cos\omega t$. Определить скорость и ускорение движения в точках $x=\pm a$ и $x=0$.

Вариант 16.

1. Найти область определения функции:

1) $\arccos x + 2^{-\frac{1}{x}}$; 2) $arctgx - \dfrac{x-3}{x^2+x-6}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos x}{\sin 2x+\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2-x+1}{2x^5+x^4-x^2+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{1/_{x^2-4}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\right)^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & x\le 1\\ \sqrt{2x+2}, & 1<x\le 7\\ \frac{1}{7}x+3, & x>7\end{cases}$.

2) $y=\dfrac{1}{3+4^{\frac{1}{x+1}}}$, $x=1$, $x=-1$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}$

2) $y=\left(x^4-x^2+1\right)^3$;

3) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$;

4) $y=x\cdot(\arcsin x)^2$;

5) $y=\sin x\cdot\log_3 x$;

6) $y=\dfrac{5x}{3^{x^2}}$;

7) $y=\lg(x+tgx)$;

8) $y=(x+1)^{\frac{2}{x}}$;

9) $x^2+xy=e^y$;

10) $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=\dfrac{arctgt}{5}\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[5]{31{,}98}$; 2) $\sin 30^0 05'$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\ln\left(2x^2+3\right.$; 2) $y=\dfrac{x^3+16}{x}$.

7. Под каким углом прямая $y=0{,}5$ пересекает кривую $y=\cos x$?

Вариант N 17

1. Найти область определения функции:

1) $18^{-x}+ctg\dfrac{x}{2}$; 2) $\ln(-x)+\dfrac{1}{\ln x^2}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{2x^3+4-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\cdot tgx}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\ln(3-x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sin\pi(x+2)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x^2}}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le -1\\ x^2+2, & -1< x<2\\ 2x+2, & x\ge 2\end{cases}$.

2) $y=\dfrac{1}{4-2^{\frac{1}{x+1}}}$, $x=1$, $x=-1$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{3}$;

2) $y=\left(\sqrt{x}+1\right)^8$;

3) $y=\sqrt{9-x^2}-9\cdot\arccos\dfrac{x}{9}$;

4) $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$;

5) $y=\dfrac{2\cos x}{\log_5(x+1)}$;

6) $y=\dfrac{e^{-x^2}}{3-x}$;

7) $y=(arctgx)^2$;

8) $y=x^{\ln x}$;

9) $e^{xy}+\dfrac{x}{y}=1$;

10) $\begin{cases}x=2\sin t\\ y=\arccos t+t\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[5]{242{,}98}$; 2) $\sin 44^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$; 2) $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$.

7. Зависимость пути от времени задана уравнением $s=t\cdot\ln(t+1)$ (t-в секундах, s - в метрах). Найти скорость движения в конце второй секунды.

Вариант N 18

1. Найти область определения функции:

1) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\sqrt[5]{x^3}$; 2) $\arcsin(x+1)-9^x$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4x^3-1}{2x^3+x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(ctgx-\dfrac{1}{\sin 2x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}3^x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x<2\\ -2x+3, & x\ge 2\end{cases}$.

2) $y=\dfrac{1}{3-4^{\frac{1}{x+1}}}$, $x=1$, $x=-1$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=0{,}1x^{-\frac{2}{3}}+5{,}2\sqrt[4]{x}$; 6) $y=5^{\sin x}-2x$;

2) $y=(1+\sqrt{x})(1+x^3)$; 7) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$;

3) $y=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$; 8) $y=\left(\dfrac{3}{x}\right)^{x^2}$;

4) $y=(x^2+1)\arccos x$; 9) $tgx+ctgy-xy=0$;

5) $y=\dfrac{1-\ln x}{\lg x}$; 10) $\begin{cases}x=2(t-\cos t^2)\\ y=3t^2\sin t\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{81{,}01}$; 2) $arctg\ 1{,}05$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=x^2+\dfrac{2}{x}$; 2) $y=x\cdot e^{-x}$.

7. В какой точке параболы $y=x^2-2x+5$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна к биссектрисе первого координатного угла?

Вариант N 19

1. Найти область определения функции:

1) $8tg(x+\frac{\pi}{2})+3x^3$;   2) $arctgx+\lg(x^2+x+1)$.

2. Найти пределы функций: 13п

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-4x}{3x^2-2x-8}$; 0,4   2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$; 6   3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{tg^2x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{-2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x-\ln(x+1))$; 0   5) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{x^3}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\ln(-x), & x\le -1\\ x+2, & -1< x<2\\ \sqrt{x+6}, & x\ge 2\end{cases}$.

2) $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-4}}}$, $x=4, x=-4$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=2\sqrt{x}-3x^{-\frac{2}{3}}$;

2) $y=(x^2+2x)^5$;

3) $y=\dfrac{1+tgx}{\sin x}$;

4) $y=x\cdot\arccos x$;

5) $y=x^2\cdot 10^{-x^2}$;

6) $y=\ln(1+\lg x)$;

7) $y=5tg\dfrac{x}{5}+tg\dfrac{\pi}{8}$;

8) $y=\sin^{\ln x}$;

9) $\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{xy}=\cos\dfrac{\pi}{6}$;

10) $\begin{cases}x=5t^2\\ y=arctg(t^{-1})\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{80{,}98}$;   2) $arcctg\ 1{,}03$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$;   2) $y=(x-2)\cdot e^{3-x}$.

7. По параболе $y=x\cdot(8-x)$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x=t\sqrt{t}$ (t - в секундах, x - в метрах). Какова скорость изменения ординаты в точке $M(1,7)$?

Вариант N 20

1. Найти область определения функции:

1) $-13+\sqrt{x}+ctg\dfrac{x}{2}$;　　2) $8\cos x+\dfrac{1}{\ln x}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx^2}{3x-4x^2}$;　　2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\arcsin 4x}$;　　3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{2^x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x^2}$;　　5) $\lim\limits_{x\to 0} tgx\cdot\ln^2 x$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases} x^3-1, & x\le 1 \\ \sin 3(x-1), & 1<x\le 2 \\ -x+2, & x>2 \end{cases}$.

2) $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x+4}}}$,　$x=4$,　$x=-4$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=(x+1)^2-9x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{5}{x}$;

2) $y=(x-0{,}5)^8$;

3) $y=\arccos\sqrt{1-3x}$;

4) $y=\dfrac{8\sin 3x}{5x}$;

5) $y=x^2\log_2 2x$;

6) $y=arctg\sqrt{1+x}$;

7) $y=\sqrt{\arccos x}$;

8) $y=(\sin)^x$;

9) $e^{xy+1}-9y=3$;

10) $\begin{cases} x=a(1-\sin t) \\ y=b(1-\cos t) \end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[6]{63{,}97}$;　　2) $arcctg\ 0{,}99$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{8}{x^2-4}$;　　2) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

7. Составить уравнение касательной к кривой $y=\dfrac{2}{1+x^2}$ в точке $x=1$.

Вариант N 21

1. Найти область определения функции:

1) $\sqrt{6-x}+10^{-x^2}$; 2) $11\arcsin\frac{3}{x}+tgx$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\sin 2x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x+1}{3x^3+x^2+x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg3x+tgx)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln^2 x\right)^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x\le 2.\\ 3x-2, & x>2\end{cases}$

2) $y=\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x+3}}}$, $x=3$, $x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+35$;

2) $y=(x-2)^{10}$;

3) $y=\frac{x}{1-\cos 2x}$;

4) $y=\ln x\cdot\arccos(x+1)$;

5) $y=6\cdot e^{-3x^2}$;

6) $y=(tg(3x-5))^2$;

7) $y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

8) $y=(\ln x)^{\cos x}$;

9) $tgxy-arctgy=2$;

10) $\begin{cases}x=8t^2\\ y=e^{-t^2}\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[6]{1{,}03}$; 2) $\sin\ 29^0 58'$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\frac{2x}{x^2-9}$; 2) $y=\frac{\ln x}{x}$.

7. Какие углы образует парабола $y=\frac{x^2}{4}$ с ее хордой, абсциссы концов которой равны 2 и 4?

Вариант N 22

1. Найти область определения функции:

1) $2^{-\frac{1}{x^2}} + 5\ln(x^2+1)$; 2) $arctg\,\frac{x-2}{3} - \frac{1}{x^2-1}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{tg3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg^2 x}{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-3x}{4-3x}\right)^{x-4}$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\cos x}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}x, & x\le 0\\ \sqrt{x+4}, & 0<x<5\\ 3, & x\ge 5\end{cases}$; 2) $y=\frac{1}{3-2^{\frac{1}{x+3}}}$, $x=3$, $x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=0{,}5\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}-\frac{8}{x}$;

2) $y=(x^3-3x+2)^5$;

3) $y=\frac{x}{23^x}$;

4) $y=x^2\cdot\log_3 x$;

5) $y=(\arccos x)^2$;

6) $y=\lg(\cos x - x)$;

7) $y=x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

8) $y=(x-1)^{\frac{2}{x}}$;

9) $tg\left(x-y^2\right)+xy=1$;

10) $\begin{cases}x=\sin t^2\\ y=\cos t^2\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{143{,}2}$; 2) $\sin\ 29^0 58'$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$; 2) $y=\ln\left(x^2-4\right)$.

7. По кубической параболе $y=x^3$ движется точка так, что ее ордината изменяется в зависимости от времени t по закону $y=at^3$. Какова скорость изменения абсциссы в зависимости от времени?

Вариант N 23

1. Найти область определения функции:

1) $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}-\sqrt[3]{x}$;

2) $\cos x^3 - \arccos x^3$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x}{4x^3-x^5+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot tg3x}{\cos^2 x-\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} ctg4x-\frac{1}{\sin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}\right)^{\ln(x-1)}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\le 0\\ tg2x, & 0<x<\frac{\pi}{8}\\ 2, & x\ge\frac{\pi}{8}\end{cases}$.

2) $y=\frac{1}{1+5^{\frac{1}{x+2}}}$, $x=2$, $x=-2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=1{,}3x^{-1}+9{,}1x^2-11^2$;

2) $y=(8x+5)^{30}$;

3) $y=\frac{7x-\sin x}{1+x}$;

4) $y=x^2\cdot arctg9x$;

5) $y=8^{x^2}+\ln x$;

6) $y=ctg(3x-5)+9$;

7) $y=\cos\left(\frac{\arcsin x}{2}\right)$;

8) $y=(\ln x)^x$;

9) $3^{x^2+y^2}-xy=x^2$;

10) $\begin{cases}x=t^2-\sin 2t\\ y=\cos 2t\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{8{,}03}$;

2) $\cos 44^0 59'$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\frac{8}{9+x^2}$;

2) $y=x\cdot e^{2-x}$.

7. Под каким углом прямая $y=-0{,}5$ пересекает кривую $y=\sin x$?

Вариант N 24

1. Найти область определения функции:

1) $\frac{2}{3^x}+\ln\left(\frac{x}{2}-4\right)$; 2) $ctg\frac{x-\pi}{2}+\sqrt{x}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1-\sqrt{x-2}}{2-\sqrt{x+1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+4x-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} tgx\cdot\ln x$; 5) $\lim\limits_{x\to\pi}\cos 2x^{(x-\pi)^{-2}}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x, & x\le 0\\ x+1, & 0<x<3\\ -x^2+2, & x\ge 3\end{cases}$; 2) $y=\frac{1}{1+5^{\frac{1}{x-2}}}$, $x=2$, $x=-2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=0{,}8\sqrt[4]{x}-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{9}$;

2) $y=\frac{x^5}{x^3-2}$;

3) $y=x\cdot\lg x$;

4) $y=(3x+5)^{10}$;

5) $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$;

6) $y=\sqrt{1-x^2}-\arccos x$;

7) $y=tg\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$;

8) $y=(arctgx)^{x^2}$;

9) $\sin\left(x^2+y^2\right)-y=3$;

10) $\begin{cases}x=5t+\ln t\\ y=\cos t\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{7{,}97}$; 2) $\cos 30^0\ 05'$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\frac{4}{3+2x-x^2}$; 2) $y=\frac{x}{x-1}$.

7. Задан закон прямолинейного движения точки $x=5\sin^2 t-t^2$. Найти скорость и ускорение точки для моментов времени

$$t_1=\frac{\pi}{4},\quad t_2=\frac{2\pi}{3}.$$

Вариант N 25

1. Найти область определения функции:

1) $\sqrt{8-x}+2tgx$; 2) $5^{-x}+\arccos\frac{x}{4}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin \pi x}{x^2-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2+2x-8}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{7x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}(\sin \pi x)^{(x-2)\pi}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{x}{2}, & x\le 0\\ 2x+1, & 0<x<3\\ 5, & x\ge 3\end{cases}$.

2) $y=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{3-x}}}$, $x=3$, $x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=3\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}-9x^{-1}$; 6) $y=\frac{4^x-5}{x}$;

2) $y=\left(x^4+x^2-1\right)^3$; 7) $y=\sqrt{ctgx}$;

3) $y=\frac{1-x^2}{\cos x}$; 8) $y=(5x)^{x^2}$;

4) $y=(arctgx)^2$; 9) $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=5\ln xy$;

5) $y=x^2\cdot\log_5 x$; 10) $\begin{cases}x=10^t\\ y=tgt\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{15{,}99}$; 2) $arctg\ 0{,}96$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\frac{x^3-32}{x^2}$; 2) $y=\frac{e^{2(x+1)}}{x+1}$.

7. Найти наклоны касательной к параболе $y=x^2$ в точках $x=\pm 2$.

Вариант N 26

1. Найти область определения функции:

1) $1-\sqrt{1-x^2}+\cos 2x$;

2) $\dfrac{1}{x^3-x}+\ln(x+5)$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{2-\sqrt{x}}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+1}\right)^{3-x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\pi}(\sin 2x)^{(x-\pi)^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}-2x+4, & x\le -2\\ x^2-2, & -2< x\le 0\\ x>0, & x>3\end{cases}$.

2) $y=\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{2-x}}}$, $x=2$, $x=-2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=8x^2+9\sqrt[3]{x}-x^{-3}$;

2) $y=(8x+5)^{10}$;

3) $y=\dfrac{\arcsin x}{x^2}$;

4) $y=x\cdot 8^{-x^2}$;

5) $y=\sqrt{9x-\sin x}$;

6) $y=ctg\left(\sqrt{x}+5\right)$;

7) $y=\cos 3x\cdot\ln\left(x^2+5\right.$;

8) $y=2\cdot x^{\cos x}$;

9) $arctg\dfrac{x}{y}=x\cdot y$;

10) $\begin{cases}x=\dfrac{t}{1-9t}\\ y=\sin(2t-5)\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{15{,}97}$;

2) $arctg\ 1{,}04$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{x}{3-2x^2}$;

2) $y=x\cdot e^{-3x}$.

7. По прямой OX движутся две точки, имеющие законы движения $x_1(t)=5t-3{,}5$ и $x_2(t)=t^2-5$, $t\ge 0$. Чему равна скорость и ускорение в момент встречи?

Вариант N 27

1. Найти область определения функции:

1) $\sqrt{-3x}+\dfrac{1}{x^2-1}$; 2) $\lg(x+3)+\dfrac{1}{x^2+1}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(4-2x)}{\lg(2+4x)-x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{2x^2-\frac{16}{3}x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x(1-\cos x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{5+x}-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{3+x}\right)^{2x-1}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\le 0\\ \cos x, & 0< x\le 2\pi\\ \arcsin\dfrac{\pi}{x}, & 2\pi<x<\infty\end{cases}$;

2) $y=\dfrac{1}{1+7^{\frac{1}{x}}}$, $x=0$, $x=0{,}5$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=1{,}2x^3-2\sqrt[3]{x}-5^2$;

2) $y=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2-2\right)$;

3) $y=\dfrac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$;

4) $y=x\cdot\arcsin\dfrac{x}{2}$;

5) $y=\sqrt{\lg x}$;

6) $y=\dfrac{5^{2x-1}-x}{x+1}$;

7) $y=tg\left(x^2+1\right)$;

8) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\sin x}$;

9) $arctg\dfrac{x}{y}=2x+x\cdot y$;

10) $\begin{cases}x=1+t^3\\ y=arctgt+1\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{26}$; 2) $\sin\ 33^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{4}{4-x^2}$; 2) $y=x\cdot e^x$.

7. Написать уравнение касательной и нормали к параболе $y=4-x^2$ в точке пересечения ее с осью OX $(x>0)$ и построить параболу, касательную и нормаль.

Вариант N 28

1. Найти область определения функции:

1) $\dfrac{x+5}{x^2-3x+2}-\lg x$; 2) $arctg\sqrt{x}+\dfrac{1}{1-3^x}$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{\left(x^2-\dfrac{\pi}{4}\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-x}{x^2-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{3x^2+x-9}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot(\ln x-\ln(x-1))$; 5) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x}\right)^x$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}+2, & x<-1\\ arctgx, & -1\le x\le 1\\ \pi x^2/4, & x>1\end{cases}$.

2) $y=\dfrac{3}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}$, $x=2$, $x=-2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=5x^2+3\sqrt[4]{x}-1$;

2) $y=(x-3)(x^2+5)$;

3) $y=\dfrac{3x^2-1}{\cos x}$;

4) $y=5^x\cdot\sin x$;

5) $y=arctg\sqrt{x}$;

6) $y=\dfrac{x\cdot tgx}{\lg(x+1)}$;

7) $y=(\arcsin x)^3$;

8) $y=x^{\ln x}$;

9) $ctg(xy+1)=x^2+y^2$;

10) $\begin{cases}x=\ln t\\ y=e^t\end{cases}$

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{26}$; 2) $\arcsin\ 0{,}9$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-2}$; 2) $y=\ln(x^2+2x-2)$.

7. Написать уравнение касательной и нормали к параболе $y=4-x^2$ в точке пересечения ее с осью OX $(x>0)$ и построить параболу, касательную и и нормаль.

Вариант N 29

1. Найти область определения функции:

1) $\lg(x+5)-10^{\frac{1}{x}}$; 2) $\arcsin\frac{5}{x}+ctgx$

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^2-x^2}{x-\sqrt{8+2x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^2+5x}{3x^2+7x^3+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x^2}{\arcsin x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4+3x}\right)^{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}(\sin(x-2))^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le\frac{\pi}{4}\\ ctgx, & \frac{\pi}{4}< x\le\frac{\pi}{2}\\ x+1, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

2) $y=\frac{2}{1+3^{\frac{1}{x-6}}}$, $x=6$, $x=-6$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=3x^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[5]{4x^3+x}-\sqrt{3}$;

2) $y=\left(x^{-2}+3x\right)\cdot\left(x^2-5\right)$;

3) $y=\frac{x^5-7x^3+9}{x^3-8}$;

4) $y=tg(arctg\sqrt{x})$;

5) $y=5^{\frac{8}{\sin x}}$;

6) $y=(\cos 2x)^{10}$;

7) $y=\lg^2(x-\sin x)$;

8) $y=(\sin x)^{\ln x}$;

9) $ctg\left(x^2+xy^2\right)=1$;

10) $\begin{cases}x=e^{2t}\\ y=\ln^2 t\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[5]{32{,}03}$; 2) $arctg\ 1{,}1$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\ln\left(x^2+2\right)$; 2) $y=\frac{x^2-1}{x^2+2}$.

7. Под каким углом пересекаются кривые $2y=x^2$ и $2y=8-x^2$?

Вариант N 30

1. Найти область определения функции:

1) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-5x+6}-\sqrt[5]{x^3}$; 2) $\arcsin(3x-7)+2^x$.

2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+x^3-1}{2x^3+x^2+1}$

4) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(ctgx-\dfrac{1}{\sin 2x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}3^x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x<2\\ 2x+3, & x\ge 2\end{cases}$.

2) $y=\dfrac{1}{3-4^{\frac{1}{x-1}}}$, $x=1$, $x=-1$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=0{,}1x^{-\frac{2}{3}}+5{,}2\sqrt[4]{x}$; 6) $y=5^{\sin x}-2tgx$;

2) $y=(1+\sqrt{x})(1+x^3$; 7) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$;

3) $y=\dfrac{11+\cos 6x}{\sin 3x}$; 8) $y=\left(\dfrac{5x^{-3}}{\sqrt{x}}\right)^{x^2+6x}$;

4) $y=(x^2+1)\arccos^2 x$; 9) $tgx+ctgy-x^3y^2=0$;

5) $y=\dfrac{1-\ln(x^3-x)}{\lg x}$; 10) $\begin{cases}x=t^2(t-\cos t^2)\\ y=t^2\cos t\end{cases}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{81{,}01}$; 2) $arctg\,1{,}05$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=x^2+\dfrac{3}{x}$; 2) $y=(x+2)\cdot e^{-x}$.

7. В какой точке параболы $y=x^2-2x+5$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна к биссектрисе первого координатного угла?