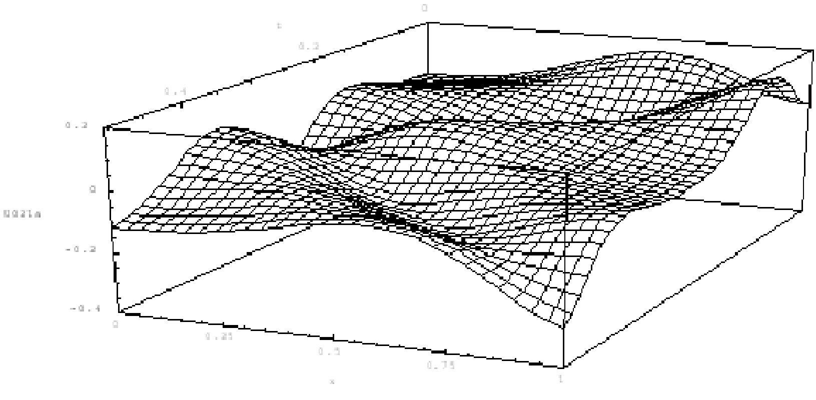
Е.Г. Глушко А.П. Дубровская

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие



Воронеж 2011

ГОУВПО
«Воронежский государственный технический
университет»

Е.Г. Глушко А.П. Дубровская

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Утверждено Редакционно-издательским
советом университета в качестве
учебного пособия

Воронеж 2011

УДК 517.9

Элементы теории функций комплексного переменного: учеб. пособие/ Е.Г. Глушко, А.П. Дубровская.- Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2011. 167 с.

В учебном пособии содержится изложение теоретического материала по разделу “Элементы теории функций комплексного переменного и операционное исчисление” курса высшей математики. Теоретический материал иллюстрируется примерами. В конце каждой темы приводятся задачи для самостоятельного решения.

Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для студентов специальностей 230104 «Системы автоматизированного проектирования», 230101 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети», дисциплине «Математический анализ».

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения.

Учебное пособие подготовлено в электронном виде в текстовом редакторе MS Word и содержится в файле «ТФКП1.doc».

Ил. 27. Библиогр.: 5 назв.

Научный редактор д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Рецензенты: кафедра алгебры и топологических методов Воронежского государственного университета;
канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Ломакин

ВВЕДЕНИЕ
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ
1. Алгебраическая форма комплексных чисел

Комплексными числами называются упорядоченные пары x, y действительных чисел x и y, для которых введены понятия равенства и операции сложения и умножения:

$$x_1, y_1 \;=\; x_2, y_2 \;, \text{ если } x_1 = x_2,\; y_1 = y_2, \qquad (1)$$

$$x_1, y_1 \;+\; x_2, y_2 \;=\; x_1 + x_2, y_1 + y_2 \;, \qquad (2)$$

$$x_1, y_1 \;\cdot\; x_2, y_2 \;=\; x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1 \;. \qquad (3)$$

Из формул (2) и (3) вытекают, в частности, соотношения

$$x_1, 0 \;+\; x_2, 0 \;=\; x_1 + x_2, 0 \;;\quad x_1, 0 \;\cdot\; x_2, 0 \;=\; x_1x_2, 0 \;,$$

которые показывают, что операции над комплексными числами вида $x, 0$ совпадают с операциями над действительными числами x. Поэтому комплексные числа вида $x, 0$ отождествляются с действительными числами: $x, 0 \;= x$.

Особую роль играет число $i = \; 0,1 \;$, которое называется мнимой единицей.

Из формул (2), (3) вытекают также равенства

$$i^2 = i \cdot i = \; 0,1 \;\cdot\; 0,1 \;=\; -1,0 \;= -1,$$

$$0, y \;=\; 0,1 \;\cdot\; y, 0 \;= yi,$$

$$x, y \;=\; x, 0 \;+\; 0, y \;= x + iy.$$

Итак, каждое комплексное число x, y можно представить в виде $x + iy$. Такая запись комплексного числа называется **алгебраической формой** комплексного числа. Число x называется действительной частью, а y – мнимой частью комплексного числа $z = x + iy$. Для этих частей приняты следующие обозначения:

$$x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z.$$

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным с комплексным числом $z = x + iy$.

Число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа $z = x + iy$. Очевидно, $|z| \geq 0$, причем, $|z| = 0$, тогда и только тогда, когда $z = 0$. Модуль действительного числа совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Отметим две формулы: $|z| = |\bar{z}|$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, которые вытекают из определений $|z|$, $\bar{z}$ и равенства

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Вычитание и деление комплексных чисел являются действиями, обратными соответственно сложению и умножению. Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Пример 1. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 5 + 4i$.

Решение. $z_1 + z_2 = 2 - 3i + 5 + 4i = (2 + 5) + i(-3 + 4) = 7 + i$,

$$z_1 - z_2 = 2 - 3i - (5 + 4i) = (2 - 5) + i(-3 - 4) = -3 - 7i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)(5 + 4i) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4i - 3i \cdot 5 - 3i \cdot 4i =$$

$$= 10 + 8i - 15i - 12i^2 = 10 - 7i - 12 \cdot (-1) = 22 - 7i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{5 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(5 - 4i)}{(5 + 4i)(5 - 4i)} = \frac{10 - 8i - 15i + 12i^2}{25 - 20i + 20i - 16i^2} = \frac{-2}{41} - \frac{23}{41}i.$$

2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Комплексное число как упорядоченная пара вещественных чисел определяет точку $M \quad x, y$ на плоскости или вектор $\overline{OM}$ (рис. 1).

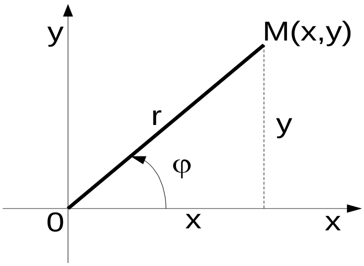


Рис. 1

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости однозначно определяется не только декартовыми координатами x, y, но и полярными координатами r, φ, где $r = |z|$ – длина вектора $\overline{OM}$, а φ – угол между действительной осью и вектором $\overline{OM}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси. При этом, если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке – отрицательной. Этот угол называется аргументом комплексного числа $z \quad z \neq 0$ и обозначается так: $\varphi = Arg\, z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется, поэтому во всех дальнейших рассуждениях, связанных с понятием аргумента, предполагается, что $z \neq 0$.

Угол φ определяется с точностью до $2\pi k$, где k – целое число. Значение аргумента, заключенное между $-\pi$ и π, называется его главным значением и обозначается $\arg z$. Таким образом, $Arg\, z = \arg z + 2\pi k$.

При этом

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & при\ x > 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, & при\ x < 0, y \ge 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, & при\ x < 0, y < 0, \\ \pi/2, & при\ x = 0, y > 0, \\ -\pi/2, & при\ x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Из рис.1 видно, что

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi.$$

Следовательно, любое комплексное число $z \ne 0$ можно представить в виде:

$$z = r\ \ \cos\varphi + i\sin\varphi \quad . \tag{4}$$

Запись комплексного числа в виде (4) называется **тригонометрической формой** комплексного числа.

Если $|z| = r = 1$, то по формуле (4) имеем $z = \cos\varphi + \sin\varphi$.

Комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ обозначается символом $e^{i\varphi}$, т.е. функция $e^{i\varphi}$ для любого вещественного числа φ определяется формулой Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получаем **показательную форму** комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Пример 2. Записать в показательной и тригонометрической формах число $z = -1 - i$.

Решение. Здесь $x = -1,\ y = -1$;

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Так как точка $z = -1 - i$ лежит в третьей четверти и $tg\varphi = \dfrac{-1}{-1} = 1$, то $\arg z = \varphi = -{}^3\!/_4\pi$.

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-{}^3\!/_4\pi\right) + i\sin\left(-{}^3\!/_4\pi\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i3/4\pi}.$$

Пример 3. Найти $e^{2\pi i}$, $e^{\pi i}$, $e^{\pi i/2}$, $e^{-i\pi/2}$.

Решение. $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$,

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$e^{i\pi/2} = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2 = i,$$

$$e^{-i\pi/2} = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2) = -i.$$

Из (5) заменой φ на $-\varphi$ получается равенство:

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (6)$$

Сложением и вычитанием равенств (5) и (6) получаются формулы Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right), \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right),$$

с помощью которых тригонометрические функции выражаются через показательную функцию.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает обычными свойствами показательной функции, как если бы число i было действительным. Отметим основные из них:

$$e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad (7)$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \qquad (8)$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n=e^{in\varphi}, \qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots . \qquad (9)$$

Из (9) и (5) вытекает формула Муавра:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi\,,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots .$$

С помощью (7), (8) легко получаются формулы умножения и деления комплексных чисел, записанных в показательной форме:

$$z_1\cdot z_2=\left(r_1\cdot e^{i\varphi_1}\right)\cdot\left(z_2e^{i\varphi_2}\right)=r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Пример 4. Найти $z_1\cdot z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1=4e^{i\pi/3}$, $z_2=2e^{-i\pi/6}$.

Решение. $z_1\cdot z_2=4e^{i\pi/3}\cdot 2e^{-i\pi/6}=8e^{i(\pi/3-\pi/6)}=8e^{i\pi/6}$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4}{2}e^{i(\pi/3+\pi/6)}=2e^{i\pi/2}.$$

Пример 5. Найти $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{24}\cdot(1+i)^2$.

Решение. Пусть $z_1=1-i\sqrt{3}$. Тогда $r_1=\sqrt{1+3}=2$.

$\varphi_1=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\pi/3$; $z_1=1-i\sqrt{3}=2e^{-i\pi/3}$;

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^{24}=\left(2e^{-i\pi/3}\right)^{24}=2^{24}\cdot e^{-i\pi/3\cdot 24}=2^{24}\cdot e^{-i8\pi}=$$

$$=2^{24}\left(\cos(-8\pi)+i\sin(-8\pi)\right)=2^{24};$$

$$(1+i)^2 = \left(\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}\right)^2 = 2e^{i\pi/2} = 2i;$$

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^{24}\cdot(1+i)^2 = 2^{24}\cdot 2i = 2^{25}\cdot i.$$

Корень из комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ имеет n различных значений и находится по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

где $k = 0,1,\ldots,(n-1)$.

Пример 6. Найти значение $\sqrt[3]{-2-2i}$.

Решение. Запишем подкоренное комплексное число в показательной форме: $-2-2i = \sqrt{8}e^{-i3/4\pi}$. Тогда $\sqrt[3]{-2-2i} =$ $= \sqrt[3]{\sqrt{8}}\cdot e^{i(-3/4\pi+2k\pi)/3}$, $k = 0,1,2$.

При $k = 0$ получаем $w_0 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$; при $k = 1$ $w_1 = \sqrt{2}e^{i5/12\pi}$; при $k = 2$ $w_2 = \sqrt{2}e^{i13/12\pi}$.

§ 1. ЛИНИИ И ОБЛАСТИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1.1.Комплекснозначные функции действительного переменного

Если каждому значению t из интервала (a,b) поставить в соответствие комплексное число $z(t) = x(t) + i\cdot y(t)$, где $x(t) = \mathrm{Re}\,z(t)$, а $y(t) = \mathrm{Im}\,z(t)$, то мы будем говорить, что на интервале (a,b) задана комплекснозначная функция $z(t)$ действительного переменного t. Для комплекснозначных функций действительного переменного естественным образом определяются понятия предела, непрерывности, производной, интеграла. Именно, полагаем

$$\lim_{t\to t_0} z(t) = \lim_{t\to t_0} x(t) + i\lim_{t\to t_0} y(t)\,;\; z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

$$\int_a^b z(t)dt = \int_a^b x(t)dt + i\int_a^b y(t)dt\,.$$

1.2. Линии

Пусть дана комплекснозначная функция $z(t)$, непрерывная на $[a,b]$. Когда точка t пробегает отрезок $[a,b]$, точка $z(t)$ пробегает некоторое множество в комплексной плоскости. Это множество вместе с указанием порядка, в котором проходятся его точки называется **непрерывной кривой**, а уравнение $z = z(t)$ - **параметрическим уравнением** этой кривой. Если у кривой существует хотя бы одно параметрическое уравнение $z = z(t)$, $t \in [a,b]$, обладающее тем свойством, что функция $z(t)$ принимает различные значения при различных значениях t, то эта кривая называется **простой кривой**. Кривая называется **замкнутой**, если ее начало совпадает с ее концом, т.е. если она имеет параметрическое уравнение $z = z(t)$, $a \le t \le b$, для которого $z(a) = z(b)$. Если кривая имеет хотя бы одно параметрическое уравнение $z = z(t)$, $t \in [a,b]$, где функция $z(t)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную и отличную от нуля производную, то кривая называется **гладкой кривой**.

Непрерывная кривая называется **кусочно-гладкой** кривой, если ее можно разбить на конечное число частей, каждая из которых является гладкой кривой.

1.3.Области

Множество D точек комплексной плоскости или расширенной комплексной плоскости называется **областью**, если

1) вместе с каждой точкой, принадлежащей этому множеству, ему принадлежит и некоторая окрестность этой точки;

2) вместе с каждой парой точек, принадлежащих этому множеству, ему принадлежит и некоторая ломаная, соединяющая эти точки.

Граничной точкой области D называется точка, в любой окрестности которой есть точки, принадлежащие D, и точки, не принадлежащие D.

Совокупность всех граничных точек области называется ее **границей**.

Граница области – замкнутое множество.

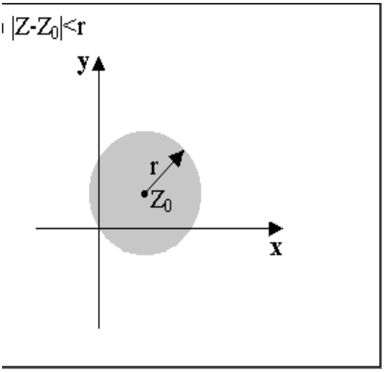
Область, дополненная ее границей, называется **замкнутой областью и** обозначается $\overline{D}$.

Область $D \subset C$ называется **ограниченной**, если существует такое число $R > 0$, что $|z| < R$ при всех $z \in D$. Геометрически это означает, что множество D лежит внутри некоторого круга с центром в начале координат.

Мы будем считать в дальнейшем, что граница области состоит из конечного числа изолированных точек и конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых. Направление кривых будем считать выбранным таким образом, что при движении по граничной кривой область D остается **слева**.

Область D, ограниченная замкнутой несамопересекающейся линией Г, называется **односвязной**. Примером односвязной области в комплексной плоскости может служить круг с центром в некоторой точке z_0 радиуса r, задаваемый неравенством $|z - z_0| < r$ (рис.1).

Если область D ограничена двумя замкнутыми, не пересекающимися и не самопересекающимися линиями r_1 и r_2, то она называется **двусвязной**. Область является двусвязной и в том случае, если внутренняя линия вырождается в точку или дугу непрерывной линии. Двусвязной областью является, например, кольцо с центром в точке z_0, задаваемое неравенствами $r < |z - z_0| < R$ (рис.2).



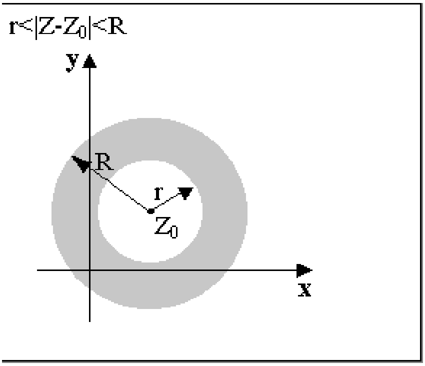


Рис.1. Рис.2.

Решение типовых задач.

Задача 1. Написать уравнение следующих линий в комплексно-параметрической форме:

а) $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 5+3t \end{cases}$; б) $(x-3)^2+(y-2)^2=36$.

Решение. а) Так как $z(t)=x(t)+iy(t)$, то $z=2+5i+(4+3i)t$.

б) Окружность $(x-3)^2+(y-2)^2=36$ имеет центр в точке (3,2) и радиус, равный 6.

Запишем уравнение окружности в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 3+6\cos t \\ y = 2+6\sin t \end{cases},$$

а затем в комплексно-параметрической форме:

$$z(t)=3+6\cos t+i(2+6\sin t)=3+2i+6(\cos t+i\sin t)=$$

$$=3+2i+6e^{it},\ \ 0\le t\le 2\pi.$$

Задача 2. Какие линии заданы уравнениями, t - действительный параметр: а) $z=4e^{it}$, б) $z=t^2+\dfrac{i}{t^2}$.

Решение. а) Так как $e^{it}=\cos t+i\sin t$, то $z(t)=x(t)+iy(t)=4\cos t+4i\sin t$.Приравнивая действительные и мнимые части, получим: $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$.

Исключив параметр t, получим $x^2 + y^2 = 16$. Данная линия – окружность с центром в начале координат радиуса 4 (рис.3).

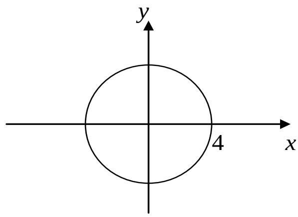


Рис.3

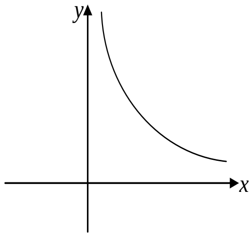


Рис.4

б) Исключая параметр t из системы $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$, получим

$y = \dfrac{1}{x}$. Но $x > 0$, $y > 0$, следовательно, уравнение $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$ определяет ветвь гиперболы, лежащую в I четверти (рис.4)

Задача 3. Определить и построить на комплексной плоскости линии, заданные уравнениями:

а) $|z + 3 - i| = 4$, б) $\operatorname{Re} z = -3$, в) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4}$.

Решение. а) Пользуясь определением модуля и тем, что $z = x + iy$, получим

$$|z + 3 - i| = |x + 3 + i(y - 1)| = \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = 4$$

или $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16$- уравнение окружности с центром в точке (-3,1) радиуса 4.

Данную задачу можно решить иначе. Представим уравнение в виде $|z-(-3+i)|=4$. Так как $|z-z_1|$ - расстояние между точками z и z_1, то из данного уравнения определяем, что расстояние от точки $-3+i$ до любой точки данной линии одно и то же и равно 4. Поэтому уравнение определяет окружность с центром в точке $-3+i$ радиуса 4 (рис. 5).

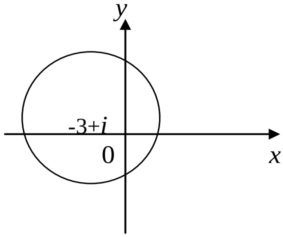


Рис.5.

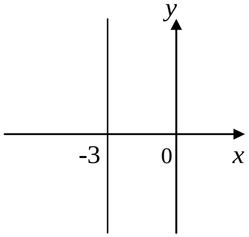


Рис.6.

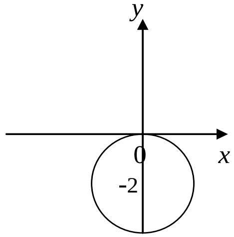


Рис.7.

б) Так как $\operatorname{Re} z = x$, то из условия следует, что $x=-3$. Это уравнение прямой, параллельной оси Oy (рис. 6)

в) Так как $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, то уравнение $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$ примет вид $-\dfrac{y}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{4}$, или после преобразования получим: $x^2+(y+2)^2=4$. Следовательно, уравнение $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$ определяет окружность радиуса 2 с центром в точке (0,-2) (рис. 7)

Задача 4. Построить в комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющие неравенствам:

а) $|z|\le 5$, б) $|z-3+5i|\ge \dfrac{1}{2}$, в) $1<|z-3+2i|<2$,

г) $\operatorname{Im} z<3$, д) $1<|z+3-2i|<2$, $\dfrac{2}{3}\pi<\arg z<\dfrac{5}{6}\pi$.

Указать тип рассматриваемого множества точек.

Решение. а) Данному множеству точек удовлетворяют точки круга с центром в начале координат радиуса 5. Это множество является областью, так как оно связное. эта область ограничена, так как она целиком содержится внутри круга с центром в начале координат радиуса 6. Область замкнутая, так как включает в себя границу $|z| = 5$ и односвязная, так как граница состоит из одной окружности $|z| = 5$ (рис. 8).

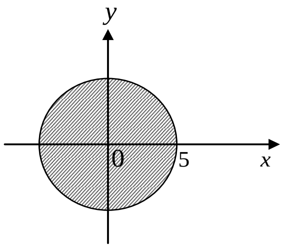


Рис. 8.

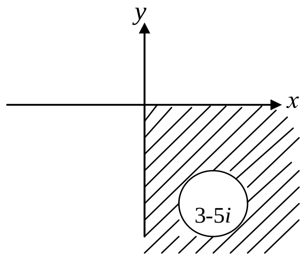


Рис. 9.

б) множество точек расположено вне круга с центром в точке $3-5i$ радиуса $\frac{1}{2}$, то есть плоскость z с вырезанным кругом. Это множество – область. Область неограничена, так как она не может быть заключена ни в какой круг конечного радиуса. Область замкнутая, так как ее граница – окружность $|z-3+5i| = \frac{1}{2}$ принадлежит данному множеству. Область односвязная (рис.9).

в) Данное множество точек должно одновременно удовлетворять двум условиям: $|z-(3-2i)| < 2$ и $|z-(3-2i)| > 1$.

Первое из этих неравенств определяет открытый круг радиуса 2 с центром в точке $3-2i$, второе – внешность единичного круга с центром в точке $3-2i$. Следовательно, данное множество точек – открытое кольцо с центром в точке $3-2i$ и радиусами 1 и 2. Область открытая, так как граница ее

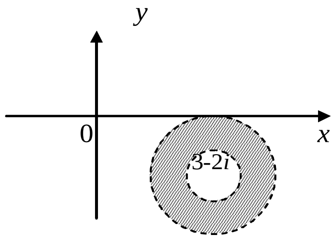


Рис.10.

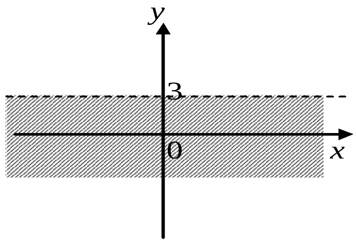


Рис.11.

– окружности $|z-3+2i|=2$ и $|z-3+2i|=1$- не принадлежат данному множеству. Область ограничена, так как она целиком лежит внутри круга $|z|<7$, и в силу того, что граница ее состоит из двух связных частей – двух окружностей, она двусвязна (рис. 10).

г) Так как $\operatorname{Im} z = y$, то точки данного множества удовлетворяют неравенству $y<3$. Это множество – полуплоскость (рис. 11). Оно не включает границу $y=3$, поэтому это открытая область. Область неограничена, так как не может быть заключена ни в какой круг конечного радиуса, односвязна.

д) Множество точек, заданное условиями

$1<|z-(-3+2i)|<2$,

$\frac{3}{4}\pi<\arg z<\frac{5}{6}\pi$ есть часть комплексной плоскости (рис.12) Данное множество точек не является областью, так как нет связности.

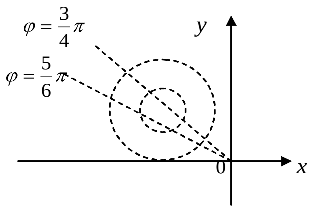


Рис.12.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Какие линии представлены уравнениями:

1.1. $z=\ 1+3i\ \ t$, где а) $-\infty<t<+\infty$, б) $0<t<+\infty$, 1.2. $z = t + \frac{1}{t}$, 1.3. $z = t + it^2 - 4$, 1.4. $z = \frac{5}{2}\cos t + i\frac{3}{2}\sin t$,

1.5. $|z-1| = 2|z-i|$, 1.6. $\operatorname{Re} z^2 = a^2$, 1.7. $z = 7e^{2it} + 3e^{-2it}$,

1.8. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} 2z = 3$, 1.9. $\operatorname{Im} z^2 = -3$, 1.10. $\arg z = \frac{\pi}{8}$.

Ответ. 1.1. а) прямая $y = 3x$, б) полупрямая $y = 3x$, лежащая в I четверти; 1.2. $xy = 1$, 1.3. $y = (x+4)^2$,

1.4. $\frac{x^2}{6,25} + \frac{y^2}{2,25} = 1$, 1.5. $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$,

1.6. $x^2 - y^2 = a^2$, 1.7. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{16} = 1$, 1.8. $x + 2y = 3$,

1.9. $2xy = -3$, 1.10. луч $\varphi = \frac{\pi}{8}$.

Задача 2. Записать с помощью неравенств следующие множества и построить их:

2.1. полосу, состоящую из точек, отстоящих от мнимой оси на расстояние меньше единицы;

2.2. полукруг радиуса 1 (без границы) с центром в точке $z = 0$, расположенный левее от мнимой оси;

2.3. первый квадрант,

2.4. полуплоскость, образованную точками, лежащими выше прямой $y = 2$,

2.5. круг радиуса 2 с центром в точке $z = 1 + i$ (вместе с окружностью).

Ответ: 2.1. $-1 < \operatorname{Re} z < 1$, 2.2. $|z| < 1$, $\operatorname{Re} z < 0$,

2.3. $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$, 2.4. $\operatorname{Im} z > 2$, 2.5. $|z - 1 - i| \le 2$.

Задача 3. Построить на комплексной плоскости z области, заданные неравенствами:

3.1. $|z-2+2i| \geq 1{,}5$, 3.2. $1 < |z-2| < 3$,

3.3. $1 < |z| < 2$, $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$, 3.4. $\left|\frac{z-1}{z-2i}\right| > 1$,

3.5. $|z-2| + |z+2| < 5$, 3.6. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$,

3.7. $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$, 3.8. $\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$.

Указать, является ли каждая из этих областей открытой или замкнутой, ограниченной или неограниченной, односвязной или многосвязной.

Ответ. 3.1. Внешность круга – односвязная, неограниченная, замкнутая область;

3.2. Кольцо – область двусвязная, ограниченная, открытая;

3.3. Часть кольца между лучами $\varphi = \frac{\pi}{6}$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$ - область односвязная, ограниченная, открытая;

3.4. Часть плоскости, расположенная выше прямой $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$, область неограниченная, открытая;

3.5. Внутренность эллипса – открытая, ограниченная, односвязная область;

3.6. Полоса $-1 \leq x \leq 2$ - неограниченная, односвязная, замкнутая область;

3.7. Часть плоскости, расположенная ниже прямой $y = x$, открытая, односвязная, неограниченная область.

§2. ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ.

2.1.Понятие функции комплексного переменного

Пусть даны две плоскости комплексных чисел $z = x + iy$ и $\mathrm{w} = u + i\mathrm{v}$ и пусть комплексное переменное z принимает всевозможные значения из некоторого множества D в плоскости z.

Если каждому значению z из D по некоторому закону поставлено в соответствие определенное комплексное число w из множества G в плоскости w, то говорят, что на множестве D задана **однозначная функция комплексного переменного** $\mathrm{w} = f(z)$.

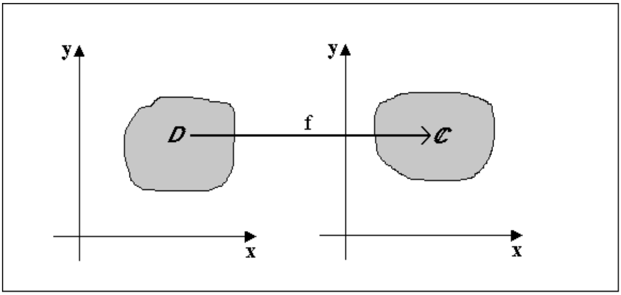


Рис. 13.

Если существуют значения $z \in D$, каждому из которых соответствует несколько разных значений w, то функция $\mathrm{w} = f(z)$ называется **многозначной**.

Например, функция $\mathrm{w} = z^2$ является однозначной, так как каждому значению переменного z из комплексной плоскости z соответствует единственное комплексное число, равное квадрату этого значения. Найдем действительную и мнимую части w. Если $u = \mathrm{Re}\,\mathrm{w}$, $\mathrm{v} = \mathrm{Im}\,\mathrm{w}$, то

$$\mathrm{w} = u + i\mathrm{v} = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + i2xy + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

Значит, действительная часть $u(x,y) = x^2 - y^2$, а мнимая часть $\mathrm{v}(x,y) = 2xy$.

Вообще, если $\mathrm{w} = u + i\mathrm{v}$ есть функция от $z = x + iy$, то функции u и v являются функциями x и y, то есть $u = u(x,y)$, $\mathrm{v} = \mathrm{v}(x,y)$ и $\mathrm{w} = u(x,y) + i\mathrm{v}(x,y)$

2.2. Предел. Непрерывность.

Говорят, что однозначная функция $\mathrm{w} = f(z)$ при $z \to z_0$

имеет определенный **предел** A (A=a+ib), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Функция $\mathrm{w} = f(z)$ называется **непрерывной** в точке z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функция непрерывная в каждой точке некоторой области D, называется непрерывной в этой области.

Непрерывность $f(z)$ в точке z_0 эквивалентна непрерывности функций $u = u(x, y)$, $\mathrm{v} = \mathrm{v}(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

2.3. Основные элементарные функции комплексной переменной.

Следующие функции (как однозначные, так и многозначные) называются основными элементарными:

1.**Дробно-рациональная функция**

$$\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}, \quad n, m \in N.$$

Частными случаями этой функции являются:

а) линейная функция

$$az + b, \quad a, b \in C, \ a \neq 0;$$

б) степенная функция z^n, $n \in N$;

в) дробно-линейная функция

$$\frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in C, \ c \neq 0, \ ad - bc \neq 0;$$

г) функция Жуковского $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

2. **Показательная функция**

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

3. **Тригонометрические функции**

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),\ \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

4. **Гиперболические функции**

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}),\ \mathrm{ch}\, z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}),$$

$$\mathrm{t\,hz} = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}, \mathrm{ct\,hz} = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

Замечание. Легко видеть, что $\sin z$ и $\mathrm{sh}\, z$ связаны соотношением $\mathrm{sh}\, z = -i \sin iz$, а $\cos z$ и $\mathrm{ch}\, z$ соотношением $\mathrm{ch}\, z = \cos iz.$Справедлива формула Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z.$ Известные из элементарной математики формулы

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \qquad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2},$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2;$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

справедливы и для комплексных значений аргументов z_1 и z_2.

5. **Логарифмическая функция**

$$\mathrm{Lnz} = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi).$$

Функция Lnz является многозначной. В каждой точке z, отличной от нуля и ∞, она принимает бесконечно много значений. Выражение $\ln|z| + i \arg z$ называется **главным значением** логарифмической функции и обозначается $\ln z$. Таким образом,

$$\mathrm{Lnz} = \ln z + 2k\pi i.$$

6. **Общая степенная функция** $z^a = e^{aLnz},\ a \in C.$

Эта функция многозначная, ее главное значение равно $e^{a\ln z}$. Если $a=\dfrac{1}{n}, n\in N$, то получаем многозначную функцию-корень n-й степени из комплексного числа:

$$z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}=e^{\frac{1}{n}(\ln|z|+i(\arg z+2k\pi))}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}.$$

7. **Общая показательная функция**

$$a^z=e^{zLna},\ a\in C.$$

Главное значение этой многозначной функции равно $e^{z\ln a}$. В дальнейшем при $a>0$ полагаем $a^z=e^{z\ln a}$.

8. **Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции**:

$$\mathrm{Arcsin}\, z=-i\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2}),\ \mathrm{Arccos}\, z=-i\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}),$$

$$\mathrm{Arctg}\, z=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},$$

Решение типовых задач

Задача 1. При отображении $\mathrm{w}=z^2$ найти:
а) образы линий $x=c$, б) прообразы линий $u=c$.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функций $\mathrm{w}=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$, то есть

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{w}=u=x^2-y^2,\ \mathrm{Im}\,\mathrm{w}=\mathrm{v}=2xy.$$

$x=c$ - прямые, параллельные оси Oy. Для того, чтобы найти образы этих прямых на плоскости w, необходимо систему уравнений $\begin{cases} x=c \\ u=x^2-y^2 \\ \mathrm{v}=2xy \end{cases}$ разрешить относительно u и v. Эта система равносильна системе $\begin{cases} u=c-y^2 \\ \mathrm{v}=2cy \end{cases}$. Исключая параметр y, получим $\mathrm{v}^2=-2c^2(u-c^2)$. Это уравнение определяет на плоскости ω семейство парабол с вершиной в точке $(c^2,0)$, направленных в отрицательную сторону оси Ou. Когда точка z пробегает линию $x=c$, то соответствующая точка ω пробегает линию $\mathrm{v}^2=-2c^2(u-c^2)$.

Следовательно, для прообраза $x=c$ на плоскости z образом является семейство парабол $\mathrm{v}^2=-2c^2(u-c^2)$ на плоскости w при отображении $\mathrm{w}=z^2$ (рис.14). При $c=0$ $x=0$ и $\begin{cases} u=-y^2 \\ \mathrm{v}=0 \end{cases}$. Равенство $\mathrm{v}=0$ означает, что точки расположены на оси Ou. Из первого уравнения системы следует, что $u\le 0$. Следовательно, $x=0$ отобразится на отрицательную часть действительной оси Ou плоскости w

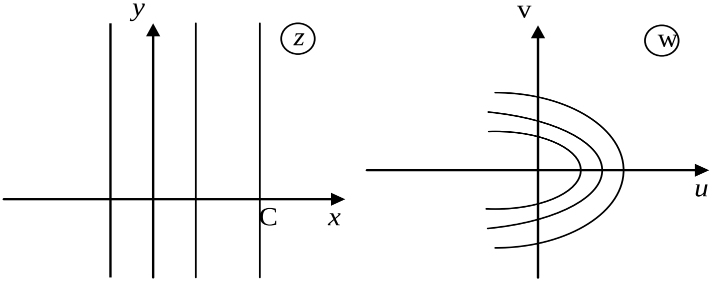


Рис. 14

б) $u=c$ - прямые, параллельные оси $O\mathrm{v}$.

Для нахождения прообразов этих прямых на плоскости можно, решая систему уравнений $\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ \mathrm{v}=2xy \\ u=c \end{cases}$ получить $x^2-y^2=c$, $c\ne 0$. Это уравнение определяет на плоскости z семейство гипербол. Если $c=0$, $x^2-y^2=0$, откуда $x=\pm y$, то есть прообразом оси $O\mathrm{v}$ является пара прямых. Следовательно, прообразами семейства прямых линий $u = c$ на w при отображении $\mathrm{w} = z^2$ является семейство гипербол $x^2 - y^2 = c$ на плоскости z (рис. 15).

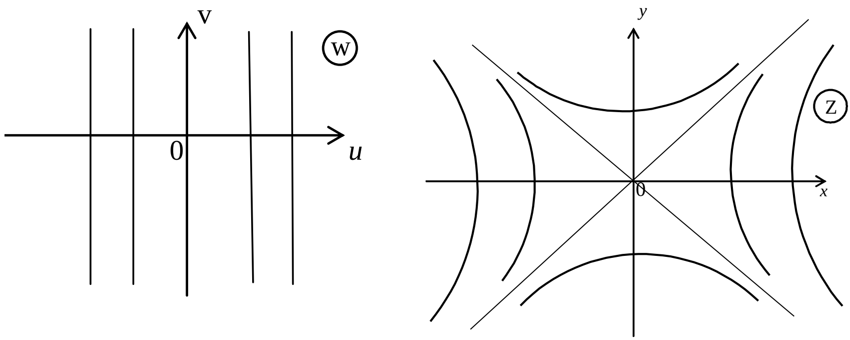


Рис. 15.

Задача 2. При отображении $\mathrm{w} = z^3$ найти образ линии $z = (1+2i)t$.

Решение. Уравнение $z = (1+2i)t$ равносильно уравнениям $x = t, y = 2t$. Оно определяет на плоскости z прямую $y = 2x$. Эта прямая отображается с помощью функции $\mathrm{w} = z^3$ на линию $\mathrm{w} = (1+2i)^3 t^3 = (-2i - 11)t^3$. Откуда

$u = \operatorname{Re} \mathrm{w} = -11t^3, \mathrm{v} = \operatorname{Im} \mathrm{w} = -2t^3$.

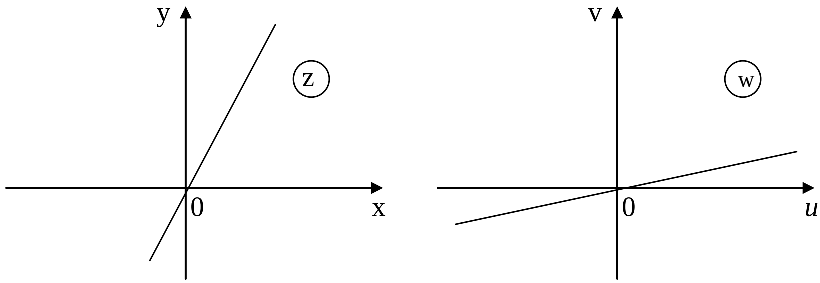


Рис. 16.

Исключая параметр t, получим $u = 5{,}5\mathrm{v}$ - уравнение прямой на плоскости w (рис. 16).

Задача 3. При отображении $\mathrm{w}=\frac{1}{z}$ найти образ линии $y=-x/2$.

Решение. Так как функция $\mathrm{w}=\frac{1}{z}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками z и w, то $z=\frac{1}{\mathrm{w}}$. Выделим действительную и мнимую части z:

$$z=\frac{1}{\mathrm{w}}=\frac{1}{u+i\mathrm{v}}=\frac{u-i\mathrm{v}}{u^2+\mathrm{v}^2}=\frac{u}{u^2+\mathrm{v}^2}-i\frac{\mathrm{v}}{u^2+\mathrm{v}^2},$$

$$x=\operatorname{Re}z=\frac{u}{u^2+\mathrm{v}^2},\ y=\operatorname{Im}z=-\frac{\mathrm{v}}{u^2+\mathrm{v}^2}.$$

Подставим полученные выражения для x и y в уравнение прямой $y=-\frac{x}{2}$, получим $-\frac{\mathrm{v}}{u^2+\mathrm{v}^2}=-\frac{u}{2(u^2+\mathrm{v}^2)}$, $\mathrm{v}=\frac{u}{2}$.

Следовательно, прямая $y=-\frac{x}{2}$ отображается в прямую $\mathrm{v}=\frac{u}{2}$. (рис.17).

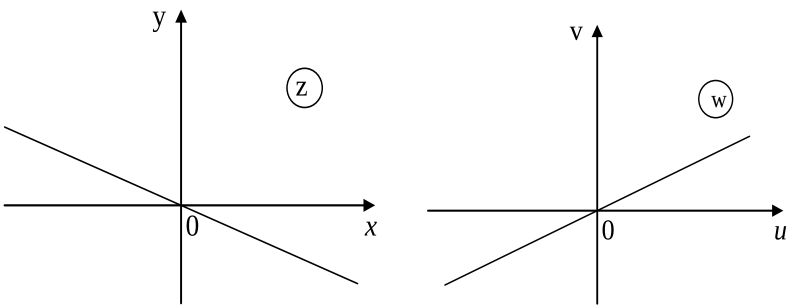


Рис. 17.

Задача 4. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1}+i\frac{n}{2n+3})$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+in}{1-in}$.

Решение. а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+iy_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+i\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1}+i\frac{n}{2n+3})=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}+i\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=1+\frac{1}{2}i.$$

б) Так как $\left|\frac{1+i}{2}\right|<\frac{\sqrt{2}}{2}<1, \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1+i}{2}\right|^n=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+i}{2})^n=0$.

в) Можно поступить, как в случае а), выделив вначале действительную и мнимую части, или воспользоваться теоремами о пределах:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+in}{1-in}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+i}{\frac{1}{n}-i}=-1.$$

Задача 5. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{z\to1+i}\frac{z}{z+1}$, б) $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2}{z-i}$, в) $\lim\limits_{z\to2i}\frac{z^2+4}{z-2i}$, г) $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z-2i}{z+i}$.

Решение. а) $\lim\limits_{z\to1+i}\frac{z}{z+1}=\lim\limits_{z\to1+i}\frac{1+i}{2+i}=\frac{1+i}{2+i}$;

б) $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2}{z-i}=\lim\limits_{z\to i}\frac{i^2}{i-i}=\lim\limits_{z\to i}\frac{-1}{i-i}=\infty$;

в) $\lim\limits_{z\to2i}\frac{z^2+4}{z-2i}=\lim\limits_{z\to2i}(z+2i)=4i$;

г) $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z-2i}{z+i}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1-\frac{2i}{z}}{1+\frac{i}{z}}=1.$

Задача 6. Исследовать на непрерывность функцию $\mathrm{w} = z\,\mathrm{Re}\,z$.

Решение. Запишем функцию в виде

$\mathrm{w} = (x+iy)x = x^2 + ixy$, $\mathrm{Re}\,\mathrm{w} = u(x,y) = x^2$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{w} = \mathrm{v}(x,y) = xy$.

Функции $u(x,y)$ и $\mathrm{v}(x,y)$ непрерывны на плоскости xOy, тогда $\mathrm{w} = z\,\mathrm{Re}\,z$ также непрерывна на всей плоскости z.

Задача 7. Достигает ли модуль функции $\mathrm{w} = z^2$ наибольшего и наименьшего значений в области

$$|z-i| \le 3, \mathrm{Im}\,z \ge 3\,?$$

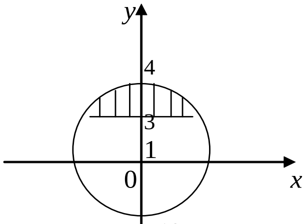


Рис. 18.

Решение. Данная область (заштрихованная) замкнута. Для функции

$\mathrm{w} = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, $\mathrm{Re}\,\mathrm{w} = x^2 - y^2$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{w} = 2xy$ непрерывны на плоскости xOy, значит, в замкнутой и ограниченной области модуль функции $\omega = z^2$ достигает наибольшего и наименьшего значений. $|z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$ - квадрат расстояния точки (x,y) до точки $(0,0)$. Сумма $x^2 + y^2$ будет наибольшей в точке (0,4) и наименьшей в точке (0,3). Следовательно, $|z^2|$ будет наибольшим в точке $z_1 = 4i$ и наименьшим в точке $z_2 = 3i$. Точки $z_1 = 4i$ и $z_2 = 3i$ принадлежат границе области.

Задача 8. Вычислить значения функций:

а) $e^{3+\frac{\pi}{2}i}$, б) $\cos 3i$, в) $\mathrm{sh}(-2+i)$, г) $\mathrm{L\,n}(2-3i)$, д) $i-1^{\;i}$.

Решение. а) По определению $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, следовательно, $e^{3+\frac{\pi}{2}i} = e^3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = e^3 i \approx 20,09i$.

б) Исходя из определения $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, получаем

$$\cos 3i = \frac{e^{i3i} + e^{-i3iz}}{2} = \frac{e^{-3} + e^{3}}{2} \approx 10{,}07.$$

в) По определению $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$, $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$.

$$\operatorname{sh}(-2+i) = \frac{e^{-2+i} - e^{2-i}}{2} = \frac{1}{2}(e^{-2}(\cos 1 + i\sin 1) - e^{2}(\cos 1 - i\sin 1) =$$

$$= -\cos 1 \cdot \frac{e^{2} - e^{-2}}{2} + i\sin 1 \cdot \frac{e^{2} + e^{-2}}{2} = -\cos 1 \cdot \operatorname{sh} 2 + i\sin 1 \cdot \operatorname{ch} 2.$$

г) Используя определение логарифмической функции, находим

$$\mathrm{L\,n}(2-3i) = \ln(2-3i) + 2\pi k i,$$

$$\ln(2-3i) = \ln\left|2-3i\right| + i\arg(2-3i), \left|2-3i\right| = \sqrt{13}.$$

$$\ln(2-3i) = \ln\sqrt{13} + +i\,\mathrm{arctg}(-\frac{3}{2});$$

$$\mathrm{L\,n}(2-3i) = \frac{1}{2}\ln 13 + i(2\pi k - \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}).$$

д) Здесь $z = i - 1$, $\xi = i$. Тогда $z = i - 1 = \sqrt{2}e^{i3/4\pi}$;

$$Lnz = \ln\sqrt{2} + i\ \ 3/4\pi + 2k\pi\ \ , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

$$i-1\ ^{i} = e^{iLn\ i-1} = e^{i\left[Ln\sqrt{2}+i\ 3/4\pi+2k\pi\ \right]} = e^{-\ 3/4\pi+2k\pi} \cdot e^{i\ln\sqrt{2}},$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. При отображении $\mathrm{w} = z^{2}$ найти:

1.1. Образы линий $x = 3,\ y = -2,\ y = c.$

1.2. Прообразы линий $u = 1, \mathrm{v} = 4, \mathrm{v} = c.$

Ответы: 1.1. $\mathrm{v}^{2} = -36(u-9); \mathrm{v}^{2} = 16(u+4);\ u = \dfrac{\mathrm{v}^{2}}{4c^{2}} - c^{2}\,(c \neq 0\,),$

1.2. $x^2 - y^2 = 1;\quad xy = 2;\quad xy = \frac{c}{2}\ (c \neq 0).$

Задача 2. При отображении $\mathrm{w} = \frac{1}{z}$ найти образы линий:

2.1. $x = c$; 2.2. $y = x - 1$; 2.3. $|z| = 4$; 2.4. $(x-1)^2 + y^2 = 1$;

2.5. $\arg z = \frac{3}{4}\pi$; 2.6. $x^2 - 2x + y^2 - 2y - 2 = 0$.

Ответы: 2.1. $u^2 + \mathrm{v}^2 - \frac{u}{c} = 0$, 2.2. $(u - \frac{1}{2})^2 + (\mathrm{v} - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$,

2.3. $|\mathrm{w}| = \frac{1}{4}$; 2.4. $u = \frac{1}{2}$; 2.5. $\arg \mathrm{w} = -\frac{3}{4}\pi$;

2.6. $(u + \frac{1}{2})^2 + (\mathrm{v} - \frac{1}{2})^2 = 1$.

Задача 3. При отображении $\mathrm{w} = 2z - i$ найти образы линий:

3.1. $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z$; 3.2. $|z| = 1$.

Ответы: 3.1. $u - \mathrm{v} = 1$; 3.2. $|\mathrm{w} + i| = 2$.

Задача 4. Найти образ области $0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1,\ 0 \le \mathrm{Im}\, z \le 1$ при отображении $\omega = z^2$. Образ и прообраз изобразить геометрически.

Ответ: Квадрат отображается в криволинейный треугольник, расположенный в верхней полуплоскости и ограниченный линиями $-1 \le u \le 1,\ \mathrm{v}^2 = \pm 4(u \pm 1)$.

Задача 5. Вычислить следующие пределы:

5.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n} + i\frac{n}{n+1}\right)$, 5.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2i}{3n+7i}$, 5.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}$,

5.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{i^n}{n}$, 5.5. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+3i)^n$, 5.6. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{i}{n}$, 5.7. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\right)}$.

Ответы: 5.1. $1+i$; 5.2. $\frac{1}{3}$; 5.3. 1; 5.4. 0; 5.5. не существует; 5.6. i, 5.7. $-i$.

Задача 6. Вычислить следующие пределы:

6.1. $\lim\limits_{z\to 1}\frac{2z+1}{z+2}$; 6.2. $\lim\limits_{z\to 3-4i}|z|$; 6.3. $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z^2+1}{z-2i}$; 6.4. $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^2-1}{z-1}$;

6.5. $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{3z^2-z+i}{2z^2+z}$; 6.6. $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$; 6.7. $\lim\limits_{z\to -\frac{\pi}{2}i}\frac{e^{2z}+1}{e^z+i}$.

Ответы: 6.1. 1; 6.2. 5; 6.3. ∞; 6.4. 2; 6.5. $\frac{3}{2}$; 6.6. не существует; 6.7. $-2i$.

Задача 7. Исследовать на непрерывность функции. Указать области определения, однозначность, многозначность, непрерывность.

7.1. $w=z^2$; 7.2. $w=\bar{z}$; 7.3. $w=\operatorname{Re}z$; 7.4. $w=\operatorname{Im}z$;

7.5. $w=\frac{1}{z}$; 7.6. $w=z+\frac{1}{z}$.

Ответы: непрерывны всюду 7.5, 7.6 кроме точки $z=0$. Определены, однозначны, непрерывны всюду 7.5, 7.6 кроме $z=0$.

Задача 8. Вычислить значения функций:

8.1. e^{-1+2i}; 8.2. $\operatorname{ch} i$; 8.3. $\sin(5-i)$; 8.4. $\cos(i\ln 5)$; 8.5. $\operatorname{Ln}(3+4i)$; 8.6. $\operatorname{Arcsin} 2$; 8.7. i^{1+i}.

Ответы: 8.1. $\frac{1}{e}(\cos 2+i\sin 2)$; 8.2. $\cos 1$;

8.3. $-\sin 5\operatorname{ch}1-i\cos 5\operatorname{sh}1$; 8.4. 2,6;

8.5. $\ln 5+i(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi k), k\in Z$;

8.6. $\frac{\pi}{2}-i\ln(2\pm\sqrt{3})+2\pi k,\ k\in Z$; 8.7. $ie^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi k)},\ k\in Z$.

§3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

3.1. Производная. Формулы для вычисления производной.

Производной однозначной функции комплексного переменного $w = f(z)$ в точке z_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента любым способом стремится к нулю, то есть

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Функция, имеющая производную при данном значении z, называется **дифференцируемой** при этом значении z.

Производную функции $f(z)$ можно считать по любой из следующих формул

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{и} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Можно показать, что производные элементарных функций $z^n, e^z, \cos z, \sin z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ находятся по тем же формулам, что и для действительного аргумента

$$(z^n)' = nz^{n-1};\ (e^z)' = e^z;\ (\cos z)' = -\sin z;$$

$$(\sin z)' = \cos z;\ (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z;\ (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z.$$

3.2. Аналитические и гармонические функции

Функция комплексного переменного $f(z)$, определенная в области D и дифференцируемая в каждой точке этой области, называется **аналитической** в области D.

Необходимым и достаточным условием аналитичности функции $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ в области D плоскости z является существование и непрерывность частных производных первого порядка функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в D и выполнение условий Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}. \qquad \text{(C.-R.)}$$

С помощью этих условий легко проверить, является ли данная функция аналитической.

Функция двух действительных переменных $u(x,y)$, определенная в области D, имеющая в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=0$$

называется **гармонической** в области D.

Между аналитическими и гармоническими функциями существует простая связь. Действительная и мнимая части всякой аналитической функции являются гармоническими функциями. Однако функция $f(z)=u(x,y)+i\,\mathrm{v}(x,y)$, где $u(x,y)$ и $\mathrm{v}(x,y)$ - произвольные гармонические на D функции, не всегда является аналитической на D. Она будет аналитической только в том случае, если функции $u(x,y)$ и $\mathrm{v}(x,y)$ удовлетворяют в D условиям Коши-Римана. Гармонические функции $u(x,y)$ и $\mathrm{v}(x,y)$, связанные условиями Коши-Римана, называются **сопряженными**.

В случае односвязной области D справедливо утверждение: любая гармоническая функция в односвязной области D является действительной (мнимой) частью некоторой аналитической функции.

Решение типовых задач

Задача.1. Представить функцию $\mathrm{w}=iz^2+3z-5$ в виде $\mathrm{w}=u(x,y)+i\,\mathrm{v}(x,y)$, проверить, будет ли она аналитической, и в случае положительного ответа найти значение ее производной в точке $z_0=1+i$.

Решение. Имеем $\mathrm{w}=iz^2+3z-5=i(x+iy)^2+3(x+iy)-5=$

$= ix^2 + i^2 2xy + i^3 y^2 + 3x + i3y - 5 = (3x - 2xy - 5) + i(x^2 - y^2 + 3y).$

Значит, $u(x, y) = 3x - 2xy - 5,\ \mathrm{v}(x, y) = x^2 - y^2 + 3y.$ Проверим выполнение условий Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 - 2y;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2x;\ \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = -2y + 3.$$

Итак, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}$.

Так как $u(x, y)$ и $\mathrm{v}(x, y)$ имеют непрерывные частные производные и условия Коши-Римана выполняются во всех точках плоскости z, то данная функция аналитична во всей плоскости. Найдем ее производную

$$\mathrm{w}' = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = (3 - 2y) + i2x = 2i(x + iy) + 3 = 2iz + 3.$$

Тогда $f'(1+i) = 2i(1+i) + 3 = 2i - 2 + 3 = 1 + 2i.$

Замечание: из условий Коши-Римана вытекает, что производную функции $f(z)$ можно считать также по формулам

$$f'(z) = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} \quad \text{и} \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Задача 2. Показать, что функция $u(x, y) = x^2 + 3x - y^2$ является гармонической на всей плоскости xOy.

Решение. Найдем частные производные функции $u(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Так как частные производные непрерывны и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 2 - 2 = 0,$$

то функция $u(x, y) = x^2 + 3x - y^2$ является гармонической.

Задача 3. Проверить является ли функция $\mathrm{v}(x, y) = e^y \cos x$ мнимой частью некоторой аналитической функции.

Решение. Так как $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=-e^y\cos x+e^y\cos x=0$ во всей плоскости, то $\mathrm{v}(x,y)$ - гармоническая функция, следовательно, она является мнимой частью некоторой аналитической функции, то есть найдется такая функция $u(x,y)$, что $\mathrm{w}=u+i\,\mathrm{v}$ будет аналитической во всей комплексной плоскости.

Задача 4 . Дифференцируемы ли функции

4.1. $\mathrm{w}=|z|$, 4.2. $\mathrm{w}=-\sin x-i\sin y$?

Решение. 4.1. Так как $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, то

$$\mathrm{w}=u(x,y)+i\,\mathrm{v}(x,y)=|z|=\sqrt{x^2+y^2},$$

следовательно, $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{v}(x,y)=0$.

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial y},\ \frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial x}\neq-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Условия Коши-Римана не выполняются. Следовательно, функция $\mathrm{w}=|z|$ не дифференцируема.

4.2. $u=\mathrm{Re}\,\mathrm{w}=-\sin x$, $\mathrm{v}=\mathrm{Im}\,\mathrm{w}=-\sin y$.

Проверим выполнение условий Коши-Римана, для чего найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\cos x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial y}=-\cos y.$$

Условия Коши-Римана выполняются только для точек плоскости z, лежащих на прямой $x=y$.

Итак, данная функция дифференцируема во всех точках прямой $x=y$.

Задача 5 . Является ли аналитической функция $\text{w} = z \cdot \operatorname{Im} z$?

Решение: $\text{w} = z \cdot \operatorname{Im} z = xy + iy^2$ и $u(x,y) = \operatorname{Re} \text{w} = xy$, $\text{v}(x,y) = \operatorname{Im} \text{w} = y^2$.

Проверяем условия Коши-Римана, для чего вначале находим честные производные: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x$, $\dfrac{\partial \text{v}}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial \text{v}}{\partial y} = 2y$.

Частные производные непрерывны на всей комплексной плоскости z, но условия Коши-Римана выполняются только при $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, функция $\text{w} = z \cdot \operatorname{Im} z$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не является аналитической, так как не существует окрестности точки $z = 0$, в которой функция была бы дифференцируемой.

Задача 6 . Показать, что функция

$$\text{w} = f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3)$$

является аналитической на всей комплексной плоскости z и найти ее производную.

Решение.

$u(x,y) = \operatorname{Re} \text{w} = x^3 - 3xy^2$, $\text{v}(x,y) = \operatorname{Im} \text{w} = 3x^2 y - y^3$ - непрерывные функции.

Проверим выполнение условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy,\ \frac{\partial \text{v}}{\partial x} = 6xy,\ \frac{\partial \text{v}}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

Итак, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \text{v}}{\partial y}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial \text{v}}{\partial x}$.

Так как $u(x,y)$ и $\text{v}(x,y)$ имеют непрерывные частные производные и выполняются условия Коши-Римана в любой точке плоскости z, то данная функция аналитична во всей плоскости.

Найдем ее производную:

$$\text{w}' = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial \text{v}}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3(x+iy)^2 = 3z^2.$$

Задача 7 . Восстановить, если это возможно, аналитические функции по заданной действительной или мнимой части:
7.1. $u(x,y)=\operatorname{Re}\mathrm{w}=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$ и $\mathrm{w}(0)=f(0)=0$,
7.2. $\mathrm{v}(x,y)=e^x\sin y$, $f(0)-i$, 7.3. $u=x^2+1$.

Решение. 7.1. Функция $u(x,y)$ является гармонической на всей плоскости z, так как она удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x+12y-6x-12y=0.$$

Данная функция и искомая $\mathrm{v}(x,y)=\operatorname{Im}\mathrm{w}$ должны удовлетворять условиям Коши-Римана.

Определим теперь $\mathrm{v}(x,y)$, пользуясь тем, что она сопряжена с $u(x,y)$ условиями Коши-Римана.

$$\frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-6x^2+6xy+6y^2,$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12xy-3y^2.$$

Интегрируя первое уравнение по x и считая y постоянной, получаем $\mathrm{v}(x,y)=-2x^3+2yx^2+6y^2x+\varphi(y)$. Но так как $\frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial y}=3x^2+12xy-3y^2$, то должно выполняться равенство $3x^2+12yx+\varphi(y)=3x^2+12xy-3y^2$ или $\varphi'(y)=-3y^2$. Откуда находим, что $\varphi(y)=-y+c$.

Следовательно, $\mathrm{w}=u+i\,\mathrm{v}=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3+$
$+i(-2x^3+3yx^2+6y^2x-y^3+c)=x^3-3xy^2+3x^2iy-iy^3-$
$-2i(x^3+3x^2iy-3xy^2-iy^3-\frac{c}{2})=z^3-2i(z^3-\frac{c}{2})$.

Так как $\mathrm{w}(0)=f(0)=0$, то $c=0$.

Итак, $\mathrm{w}=f(z)=z^3(1-2i)$.

7.2. Так как $\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2}=e^x \sin y-e^x \sin y=0$ во всей плоскости, то $\mathrm{v}(x,y)$ - гармоническая функция. Из условий Коши-Римана найдем гармонически-сопряженную ей функцию $u(x,y)$:

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}=e^x \cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}=e^x \sin y$. Интегрируя первое уравнение по x, получаем $u(x,y)=e^x \cos y+\varphi(y)$. Но в силу второго уравнения $\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x \sin y$ выполняется равенство $-e^x \sin y+\varphi'(y)=-e^x \sin y$. Откуда $\varphi'(y)=0$, $\varphi(y)=c$. Следовательно, $\omega=u+i\mathrm{v}=e^x \cos y+c+ie^x \sin y=$

$=e^x(\cos y+i\sin y)+c=e^z+c$.

Так как $f(0)=-i$, то $-i=1+c$, откуда $c=-1-i$.

Итак, $\mathrm{w}=f(z)=e^z-1-i$.

7.3. Прежде всего проверим возможность решения задачи, то есть является ли функция $u(x,y)=x^2+1$ гармонической. Так как $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\neq 0$, то $u(x,y)=x^2+1$ не гармоническая функция и, следовательно, в данном случае невозможно восстановить аналитическую функцию $\mathrm{w}=u+i\mathrm{v}$.

Задача 8 . Найти коэффициент искажения k и угол поворота θ при отображении $\mathrm{w}=e^z$ в точке $z_0=\ln 2+i\frac{\pi}{4}$.

Решение. $\mathrm{w}'(z)=e^z$, $\mathrm{w}'(z_0)=\mathrm{w}'(\ln 2+i\frac{\pi}{4})=e^{\ln 2+i\frac{\pi}{4}}=e^{\ln 2}e^{i\frac{\pi}{4}=}$

$=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i$.

Исходя из геометрического смысла модуля и аргумента производной, имеем коэффициент искажения
$k = \left| w'(\ln 2 + i\frac{\pi}{4}) \right| = 2$, а угол поворота

$$\theta = \arg w'(\ln 2 + i\frac{\pi}{4}) = \arg(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = \frac{\pi}{4}.$$

Так как $k > 1$, то имеет место растяжение.

Задача 9. Какая часть плоскости z растягивается, а какая сжимается при отображении $w = z^2 + 2z$?

Решение. $w' = 2z + 2$, $|w'| = |2z + 2| = 2|z+1|$.

Растяжение происходит, если $|w'| > 1$, значит, если $2|z+1| > 1$, т.е. $|z+1| > \frac{1}{2}$. Это неравенство определяет множество точек, лежащих вне круга с центром в точке $z = -1$ и радиусом $\frac{1}{2}$.

Сжатие происходит для точек $|z+1| < \frac{1}{2}$, т.е. внутри указанного круга. Следовательно, для точек, лежащих за кругом $|z+1| < \frac{1}{2}$, происходит растяжение, а для точек, лежащих внутри круга $|z+1| < \frac{1}{2}$, происходит сжатие.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Дифференцируемы ли функции

1.1. $w = e^x \cos y + ie^x \sin y$, 1.2. $w = \cos i\bar{z}$, 1.3. $w = z \operatorname{Re} z$?

Ответ: 1.1. Да, 1.2. Нет, 1.3. Дифференцируема в точке $z = 0$.

Задача 2. Найти область аналитичности функций:

2.1. $w = \cos \bar{z}$, 2.2. $w = \sin 2z$, 2.3. $w = \frac{1}{z^2}$.

Ответ: 2.1. Не аналитична ни в одной точке,

2.2. Аналитична всюду,

2.3. Аналитическая, кроме точки $z=0$.

Задача 3. Найти производные функций:

3.1. $\mathrm{w}=3x-2yi$, 3.2. $\mathrm{w}=x^3+y+i(x+y^3)$, 3.3. $\mathrm{w}=e^{\operatorname{tg}3z}$,

3.4. $\mathrm{w}=\sin\dfrac{z}{3}$, 3.5. $\mathrm{w}=z^3$, 3.6. $\mathrm{w}=\cos 2z$.

Ответ: 3.1, 3.2 производной не имеют, 3.3 $3e^{\operatorname{tg}3z}\cdot\sec^2 3z$,

3.4. $\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{z}{3}$, 3.5. $3z^2$, 3.6. $-2\sin 2z$.

Задача 4. Восстановить, если это возможно, аналитические функции по заданной действительной или мнимой части:

4.1. $u(x,y)=2x^2-2y^2-y$, $\mathrm{w}(0)=0$,

4.2. $\mathrm{v}(x,y)=\dfrac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2}$, $\mathrm{w}(1)=0$,

4.3. $u(x,y)=x^2-y^2+x$, г) $\mathrm{v}(x,y)=e^y\cos x$, $\mathrm{w}(0)=i$,

4.4. $u(x,y)=e^{\frac{y}{x}}$, 4.5. $\mathrm{v}(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$,

4.6. $\mathrm{v}(x,y)=2x^2-2y^2+x$.

Ответ: 4.1. $\mathrm{w}=f(z)=2z^2+iz$, 4.2. $\mathrm{w}=f(z)=\dfrac{i(z-1)}{z}$,

4.3. $\mathrm{w}=f(z)=x^2-y^2+x+i(2xy+y+c)$, 4.4. $\mathrm{w}=f(z)=ie^{-iz}$,

4.5. Не существует, 4.6. Не существует,

4.7. $\mathrm{w}=f(z)=c+(2z^2+z)i$.

Задача 5. Найти коэффициент искажения и угол поворота при отображении $\mathrm{w}=z^2$ в точках: 5.1. $z_0=1$;

5.2. $z_0=1+i$; 5.3. $z_0=\sqrt{2}(1-i)$.

Ответ: 5.1. $k=2$, $и=0$; 5.2. $k=2\sqrt{2}$, $и=\pi/4\dfrac{\pi}{4}$;

5.3. $k=4, и=-\frac{\pi}{4}$.

Задача 6. Какая часть плоскости z растягивается, а какая сжимается при следующих отображениях: 6.1. $\mathrm{w}=\frac{1}{z}$; 6.2. $\mathrm{w}=\ln z$; в) $\mathrm{w}=2z^2-20z+2$?

Ответ: 6.1, 6.2. Растягивается область $|z|<1$ (кроме $z=0$), а сжимается область $|z|>1$; 6.3. Растягивается область $|z-5|>\frac{1}{4}$, а сжимается область $|z-5|<\frac{1}{4}$.

§4. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ТЕОРЕМА КОШИ, ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

4.1. Интеграл от функции комплексного переменного.

Пусть $\mathrm{w}=f(z)$ - непрерывная функция комплексного переменного z, определенная в некоторой области D и Γ - гладкая кривая, лежащая в области D, на которой задано направление от z_0 (начало кривой) к z_* (конец кривой). Разобьем Γ на n частей произвольными точками, лежащими последовательно на кривой Γ. Составим сумму

$$S_n = f(z_0)\triangle z_0 + f(z_1)\triangle z_1 + \ldots + f(z_{n-1})\triangle z_{n-1},$$

Где приращение $\triangle z_k = z_{k+1} - z_k, \quad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$.

Интегралом от функции $f(z)$ по кривой Γ называется предел суммы S_n при $n\to\infty$ и $\max|\triangle z_k|\to 0$, то есть

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{\max|\triangle z_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\triangle z_k .$$

а) Если $f(z)=u(x,y)+i\,\mathrm{v}(x,y)$, то вычисление интеграла сводится к вычислению двух криволинейных интегралов второго рода

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} u(x,y)dx - \mathrm{v}(x,y)dy + i\int_{\Gamma} \mathrm{v}(x,y)dx + u(x,y)dy\,.$$

б) Если дуга Г задана параметрическим уравнением $z = z(t)$, причем начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям параметра $t = t_0$ и $t = t_1$ соответственно, то

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt.$$

в) Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1}\,,$$

где $\Phi(z)$- какая-либо первообразная для функции $f(z)$, то есть $\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ - аналитические в односвязной области D, а z_0 и z_1- произвольные точки этой области, то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi'(z)dz = [f(z)\varphi(z)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \varphi(z)f'(z)dz\,.$$

4.2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, ограниченной контуром Г и γ - замкнутый контур в D, то $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$. Если дополнительно $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$, то $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

Если $f(z)$ аналитична в области D, $a \in D$ и γ – контур, охватывающий точку a, то справедлива интегральная формула Коши

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\eta)}{\eta-a}d\eta .$$

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливы формулы

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\eta)}{(\eta-a)^{n+1}}d\eta,\ n=1,2,\ldots .$$

Решение типовых задач

Задача 1. Вычислить интеграл $\int_L \operatorname{Re} z dx$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $z_1=2$ и $z_2=3+i$.

Решение. $f(z)=\operatorname{Re} z=x$, $u=x$, $\text{v}=0$, получим

$$\int_L \operatorname{Re} z dz=\int_L x dx+i\int_L x dy .$$

Так как прямая проходит через точки $z_1=2$ и $z_2=3+i$, то ее уравнение имеет вид: $y=x-2,\quad x\in[2,3]$.

Поэтому окончательно находим:

$$\int_L x dx=\int_2^3 x dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^3=\frac{5}{2},$$

$$\int_L x dy=\int_2^3 x d(x-2)=\int_2^3 x dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^3=\frac{5}{2},$$

Таким образом, $\int_L \operatorname{Re} z dz=\frac{5}{2}(1+i)$.

Задача 2. Вычислить $\int_{\gamma} z \operatorname{Im} z dz$, где контур γ:

2.1. Дуга параболы $x=y^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1+i$;

2.2. Ломаная OAB с вершинами в точках $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{i}{2}$, $z_3 = 1 + i$.

Решение. Найдем действительную и мнимую части подынтегральной функции $f(z) = z\,\mathrm{Im}\,z$:

$$u(x,y) = xy,\ \mathrm{v}(x,y) = y^2.$$

Используем формулу сведения интеграла от функции комплексного переменного к криволинейным интегралам:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u(x,y)dx - \mathrm{v}(x,y)dy + i\int_\gamma \mathrm{v}(x,y)dx + u(x,y)dy,$$

то есть

$$\int_\gamma z\,\mathrm{Im}\,zdz = \int_\gamma xydx - y^2dy + i\int_\gamma y^2dx + xydy.$$

Для вычисления криволинейных интегралов нужно перейти к параметрическим уравнениям кривой интегрирования:

2.1. Положим $y = t, x = t^2$, где $0 \le t \le 1$. Значит,

$$\int_\gamma z\,\mathrm{Im}\,zdz = \int_0^1 (2t^4 - t^2)dt + i\int_0^1 3t^3dt = \frac{1}{15} + \frac{3}{4}i;$$

2.2. Уравнения отрезка OA: $x = 0, y = t$, где $0 \le t \le \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$\int_\gamma z\,\mathrm{Im}\,zdz = -\int_0^{\frac{1}{2}} t^2dt = -\frac{1}{24}$. Уравнения отрезка AB: $x = 2t - 1, y = t,$ где $\frac{1}{2} \le t \le 1$. Значит

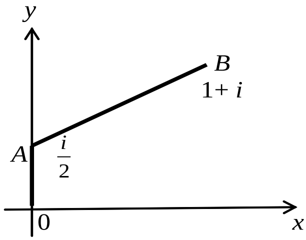


Рис.19.

$$\int_{AB} z\,\mathrm{Im}\,z dz = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(3t^2-2t)dt + i\int_{\frac{1}{2}}^{1}(4t^2-t)dt = \frac{3+19i}{24}.$$

Итак, $\displaystyle\int_{OAB} z\,\mathrm{Im}\,z dz = \int_{OA} z\,\mathrm{Im}\,z dz + \int_{AB} z\,\mathrm{Im}\,z dz = \frac{2+19i}{24}.$

Задача 3. Вычислить $\displaystyle\int_L \bar{z}dz$, где L – отрезок параболы

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t^2, \quad t \in \ 0;1 \ . \end{cases}$$

Решение. По условию $\bar{z} = x - iy = t - i2t^2$; $dz = \ 1 - i4t \ \ dt$.

$$\int_L \bar{z}dz = \int_0^1 \ t - i2t^2 \quad 1 - i4t \ \ dt = \int_0^1 \ t - 8t^3 \ \ dt - i6\int_0^1 t^2 dt =$$

$$= \ t^3 - 2t^4 \ \Big|_0^1 - i2t^3\Big|_0^1 = -\frac{3}{2} - 2i \ .$$

Задача 4. Вычислить $\displaystyle\int_\gamma(\bar{z} + \mathrm{Re}\,z)dz$, где γ - эллипс $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, проходимый против часовой стрелки, начиная от $z = 3$.

Решение. Выделяя действительную и мнимую части подынтегральной функции и используя параметрические уравнения эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, где $0 \le t \le 2\pi$ получим:

$$\int_\gamma(\bar{z} + \mathrm{Re}\,z)dz = \int_\gamma 2xdx + ydy + i\int_\gamma 2xdy - ydx =$$

$$= -\int_0^{2\pi} 7\sin 2tdt + i\int_0^{2\pi}(9 + 3\sin 2t)dt = 18\pi i.$$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma}(2z+3\overline{z})dz$, где γ - верхняя полуокружность $|z-2|=3,\ 0\le \arg z\le \pi$.

Решение. Запишем уравнение $|z-2|=3$ в виде $z=2+3e^{i\varphi}$, где $0\le\varphi\le\pi$. Следовательно, на γ: $dz=3ie^{i\varphi}d\varphi$ и $\overline{z}=2+3e^{-i\varphi}$. Итак,

$$\int\limits_{\gamma}(2z+3\overline{z})dz=\int\limits_{0}^{\pi}(2(2+3e^{i\varphi})+3(2+3e^{-i\varphi}))3ie^{i\varphi}d\varphi=$$

$$=3i\int\limits_{0}^{\pi}(10e^{i\varphi}+6e^{2i\varphi}+9)d\varphi=3i(\frac{10}{i}e^{i\varphi}+\frac{3}{i}e^{2i\varphi}+9\varphi)\Big|_{0}^{\pi}=-60+27\pi i.$$

Задача 5. Вычислить интеграл $\int\limits_{L}e^{z}dz$, где L – отрезок прямой, содержащей точки $z_0=0$ и $z_1=1-2i$.

Решение. Функция $f\ \ z\ =e^{z}$ является аналитической на плоскости z. Поэтому

$$\int\limits_{L}e^{z}dz=\int\limits_{0}^{1-2i}e^{z}dz=e^{z}\Big|_{0}^{1-2i}=e^{1-2i}-1.$$

Задача 6. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{i}(z-i)e^{-z}dz.$

Решение. Функция $(z-i)e^{-z}$ аналитическая во всей плоскости z и, следовательно, имеет первообразную, которую найдем методом интегрирования по частям. Используя формулу Ньютона-Лейбница для функции аналитической в односвязной области, получим:

$$\int\limits_{0}^{i}(z-i)e^{-z}dz=-(z-i)e^{-z}\Big|_{0}^{i}+\int\limits_{0}^{i}e^{-z}dz=-e^{-z}\,(z-i+1)e^{-z}\Big|_{0}^{i}=$$

$$1-i-e^{-i}=1-\cos1-i(\sin1-1)=1-\cos1+(1-\sin1).$$

Задача 7. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{e^z}{z+\frac{\pi}{2}i}dz$, где γ :

7.1. Эллипс $\frac{(x+1)^2}{9}+y^2=1$; 7.2. Окружность $|z+i|=1$.

Решение.

7.1. Здесь подынтегральная функция является аналитической на контуре интегрирования и внутри его. Значит, по теореме Коши для односвязной области, получим

$$\int\limits_{\gamma}\frac{e^z}{z+\frac{\pi}{2}i}dz=0.$$

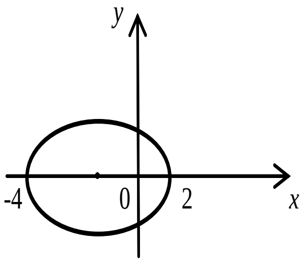


Рис.20.

7.2. Здесь подынтегральная функция теряет аналитичность в точке $z=-\frac{\pi}{2}i$, которая содержится внутри контура интегрирования. Применим формулу Коши $\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a)$, где $f(z)=e^z$

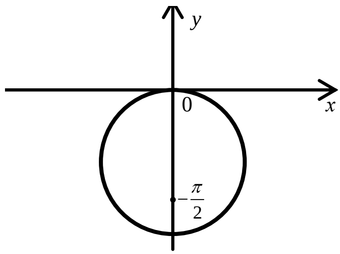


Рис.21.

аналитическая в круге $|z+i|\le 1$, $a=-\frac{\pi}{2}i$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma}\frac{e^z}{z+\frac{\pi}{2}i}dz2\pi=2\pi ie^{-\frac{\pi}{2}i}=2\pi i(\cos\frac{\pi}{2}--i\sin\frac{\pi}{2})=2\pi\ .$$

Задача 8. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{\operatorname{sh} z\pi}{(z-1)(z^2+4)^2}dz$, где γ:

8.1. Окружность $|z-1|=\frac{1}{3}$; 8.2. Окружность $|z+2i|=\frac{1}{3}$.

Решение. 8.1. Перепишем данный интеграл в виде:
$\int\limits_{\gamma}\frac{\operatorname{sh} z\pi/(z^2+4)^2}{(z-1)}dz$, функция $\frac{\operatorname{sh} z\pi}{(z^2+4)^2}$ является аналитической в круге $|z-1|\le\frac{1}{3}$. следовательно, применяя формулу Коши, получим:

$$\int\limits_{\gamma}\frac{\operatorname{sh} z\pi/(z^2+4)^2}{(z-1)}dz=2\pi i\left.\frac{\operatorname{sh} z\pi}{(z^2+4)^2}\right|_{z=1}=$$

$$=\frac{2\pi i}{25}\operatorname{sh}\pi.$$

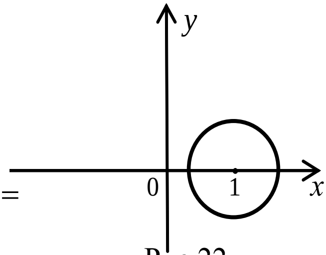


Рис.22.

8.2. Перепишем данный интеграл в виде:
$\int\limits_{\gamma}\frac{\operatorname{sh} z\pi/((z-1)(z-2i)^2)}{(z+2i)^2}dz$, здесь функция $\frac{\operatorname{sh} z\pi}{(z-1)(z-2i)^2}$ является аналитической в круге $|z+2i|\le\frac{1}{3}$. Применим формулу Коши для $f^{(n)}(a)$:

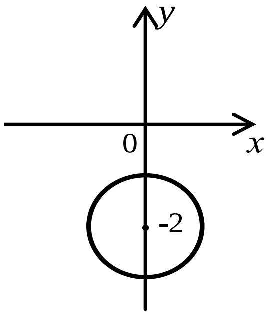


Рис. 23.

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\ .$$

Здесь $a=-2i, n=1, f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} z\pi}{(z-1)(z-2i)^2}$, то есть

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sh} z\pi/((z-1)(z-2i)^2)}{(z+2i)^2}dz=2\pi i\left(\frac{\operatorname{sh} z\pi}{(z-1)(z-2i)^2}\right)'\Bigg|_{z=-2i}=\frac{\pi^2(2+i)}{40}.$$

Задача 9. Вычислить интеграл $\int_\gamma \dfrac{e^{2z}}{(z+\frac{1}{2})^4}dz$, где γ - граница прямоугольника с вершинами в точках $z_1=-1-i,\ z_2=1-i,\ z_3=1+2i,\ z_4=-1+2i.$

Внутри контура интегрирования содержится точка $z=-\dfrac{1}{2}$ в которой подынтегральная функция теряет аналитичность. Заметим, что $f(z)=e^{2z}$ является аналитической на границе прямоугольника и внутри его. Применим формулу Коши для высших производных:

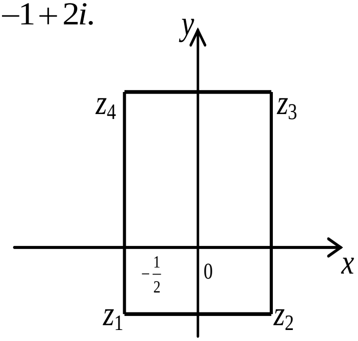


Рис. 24.

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+\frac{1}{2})^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}(e^{2z})'''\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{8\pi i}{3e}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вычислить интеграл $\int_\gamma e^{-\bar{z}}dz$, где γ:

1.1. Ломаная с вершинами в точках $z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 2 - i$;

1.2. Отрезок прямой с концами в точках $z_1 = 0, z_2 = 2 - i$.

Ответ: 1.1. $e^{-2}(\cos 1 - 2 - i\sin 1) + 1$;

$$1.2.\ \frac{4}{5}(e^{-2}((1 + \frac{3}{4}i)\sin 1 + (-\frac{3}{4} + i)\cos 1) - i + \frac{3}{4}).$$

Задача 2. Вычислить интеграл $\oint_\gamma |z|\bar{z}dz$, где γ - замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z| = 1$ и отрезка $-1 \le x \le 1, y = 0$.

Ответ: πi .

Задача 3. Вычислить интеграл $\int_\gamma \frac{z}{\bar{z}} dz$, где γ - граница полукольца, образованного верхними полуокружностями $|z| = 1$ и $|z| = 2$ и отрезками $-2 \le x \le -1, y = 0; 1 \le x \le 2, y = 0$.

Ответ: $4/3$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\int_\gamma \frac{e^{-z}}{\overline{\overline{z + \pi i}}} dz$, где γ :

4.1. Окружность $|z + 2i| = \frac{1}{2}$;

4.2. Граница треугольника с вершинами в точках $z_1 = 0, z_2 = -1 - 4i, z_3 = 4 - 4i$.

Ответ: 4.1. 0; 4.2. $-2\pi i$.

Задача 5. Вычислить интеграл $\int_\gamma (2 - 3z + z^2)dz$, где γ :

5.1. Дуга параболы $x = y^2$, от $z_1 = 0$ до $z = 4 + 2i$;

5.2. Дуга окружности $|z| = 2, -\frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{\pi}{3}$.

Ответ: 5.1. $-44-\frac{164}{3}i$; 5.2. $7\sqrt{3}i$.

Задача 6. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{\cos 2z}{z^2+3z+2}dz$, где γ:

6.1. Окружность $|z|=\frac{1}{2}$; 6.2. Окружность $|z+2|=\frac{1}{2}$;

6.3. Окружность $|z+1|=\frac{1}{2}$.

Ответ: 6.1. 0; 6.2. $-2\pi i\cos 4$; 6.3. $2\pi i\cos 2$.

Задача 7. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{z^3+1}{z^2+4}dz$, где γ:

7.1. Окружность $|z|=\frac{1}{2}$; 7.2. Окружность $|z+2i|=1$;

7.3. Окружность $|z-2i|=1$.

Ответ: 7.1. 0; 7.2. $\frac{-8+i}{2}\pi i$; 7.3. $\frac{8-i}{2}\pi i$.

Задача 8. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+\frac{\pi i}{2})^2(z-\pi i)^2}$, где γ:

8.1. Окружность $\left|z+\frac{\pi i}{2}\right|=1$; 8.2. Окружность $|z-\pi i|=1$;

8.3. Окружность $|z|=1$; 8.4. Эллипс $\frac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$.

Ответ: 8.1. $-\frac{8}{9}\pi$; 8.2. $-\frac{32}{27\pi^2}$; 8.3. 0; 8.4. 0.

Задача 9. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{e^z-1}{(z+2i)^3}dz$, где γ - прямоугольник с вершинами в точках:

$$z_1 = -1,\ z_2 = 1-3i,\ z_3 = 1-3i,\ z_4 = 1.$$

Ответ: $i\pi e^{-2i}$.

§5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

5.1. Ряды Тейлора.

Каждая функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в каком-либо круге $|z-z_0|<R$ разлагается в сходящийся в этом круге степенной ряд по положительным степеням

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$, где коэффициенты C_n определяются формулами

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \qquad (1)$$

или

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,\ r<R. \qquad (2)$$

Этот степенной ряд называется **рядом Тейлора** функции $f(z)$ в окрестности точки $z=z_0$. Формула (1) далеко не всегда позволяет эффективно вычислять коэффициены C_n. Формула (2) пригодна для этой цели еще в меньшей степени. Для эффективного вычисления коэффициентов ряда Тейлора существует ряд искусственных приемов.

1. При разложении рациональных функций в ряд Тейлора, разлагаемую функцию бывает полезно разложить на сумму более простых дробей (не обязательно простейших). В некоторых случаях рациональную функцию можно упростить при помощи умножения числителя и знаменателя на подходящий множитель.

2. При разложении в ряд Тейлора комбинаций из показательных и тригонометрических функций часто полезно преоб-

разовать разлагаемую функцию к комбинации только показательных функций.

3. Часто используют известные из математического анализа разложения элементарных функций

а) $e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \ldots + \dfrac{z^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!},\ z \in C$;

б) $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!},\ z \in C$;

в) $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z \in C;$

г) $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{z^n}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{z^n}{n},\ |z| < 1;$

д) $\operatorname{arctg} z = z - \dfrac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z| < 1;$

е)

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n,\ |z| < 1, \alpha \in R \setminus N$$

(в случае, когда $\alpha = m \in N$ функция $(1+z)^m$ раскладывается по биному Ньютона в многочлен, причем разложение имеет место во всей плоскости);

ж) при $\alpha = -1$ из е) получаем бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $-z$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots,\ |z| < 1.$$

4. Имеется еще один весьма эффективный прием разложения функций в ряд Тейлора. Он состоит в использовании метода неопределенных коэффициентов, отыскиваемых с помощью тех или иных соотношений, которым удовлетворяет раз-

лагаемая функция. Простейшим примером применения этого приёма является задача об отыскании коэффициентов ряда Тейлора отношения двух функций, ряды Тейлора которых известны.

5.2.Ряды Лорана

Рядом Лорана по степеням $z - z_0$ называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \qquad (1)$$

при этом ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n \qquad (2)$$

по отрицательным степеням $z - z_0$ называется **главной частью** ряда Лорана, а ряд

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \qquad (3)$$

по положительным степеням называется **правильной** частью ряда Лорана.

Ряд (1) называется **сходящимся** в точке z_0, если сходятся оба ряда (2), (3). Если ряд (2) сходится в области определяемой неравенством $|z - z_0| > r$, а ряд (3) – в области $|z - z_0| < R$, то при $r < R$ ряд Лорана сходится в кольце $r < |z - z_0| < R.$ В этом кольце сумма рядов $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ является функцией аналитической, причем коэффициенты ряда C_n определяются следующим образом

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z - z_0| = r'} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz; \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{ где } r < r' < R.$$

Рядом Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки ∞ называется ряд $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$ (или $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - a)^n$), сходящийся в некотором кольце $r < |z| < \infty$ (соответственно $r < |z-a| < \infty$).

При этом главной частью ряда Лорана является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$

($\sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-a)^n$), а правильной – ряд $\sum_{n=-\infty}^{0} C_n z^n$ ($\sum_{n=-\infty}^{0} C_n (z-a)^n$).

Вычисление контурных интегралов для определения C_n, как и в случае рядов Тейлора, затруднительно. Поэтому для разложения функций в ряд Лорана используются искусственные приемы, которые будут рассмотрены на примерах.

Решение типовых задач

Задача 1. Найти область сходимости следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n + \frac{1}{2^n z^n})$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2+i)^n + (z-2+i)^{-n}}{n 3^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^n + (z+2i)^{-n}}{n!}$.

Решение. а) Согласно определению, данный ряд можно представить в виде: $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n + \frac{1}{2^n z^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n z^n}$. Найдем область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ применяя радикальный признак Коши: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z|^n} = |z|$, таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ сходится внутри круга радиуса 1 с центром в точке $z_0 = 0$.

Для определения области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n z^n}$ сделаем замену переменного по формуле $\frac{1}{z} = \xi$ тогда ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{2^n}$. Применим к этому ряду радикальный признак Коши: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|\xi|^n}{2^n}}=\frac{|\xi|}{2}<1$, откуда $|\xi|<2$. Для исходного ряда область сходимости определяется условием $\frac{1}{|z|}<2$, или $|z|>\frac{1}{2}$ что представляет собой внешность круга радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в начале координат.

Итак, область сходимости данного ряда определится условиями $|z|<1$ и $|z|>\frac{1}{2}$. Это кольцо $\frac{1}{2}<|z|<1$.

б) Перепишем данный ряд в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n+(z-2+i)^{-n}}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n}{n3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n(z-2+i)^n}.$$

Область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n}{n3^n}$ найдем, используя признак Даламбера:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-2+i)^{n+1}n3^n}{(n+1)3^{n+1}(z-2+i)^n}\right|=\frac{|z-2+i|}{3}$, то есть $\frac{|z-2+i|}{3}<1$, откуда $|z-(2-i)|<3$. Полученное неравенство геометрически описывает внутренность круга радиуса 3 с центром в точке $z=2-i$.

Второй ряд заменой $\xi=\frac{1}{z-2+i}$ приведем к виду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n3^n}$.

Его область сходимости найдем также, пользуясь признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\xi^{n+1}n3^n}{(n+1)3^{n+1}\xi^n}\right| = \frac{|\xi|}{3} < 1\text{, откуда } |\xi| < 3.$$

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n(z-2+i)^n}$ будет сходиться в области $|z-(2-i)| > \frac{1}{3}$, то есть вне круга радиуса $\frac{1}{3}$ с центром в точке $z = 2 - i$.

Итак, область сходимости данного ряда есть кольцо $\frac{1}{3} < |z-2+i| < 3$.

в) Представим данный ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n + (z+2i)^{-n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(z+2i)^n}.$$

Для определения области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{n!}$ применим признак Даламбера:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2i)^{n+1}n!}{(n+1)!(z+2i)^n}\right| = 0$, то есть область сходимости – вся плоскость z.

Второй ряд подстановкой $\xi = \frac{1}{z+2i}$ приведем к виду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}$, для которого область сходимости- вся плоскость ξ , то есть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(z+2i)^n}$ область сходимости определяется условием $\frac{1}{|z+2i|} < \infty$, или $|z+2i| > 0$. Следовательно, область сходимости данного ряда описывается неравенством

$0<\left|z+2i\right|<\infty$, что геометрически представляет собой плоскость с выколотой точкой $z=-2i$.

Задача 2. Разложить функцию $f\ \ z\ =\dfrac{1}{z-a}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $b\neq a$.

Решение. В окрестности точки $z=b$ функция $f\ \ z\ =\dfrac{1}{z-a}$ является аналитической. Следовательно, согласно теореме 2 ее можно разложить в ряд Тейлора. Для разложения в ряд Тейлора преобразуем данную функцию к виду

$$f\ \ z\ =\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z-b-\ \ a-b}=-\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-b}{a-b}},$$

где второй сомножитель есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a_1=1$ и знаменателем $q=\dfrac{z-b}{z-a}$, $\left|q\right|=\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right|<1$, отсюда $\left|z-b\right|<\left|z-a\right|$.

Искомое разложение имеет вид:

$$f\ \ z\ =\frac{-1}{a-b}\left(1+\frac{z-b}{a-b}+\frac{z-b\ \ ^{2}}{a-b\ \ ^{2}}+\ldots+\frac{z-b\ \ ^{n-1}}{a-b\ \ ^{n-1}}+\ldots\right),$$

или

$$f\ \ z\ =-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a-b\ \ ^{n+1}}\ \ z-b\ \ ^{n};\qquad R=\left|a-b\right|.$$

Задача 3. Разложить функцию $f\ \ z\ \ \dfrac{z}{z^{2}+4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$.

Решение. Для разложения в ряд Тейлора преобразуем данную функцию к виду $f(z)=\dfrac{z}{4(1+z^2/4)}=\dfrac{z/4}{1-(-z^2/4)}$. Это есть сумма бесконечно убывающей прогрессии с $a_1=z/4$ и знаменателем $q=-\dfrac{z^2}{4}$. Так как $|q|<1$, то $\left|\dfrac{z^2}{4}\right|<1$, откуда $|z|<2$. Получаем искомое разложение:

$$f(z)=\frac{z}{4}-\frac{z}{4}\cdot\frac{z^2}{4}+\frac{z}{4}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^2+\ldots+\frac{z}{4}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^{n-1}+\ldots,$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}z^{2n-1};\qquad |z|<2.$$

Задача 4. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{3z+1}$ в окрестности точки $z_0=1$ и найти область сходимости полученного ряда.

Решение. Мы должны получить разложение по степеням $(z-1)$. Преобразуем данную функцию

$$f(z)=\frac{1}{3z+1}=\frac{1}{3(z-1)+4}=\frac{1}{4(1+3(z-1)/4)}.$$

Полученную дробь будем рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=-3(z-1)/4$.

Используем формулу $\dfrac{b_1}{1-q}=b_1(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots)$, справедливую при $|q|<1$, получим

$$\frac{1}{3z+1}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{3(z-1)}{4}+\frac{3^2(z-1)^2}{4^2}-\ldots+\frac{(-1)^n3^n(z-1)^n}{4^n}+\ldots\right).$$

Мы получили данное разложение при условии $\left|-\frac{3}{4}(z-1)\right|<1$. Отсюда следует, что область сходимости полученного ряда будет определяться неравенством $\left|(z-1)\right|<\frac{4}{3}$ - геометрически это внутренняя часть круга с центром в точке (1;0) и радиуса $4/3$.

Задача 5. Разложить функцию $f(z)=e^z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=\frac{1}{2}$. Найти область сходимости полученного ряда.

Решение. Преобразует данную функцию:

$f(z)=e^z=e^{z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=e^{z-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}$. Используя разложение

$e^u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$, $(|u|<\infty)$, получим $e^{z-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\frac{1}{2})^n}{n!}$, $(\left|z-\frac{1}{2}\right|<\infty)$

или $f(z)=e^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\frac{1}{2})^n}{n!}$, $(\left|z-\frac{1}{2}\right|<\infty)$. Область сходимости – вся комплексная плоскость z.

Задача 6. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{z^2+3z+2}$ в ряд Лорана в кольце $0<|z+2|<1$.

Решение. Особыми точками функции

$$f(z)=\frac{1}{z^2+3z+2}=\frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

являются точки $z_1=-1$ и $z_2=-2$. Значит, в кольце $0<|z+2|<1$ данная функция будет аналитической, то есть согласно теореме Лорана она единственным образом представима в этом кольце своим рядом Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z+2)^n$.

1 способ. Определим коэффициенты C_n по формуле:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\frac{1}{(z+1)(z+2)}}{(z+2)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(z+1)(z+2)^{n+2}} dz$$

(здесь γ - любая окружность, содержащуюся в кольце $0<|z+2|<1$). Если $n+2<0$, то есть $n<-2$, то подынтегральная функция $\frac{1}{(z+1)(z+2)^{n+2}}$ аналитическая во всех точках, лежащих в круге γ и в этом случае $C_n = 0$. Если $n+2 \ge 0$, то есть $n \ge -2$, то применяя формулу для производной любого порядка от аналитической функции, получим:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(z+1)}{(z+2)^{n+2}} dz = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d}{dz^{n+1}} \left(\frac{1}{z+1}\right)\Bigg|_{z=-2} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{(n+1)!(-1)^{n+1}}{(z+1)^{n+2}}\Bigg|_{z=-2} = -1.$$

Итак, в кольце $0<|z+2|<1$ $f(z)$ представляется рядом Лорана $f(z) = -\sum_{n=-1}^{\infty} (z+2)^n$.

2 способ. Укажем способ разложения функции в ряд Лорана, использующий известные разложения элементарных функций в ряд Тейлора. Представим данную дробь как сумму элементарных дробей:

$$\frac{1}{z^2+3z+2} = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}.$$

Так как функцию $\dfrac{1}{z^2+3z+2}$ необходимо представить в виде суммы положительных и отрицательных степеней $z+2$, то преобразуем первое слагаемое так:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z+2-1}=-\frac{1}{1-(z+2)}.$$

Дробь $\dfrac{1}{1-(z+2)}$ можно рассматривать как сумму геометрической прогрессии со знаменателем $(z+2)$, поэтому

$$-\frac{1}{1-(z+2)}=-(1+(z+2)+(z+2)^2+...+(z+2)^n+...).$$

Слагаемое $\dfrac{1}{z+2}$ имеет необходимый вид, так как представляет собой степень $(z+2)$.Таким образом,

$$f(z)=-(\frac{1}{z+2}+1+(z+2)+(z+2)^2+...+(z+2)^n+...)=$$

$$=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z+2)^n.$$

Задача 7. Разложить функцию $f(z)=\cos\dfrac{3z+4}{z+1}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=-1.$

Решение. Преобразуем данную функцию

$$\cos\frac{3z+4}{z+1}=\cos(3+\frac{1}{z+1})=\cos 3\cos\frac{1}{z+1}-\sin 3\sin\frac{1}{z+1}.$$

Воспользуемся разложениями в ряд Тейлора функций $\cos z$, $\sin z$ (стр.52):

$$\cos\frac{3z+4}{z+1}=\cos 3(1-\frac{1}{2!(z+1)^2}+\frac{1}{4!(z+1)^4}+...+\frac{(-1)^n}{(2n)!(z+1)^{2n}}+...)-$$

$$-\sin 3\left(\frac{1}{(z+1)}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}}+\ldots\right)=$$

$$=\cos 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z+1)^{2n}}-\sin 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}}.$$

Полученное разложение справедливо в кольце $0<|z+1|<\infty$.

Задача 8. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{3z-1}{2z^2-3z-2}$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z_0=\infty$.

Решение.

$$f(z)=\frac{3z-1}{2z^2-3z-2}=\frac{3z-1}{(2z+1)(z-2)}=\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{z-2}.$$

Данная функция теряет аналитичность в точках $z_1=-\dfrac{1}{2}, z_2=2$, следовательно, окрестностью бесконечно удаленной точки, в которой функция $f(z)$ является аналитической, будет внешность круга с центром в начале координат радиуса 2: $|z|>2$.

При $|z|>2$

$$\frac{1}{2z+1}=\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{2z}}=\frac{1}{2z}\left(1-\frac{1}{2z}+\frac{1}{2^2z^2}-\ldots+\frac{(-1)^n}{2^nz^n}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}z^{n+1}},$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\ldots+\frac{2^n}{z^n}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

Таким образом,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{2^{n+1}z^{n+1}}\ \text{при}\ |z|>2.$$

Задача 9. Рассмотреть различные разложения в ряд

Лорана функции $f(z)=\dfrac{3z^2+1}{z(z^2+1)}$ выбрав $z_0=i$.

Решение. Данная функция имеет 3 особые точки $z_1=0, z_2=i, z_3=-i,$ в силу чего имеются три круговых кольца с центром в точке $z_0=i$, в которых функция $f(z)$ аналитична:

$$0<|z-i|<1, 1<|z-i|<2, 2<|z-i|<\infty.$$

В каждом из этих колец функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана единственным образом.

1) В кольце $0<|z-i|<1$:

$$f(z)=\frac{3z^2+1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{(z-i)+i}+\frac{1}{(z-i)+2i}=$$

$$=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{i}\frac{1}{1+\dfrac{z-i}{i}}+\frac{1}{2i}\frac{1}{1+\dfrac{z-i}{2i}}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{i^n}+$$

$$+\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{2^n i^n}=\frac{1}{z-i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n(2^{n+1}+1)}{2^{n+1}i^{n+1}};$$

2) В кольце $1<|z-i|<2$

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{(z-i)+i}+\frac{1}{(z-i)+2i}=$$

$$=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\dfrac{i}{z-i}}+\frac{1}{2i}\frac{1}{1+\dfrac{z-i}{2i}}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{(z-i)^n}+$$

$$+\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}=\frac{1}{z-i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{(z-i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^{n+1}};$$

3) В кольце $2<|z-i|<\infty$

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{(z-i)+i}+\frac{1}{(z-i)+2i}=$$

$$=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\dfrac{i}{z-i}}+\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\dfrac{2i}{z-i}}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{(z-i)^n}+$$

$$+\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (2i)^n}{(z-i)^n}=\frac{1}{z-i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n (1+2^n)}{(z-i)^{n+1}}.$$

Данная задача иллюстрирует тот факт, что для функции разложение ее в ряд Лорана имеет, вообще говоря, разный вид для разных областей.

Задача 10. Найти все разложения функции $f\ \ z\ =\dfrac{\alpha z+\beta}{z\ \ z-a\ \ \ z-b}$ в ряд Лорана по степеням z.

Решение. Пусть $|a|<|b|$. Тогда данная функция может быть разложена в ряд Лорана в кольцах:

I) $|a|<|z|<|b|$, II) $0<|z|<|a|$, III) $|b|<|z|<\infty$,

где она является аналитической.

Представим данную функцию в виде

$$f\ \ z\ =\frac{\alpha z+\beta}{z\ \ z-a\ \ \ z-b}=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-b}+\frac{C}{z}.$$

I. Дробь $\dfrac{A}{z-a}$ разлагается вне круга $k:|z|>|a|$ по степеням z с отрицательными показателями, т.е.

$$\frac{A}{z-a}=\frac{A}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{a}{z}}=\frac{A}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n, \text{ где } \left|\frac{a}{z}\right|<1\Rightarrow|z|>|a|.$$

Дробь $\dfrac{B}{z-b}$ разлагается внутри круга $k_1:|z|<|b|$ по степеням z с положительными показателями, т.е. $|z|<|b|$

$$\frac{B}{z-b}=\frac{B}{-b}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{b}}=-\frac{B}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n, \text{ где } \left|\frac{z}{b}\right|<1 \Rightarrow |z|<|b|.$$

Итак, $\dfrac{\alpha z+\beta}{z\ \ z-a\ \ z-b}=A\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{z^{n+1}}-B\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{b^{n+1}}+\dfrac{C}{z}$, где $|a|<|z|<|b|$.

II. Дроби $\dfrac{A}{z-a}$ и $\dfrac{B}{z-b}$ разложим в ряд по степеням z с положительными показателями внутри круга $|z|<|a|$: $\dfrac{A}{z-a}=$

$$=-\frac{A}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=-\frac{A}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n, \text{ где } |z|<|a|;\ \frac{B}{z-b}=-\frac{B}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n, .$$

Итак, $f\ \ z\ =-\dfrac{A}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{a}\right)^n-\dfrac{B}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{b}\right)^n+\dfrac{C}{z}$, где $0<|z|<|a|$.

III. Дроби $\dfrac{A}{z-a}$ и $\dfrac{B}{z-b}$ разложим по степеням z с отрицательными показателями, т.е.

$$\frac{A}{z-a}=\frac{A}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n, \text{ где } |z|>|a|;\ \frac{B}{z-b}=\frac{B}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^n, \text{ где } |z|>|b|.$$

Итак, $f\ \ z\ =A\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{z^{n+1}}+B\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{b^n}{z^{n+1}}+\dfrac{C}{z}$, $|z|>|b|$.

Задача 11. Найти все лорановские разложения $f\ \ z$ по степеням $z-z_0$, если $f\ \ z\ =\dfrac{z+3}{z\ \ z-3}$, $z_0=1-i$.

Решение. Рассмотрим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $|z_0| < |z - z_0| < |z_0 - 3|$, т.е. $\sqrt{2} < |z - 1 + i| < \sqrt{5}$.

Представим данную функцию $f(z)$ в виде:

$$f(z) = \frac{z+3}{z(z-3)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-3} = \frac{A(z-3) + Bz}{z(z-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z + 3 = (A+B)z - 3A,\ A = -1,\ B = 2.$$

Таким образом, $f(z) = -\dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{z-3}$.

Дробь $-\dfrac{1}{z}$ разложим по степеням $z - z_0$ с отрицательными показателями вне круга $|z - z_0| > |z_0|$, т.е.

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{z - z_0 + z_0} = -\frac{1}{(z - z_0)\left(1 + \dfrac{z_0}{z - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z_0^n}{(z - z_0)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1-i)^n}{(z - 1 + i)^{n+1}}, \qquad \text{где } |z - 1 + i| > \sqrt{2}.$$

Дробь $\dfrac{2}{z-3}$ разложим по степеням $z - z_0$ с положительными показателями внутри круга $k: |z - z_0| < |z_0 - 3|$, т.е.

$$\frac{2}{z-3} = \frac{2}{z - z_0 + z_0 - 3} = \frac{2}{z_0 - 3} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{z - z_0}{z_0 - 3}} =$$

$$\frac{2}{z_0 - 3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - z_0)^n}{(z_0 - 3)^n} =$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1+i)^n}{(2+i)^{n+1}}, \text{ где } \left|\frac{z-z_0}{z_0-3}\right|<1 \Rightarrow |z-z_0|<|z_0-3|, \text{ или}$$

$|z-1+i|<\sqrt{5}$.

Итак, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-i)^n}{(z-1+i)^{n+1}}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1+i)^n}{(2+i)^{n+1}}$,

где $\sqrt{2}<|z-1+i|<\sqrt{5}$.

Остальные случаи разложения данной функции в ряд Лорана предлагается рассмотреть самостоятельно.

Для разложения функции в ряд Лорана иногда используют готовые разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

Задача 12. Функцию $f(z)=z^4\cdot e^{\frac{1}{z}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$.

Решение. Функция $f(z)$ является аналитической в кольце $0<|z|<\infty$. Следовательно, она разложима в ряд Лорана. Воспользуемся разложением показательной функции e^{ξ} в ряд Тейлора в окрестности точки $\xi_0=0$:

$$e^{\xi}=1+\xi+\frac{\xi^2}{2!}+\ldots+\frac{\xi^n}{n!}+\ldots.$$

и положим $\xi=\frac{1}{z}$:

$$f(z)=z^4\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{5!z^5}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots\right)=$$

$$=z^4+z^3+\frac{z^2}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!z}+\ldots+\frac{1}{n!z^{n-4}}+\ldots.$$

В силу единственности ряда Лорана полученное разложение функции $f \quad z$ по степеням z является рядом Лорана для функции $f \quad z \ = z^4 e^{\frac{1}{z}}$ в кольце $0<|z|<\infty$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти область сходимости следующих рядов:

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n(z-5+3i)^n})$; 1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$;

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}+\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n})$.

Ответ: 1.1. $|z-5+3i|>\frac{1}{3}$, 1.2. Расходится во всей плоскости, 1.3. Кольцо $\frac{1}{2}<|z-1|<3$.

Задача 2. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\sin(2z+i)$ по степеням z. Указать область сходимости полученного разложения.

Ответ: $\mathrm{ch}1\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2z)^{2n-1}}{(2n-1)!}+i\,\mathrm{sh}1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!}$,

сходится во всей плоскости.

Задача 3. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\frac{z+1}{2z^2+4z-5}$ в окрестности точки $z_0=0$. Указать область сходимости полученного ряда.

Ответ: $-\frac{1}{5}-\frac{9}{25}z-\frac{41}{125}z^2-\ldots$, сходится при $|z|<1$.

Задача 4. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{z+1}{z^2-z}$ в кольце $0<|z-1|<1$.

Ответ: $\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n$.

Задача 5. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+8}$ по степеням $(z-2)$. Указать область сходимости.

Ответ: $\sum_{n=-1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(z-2)^n}{6^{n+2}}$, $0<|z-2|<6$.

Задача 6. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-8}$ в кольце $2<|z|<4$.

Ответ: $\dfrac{1}{6}(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}z^n}{4^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^n})$.

Задача 7. Рассмотреть различные разложения в ряд Лорана функции $f(z)=\dfrac{3z^2+1}{z(z^2+1)}$ выбрав $z_0=0$.

Ответ: 1) в кольце $0<|z|<1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n 2z^{2n+2}}{z}$;

2) в кольце $1<|z|<\infty$: $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}+(-1)^n 2}{z^{2n+1}}$.

Задача 8. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{4z-3}{3z^2-5z+2}$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z_0=\infty$.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^{n+1}+2^n}{3^{n+1}z^{n+1}}$, $|z|>1$.

Задача 9. Разложить функцию $f(z)=e^{\frac{2z+1}{z-3}}$ в окрестности $z_0=3$, указать область сходимости полученного разложения.

Ответ: $e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n!(z-3)^n},\ 0<|z-3|<\infty$.

§6. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. Изолированные особые точки

Точка, в которой нарушается аналитичность функции $f(z)$, называется **особой**.

Точка z_0 называется **изолированной особой** точкой, если существует такая окрестность $0<|z-z_0|<R$, в которой $f(z)$ аналитична.

Различают три типа изолированных особых точек в зависимости от поведения функции в их окрестности:

1.Точка z_0 называется **устранимой** особой точкой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

2.Точка z_0 называется **существенно особой**, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

3.Точка z_0 называется **полюсом**, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

Разложение функции в ряд Лорана, в окрестности изолированной особой точки, имеет различный вид в зависимости от характера особой точки.

Теорема. Для того, чтобы z_0 была устранимой особой точкой необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана не содержал главной части.

Для того, чтобы z_0 была полюсом необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана содержала лишь конечное число членов

$$f(z)=\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{C_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n .$$

При этом номер старшей отрицательной степени совпадает с порядком полюса.

Для того чтобы z_0 была существенно особой точкой необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана содержала бесконечно много членов.

Для успешного решения задач необходимо помнить разложение в ряд некоторых основных элементарных функций (стр.48).

Для определения полюса и его порядка полезно следующее

Замечание. Пусть $f(z)=\dfrac{A(z)}{B(z)}$, где $A(z)$ и $B(z)$ - аналитические функции, причем z_0 является нулем $B(z)$ кратности n, а $A(z_0)\neq 0$. Тогда z_0- полюс кратности n для функции $f(z)$.

Задача 1. Найти особые точки функции

$$f(z)=\frac{e^z}{(z^2+1)(z-i)z^3}.$$

Решение. В нашем случае $A(z)=e^z$, $B(z)=(z^2+1)(z-i)z^3$- аналитические функции во всей комплексной плоскости. Найдем нули знаменателя: $z_1=i,\ z_2=-i,\ z_3=0$. Запишем знаменатель в виде произведения линейных множителей $B(z)=(z-i)^2(z+i)z^3$. Так как $A(i)\neq 0,\ A(-i)\neq 0,\ A(0)\neq 0$, то $z_1=i$ - полюс кратности 2, $z_2=-i$- полюс кратности 1 (простой полюс), $z_3=0$- полюс кратности 3.

Задача 2. Найти все особые точки функций $f\ \ z$, определить их тип.

2.1. $f\ \ z\ =\dfrac{e^z-1}{z}$. 2.2. $f\ \ z\ =\dfrac{\sin z}{z+2\ ^3\cdot z^2}$. 2.3. $f\ \ z\ =e^{\frac{1}{z-1}}$.

Решение. 2.1. Функцию $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$ разложим в ряд по степеням z:

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots-1\right)=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots,$$

т.е. в окрестности изолированной особой точки $z_0=0$. Так как полученный ряд не содержит степеней z с отрицательными показателями, то точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой.

2.2. Функция $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z+2)^3\cdot z^2}$ имеет две изолированные особые точки $z_1=-2$ и $z_2=0$. Определим их тип. Пусть $z_1=-2$, представим функцию в виде $f(z)=\dfrac{\phi(z)}{(z+2)^3}$, где $\phi(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$, $\phi(-2)\neq 0$.Тогда согласно теореме 1 $z_1=-2$ есть полюс порядка $n=3$.

Пусть $z_2=0$, представим функцию в виде $f(z)=\dfrac{\phi(z)}{\psi(z)}$, где $\phi(z)=\sin z$, причем $\phi(0)=0$, а $\psi(z)=(z+2)^3 z^2$, причем $\psi(0)=0$ и $m=2$.

Для $\phi(z)=\sin z$ имеем: $\psi'(z)=\cos z$ и

$\psi'(0)=\cos 0=1\neq 0,$ откуда следует, что k=1, т.е.

$\phi(z)=z\cdot\phi_1(z)$ и $\phi_1(0)\neq 0$.

Следовательно, точка $z_2=0$ есть полюс порядка $n=2-1=1$, т.е. простой полюс.

2.3. Функция $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ имеет изолированную особую точку $z_0 = 1$, в окрестности которой разложение ее в ряд имеет вид:

$$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \ldots + \frac{1}{n!(z-1)^n} + \ldots \qquad .$$

Этот ряд содержит бесконечное множество степеней $z-1$ с отрицательными показателями; следовательно, $z=1$ – существенно особая точка.

Бесконечно удаленную точку $z = \infty$ называют изолированной особой точкой функции $f(z)$, если в некоторой ее окрестности (т.е. вне круга с центром в точке $z_0 = 0$ достаточно большого радиуса) нет других особых точек функции $f(z)$. Для изучения поведения функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ полагают $z' = \frac{1}{z}$. Тогда окрестность точки $z = \infty$ перейдет в окрестность точки $z' = 0$ и $f(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \phi(z')$. Если $z' = 0$ является устранимой, полюсом или существенно особой точкой для функции ϕ, то $z = \infty$ считают, соответственно, устранимой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$.

Можно показать, что точка $z = \infty$ будет устранимой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана для $f(z)$ в этой точки окрестности не содержит степеней z с положительными показателями, содержит их в конечном числе или бесконечное множество соответственно.

Задача 3. Исследовать поведение функции $f(z)=\dfrac{z}{4-z^3}$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Решение. Введем переменную $z'=\dfrac{1}{z}$. Тогда

$$f(z)=\frac{z}{4-z^3}=\frac{\frac{1}{z'}}{4-\frac{1}{(z')^3}}=\frac{(z')^2}{4(z')^3-1}=\phi(z').$$

Так как $\phi(z')$ ограничена в окрестности точки $z'=0$, $z'=0$ является устранимой особой точкой для $\phi(z')$, то и точка $z=\infty$ является также устранимой особой точкой для функции $f(z)$.

Задача 4. Исследовать поведение функции $f(z)=z^2\cdot e^{\frac{2}{z}}$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Решение. Разложим данную функцию в ряд Лорана:

$$f(z)=z^2\cdot e^{\frac{2}{z}}=z^2+\frac{2}{z\cdot 1!}z^2+\left(\frac{2}{z}\right)^2\frac{1}{2!}z^2+\left(\frac{2}{z}\right)^3\frac{1}{3!}z^2+\ldots=$$

$$=z^2+2z+2+\frac{2^3}{3!z}+\ldots.$$

Это разложение содержит конечное число степеней z с положительными показателями, причем наивысший показатель степени z равен 2. Поэтому точка $z=\infty$ является полюсом второго порядка для данной функции $f(z)$.

6.2.Вычеты

Вычетом функции $f(z)$ в особой точке z_0 называется число, равное коэффициенту C_{-1} при первой отрицательной степени в лорановском разложении (1).

Заметим, что в устранимой особой точке вычет всегда равен нулю, так как ряд Лорана содержит только правильную часть.

Для определения вычета в полюсе можно получить более удобные формулы.

Пусть z_0 - полюс кратности n, тогда

$$C_{-1} = \operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]. \qquad (4)$$

В частности, если z_0 - полюс первой кратности (простой полюс), получаем

$$C_{-1} = \operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]. \qquad (5)$$

Если $f(z) = \dfrac{A(z)}{B(z)}$, где $A(z)$ и $B(z)$ - аналитические функции и z_0 - простой полюс $f(z)$, то из формулы (5) легко получить

$$C_{-1} = \operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{A(z_0)}{B'(z_0)}. \qquad (6)$$

Действительно,

$$C_{-1} = \operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{A(z)}{B(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{A(z)}{(B(z) - B(z_0))/(z - z_0)} =$$

$$= \frac{A(z_0)}{B'(z_0)}.$$

Задача 1. Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-1)(z+2)}$.

Решение. Для $f(z)$ точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -2$ являются простыми полюсами. Для нахождения вычетов в этих точках воспользуемся формулой (6)

$$A(z) = \cos z,\ B(z) = (z-1)(z+2),\ B'(z) = 2z + 1.$$

$$\operatorname*{Res}_{1} f(z)=\frac{\cos 1}{3},\ \operatorname*{Res}_{-2} f(z)=\frac{\cos 2}{-3}.$$

Задача 2. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{2z^3+1}{(z+1)^3(z-4)}$ относительно всех полюсов.

Решение. Данная функция имеет простой полюс $z=4$ и полюс порядка $m=3$ в точке $z=-1$. Воспользуемся формулой (16):

$$\operatorname*{res}_{z=4} f(z)=\lim_{z\to 4}\frac{(2z^3+1)(z-4)}{(z+1)^3(z-4)}=\lim_{z\to 4}\frac{2z^3+1}{(z+1)^3}=\frac{2\cdot 4^3+1}{5^3}=\frac{129}{125}.$$

Используя формулу (18), получаем при $m=3$:

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{2z^3+1}{(z+1)^3(z-4)}(z+1)^3\right]=$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left(\frac{2z^3+1}{z-4}\right)''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{4z^3-24z^2+96z+2}{(z-4)^3}=\frac{61}{125}.$$

Задача 3. Найти вычет функции $f(z)$ относительно изолированных особых точек $f(z)=\dfrac{\cos\frac{2}{z-2}+1}{z-2}$.

Решение. Функция $f(z)$ имеет изолированную особую точку $z_0=2$. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $0<|z-2|<\infty$, для чего используем разложение функции $\cos\xi$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\xi_0=0$:

$$\cos\xi=1-\frac{\xi^2}{2!}+\frac{\xi^4}{4!}-\ldots \text{ и положим } \xi=\frac{1}{z-2}:$$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}\cdot\left(1-\frac{1}{2!\,(z-2)^2}+\frac{1}{4!\,(z-2)^4}-\ldots+1\right)=$$

$$=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{2!\,(z-2)^3}+\frac{1}{4!\,(z-2)^5}-\ldots\,.$$

В силу единственности ряда Лорана, полученное разложение функции $f(z)$ по степеням $z-2$ является рядом Лорана для данной функции в кольце $0<|z-2|<\infty$. Так как этот ряд Лорана содержит бесконечное число степеней с отрицательными показателями, то точка $z_0=2$ является существенно особой точкой. Следовательно,

$$\underset{z=2}{res}\, f(z)=C_{-1}=2\,.$$

Задача 4. Найти вычет функции $f(z)$ относительно изолированных особых точек $f(z)=\dfrac{\sin 2z-z}{z}$.

Решение. Функция $f(z)=\dfrac{\sin 2z-z}{z}$ имеет изолированную особую точку $z_0=0$. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $0<|z|<\infty$, для чего используем разложение функции $\sin\xi$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\xi_0=0$:

$\sin\xi=\xi-\dfrac{\xi^3}{3!}+\dfrac{\xi^5}{5!}-\ldots$ и положим $\xi=2z$:

$$f(z)=\left(2z-\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^5}{5!}-\ldots-z\right)\frac{1}{z}=$$

$$=1-\frac{2^3 z^2}{3!}+\frac{2^5 z^4}{5!}-\ldots.$$

В силу единственности ряда Лорана, полученное разложение функции $f\ \ z$ по степеням z является рядом Лорана для данной функции в кольце $0<|z|<\infty$. Так как этот ряд не содержит степеней с отрицательными показателями, то точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой. Следовательно, $\underset{z=0}{res} f\ \ z\ =0$.

6.3. Приложение теории вычетов

Теория вычетов широко используют для вычисления:

а) контурных интегралов;

б) определенных интегралов.

а) Вычисление контурных интегралов основано на применении двух теорем о вычетах.

Первая теорема о вычетах. Пусть $f(z)$ - аналитическая функция в области D, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих в этой области, и пусть γ - замкнутый контур, охватывающий точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\mathrm{Res}} f(z). \tag{7}$$

Вторая теорема о вычетах. Если $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ и $z_n=\infty$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\mathrm{Res}} f(z) = 0.$$

б) Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$, где R- символ рациональной функции, с помощью замены $z=e^{ix}$ приводятся к контурным интегралам от рациональных относительно z функций.

Выражаем синус и косинус по формулам Эйлера и делаем замену $e^{ix} = z$. Получим: $\sin x = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos x = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$. Подставляя эти выражения в подынтегральную функцию, получим $R\left(\dfrac{z - z^{-1}}{2i}, \dfrac{z + z^{-1}}{2}\right) = F(z)$ – рациональную функцию. Из $e^{ix} = z$ находим $dz = ie^{ix}dx$ и $dx = \dfrac{1}{iz}dz$. Так как $x \in [0, 2\pi]$, то точка $z = e^{ix}$ описывает единичную окружность $C: |z| = 1$.

Следовательно, $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx = \oint\limits_{|z|=1} F(z)\dfrac{dz}{iz}$.

Последний интеграл по замкнутому контуру можно вычислить с помощью основной теоремы Коши

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx = \oint\limits_{|z|=1} F(z)\frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{|z|<1} \operatorname{Res} \frac{F(z)}{iz}.$$

в) Интеграл вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Лемма Жордана. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k $(k = 1, \dots, n)$, и не имеет особых точек на действительной оси. Если $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z) = 0$, то $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)\,dz = 0$, где C_R – полуокружность с центром в начале координат и радиусом R, охватывающая все особые точки в верхней полуплоскости.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ – функция, удовлетворяющая условиям леммы Жордана. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \tag{8}$$

где z_k – полюсы функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Замечание. Формула (8) имеет место и в том случае, когда функция $f(z)=e^{i\alpha z}F(z)$, где $\alpha>0$, а функция $F(z)$ аналитична на действительной оси, в верхней полуплоскости имеет лишь конечное число особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$ и $\lim\limits_{z\to\infty} F(z)=0$.

г) Интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos tx\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin tx\,dx$

Теорема. Пусть $f(x)$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа полюсов z_k $(k=1,...,n)$, и $f(z)\rightrightarrows 0$ при $|z|\to\infty$ равномерно относительно $\arg z$. Тогда при $t>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos tx\,dx = 2\pi \operatorname{Re}\left(i\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{itz}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin tx\,dx = 2\pi \operatorname{Im}\left(i\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)e^{itz}\right),$$

где z_k – полюса функции $f(z)$ в верхней полуплоскости, $k=1,...,n$.

Решение типовых задач

Задача 1. Найти особые точки $f(z)$ и определить их характер: а) $f(z)=\frac{\sin z}{z}$; б) $f(z)=\cos\frac{1}{z}$.

Решение. Для данных функций особой точкой является $z_0=0$. Для определения характера этой точки воспользуемся разложениями

а) $\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}...+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+...)=$

$=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}...+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+...$.

Разложение функции $\frac{\sin z}{z}$ в окрестности точки $z_0=0$ содержит только правильную часть. Следовательно, $z_0=0$ является для данной функции устранимой особой точкой.

б) $\cos\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}+...+(-1)^n\frac{1}{(2n)!z^{2n}}+...$.

В окрестности $z_0=0$ главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много членов. Следовательно, для функции $\cos\frac{1}{z}$ точка $z_0=0$ является существенно особой.

Задача 2. Определить изолированные особые точки и указать их тип для следующих функций:

а) $f(z)=\frac{z-2}{z^2(z^2+1)}$; б) $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^3}$; в) $f(z)=\cos\frac{1}{1-z}$.

Решение. а) Числитель и знаменатель функции $f(z)=\frac{z-2}{z^2(z^2+1)}$ являются аналитическими функциями во всей плоскости z, причем знаменатель $z^2(z^2+1)=0$ при

$z_1 = 0,\ z_2 = i,\ z_3 = -i$, числитель же в этих точках отличен от нуля. Следовательно, точки $z_1 = 0,\ z_2 = i,\ z_3 = -i$ являются изолированными особыми точками данной функции типа полюсов. Так как $z_1 = 0$ является нулем знаменателя кратности 2, то для исходной функции- это полюс 2-го порядка. Аналогично, $z_2 = i,\ z_3 = -i$ простые полюсы данной функции.

б) Функции $z - \sin z$ и z^3 являются аналитическими во всей плоскости, а их отношение $\dfrac{z - \sin z}{z^3}$ аналитично во всей плоскости, кроме точки $z = 0$, в которой знаменатель обращается в нуль. Значит, точка $z = 0$ является изолированной особой точкой. Для выяснения характера этой особенности разложим данную функцию в окрестности $z = 0$ в ряд Лорана:

$$\frac{z - \sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\sin z = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-2}}{(2n+1)!}.$$

В ряде Лорана все члены главной части равны нулю, то есть точка $z = 0$ устранимая особая точка данной функции.

в) Функция $f(z) = \cos\dfrac{1}{1-z}$ имеет единственную особую точку $z = 1$. Разложим $\cos\dfrac{1}{1-z}$ в окрестности $z = 1$ в ряд Лорана

$$f(z) = \cos\frac{1}{1-z} = 1 - \frac{1}{2!(1-z)^2} + \frac{1}{4!(1-z)^4} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!(1-z)^{2n}} + \ldots.$$

Точка $z = 1$ является существенно особой точкой, так как полученное разложение содержит в главной части бесконечное множество членов.

Задача 3. Исследовать характер бесконечно удаленной точки для следующих функций:

а) $f(z)=\dfrac{z+2}{z(z-1)^2}$; б) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$; в) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}+2z^2-5.$

Решение. а) Изолированные особые точки данной функции $z_1=0,\ z_2=1.$ Значит, область $|z|>1$ является окрестностью точки $z=\infty$, где нет особых точек.

Разложим в $|z|>1$ функцию в ряд Лорана по степеням z, для этого произведем деление $z+2$ на z^3-2z^2+z

$$f(z)=\frac{z+2}{z(z-1)^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\frac{10}{z^5}+\ldots\ .$$

Очевидно, $z=\infty$ является устранимой особой точкой (в разложении отсутствуют положительные степени z). К этому выводу можно прийти иначе, вычислив предел $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z+2}{z(z-1)^2}=0.$ То, что этот предел конечен, говорит о том, что $f(z)$ имеет в $z=\infty$ устранимую особенность.

б) Окрестностью точки $z=\infty$, где не содержится других особых точек данной функции, является область $0<|z|<\infty.$ Представим функцию $f(z)$ рядом Лорана в этой области по степеням z

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\frac{z^6}{8!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n}}{(2n+2)!}.$$

Так как полученное разложение содержит бесчисленное множество положительных степеней z, то заключаем, что $z=\infty$ существенно особая точка данной функции.

в) В области $0<|z|<\infty$ разложим данную функцию по степеням z:

$$f(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots+2z^2-5=$$

$$=2z^2-5+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}.$$

Очевидно, что $z=\infty$ - полюс второго порядка.

Задача 4. Найти вычет функции $f(z)=\cos\dfrac{3z+4}{z+1}$ в точке $z_0=-1$.

Решение. Воспользуемся результатом задачи 7 (5.2). Коэффициент $C_{-1}=-\sin 3$. Следовательно, $\operatorname*{Res}_{-1} f(z)=-\sin 3$.

Задача 5. Найти вычет функции $f(z)=e^{\frac{2z+1}{z-3}}$ в точке $z_0=3$.

Решение. Запишем ряд Лорана для данной функции, воспользовавшись разложением в ряд функции e^z (стр.41)

$$f(z)=e^{\frac{2z+1}{z-3}}=e^{\frac{2(z-3)+7}{z-3}}=e^{2+\frac{7}{z-3}}=e^2\cdot e^{\frac{7}{z-3}}=e^2(1+\frac{7}{z-3}+$$

$$+\frac{7^2}{2!(z-3)^2}+\ldots).$$

Находим коэффициент при первой отрицательной степени

$$C_{-1}=\operatorname*{Res}_{3} f(z)=7e^2.$$

Задача 6. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+i)^2}$.

Решение. Для $f(z)$ точка $z_1=-1$- полюс первой кратности; $z_2=-i$ - полюс второй кратности.

Вычет $f(z)$ в точке z_1 найдем по формуле (5)

$$\operatorname*{Res}_{-1} f(z)=\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{z}{(z+1)(z+i)^2}=\lim_{z\to-1}\frac{z}{(z+i)^2}=\frac{-1}{(-1+i)^2}=$$

$$= -\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2(1+i)^2} = -\frac{(1+i)^2}{4} = -\frac{i}{2}.$$

Найдем вычет $f(z)$ в точке z_2 по формуле (4)

$$\operatorname*{Res}_{-i} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}[(z+i)^2\frac{z}{(z+1)(z+i)^2}] = \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}[\frac{z}{(z+1)}] =$$

$$= \lim_{z\to -i}\frac{z+1-z}{(z+1)^2} = \lim_{z\to -i}\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{(1-i)^2} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2(1+i)^2} = \frac{2i}{4} = \frac{i}{2}.$$

Задача 7. Вычислить вычеты в особых точках следующих функций:

а) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2}z^2}$; б) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z}$.

Решение. а) Особыми точками функции $\dfrac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2}z^2}$ являются точки $z_1 = 0, z_2 = \dfrac{\pi}{2}.$ Так как $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})} = \infty$, то $z_1 = 0$ является полюсом (второго порядка). Следовательно, применяя формулу вычисления вычета в полюсе порядка n:

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)],$$

получим:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(\frac{z^2\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})}) = \lim_{z\to 0}\frac{(z-\frac{\pi}{2})\sin z - \cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^2} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

Точка $z_2 = \frac{\pi}{2}$ является устранимой особой точкой данной функции, так как $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})} = \lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(z-\frac{\pi}{2})}{z^2(z-\frac{\pi}{2})} = \frac{4}{\pi^2}$ - конечное число. Следовательно, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = 0.$

б) Данная функция имеет особую точку $z=0$. Разложим ее в окрестности $z=0$ в ряд Лорана:

$$f(z) = z^2 \sin 1z = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!z^{2n-1}} + \ldots\right) =$$

$$= z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!}z^2 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!z^{2n-3}} + \ldots .$$

Очевидно, $z=0$ существенно особая точка данной функции и $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$

Задача 8. Вычислить вычеты относительно бесконечно удаленной точки функций:

а) $f(z) = \frac{z^6+5z^5-2z^4}{z^5+3}$; б) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+4}$.

Решение. а) Особыми точками данной функции являются корни уравнения $z^5+3=0$. Так как они лежат на окружности $|z| = \sqrt[5]{3}$, то окрестностью бесконечно удаленной точки, где данная функция аналитична, является область $|z| > \sqrt[5]{3}$. В этой области разложим данную функцию в ряд Лорана по степеням z разделив числитель на знаменатель:

$$f(z) = \frac{z^6+5z^5-2z^4}{z^5+3} = z + 5 - \frac{2}{z} - \frac{3}{z^4} - \frac{9}{z^5} - \ldots .$$

Так как $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}$, где C_{-1}- коэффициент при $\frac{1}{z}$, то $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 2$.

б) Точки $z_1 = 2i, z_2 = -2i$ являются простыми полюсами данной функции. Определим вычеты в этих точках:

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{\sin z}{z^2+4} \cdot (z-2i) = \frac{\sin 2i}{4i} = \frac{\operatorname{sh} 2}{4};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) = \lim_{z\to -2i} \frac{\sin z}{z^2+4} \cdot (z+2i) = \frac{\sin(-2i)}{-4i} = \frac{\operatorname{sh} 2}{4}.$$

Тогда $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -(\operatorname*{Res}_{2i} f(z) + \operatorname*{Res}_{-2i} f(z)) = -\frac{\operatorname{sh} 2}{2}$.

Задача 9. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z} e^{\frac{z-1}{z}} dz$, где γ- окружность $|z| = 1$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{z} e^{\frac{z-1}{z}}$ имеет особую точку $z = 0$, которая содержится внутри $|z| = 1$, поэтому согласно основной теореме о вычетах:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z} e^{\frac{z-1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{0} f(z).$$

Разложим $f(z) = \frac{1}{z} e^{\frac{z-1}{z}}$ в окрестности $z = 0$ в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{1}{z} e^{\frac{z-1}{z}} = e \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-\frac{1}{z}} = \frac{e}{z}(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} z^2 - \frac{1}{3! z^3} + \ldots) =$$

$$= \frac{e}{z} - \frac{e}{z^2} + \frac{e}{2! z^3} - \frac{e}{3! z^4} + \ldots,$$

Отсюда $\operatorname*{Res}_{0} f(z) = e$. Следовательно, $\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z} e^{\frac{z-1}{z}} dz = e2\pi i.$

Задача 10. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z-1)(z^5-32)}$, где γ:

а) окружность $|z| = \frac{3}{2}$; б) окружность $|z| = 3$.

Решение. Особыми точками подынтегральной функции являются корни уравнения $z^5 = 32$ (эти точки лежат на окружности $|z| = 2$), $z = 0$ и $z = 1$.

а) Внутри контура $|z| = \frac{3}{2}$ лежат $z = 0$ и $z = 1$. Значит,

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z-1)(z^5-32)} = 2\pi i(\operatorname*{Res}_{0} f(z) + \operatorname*{Res}_{1} f(z)).$$

Так как $z = 0$ и $z = 1$ - простые полюсы, то

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z(z-1)(z^5-32)} \cdot z = \frac{1}{32},;$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z(z-1)(z^5-32)} \cdot (z-1) = -\frac{1}{31},$$

Тогда $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z-1)(z^5-32)} = 2\pi i(\frac{1}{32} - \frac{1}{31}) = -\frac{\pi i}{496}.$

б) Внутри контура $|z| = 3$ содержатся все особые точки подынтегральной функции. Воспользуемся тем, что

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z-1)(z^5-32)} = -2\pi i \operatorname*{Res}_{\infty} f(z).$$

Учитывая, что в $|z| > 2$, функция $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z^5-32)}$ представима по степеням z в виде:

$$\frac{1}{z(z-1)(z^5-32)} = \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^9} + \ldots \text{ , получим}$$

$\operatorname*{Re}_{\infty} s\, f(z) = 0,$ то есть $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z-1)(z^5-32)} = -2\pi i \cdot 0 = 0.$

Задача 11. Вычислить $\oint\limits_{C} \frac{e^z+2}{z^2+2z} dz$, где C – окружность $|z| = 3$.

Решение. Подынтегральная функция $f \;\; z \;\; = \frac{e^z+2}{z \;\; z+2}$ имеет два простых полюса $z_1 = 0$ и $z_2 = -2$, которые расположены внутри круга $|z| < 3$. Согласно теореме Коши, получаем:

$$\oint\limits_{C} \frac{e^z+2}{z \;\; z+2} dz = 2\pi i \left[\operatorname*{res}_{z=0} f \;\; z \;\; + \operatorname*{res}_{z=2} f \;\; z \;\; \right].$$

Найдем вычеты:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f \;\; z \;\; = \left. \frac{e^z+2}{z+2} \right|_{z=0} = \frac{e^0+2}{0+2} = \frac{3}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f \;\; z \;\; = \left. \frac{e^z+2}{z} \right|_{z=-2} = \frac{2+e^{-2}}{-2}.$$

Итак, $\oint\limits_{C} \frac{e^z+2}{z^2+2z} dz = 2\pi i \left(\frac{3}{2} - \frac{2+e^{-2}}{2} \right) = \pi i \;\; 1-e^{-2} \;\; .$

Задача 12. Вычислить $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{7}} z^2 \cdot sh \frac{3}{2} dz$.

Решение. Подынтегральная функция $f \;\; z \;\; = z^2 sh \frac{3}{z}$ имеет изолированную особую точку $z_0 = 0$ внутри круга $|z| < \frac{1}{7}$. Для определения характера изолированной особой точки разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z| < \infty$. Воспользуемся разложением функции $sh\xi$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\xi_0 = 0$: $sh\xi = \xi + \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^5}{5!} + \frac{\xi^7}{7!} + \ldots$ и положим $\xi = \frac{3}{z}$:

$$f(z) = z^2\left(\frac{3}{z} + \frac{3^3}{3!z^3} + \frac{3^5}{5!z^5} + \ldots\right) = 3z + \frac{3^3}{3!z} + \frac{3^5}{5!z^3} + \ldots.$$

В силу единственности ряда Лорана, полученное разложение функции $f(z)$ по степеням z является рядом Лорана для данной функции в кольце $0 < |z| < \infty$. Так как главная часть этого ряда Лорана содержит бесконечное множество слагаемых, то точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой, поэтому $\underset{z=0}{res} f(z) = C_{-1} = \frac{3^3}{3!} = 4{,}5$.

Согласно теореме Коши получаем:

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{7}} z^2 \cdot sh\frac{3}{z} dz = 2\pi i \underset{z=0}{res} f(z) = 2\pi i \cdot 4{,}5 = 9\pi i.$$

Задача 13. Вычислить $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{2 - 3z^3 + 2z^5}{z^4} dz$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z) = \frac{2 - 3z^3 + 2z^5}{z^4}$

имеет изолированную особую точку $z_0=0$ внутри круга $|z|<\dfrac{1}{4}$. Так как $f(z)=\dfrac{\phi(z)}{\psi(z)}$, где $\phi(z)=2-3z^4+2z^5$, причем $\phi(0)=2\neq 0$, а $\psi(z)=z^4$, причем $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=0$, $\psi''(0)=0$, $\psi'''(0)=0$, $\psi^{IV}(0)=24\neq 0$, то $z_0=0$ есть полюс 4-го порядка. Следовательно, $\underset{0}{res}\, f(z)=\dfrac{1}{3!}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{d^3}{dz^3}\left(f(z)\cdot z^4\right)=-3$.

Согласно теореме Коши получаем:

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}}\frac{2-3z^3+2z^5}{z^4}dz=2\pi i\underset{z=0}{res}\, f(z)=2\pi i(-3)=-6\pi i.$$

Задача 14. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{(2z^2+1)\,dz}{(z-1)(z^2+1)}$.

Решение. Функция $f(z)=\dfrac{2z^2+1}{(z-1)(z^2+1)}$ имеет простые полюсы в точках $z_0=1$, $z_1=i$, $z_2=-i$. Внутри круга $|z-1|<1$ находится один полюс $z_0=1$ первого порядка, поэтому $\underset{z_0=1}{res}\, f(z)=\dfrac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)}$, где $\phi(z)=2z^2+1$, $\phi(1)=3\neq 0$ и $\psi(z)=(z-1)(z^2+1)$, $\psi'(z)=z^2+1+(z-1)\cdot 2z=3z^2-2z+1$, $\psi'(1)=4-2=2\neq 0$. Имеем, $\underset{z=1}{res}\, f(z)=\dfrac{\phi(1)}{\psi'(1)}=\dfrac{3}{2}$.

Следовательно, по теореме Коши:

$$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{2z^2+1}{(z-1)(z^2+1)}\,dz = 2\pi i\,\frac{3}{2} = 3\pi i\,.$$

Задача 15. Вычислить $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(2+\cos\phi)\,d\phi}{5+\sin\phi}$.

Решение. Пусть $e^{i\phi} = z$, тогда

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z},$$

$$\sin\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz},$$

$i\phi = \ln z$, $d\phi = \frac{dz}{iz}$; при $\phi \in [0, 2\pi]$ точка $z = e^{i\phi}$ описывает окружность $C : |z| = 1$. Следовательно,

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{2+\dfrac{z^2+1}{2z}}{5+\dfrac{z^2-1}{2i\,z}}\,\frac{dz}{iz} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2+4z+1}{(z^2+10iz-1)\,z}\,dz,$$

где $f(z) = \frac{z^2+4z+1}{z\,(z^2+10iz-1)}$.

Подынтегральная функция имеет три простых полюса:

$$z_1 = 0,\; z_{2,3} = -5i \pm \sqrt{-25+1} = -5i \pm \sqrt{24}i, \text{ где}$$

$$z_2 = (-5+\sqrt{24})\,i,\; z_3 = -(5+\sqrt{24})\,i,$$

$$|z_2| = |(\sqrt{24}-5)\,i| = |\sqrt{24}-5| < 1,$$

$$|z_3| = |-(5+\sqrt{24})\,i| = 5+\sqrt{24} > 1.$$

Итак, внутри единичной окружности C находятся два простых полюса:

$$z_1 = 0 \text{ и } z_2 = \;\sqrt{24} - 5\; i = \;2\sqrt{6} - 5\; i\,.$$

Найдем вычеты:

$$\underset{z=0}{res}\; f\;\; z\;\; = \frac{z^2 + 4z + 1}{z\;\; z^2 + 10iz - 1\;\;{}'}\Bigg|_{z=0} = \frac{z^2 + 4z + 1}{z^3 + 10iz^2 - z\;\;{}'}\Bigg|_{z=0} =$$

$$= \frac{z^2 + 4z + 1}{3z^2 + 20iz - 1}\Bigg|_{z=0} = \frac{1}{-1} = -1; \text{ аналогично,}$$

$$\underset{z=z_2}{res}\, f\;\; z\;\; = \frac{z^2 + 4z + 1}{3z^2 + 20iz - 1}\Bigg|_{z=z_2} = \frac{z_2^2 + 4z + 1}{3z_2^2 + 20iz_2 - 1}\Bigg|_{z=z_2} = \;1 - i\sqrt{6}\;\; .$$

Итак, $I = 2\pi i \cdot \;\; \underset{0}{res}\, f\;\; z\;\; + \underset{z_2}{res}\, f\;\; z\;\;\; =$

$$= 2\pi i\;\; -1 + 1 - i\sqrt{6}\;\; = 2\sqrt{6}\,\pi\,.$$

Задача 16. Вычислить $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4\cos x}$.

Решение. $$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4\cos x} = \left| \begin{array}{l} z = e^{ix},\; dz = ie^{ix}dx = izdx, \\ \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \end{array} \right| =$$

$$= -i \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 + 5z + 2} = \left| \begin{array}{l} 2z^2 + 5z + 2 = 0 \\ z_1 = -2,\;\; z_2 = -\frac{1}{2}. \end{array} \right| =$$

$$= -i \cdot 2\pi i \operatorname{Re} s f\;\; -1/2\;\; = 2\pi/3.$$

Задача 17. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. Введем в рассмотрение функцию $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}$, которая на действительной оси, то есть при $z=x$, совпадает с подынтегральной функцией $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^3}$. Функция $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}$ имеет в верхней полуплоскости полюс третьего порядка в точке $z=i$. Вычет $f(z)$ относительно этого полюса равен :

$$\operatorname*{Res}_{i} f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}(z-i)^3\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5}=-\frac{3i}{16}.$$

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}=2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right)=\frac{3\pi}{8}.$

Задача 18. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является мнимой частью функции $\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}$, значения которой совпадают со значениями на действительной оси функции $f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$. Функция $F(z)=\frac{z}{z^2-2z+10}$ имеет в верхней полуплоскости полюс 1-го порядка в точке $z_0=1+3i$ и $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$, то есть выполнены сформулированные в замечании условия, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx = 2\pi i \operatorname{Re}\underset{1+3i}{s}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10} = 2\pi i\frac{(1+3i)e^{i(1+3i)}}{2(1+3i-1)} =$$

$$= \frac{\pi}{3}e^{-3+i}(1+3i) = \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1 + i(3\cos 1 + \sin 1)).$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx = \frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos 1 - 3\sin 1).$$

Задача 19. Вычислить $I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin tx}{\pi\ \ x^2+4}dx$.

Решение. По условию, $f\ \ x\ = \frac{x}{\pi\ \ x^2+4}$, значит $f\ \ z\ = \frac{z}{\pi\ \ z^2+4}$. Функция $f\ \ z$ имеет простой полюс $z=2i$ в верхней полуплоскости. Поэтому на основании теоремы 2 получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin tx}{\pi\ \ x^2+4}dx = 2\pi \operatorname{Im}\ \ i\underset{z=2i}{res}\, f\ \ z\ \ e^{itz}\ \ =$$

$$= 2\pi \operatorname{Im}\left(i\left.\frac{z\,e^{itz}}{\pi\ \ z+i\cdot 2}\right|_{z=2i}\right) = 2\operatorname{Im}\left(\frac{i\cdot 2i\cdot e^{it\cdot 2i}}{4i}\right) = e^{-2t}.$$

Задача 20. Вычислить $I = \int_{0}^{\infty}\frac{x^2\cos 2x\,dx}{x^4+16}$.

Решение. По условию, $f\ \ x\ = \frac{x^2}{x^4+16}$ и $f\ \ z\ = \frac{z^2}{z^4+16}$.

Функция $f\ \ z$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Найдем полюсы $f(z)$ в верхней полуплоскости:

$$z^4+16=0, \quad z=\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16e^{\pi i}}=2\cdot e^{\frac{\pi+2\pi k}{4}i},\ k=0,1,2,3;$$

$$z_0=2\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}(1+i),\ \operatorname{Im} z_0=\sqrt{2}>0;$$

$$z_1=2\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}=\sqrt{2}(-1+i), \qquad \operatorname{Im} z_1=\sqrt{2}>0;$$

$$z_2=2\cdot e^{\frac{5\pi}{4}i}=\sqrt{2}(-1-i), \qquad \operatorname{Im} z_2=-\sqrt{2}<0;$$

$$z_3=2\cdot e^{\frac{7\pi}{4}i}=\sqrt{2}(1-i), \qquad \operatorname{Im} z_3=-\sqrt{2}<0.$$

Функция имеет простые полюсы z_0, z_1 в верхней полуплоскости, поэтому на основании теоремы 2 имеем:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos 2x}{x^4+16}dx=2\pi\operatorname{Re}\left(i\left(\operatorname*{res}_{z_0} f(z)e^{2zi}+\operatorname*{res}_{z_1} f(z)e^{2zi}\right)\right),$$

где $\operatorname*{res}_{z_0} f(z)e^{2zi}=\left.\dfrac{z^2e^{2zi}}{4z^3}\right|_{z=z_0}=\dfrac{e^{2z_0i}}{4z_0}$,

$$\operatorname*{res}_{z_1} f(z)e^{2zi}=\left.\frac{z^2e^{2zi}}{4z^3}\right|_{z=z_1}=\frac{e^{2z_1i}}{4z_1}.$$

Следовательно,

$$I=2\pi\operatorname{Re}\left(i\left(\frac{e^{2z_0i}}{4z_0}+\frac{e^{2z_1i}}{4z_1}\right)\right)=\frac{\pi e^{2\sqrt{2}}}{2}\left(\cos 2\sqrt{2}-\sin 2\sqrt{2}\right).$$

Задача 21. Вычислить $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x dx}{x^2+4}$.

Решение.

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xdx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}(2\pi i\operatorname*{Res}_{z=2i}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+4}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4e^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Определить характер изолированных особых точек функций:

1.1. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$; 1.2. $f(z)=z\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$

1.3. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-2}+\sin\dfrac{2+2\pi-\pi z}{2(z-2)}$.

Ответ: 1.1. $z=0$ -полюс четвертого порядка;

$z=-1$- простой полюс;

1.2. $z=0$ - существенно особая точка;

1.3. в) $z=2$ – устранимая точка.

Задача 2. Исследовать характер бесконечно удаленной точки для функций:

2.1. $f(z)=\cos\dfrac{z}{1-z}$; 2.2. $f(z)=\dfrac{z+2}{e^z}$;

2.3. $f(z)=1-z+2z^2+\sin\dfrac{1}{z}$.

Ответ: 2.1. $z=\infty$ - устранимая особая точка;

2.2. $z=\infty$ -существенно особая точка;

2.3. $z=\infty$ - полюс 2-го порядка.

Задача 3. Определить вычеты в особых точках функций:

3.1. $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^5}$; 3.2. $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$; 3.3. $f(z)=\operatorname{tg}z$.

Ответ: 3.1. $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=1$, $\operatorname*{Res}_{1} f(z)=-\dfrac{1}{2}$, $\operatorname*{Res}_{-1} f(z)=-\dfrac{1}{2}$;

3.2. $\operatorname*{Res}_{-1} f(z) = 2\sin 2$; 3.3. $\operatorname*{Res}_{\frac{\pi}{2}(2k+1)} f(z) = -1$.

Задача 4. Найти вычеты в бесконечно удаленной точке функций:

4.1. $f(z) = \dfrac{z^6 + 5z^3}{z^4 + 16}$; 4.2. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$; 4.3. $f(z) = z\cos z$.

Ответ: 4.1. $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = -5$; 4.2. $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = 0$;

4.3. $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = 1$.

Задача 5. Вычислить интегралы:

5.1. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{z+2}{e^z - 1z} dz$, где γ - окружность $|z-2| = 7$;

5.2. $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{\cos z}{(z-1)(z+2)} dz$;

5.3. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{zdz}{(z+1)(z+i)^2}$, где $\gamma: 4x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Ответ: 5.1.$12\pi i$; 5.2. $\dfrac{2}{3}\pi i(\cos 1 - \cos 2)$; 5.3. $-\pi$.

Задача 6. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{\cos 2z}{z^2+1} dz$ где γ - окружность $|z+i| = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2$.

Задача 7. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{z^5 + 5z^4 - z + 1}{z^5 + 2} dz$ где γ - окружность $|z| = 3$.

Ответ: $10\pi i$.

Задача 8. Вычислить интегралы

8.1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}$; 8.2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; 8.3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4x+13)^2}$;

8.4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; 8.5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$.

Ответ: 8.1. $\frac{\pi}{4}$; 8.2. $\frac{\pi}{3}$; 8.3. $-\frac{\pi}{27}$; 8.4. $\pi\sqrt{2}$;

8.5. $\frac{\pi}{2^{2n-2}}\frac{n(n+1)...(2n-2)}{(n-1)!}$.

Задача 9. Вычислить интегралы:

9.1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$; 9.2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2+x+1}dx$; 9.3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$

9.4. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx$.

Ответ: 9.1. $\frac{\pi e^{-4}}{2}(\sin 2+2\cos 2)$; 9.2. $\frac{\pi e^{-\sqrt{3}/2}}{2}(\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2})$;

9.3. $\pi e^{-2}\cos 2$; 9.4. $\frac{\pi}{6}e^{-3}$.

§7. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное (символическое) исчисление применяется для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, дифференциально-разностных уравнений и интегральных уравнений типа свертки, к которым приводятся задачи главным образом по переходным процессам линейных физических систем электротехники, радиотехники, импульсной техники, теории автоматического регулирования и других отраслей науки и техники.

Метод символического исчисления основан на том, что над оператором дифференцирования $\frac{d}{dt} = p$ и некоторыми функциями этого оператора производится определенная система действий. В этой системе действий дифференцирование функции $x = x(t)$ рассматривается как умножение оператора p на функцию $X = X(p)$ этого оператора $\frac{dx}{dt} = pX(p)$,

$\frac{d^2x}{dt^2} = p^2X(p),\ldots,\frac{d^nx}{dt^n} = p^nX(p)$, а интегрирование как деление на оператор p функции этого оператора $\int_0^t xdt = \frac{X(p)}{p}$, $\int_0^t dt\int_0^t f(t)dt = \frac{X(p)}{p^2},\ldots$.

7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1.Оригинал и изображение.

Оригиналом называется функция $f(t)$, определенная на всей числовой оси t и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $f(t)$ непрерывна во всей области определения, за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва I рода на каждом отрезке конечной длины;
2. $f(t) = 0$ при $t < 0$;
3. $f(t)$ при $t \to \infty$ возрастает не быстрее некоторой экспоненциальной функции, то есть существуют такие числа $M > 0,\ s_0 \geq 0$, что для всякого $t \geq 0$ выполняется неравенство $|f(t)| < Me^{s_0t}$, где наименьшее из чисел s_0, при котором выполняется неравенство, называется **показателем роста** оригинала.

Замечание 1. Оригинал $f(t)$ может принимать действительные значения и может быть комплексной функцией действительного переменного, то есть иметь вид $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$. Каждая из функций $f_1(t), f_2(t)$ должны удовлетворять условиям оригинала.

Замечание 2. В дальнейшем для краткости записи будем писать $y = f(t)$. Под этим будем понимать следующее:

$$y = \begin{cases} f(t), \text{ } \textit{если} \ \ t \geq 0; \\ 0, \text{ } \textit{если} \ \ t < 0. \end{cases}$$

Пример 1. Показать, что функция

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{ch}(5-2i)t, \text{ } \textit{если} \ \ t \geq 0; \\ 0, \text{ } \textit{если} \ \ t < 0 \end{cases}$$

является оригиналом.

Решение. 1) Функция $f(t)$ непрерывна для $\forall t \geq 0$,

2) она равна нулю при $\forall t < 0$,

3) $\operatorname{ch}(5-2i)t = \dfrac{e^{(5-2i)t} + e^{-(5-2i)t}}{2} = \dfrac{e^{5t} \cdot e^{-2it}}{2} + \dfrac{e^{-5t} \cdot e^{2it}}{2}$.

Оценим модуль этой функции

$$\left|\operatorname{ch}(5-2i)t\right| = \left|\frac{e^{5t} \cdot e^{-2it}}{2} + \frac{e^{-5t} \cdot e^{2it}}{2}\right| \leq \left|\frac{e^{5t} \cdot e^{-2it}}{2}\right| + \left|\frac{e^{-5t} \cdot e^{2it}}{2}\right| =$$

$$= \frac{e^{5t}}{2} + \frac{e^{-5t}}{2} < \frac{e^{5t}}{2} + \frac{e^{5t}}{2} = e^{5t}.$$

Таким образом, $M = 1; s_0 = 5$. Так как функция $f(t)$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к оригиналу, то она является оригиналом.

Пример 2. Функция $f(t) = \dfrac{1}{t-5}$ не является оригиналом, так как при $t = 5$ имеет разрыв второго рода.

Если $f(t)$ - оригинал, то, очевидно, $|f(t)|$ будет оригиналом с тем же показателем роста;

-линейная комбинация оригиналов есть оригинал;

-если $f(t)$ - оригинал, то $f(\alpha t)$ (α - положительное число), $tf(t)$, $f(t-\tau)$ (τ - действительное число), $e^{\lambda t} f(t)$ (λ - комплексное число), $\int_0^t f(u)du$ тоже будут оригиналами.

Изображением функции $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, которая определяется равенством

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \qquad (7.1)$$

Интеграл (7.1) называется **интегралом Лапласа** функции $f(t)$. Операция перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называется преобразованием Лапласа. Теория преобразования Лапласа называют операционным исчислением. Тот факт, что $f(t)$ и $F(p)$ относятся друг к другу как оригинал и изображение, записывают так: $f(t) \Leftrightarrow F(p)$ или $L[f(t)] = F(p)$; $F(p) \Leftrightarrow f(t)$.

Можно доказать, что при выполнении условий 1-3 для функции $f(t)$ несобственный интеграл $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ сходится абсолютно и равномерно при $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Упражнения. Проверить, какие из указанных функций являются функциями-оригиналами:

1. $f(t) = b^t \eta(t), b > 0, b \neq 1;$ 2. $f(t) = e^{(2+4i)t}\eta(t);$

3. $f(t) = \dfrac{1}{t-3}\eta(t);$ 4. $f(t) = t^2\eta(t);$

5. $f(t) = \operatorname{ch}(3-i)t\eta(t);$ 6. $f(t) = \operatorname{tg} t\eta(t);$

7. $f(t)=t^t\eta(t)$; 8. $f(t)=e^{-t}\cos t\eta(t)$;

9. $f(t)=e^{t^2}\eta(t)$; 10. $f(t)=e^{-t^2}\eta(t)$;

11. $f(t)=\dfrac{1}{t^2+2}\eta(t)$.

Ответ: 1.да; 2.да; 3. нет; 4. да; 5. да; 6. нет; 7. нет; 8. да; 9. нет; 10. да; 11.да.

2. Единичная функция Хевисайда и ее изображение.

Единичной функцией Хевисайда называется функция вида

$$\eta(t)=\begin{cases}1,\ \text{при}\ t\ge 0,\\ 0,\ \text{при}\ t<0.\end{cases}$$

График функции имеет вид

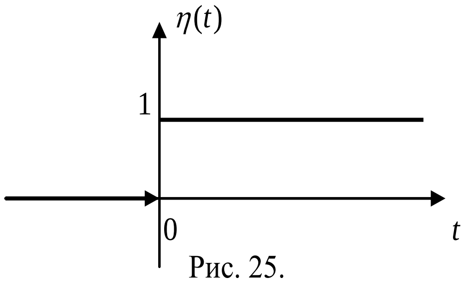


Рис. 25.

Любой оригинал $y=\begin{cases}f(t),\ \text{при}\ t\ge 0,\\ 0,\ \text{при}\ t<0\end{cases}$ при помощи единичной функции $\eta(t)$ может быть записан в виде $y=f(t)\eta(t)$. Легко показать, что $\eta(t)$ является оригиналом. Найдем его изображение. Для этого применим преобразование Лапласа

$$\eta(t)\Leftrightarrow\int_0^\infty \eta(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}dt=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-pt}dt=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^b=$$

$$= \lim_{b\to+\infty}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-pb}).$$

Найдем $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{e^{-pb}}{p}$. Так как $p = s + i\sigma,\ \operatorname{Re} p = s > s_0 \geq 0$, а $\left|e^{-ib\sigma}\right| = 1$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{e^{-pb}}{p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{e^{-sb}\cdot e^{-ib\sigma}}{p} = 0.$ Таким образом, $\eta(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p}.$

3. Некоторые теоремы об изображении.

Теорема 1 (о существовании изображения).

Всякий оригинал $f(t)$ имеет своим изображением функцию комплексного переменного $F(p)$, определенную в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0- показатель роста оригинала (рис.26).

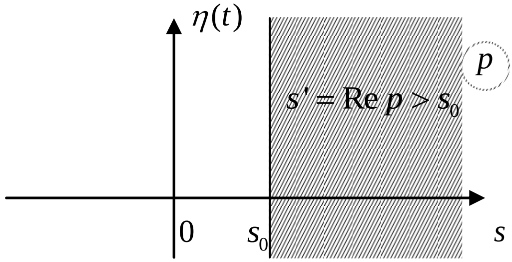


Рис.26.

Теорема 2 (о поведении изображения на бесконечности).

Если функция $F(p)$- изображение, то $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to+\infty} F(p) = 0.$

Для этой теоремы нет обратной, то есть из условия $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to+\infty} F(p) = 0.$ не следует, что $F(p)$-изображение.

Пример 1. Функции $F(p)=\sqrt{p}, F(p)=e^{p}, F(p)=p$ не стремятся к нулю при $\operatorname{Re} p \to +\infty$ и поэтому не могут служить изображениями.

Пример 2. Функция $F(p)=e^{-p} \to 0$ при $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$, но не существует функции $f(t)$, для которой e^{-p} было бы изображением.

Теорема 3 (о линейности изображения)

Если $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$ и $f_2(t) \Leftrightarrow F_2(p)$, то $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \Leftrightarrow c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$, где c_1, c_2 - комплексные постоянные.

Теорема 4 (об аналитичности изображения)

Если функция $F(p)$ является изображением некоторого оригинала $f(t)$, то $F(p)$ - функция аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 - показатель роста оригинала.

4. Изображение простейших оригиналов

1. Пусть $f(t)=c$, где $c = const$. Тогда $f(t) \Leftrightarrow \dfrac{c}{p}$, то есть $c \Leftrightarrow \dfrac{c}{p}$. Действительно, так как $1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{p}$ при $\operatorname{Re} p = s > 0$, то на основании теоремы 3 имеем $c \cdot 1 \Leftrightarrow c \cdot \dfrac{1}{p}$ при $\operatorname{Re} p = s > 0$.

2. $f(t)=e^{\alpha t}$. Найдем $F(p)$ по определению

$$e^{\alpha t} \Leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha - p)t} dt = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{\alpha - p} e^{(\alpha-p)t} \Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{\alpha - p} \lim_{b \to +\infty} (e^{(\alpha - p)b} - 1) = \frac{1}{p - \alpha},$$

если $\operatorname{Re}(\alpha - p) < 0$, и $\dfrac{1}{\alpha - p} \lim\limits_{b \to +\infty} (e^{(\alpha - p)} - 1) = \infty$, если

$\mathrm{Re}(\alpha - p) > 0.$

Таким образом $e^{\alpha t} \Leftrightarrow \dfrac{1}{p-\alpha}$, если $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\,\alpha$.

3. $f(t) = \cos\omega t$, (ω - положительное число). Выразим косинус через показательные функции: $\cos\omega t = \dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$.

Зная, что $e^{\alpha t} \Leftrightarrow \dfrac{1}{p-\alpha}$, при $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\,\alpha$, и учитывая свойство линейности изображения, получим

$$\cos\omega t \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Так как в данном случае $\alpha = \mp i\omega$, то $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$, и, следовательно, $\cos\omega t \Leftrightarrow \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ при $\mathrm{Re}\, p > 0$.

4. $f(t) = \sin\omega t$, (ω - положительное число). Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, и учитывая, что $\sin\omega t = \dfrac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$, получим

$$\sin\omega t \Leftrightarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \text{ при } \mathrm{Re}\, p > 0.$$

5. $f(t) = \mathrm{ch}\, at$, (a - положительное число). Запишем $\mathrm{ch}\, at$ в виде: $\mathrm{ch}\, at = \dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}$. Тогда

$$\mathrm{ch}\, at \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a}\right) = \frac{p}{p^2-a^2},$$

при $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\,\alpha = a$.

$$\mathrm{ch}\, at \Leftrightarrow \frac{p}{p^2-a^2} \text{ при } \mathrm{Re}\, p > a.$$

6. $f(t)=\operatorname{sh} at$, ($a$ - положительное число). Используя формулу $\operatorname{sh} at=\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}$, получим

$$\operatorname{sh} at \Leftrightarrow \frac{a}{p^2-a^2} \text{ при } \operatorname{Re} p > a\,.$$

Пример. Найти изображение заданных функций

1. $2\sin 3t-\cos\dfrac{t}{2}$; 2. $\cos^2 t$; 3. $\operatorname{sh}^3 t$; 4. $\sin^2(t-a)$.

Решение.

1. $$2\sin 3t-\cos\frac{t}{2} \Leftrightarrow 2\cdot\frac{3}{p^2+9}-\frac{p}{p^2+\frac{1}{4}}=\frac{6}{p^2+9}-\frac{4p}{4p^2+1}=$$

$$=\frac{24p^2+6-4p^3-36p}{(p^2+9)(4p^2+1)}=-\frac{4p^3+12p-6}{(p^2+9)(4p^2+1)};$$

2. $$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)};$$

3. $$\operatorname{sh}^3 t=\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}(e^{3t}-3e^t+3e^{-t}-e^{-3t})=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{p-3}-\frac{3}{p-1}+\frac{3}{p+1}-\frac{1}{p+3}\right)=\frac{6}{(p^2-1)(p^2-9)};$$

4. $$\sin^2(t-a)=\frac{1-\cos 2(t-a)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2(t-a)=\frac{1}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}(\cos 2t\cdot\cos 2a+\sin 2t\cdot\sin 2a) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\left(\cos 2a\cdot\frac{p}{p^2+4}+\right.$$

$$\left.+\sin 2a\cdot\frac{2}{p^2+4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2+4}(p\cos 2a-2\sin 2a)\right).$$

Упражнения. Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

1. $f(t)=t$; 2. $f(t)=\sin 3t$; 3. $f(t)=te^t$; 4. $f(t)=t^\alpha$ $(\alpha>-1)$.

Ответы: 1. $\dfrac{1}{p^2}$; 2. $\dfrac{p}{p^2+9}$; 3. $\dfrac{1}{(p-1)^2}$; 4. $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$.

7.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1. **Теорема подобия**

Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то $f(at) \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}F(\dfrac{p}{a})$ для любого $a > 0$.

Пример. Найти изображение следующих функций:

а) $f(t) = \cos mt \cdot \cos nt$; б) $f(t) = \sin mt \cdot \cos nt$.

Решение. а) Преобразовав $f(t)$ по формулам тригонометрии, получим $f(t) = \dfrac{1}{2}(\cos(m-n)t + \cos(m+n)t)$, и, следовательно,

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+(m-n)^2} + \frac{p}{p^2+(m+n)^2}\right) = \frac{p(p^2+m^2+n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2};$$

б) Аналогично,

$$f(t) = \frac{1}{2}(\sin(m+n)t + \sin(m-n)t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{p^2+(m+n)^2} + \frac{m-n}{p^2+(m-n)^2}\right) =$$

$$= \frac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}.$$

Упражнения. Пользуясь теоремами линейности и подобия, найти изображения следующих функций:

1. $f(t) = \sin^2 t$.
2. $f(t) = \cos^3 t$.
3. $f(t) = \sin mt \sin nt$.
4. $f(t) = \sin^4 t$.

Ответы: 1. $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$. 2. $\dfrac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}$.

3. $\dfrac{2mnp}{(p^2+m^2-n^2)^2-4m^2n^2}$. 4. $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{p}+\dfrac{p}{p^2+16}-\dfrac{4p}{p^2+1}\right)$.

2. **Теорема смещения**

Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то $e^{\alpha t} f(t) \Leftrightarrow F(p-\alpha)$ для любого $\alpha \in C$ при $\operatorname{Re} p > s_0 + \operatorname{Re}\alpha$.

Пример 1. Найти изображение функций:

а) $e^{\alpha t}\sin\omega t$; б) $e^{\alpha t}\cos\omega t$; в) $e^{\alpha t}\operatorname{sh} at$; г) $e^{\alpha t}\operatorname{ch} at$.

Решение. Так как $\sin\omega t \Leftrightarrow \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}, \cos\omega t \Leftrightarrow \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$,

$\operatorname{sh} at \Leftrightarrow \dfrac{a}{p^2-a^2}, \operatorname{ch} at \Leftrightarrow \dfrac{p}{p^2-a^2}$, то, применяя теорему смещения, получим:

а) $e^{\alpha t}\sin\omega t \Leftrightarrow \dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$; б) $e^{\alpha t}\cos\omega t \Leftrightarrow \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$;

в) $e^{\alpha t}\operatorname{sh} at \Leftrightarrow \dfrac{a}{(p-\alpha)^2-a^2}$; г) $e^{\alpha t}\operatorname{ch} at \Leftrightarrow \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-a^2}$.

Пример 2. Найти изображение функции $f(t) = e^{-t}\sin^2 t$.

Решение. Представим $f(t)$ в виде:

$$f(t) = e^{-t}\sin^2 t = e^{-t}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t}\cos 2t.$$

Тогда

$$f(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{p^2+2p+5}\right) =$$

$$= \frac{2}{(p+1)(p^2+2p+5)}.$$

Упражнения. Найти изображения функций:

1. $\operatorname{sh}\alpha t\operatorname{ch}\beta t$. 2. $\operatorname{ch}\alpha t\operatorname{ch}\beta t$. 3. $\operatorname{sh}\alpha t\operatorname{sh}\beta t$.

4. $\operatorname{sh}\alpha t - \sin\alpha t$. 5. $\operatorname{ch}\alpha t - \cos\alpha t$. 6. $\operatorname{sh}\alpha t + \sin\alpha t$.

7. $\operatorname{ch}\alpha t + \cos\alpha t$. 8. $\cos\alpha t\operatorname{ch}\beta t$. 9. $\sin\alpha t\operatorname{sh}\beta t$.

Ответы: 1. $\dfrac{\alpha(p^2-\alpha^2+\beta^2)}{(p^2-(\alpha-\beta)^2)(p^2-(\alpha+\beta)^2)}$.

2. $\dfrac{p(p^2-\alpha^2-\beta^2)}{(p^2-(\alpha-\beta)^2)(p^2-(\alpha+\beta)^2)}$.

3. $\dfrac{2\alpha\beta p}{(p^2-(\alpha+\beta)^2)(p^2-(\alpha-\beta)^2)}$. 4. $\dfrac{2\alpha^3}{p^4-\alpha^4}$. 5. $\dfrac{2\alpha^2 p}{p^4-\alpha^4}$.

6. $\dfrac{2\alpha p^2}{p^4-\alpha^4}$. 7. $\dfrac{2p^3}{p^4-\alpha^4}$. 8. $\dfrac{p(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$.

9. $\dfrac{2\alpha\beta p}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$.

3. Теорема запаздывания

Если $f(t)\Leftrightarrow F(p)$, то $f(t-b)\Leftrightarrow e^{-bp}F(p)$ для любого $b\in[0,\infty)$.

По определению оригинала имеем:

$$y=\begin{cases} f(t-b) & при\, t\ge b, \\ 0 & при\;\; t<b. \end{cases}$$

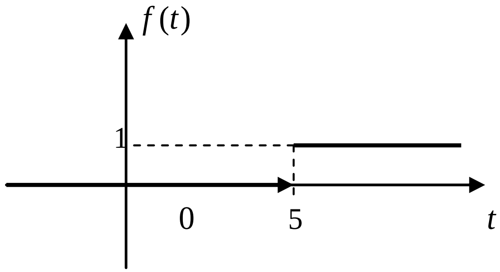
График функции $y=f(t-b)$ сдвинут по оси t относительно графика функции $y=f(t)$ на величину b. Процесс, описываемый функцией $f(t-b)$, начинается как бы с опозданием на время b, относительно процесса, описываемого функцией $f(t)$. Отсюда и появился термин «запаздывание». Исходя из физического толкования, теорему запаздывания можно сформулировать так: запаздывание оригинала на положительную величину b соответствует умножению изображения на e^{-bp}.

Пример 1. Найти изображение функции $f(t)=\eta(t-5)$.

Решение. Запишем функцию в виде

$$f(t)=\begin{cases} 1 & при\;\; t\ge 5, \\ 0 & при\;\; t<5. \end{cases}$$

График этой функции имеет вид



Так как изображением функции $\eta(t)$ является $F(p)=\dfrac{1}{p}$, то используя теорему запаздывания, получим $\eta(t-5)\Leftrightarrow \dfrac{e^{-5p}}{p}$.

Пример 2. Найти изображение функции

$$f(t)=\eta(t-2)\sin^2(\frac{t-2}{2}).$$

Решение.

$$f(t)=\eta(t-2)\sin^2(\frac{t-2}{2})=\eta(t-2)\frac{1-\cos(t-2)}{2}=\frac{1}{2}\eta(t-2)-$$

$$-\frac{1}{2}\eta(t-2)\cos(t-2)\Leftrightarrow\frac{1}{2p}e^{-2p}-\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+1}e^{-2p}=\frac{1}{2}e^{-2p}(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1})=$$

$$=\frac{e^{-2p}}{2p(p^2+1)}.$$

Пример 3. Найти изображение функции $f(t)=\eta(t-\dfrac{\pi}{4})\sin t$.

Решение. Представим функцию $f(t)$ в виде

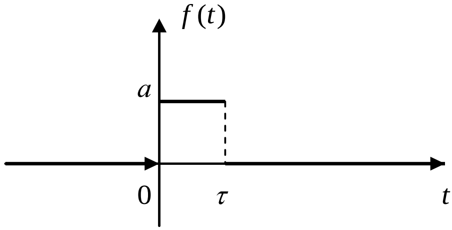
$$f(t)=\eta(t-\frac{\pi}{4})\sin t=\eta(t-\frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(t-\frac{\pi}{4})+\cos(t-\frac{\pi}{4}))=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\eta(t-\frac{\pi}{4})\sin(t-\frac{\pi}{4})+\eta(t-\frac{\pi}{4})\cos(t-\frac{\pi}{4})).$$

Тогда $F(p)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{e^{-\frac{\pi}{4}p}}{p^2+1}+\frac{pe^{-\frac{\pi}{4}p}}{p^2+1})=\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}p}(1+p)}{2(p^2+1)}$.

Теорема запаздывания является удобным способом для нахождения изображений кусочно-непрерывных оригиналов, заданных графически.

Пример 1. Найти изображение функции, заданной графически:



Запишем аналитическое выражение для функции $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases} a, & при\ \ 0\le t<\tau; \\ 0, & при\ t<0\ и\ t\ge\tau. \end{cases}$$

Функцию $f(t)$ с помощью обобщенной единичной функции можно записать формулой: $f(t)=[\eta(t)-\eta(t-\tau)]a$.

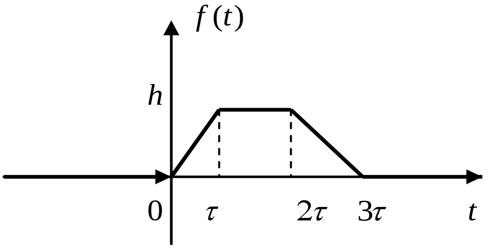
Находим изображение оригинала . Имеем $f(t)\Leftrightarrow a\frac{1-e^{-p\tau}}{p}$,

так как $\eta(t)\Leftrightarrow\frac{1}{p}$ и $\eta(t-\tau)\Leftrightarrow e^{-p\tau}\frac{1}{p}$.

Пример 2. Найти изображение функции

$$f(t)=\begin{cases} \frac{h}{\tau}t, & при\ \ 0\le t<\tau; \\ h, & при\ \tau\le t<2\tau; \\ -\frac{h}{\tau}(t-3\tau), & при\ \ 2\tau\le t<3\tau; \\ 0, & при\ \ t\ge 3\tau. \end{cases}$$

Решение. Построим график функции $f(t)$:



Используя функцию Хевисайда, запишем $f(t)$ в виде:

$$f(t) = \frac{h}{\tau} t[\eta(t) - \eta(t-\tau)] + h[\eta(t-\tau) - \eta(t-2\tau)] -$$

$$-\frac{h}{\tau}(t-3\tau)[\eta(t-2\tau) - \eta(t-3\tau)] = \frac{h}{\tau} t\eta(t) + h(1-\frac{t}{\tau})\eta(t-\tau) -$$

$$-(h + \frac{h}{\tau}(t-3\tau))\eta(t-2\tau) + \frac{h}{\tau}(t-3\tau)\eta(t-3\tau) = \frac{h}{\tau} t\eta(t) -$$

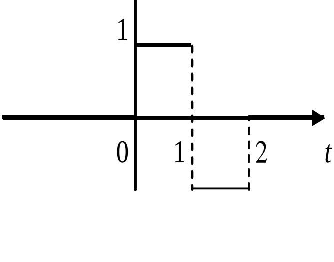
$$-\frac{h}{\tau}(t-\tau)\eta(t-\tau) - \frac{h}{\tau}(t-2\tau)\eta(t-2\tau) + \frac{h}{\tau}(t-3\tau)h(t-3\tau).$$

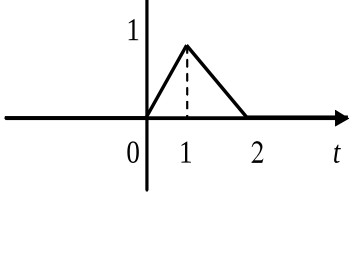
Теперь перейдем от оригинала к изображению, используя теорему запаздывания:

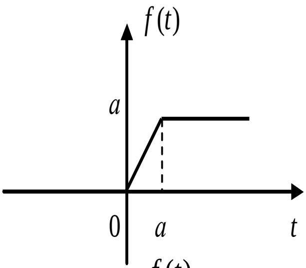
$$F(p) = \frac{h}{\tau}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{h}{\tau}\cdot\frac{1}{p^2}e^{-\tau p} - \frac{h}{\tau}\cdot\frac{1}{p^2}e^{-2\tau p} + \frac{h}{\tau}\cdot\frac{1}{p^2}e^{-3\tau p} =$$

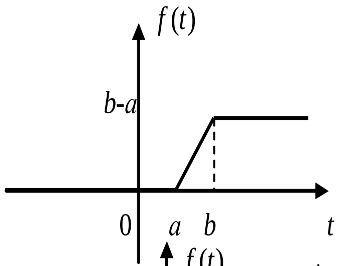
$$= \frac{h}{\tau}\cdot\frac{1}{p^2}(1 - e^{-\tau p} - e^{-2\tau p} + e^{-3\tau p}).$$

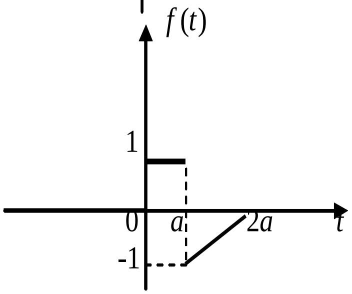
Упражнения. Найти изображения следующих функций, заданных графически:

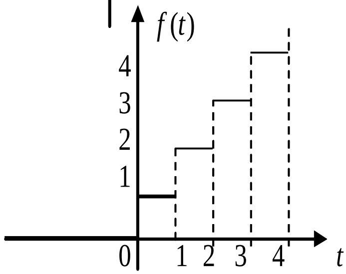
1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

Ответы: 1. $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$. 2. $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$. 3. $\dfrac{1-e^{-ap}}{p^2}$.

4. $\dfrac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}$. 5. $\dfrac{1}{p(e^p-1)}$. 6. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1-2ap}{ap^2}e^{-ap}-\dfrac{1}{ap^2}e^{-2ap}$.

Пример 3. Найти изображение периодической с периодом l функции $f(t)$.

Решение. Введем функцию

$$f_0(t)=\begin{cases} f(t), & при\ \ 0\le t<l, \\ 0, & при\ \ t\ge l. \end{cases}$$

Тогда $f_0(t)=f(t)\eta(t)-f(t)\eta(t-l)=f(t)\eta(t)-f(t-l)\eta(t-l)$, так как $f(t)=f(t-l)$ при $t\ge l$, в силу периодичности. Переходя к изображениям, получим:

$$F_0(p)=F(p)-F(p)e^{-lp}, \text{ где } F_0(p)=\int_0^l f(t)e^{-pt}dt.$$

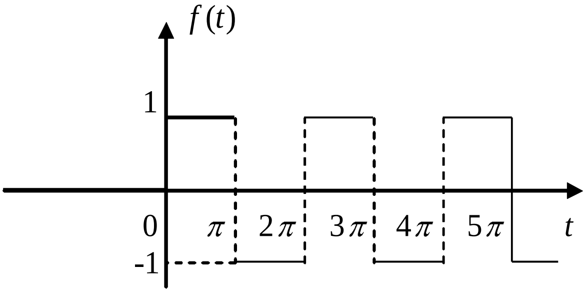
Следовательно, $F(p)=\dfrac{F_0(p)}{1-e^{-lp}}=\dfrac{1}{1-e^{-lp}}\int\limits_0^l f(t)e^{-pt}dt.$

Пример 4. Найти изображения периодических функций:

1. $f(t)=f(t+2\pi)=\dfrac{\sin t}{|\sin t|}=\begin{cases} 1, & 2\pi n<t<(2n+1)\pi, \\ -1, & (2n+1)\pi<t<(2n+2)\pi, \\ 0, & t<0, \end{cases}$

$n=0,1,2,....$

Решение. Функция $\dfrac{\sin t}{|\sin t|}$ имеет много общего с тригонометрической функцией $\sin t$, поэтому она называется прямоугольным синусом.



Находим изображение $F(p)$.

Получим

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int\limits_0^{2\pi} e^{-pt}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}(\int\limits_0^{\pi} e^{-pt}dt-\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-pt}dt)=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}(\frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^{\pi}+\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_{\pi}^{2\pi})=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}(-\frac{e^{-\pi p}}{p}+\frac{1}{p}+\frac{e^{-2\pi p}}{p}-\frac{e^{-\pi p}}{p})=$$

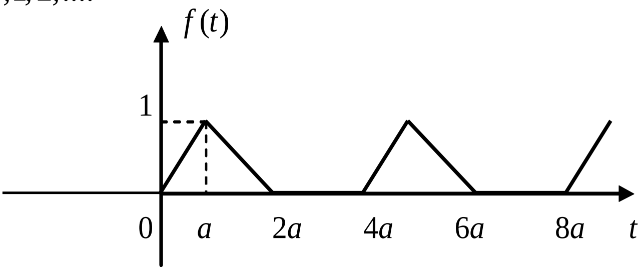
$$=\frac{(1-e^{-\pi p})^2}{p(1-e^{-2\pi p})}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1-e^{-\pi p}}{1+e^{-\pi p}},$$

или $\dfrac{\sin t}{|\sin t|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{p}\,\mathrm{th}\dfrac{\pi p}{2}$.

Пример 5. Найти изображение периодической функции

$$f(t) = f(t+4a) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} - 4n, & 4na < t < (4n+1)a, \\ -\dfrac{t}{a} + 4n + 2, & (4n+1)a < t < (4n+2)a, \\ 0, & (4n-2)a < t < (4n+4)a, t < 0, \end{cases}$$

$n = 0,1,2,\ldots$.



Перейдя к изображению, получаем

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-4ap}}\int_0^{4a} e^{-pt} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-4ap}}\left(\int_0^{a} e^{-pt}\,\frac{t}{a}\,dt + \int_a^{2a} e^{-pt}(2-\frac{t}{a})dt\right) =$$

$$= \frac{1}{a(1-e^{-4ap})}\left(-\frac{te^{-pt}}{p} - \frac{e^{-pt}}{p^2})\Bigg|_0^a + (\frac{te^{-pt}}{p} + \frac{e^{-pt}}{p^2} - \frac{2ae^{-pt}}{p}\Bigg|_a^{2a}\right) =$$

$$= \frac{(1-e^{-ap})^2}{ap^2(1-e^{-4ap})} \text{ или } f(t) = \frac{\mathrm{th}\dfrac{ap}{2}}{ap^2(1+e^{-2ap})}.$$

Упражнения. Найти изображения периодических функций:

1. $$f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}1, & 2na<t<(2n+1)a,\\ -1, & (2n+1)a<t<(2n+2)a,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

$n=0,1,2,\ldots.$

2.

$$f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}\dfrac{t}{a}-2n, & 2na<t<(2n+1)a,\\ -\dfrac{t}{a}+2(n+1), & (2n+1)a<t<(2n+2)a,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

$n=0,1,2,\ldots.$

3.

$$f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}\dfrac{2t}{a}-(4n+1), & 2na<t<(2n+1)a,\\ -\dfrac{2t}{a}+4n+3, & (2n+1)a<t<(2n+2)a,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

$n=0,1,2,\ldots.$

4. $$f(t)=f(t+a)=\begin{cases}\dfrac{2t}{a}-(2n+1), & na<t<(n+1)a,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

$n=0,1,2,\ldots.$

5. $$f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}\dfrac{t}{a}-2n, & 2na<t<(2n+1)a,\\ 0, \quad (2n+1)a<t<(2n+2)a\ , & t<0.\end{cases}$$

$n=0,1,2,\ldots.$

Ответы: 1. $\frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{ap}{2}$. 2. $\frac{1}{ap^2}\operatorname{th}\frac{ap}{2}$. 3. $\frac{2}{ap^2}\operatorname{th}\frac{ap}{2}-\frac{1}{p}$.

4. $\frac{2+ap+(2+ap)e^{-ap}}{ap^2(e^{-ap}-1)}$. 5. $\frac{1-(1+ap)e^{-ap}}{ap^2(1-e^{-2ap})}$.

4. Дифференцирование оригинала

Если $f(t)\Leftrightarrow F(p)$ и существует функция $f'(t)$, являющаяся оригиналом, то

$$f'(t)\Leftrightarrow pF(p)-f(0), \text{ где } f(0)=\lim_{t\to 0+} f(t).$$

Предположим теперь, что $f(t)$ n-раз непрерывно дифференцируемая на $[0,\infty)$ функция и $f^{(n)}(t)$ является оригиналом. Тогда, используя полученное соотношение $f'(t)\Leftrightarrow pF(p)-f(0)$, получим:

$$f''(t)\Leftrightarrow p(pF(p)-f(0))-f'(0)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0);$$

$$f'''(t)\Leftrightarrow p(p^2F(p)-pf(0)-f'(0))-f''(0)=p^3F(p)-$$

$$-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0);$$

...

$$f^{(n)}(t)\Leftrightarrow p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-...-f^{(n-1)}(0).$$

Следствие. Если начальные условия нулевые, то есть $f(0)=f'(0)=...=f^{(n)}(0)=0$, то $f^{(n)}(t)\Leftrightarrow p^nF(p)$.

Пример 1. Зная, что $\sin\omega t\Leftrightarrow\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, найти изображение для функции $\cos\omega t$.

Решение. Так как $(\sin\omega t)'=\omega\cos\omega t$, то

$$\omega\cos\omega t\Leftrightarrow p\frac{\omega}{p^2+\omega^2}-\sin 0=\frac{p\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Отсюда: $\cos\omega t\Leftrightarrow\frac{p}{p^2+\omega^2}$.

Пример 2. Найти изображения дифференциальных выражений при заданных начальных условиях:

а) $x'''(t)+6x''(t)+x'(t)-2x(t);\ x(0)=x'(0)=0; x''(0)=1;$

б) $x''(t)+5x'(t)-7x(t)+2;\ x(0)=\alpha; x'(0)=0.$

Решение. По теореме дифференцирования оригинала имеем:

а) $x'(t)\Leftrightarrow pX(p)-x(0)=pX(p);$

$x''(t)\Leftrightarrow p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p);$

$x'''(t)\Leftrightarrow p^3X(p)-p^2x(0)-px'(0)-x''(0)=p^3X(p)-1.$

Тогда

$$x'''(t)+6x''(t)+x'(t)-2x(t)\Leftrightarrow p^3X(p)-1+6p^2X(p)+pX(p)-$$
$$-2X(p)=(p^3+6p^2+p-2)X(p)-1.$$

б) $x'(t)\Leftrightarrow pX(p)-x(0)=pX(p)-\alpha;$

$x''(t)\Leftrightarrow p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-p\alpha.$

Тогда

$$x''(t)+5x'(t)-7x(t)+2\Leftrightarrow p^2X(p)-\alpha p+5pX(p)-5\alpha-7X(p)+$$
$$+\frac{2}{p}=(p^2+5p-7)X(p)-p\alpha-5\alpha+\frac{2}{p}.$$

Упражнения. Найти изображения дифференциальных выражений при заданных начальных условиях:

1. $x''+3x'+2x+1$ при условии $x(0)=-1; x'(0)=-2$.
2. $x^{\mathrm{IV}}+x'''+2x''-3x'-5$ при условии $x(0)=1; x'(0)=-1;$ $x''(0)=-3;\ x'''(0)=5.$
3. $x'''-2x'+x-1$ при условии $x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$
4. $x''+5x'-7x+2$ при условии $x(0)=1; x'(0)=0$.
5. $x'''+6x''+x'-2x$ при условии $x(0)=-3; x'(0)=7; x''(0)=1$.

5. **Интегрирование оригинала**

Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то $\int_0^t f(t)dt$ является оригиналом и имеет место соотношение $\int_0^t f(t)dt \Leftrightarrow \dfrac{F(p)}{p}$.

Таким образом, интегрирование оригинала соответствует делению на p изображения подынтегральной функции.

Пример 1. Найти изображение оригинала $f(t) \Leftrightarrow \int_0^t \operatorname{sh} 5t dt$.

Решение. Так как $\operatorname{sh} 5t \Leftrightarrow \dfrac{5}{p^2+25}$, то $\int_0^t \operatorname{sh} 5t dt \Leftrightarrow \dfrac{5}{p(p^2+25)}$.

Пример 2. Найти изображение оригинала $f(t) = \int_0^t \sin^2 \omega t dt$.

Решение. Преобразуем $f(t)$ следующим образом

$$f(t) = \int_0^t \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2}\int_0^t (1-\cos 2\omega t)dt = \frac{1}{2}(\int_0^t 1\cdot dt - \int_0^t \cos 2\omega t dt).$$

Тогда $F(p) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{p}{p^2+4\omega^2})$.

Упражнения.

1. $f(t) = \int_0^t \sin\tau d\tau$. 2. $f(t) = \int_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau d\tau$.

3. $f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau d\tau$. 4. $f(t) = \int_0^t \cos^2 \omega\tau d\tau$.

5. $f(t) = \int_0^t \operatorname{ch} \omega\tau d\tau$. 6. $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.

Ответы: 1. $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$. 2. $\dfrac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p(p^2+\omega^2)^2}$. 3. $\dfrac{4}{(p^2-4)^2}$.

4. $\dfrac{p^2+2\omega^2}{p^2(p^2+4\omega^2)}$. 5 . $\dfrac{1}{p^2-\omega^2}$. 6. $\dfrac{2}{p(p+1)^3}$.

6. Дифференцирование изображения

Если $f(t)\Leftrightarrow F(p)$, то $F'(p)\Leftrightarrow -tf(t)$.

Следствие. Используя это свойство легко получить следующие соотношения: $t^2 f(t)\Leftrightarrow F''(p)$; $-t^3 f(t)\Leftrightarrow F'''(p)$; ... $(-1)^n t^n f(t)\Leftrightarrow F^{(n)}(p)$.

В частности, если $f(t)=\eta(t)$, то $(-1)^n t^n \Leftrightarrow (\dfrac{1}{p})^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{p^{n+1}}$.

Таким образом, $t^n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Пример 3. Найти изображение функций:

а) $f(t)=te^{5t}$; б) $f(t)=t^2\sin 3t$.

Решение. а) Так как изображение оригинала $e^{5t}\Leftrightarrow\dfrac{1}{p-5}$, то

$-te^{5t}\Leftrightarrow(\dfrac{1}{p-5})'=-\dfrac{1}{(p-5)^2}$. Или $te^{5t}\Leftrightarrow\dfrac{1}{(p-5)^2}$.

б) Имеем $\sin 3t\Leftrightarrow\dfrac{3}{p^2+9}$. Тогда по следствию

$$t^2\sin 3t\Leftrightarrow(\frac{3}{p^2+9})''=-(\frac{6p}{(p^2+9)^2})'=\frac{-6((p^2+9)^2-2(p^2+9)\cdot 2p^2)}{(p^2+9)^4}=$$

$$=\frac{-6(p^2+9-4p^2)}{(p^2+9)^3}=\frac{18(p^2-3)}{(p^2+9)^3}.$$

Упражнения. Найти изображения следующих функций:

1. $f(t)=t^2\cos t$. 2. $f(t)=t(e^t+\operatorname{ch} t)$. 3. $f(t)=(t+1)\sin 2t$.

4. $f(t) = t\,\mathrm{sh}\,3t.$

Ответы: 1. $\dfrac{2p^3 - 6p}{(p^2+1)^3}$. 2. $\dfrac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$. 3. $\dfrac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$.

4. $\dfrac{6p}{(p^2-1)^2}$.

7. **Интегрирование изображения.**

Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$ и $\dfrac{f(t)}{t}$ является оригиналом, то имеет место соотношение $\dfrac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int\limits_p^{\infty} F(p)dp.$

Пример 1. Найти изображение функции $\dfrac{\mathrm{sh}\,t}{t}$.

Решение. Известно, что $\mathrm{sh}\,t \Leftrightarrow \dfrac{1}{p^2-1}$. Тогда

$$\frac{\mathrm{sh}\,t}{t} \Leftrightarrow \int\limits_p^{\infty}\frac{dp}{p^2-1} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_p^{b}\frac{dp}{p^2-1} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{p-1}{p+1}\right|\Bigg|_p^b = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p+1}{p-1}\right|.$$

Таким образом, $\dfrac{\mathrm{sh}\,t}{t} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{p+1}{p-1}\right|$.

Пример 2. Найти изображения функций:

1. $Si(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\sin\tau}{\tau}d\tau$ (интегральный синус)

2. $\mathrm{sh}\,i(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\mathrm{sh}\,u}{u}du$ (интегральный гиперболический синус).

Решение.

1. Из соотношения $\sin t \Leftrightarrow \dfrac{1}{p^2+1}$, по теореме интегрирования

изображения, имеем $\dfrac{\sin t}{t} \Leftrightarrow \int\limits_p^\infty \dfrac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p\Big|_p^\infty = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{p}$. Отсюда, по теореме интегрирования оригинала, получим $Si(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\sin\tau}{\tau}d\tau \Leftrightarrow \dfrac{1}{p}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{p}$.

2. Имеем $i\operatorname{sh} i(t) = Si(it) \Leftrightarrow \dfrac{1}{p}\operatorname{arctg}\dfrac{i}{p} = \dfrac{i}{p}Arth\dfrac{1}{p}$ или

$\operatorname{sh} i(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p+1}{p-1}$.

Упражнения. Найти изображения следующих функций:

1. $\dfrac{e^t-1}{t}$. 2. $\dfrac{e^t-1}{t}$. 3. $\dfrac{\sin^2 t}{t}$. 4. $\dfrac{1-\cos t}{t}$. 5. $\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$.

6. $\dfrac{e^t-1-t}{t}$. 7. $\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$.

Ответы: 1. $\ln\dfrac{p}{p-1}$. 2. $\ln\dfrac{p+1}{p}$. 3. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{p}$.

4. $\ln\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p}$. 5. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2+1}$. 6. $\ln\dfrac{p}{p-1}-\dfrac{1}{p}$. 7. $\ln\dfrac{p+1}{p-1}$.

8. Свертка функций. Свойства свертки. Изображение свертки.

1) Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - непрерывные функции на $[0,\infty)$.

Определение. Сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, $t\in[0,\infty)$ называется функция от t обозначаемая $f_1(t)*f_2(t)$ и определяемая интегралом вида $\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$, то есть

$$f_1(t)*f_2(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau .$$

Пример. Найти свертку функций $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\sin 3t$.

Решение.

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t \tau\sin 3(t-\tau)d\tau=$$

$$=\begin{vmatrix} \tau=u & du=d\tau \\ \sin 3(t-\tau)d\tau=d\,\mathrm{v} & \mathrm{v}=\frac{1}{3}\cos 3(t-\tau) \end{vmatrix}=\frac{\tau}{3}\cos 3(t-\tau)\Big|_0^t-$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^t \cos 3(t-\tau)d\tau=\frac{t}{3}-\frac{1}{9}\sin 3t.$$

2) Свойства свертки.

а) Коммутативность.

Выражение для свертки функций не зависит от порядка, в котором берутся эти функции, то есть $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$ или $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau$.

б) Ассоциативность: $(f_1*f_2)*f_3=f_1*(f_2*f_3)$.

в) Рефлексивность: $(f_1+f_2)*f_3=f_1*f_3+f_2*f_3$.

г) Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - оригиналы, то их свертка f_1*f_2 - тоже оригинал.

Пример. Для оригиналов $f_1(t)=t,\ f_2(t)=e^{2t}$ проверить свойство коммутативности свертки.

Решение. Найдем

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t \tau e^{2(t-\tau)}d\tau=\begin{vmatrix} \tau=u & du=d\tau \\ e^{2\tau}d\tau=d\,\mathrm{v} & \mathrm{v}=\dfrac{e^{-2\tau}}{-2} \end{vmatrix}=(\tau\frac{e^{-2\tau}}{-2}\Big|_0^t+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t e^{-2\tau}d\tau)e^{2t}=e^{2t}(\frac{te^{-2t}}{-2}-\frac{1}{4}(e^{-2t}-1))=-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}.$$

Аналогично

$$f_2(t)*f_1(t)=\int_0^t (t-\tau)e^{2\tau}d\tau = t\int_0^t e^{2\tau}d\tau - \int_0^t \tau e^{2\tau}dt = \frac{t}{2}e^{2\tau}\Big|_0^t - \left(\frac{\tau e^{2\tau}}{2}\Big|_0^t -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^t e^{2\tau}d\tau\right) = \frac{te^{2t}}{2}-\frac{t}{2}-\frac{te^{2t}}{2}+\frac{1}{4}e^{2t}\Big|_0^t = -\frac{t}{2}+\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}.$$

Таким образом, $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$.

3) Теорема Э.Бореля (теорема умножения изображений).

Если $f_1(t)\Leftrightarrow F_1(p)$ и $f_2(t)\Leftrightarrow F_2(p)$, то свертке функций $f_1(t)*f_2(t)$ соответствует произведение изображений.

$f_1(t)*f_2(t)\Leftrightarrow F_1(p)\cdot F_2(p)$, $\operatorname{Re} p>\max(s_0', s_0'')$, где s_0', s_0'' - показатели роста оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Пример. Найти изображение свертки следующих оригиналов:

а) $f_1(t)=t^2, f_2(t)=\cos 2t;$ б) $f_1(t)=t, f_2(t)=e^t\sin t;$

в) $\int_0^t \tau e^{t-\tau}\sin(t-\tau)d\tau.$

Решение. а) Так как $t^2\Leftrightarrow\frac{2}{p^3};\cos 2t\Leftrightarrow\frac{p}{p^2+4}$, то

$$f_1*f_2\Leftrightarrow\frac{2}{p^3}\cdot\frac{p}{p^2+4}.$$

б) Аналогично, $t\Leftrightarrow\frac{1}{p^2};e^t\sin t\Leftrightarrow\frac{1}{(p-1)^2+1}$, поэтому

$$f_1(t)*f_2(t)\Leftrightarrow\frac{1}{p^2(p^2-2p+2)}.$$

в) Данный интеграл можно рассматривать как свертку оригиналов $f_1(t)=t$ и $f_2(t)=e^t\sin t$. Известно, что $t\Leftrightarrow\frac{1}{p^2};e^t\sin t\Leftrightarrow\frac{1}{(p-1)^2+1}$, и, следовательно,

$$\int_0^t \tau e^{t-\tau}\sin(t-\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{p^2(p^2-2p+2)}.$$

9. Интеграл Дюамеля

Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - оригиналы, непрерывные и дифференцируемые на $[0,\infty)$, $f_1'(t), f_2'(t)$ являются оригиналами. Тогда, если $f_1(t)\Leftrightarrow F_1(p)$ и $f_2(t)\Leftrightarrow F_2(p)$, то

$$f_1(t)\cdot f_2(0)+\int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau \Leftrightarrow pF_1(p)\cdot F_2(p).$$

Эта формула называется формулой Дюамеля и применяется для решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Интеграл, стоящий слева называется интегралом Дюамеля. В силу свойства коммутативности свертки формула Дюамеля может быть записана также в виде

$$f_2(t)\cdot f_1(0)+\int_0^t f_2(\tau)f_1'(t-\tau)d\tau \Leftrightarrow pF_1(p)\cdot F_2(p);$$

$$f_1(t)\cdot f_2(0)+\int_0^t f_1(t-\tau)f_2'(\tau)d\tau \Leftrightarrow pF_1(p)\cdot F_2(p);$$

$$f_2(t)\cdot f_1(0)+\int_0^t f_2(t-\tau)f_1'(\tau)d\tau \Leftrightarrow pF_1(p)\cdot F_2(p).$$

Пример 1. $f\ \ t\ =1+\sin 3t-2\cos 4t+3e^{-2t}$. Найти $F\ \ p$.

Решение. Используя теорему линейности и формулы соответствия, получим:

$$F\ \ p\ =\frac{1}{p}+\frac{3}{p^2+9}-2\cdot\frac{p}{p^2+16}+\frac{3}{p+2}.$$

Пример 2. $f\ \ t\ =e^{-t}\cdot\sin 2t\cdot\sin 4t$. Найти $F\ \ p$.

Решение. $\sin 2t\cdot\sin 4t=\frac{1}{2}\ \ \cos 2t-\cos 4t\ \ $.

Используя теорему линейности, теорему затухания и формулы соответствия, получим:

$$F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+16}.$$

Пример 3. $f(t)=\frac{\sin 4t}{t}$. Найти $F(p)$.

Решение. $\sin 4t \Leftrightarrow \frac{4}{p^2+16}$.

Используя теорему об интегрировании изображения, находим:

$$\frac{\sin 4t}{t} \Leftrightarrow \int_p^{\infty}\frac{4}{p^2+16}dp=\lim_{N\to\infty}\int_p^{N}\frac{4}{p^2+16}dp=\lim_{N\to\infty} arctg\left.\frac{p}{4}\right|_p^N=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{p}{4}=\mathrm{arcctg}\frac{p}{4}.$$

Пример 4. $f(t)=t^2\cdot\cos t$. Найти $F(p)$.

Решение. $\cos t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2+1}$. Используя теорему о дифференцировании изображения, находим:

$$t^2\cdot\cos t \Leftrightarrow (-1)^2\cdot\left(\frac{p}{p^2+1}\right)''=\left(\frac{p^2+1-2p\cdot p}{(p^2+1)^2}\right)'=\left(\frac{1-p^2}{(1+p^2)^2}\right)'=$$

$$=\frac{-2p(1+p^2)^2-2p(p^2+1)\cdot 2(1-p^2)}{(p^2+1)^4}=\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}.$$

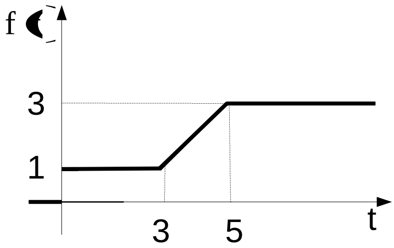
Если функция $f(t)$ задана разными выражениями на разных промежутках, то ее надо предварительно представить в виде $\sum_{k=1}^{n} f_k(t-\tau_k)\eta(t-\eta_k)$, а затем воспользоваться теоремой запаздывания.

Пример 5. Найти изображение функции

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1\\ 0, & t<0, t>t.\end{cases}$$

Решение. Представим $f(t)$ в виде $f(t)=\eta(t)-\eta(t-1)$. Имеем $\eta(t)\Leftrightarrow\dfrac{1}{p}$; $\eta(t-1)\Leftrightarrow\dfrac{e^{-p}}{p}$. Используя свойство линейности, получим $f(t)\Leftrightarrow\dfrac{1}{p}-\dfrac{e^{-p}}{p}$.

Пример 6. Найти $F(p)$, если оригинал $f(t)$ задан графиком:



Решение.

В аналитической форме $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & 0\le t<3,\\ t-2, & 3\le t<5,\\ 3, & t\ge 5.\end{cases}$

Заметим, что на интервале [3,5) уравнение прямой найдено по формуле

$$\frac{t-t_1}{t_2-t_1}=\frac{f(t)-f(t_1)}{f(t_2)-f(t_1)}\Rightarrow\frac{t-3}{5-3}=\frac{f(t)-1}{3-1}\Rightarrow f(t)=t-2.$$

Имеем

$$f\;\; t\;\; = \eta\;\; t\;\; - \eta\;\; t-3\;\; + \;\; t-2\;\; \eta\;\; t-3\;\; - \eta\;\; t-5\;\; +$$

$$+3\eta\;\; t-5\;\; = \eta\;\; t\;\; + \eta\;\; t-3\;\; t-3\;\; - \;\; t-5\;\; \eta\;\; t-5\;\; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} + e^{-3p}\frac{1}{p^2} - e^{-5p}\frac{1}{p^2};$$

7.3. ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ ЛАПЛАСА

Формула, позволяющая по известному изображению $F(p)$ определить ее оригинал $f(t)$, называется **формулой обращения**. Общий способ нахождения оригинала по данному изображению дают следующие теоремы:

1.Теорема обращения. Теорема единственности.

Если $f(t)$- оригинал, а $F(p)$- его изображение, то во всех точках непрерывности оригинала имеет место соотношение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp. \qquad (7.2)$$

Здесь интегрирование производится по любой бесконечной прямой $\operatorname{Re} p = s > s_0$, лежащей в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа от функции $f(t)$, s_0- показатель роста оригинала (рис.27). Формула (7.2) носит название **формулы Римана-Меллина**

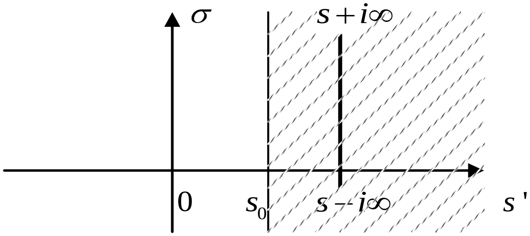


Рис.27.

Теорема единственности. Если два оригинала $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют одно изображение $F(p)$, то функции $f_1(t)$ и

$f_2(t)$ совпадают во всех точках непрерывности.

Замечание. Непосредственное применение формулы обращения часто затруднительно, и обычно применяют теоремы разложения, являющиеся следствиями из нее.

2. Обобщенная теорема разложения.

Если $F(p)$ - изображение, то его оригинал может быть найден по формуле $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\underset{p=p_k}{res}\,F(p)e^{pt}$, где p_k - особые точки функции $F(p)$.

3. Нахождение оригинала для дробно-рационального изображения.

При нахождении оригинала для изображения, являющегося правильной рациональной дробью вида $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$, где $A(p)$ и $B(p)$ - полиномы, можно пользоваться теоремами:

Теорема 1. Если изображение является правильной рациональной дробью, то есть $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$, где $B(p)$ имеет только простые корни $p_1, p_2, ..., p_n$, то оригинал находится по формуле:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}\,. \qquad (7.3)$$

Теорема 2. Если изображение есть правильная рациональная дробь, то есть $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$, где $B(p)$ имеет корни $p_1, p_2, ..., p_n$ кратности $r_1, r_2, ..., r_n$, то оригинал находится по формуле:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left((p-p_k)^{r_k}\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right). \qquad (7.4)$$

Пример 1. Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p-3)}$.

Решение. Знаменатель дроби $(p^2+4)(p-3)$ имеет простые корни $p_1=3, p_2=2i, p_3=-2i.$ Тогда по формуле (3), учитывая, что $((p^2+4)(p-3))'=3p^2-6p+4$, получим

$$f(t)=\frac{9e^{3t}}{13}+\frac{(2i)^2e^{2it}}{3(2i)^2-6(2i)+4}+\frac{(-2i)^2e^{-2it}}{3(-2i)^2-6(-2i)+4}=$$

$$=\frac{9}{13}e^{3t}+\frac{e^{2it}}{2+3i}+\frac{e^{-2it}}{2-3i}=\frac{9}{13}e^{3t}+\frac{1}{13}((2-3i)e^{2it}+(2+3i)e^{-2it})=$$

$$=\frac{9}{13}e^{3t}+\frac{1}{13}(4\cos 2t+6\sin 2t).$$

Замечание. Если функция $F(p)$ имеет комплексно-сопряженные полюсы $p=\alpha\pm i\beta$, то легко показать, что и вычеты функции в этих точках будут комплексно-сопряженными, поэтому их сумма равна удвоенной действительной части, то есть

$$\underset{p=\alpha+i\beta}{res}F(p)+\underset{p=\alpha-i\beta}{res}F(p)=2\operatorname{Re}\underset{p=\alpha+i\beta}{res}F(p)=2\operatorname{Re}\underset{p=\alpha-i\beta}{res}F(p).$$

С учетом последнего замечания получаем:

$$f(t)=\frac{9}{13}e^{3t}+2\operatorname{Re}(\frac{e^{2it}}{2+3i})=\frac{9}{13}e^{3t}+\frac{2}{13}(2\cos 2t+3\sin 2t).$$

Пример 2. Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{1}{(p+2)^3(p+1)^2}$.

Решение. Корни знаменателя $p_1=-2$ кратности $r_1=3$, $p_2=-1$ кратности $r_2=2$. Тогда по формуле (4)

$$f(t)=\underset{p=-2}{res}F(p)e^{pt}+\underset{p=-1}{res}F(p)e^{pt},$$

где $\underset{p=-2}{res} F(p)e^{pt} = \frac{1}{2!}\lim_{p\to -2}\frac{d^2}{dp^2}((p+2)^3\frac{e^{pt}}{(p+2)^3(p+1)^2}) =$

$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to -2}(\frac{t^2e^{pt}}{(p+1)^2} - \frac{4te^{pt}}{(p+1)^3} + \frac{6e^{pt}}{(p+1)^4}) = \frac{1}{2}e^{-2t}(t^2+4t+6).$$

$$\underset{p=-1}{res} F(p)e^{pt} = \frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}((p+1)^2\frac{e^{pt}}{(p+2)^3(p+1)^2}) =$$

$$= \lim_{p\to -1}(\frac{te^{pt}}{(p+2)^3} - \frac{3e^{pt}}{(p+2)^4}) = e^{-t}(t-3).$$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}(t^2+4t+6) + e^{-t}(t-3).$$

4) Элементарный метод

Во многих случаях заданное изображение можно преобразовать к такому виду, когда оригинал легко восстановить непосредственно с помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы изображений. Для преобразования изображения в этом случае применяют метод разложения рациональной дроби в сумму простейших дробей.

Пример 1. Найти оригинал для изображения $F(p) = e^{-2p}\frac{p}{p^2+1}$.

Решение. Применяя теорему запаздывания, получим

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t-2) & при \;\; t \ge 2; \\ 0 & при \;\; t < 2. \end{cases}$$

Пример 2. Найти оригинал для изображения $F(p) = \frac{3}{p(p^2-9)}$.

Решение. Так как $\operatorname{sh} 3t \Leftrightarrow \frac{3}{p^2-9}$, то применяя теорему об интегрировании оригинала, получим:

$$\frac{3}{p(p^2-9)} \Leftrightarrow \int_0^t \operatorname{sh} 3t dt = \left.\frac{\operatorname{ch} 3t}{3}\right|_0^t = \frac{1}{3}(\operatorname{ch} 3t - 1).$$

Пример 3. Найти оригинал для изображения $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+4)^2}$.

Решение. Можно заметить, что $F(p) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2+4}\right)'$, и, следовательно, по свойству дифференцирования изображения имеем $\dfrac{p}{(p^2+4)^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} t \sin 2t.$

Пример 4. $F(p) = \dfrac{4p+5}{(p-2)^2(p+2)}$. Найти оригинал.

Решение. Функция $F(p)$ имеет два полюса: $p_1 = 2$ – второй кратности и $p_{21} = -2$ – простой полюс. По теореме разложения находим:

$$f(t) = \operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt}; p_1\right] + \operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt}; p_2\right].$$

Находим вычеты:

$$\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt}; p_1\right] = \frac{1}{1!}\lim_{p\to 2}\frac{d}{dp}\left(\frac{4p+5}{p+2}e^{pt}\right) =$$

$$= \lim_{p\to 2}\frac{\left(4e^{pt} + (4p+5)te^{pt}\right)(p+2) - (4p+5)e^{pt}}{(p+2)^2} = \frac{3}{16}e^{2t} + \frac{13}{4}te^{2t}.$$

$$\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt}; p_2\right] = \lim_{p\to 2}\frac{(4p+5)e^{pt}}{(p-2)^2} = \frac{-3e^{-2t}}{16}.$$

$$f(t)=\frac{3}{16}e^{2t}+\frac{13}{4}te^{2t}-\frac{3}{16}e^{-2t}=\frac{13}{4}te^{2t}+\frac{3}{8}sh2t.$$

Если все полюсы $F(p)$ простые, то формула $(*)$ принимает вид

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{L}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}=f(t),$$

где сумма берется по всем корням $B(p)$.

Пример 5. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p-2)^2}$. Найти $f(t)$.

Решение. Разложим дробь $\dfrac{1}{(p-1)(p-2)^2}$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(p-1)(p-2)^2}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{(p-2)^2},$$

$$1=A(p-2)^2+B(p-1)(p-2)+C(p-1).$$

Полагая p=1, имеем A=1,
p=2, имеем C=1,
p=0, имеем 1=4+2B–1, B= –1.

$$F(p)=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p-2}+\frac{1}{(p-2)^2}.$$

Используя теорему линейности и формулы соответствия, получим:

$$f(t)=e^{t}-e^{2t}+te^{2t}.$$

При нахождении $f(t)$ по $F(p)$ иногда целесообразно использовать теорему о произведении изображений (теорему о свертке).

Пример 6. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+4)}$.

Решение. 1 способ. Известно, что $\dfrac{1}{p^2}\Leftrightarrow t;\dfrac{1}{p^2+4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\sin 2t$. Тогда по теореме Бореля имеем: $\dfrac{1}{2}t*\sin 2t\Leftrightarrow\dfrac{1}{p^2(p^2+4)}$. Найдем свертку

$$\frac{1}{2}t*\sin 2t=\frac{1}{2}\int_0^t\tau\sin 2(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}(\tau\frac{\cos 2(t-\tau)}{2}\Big|_0^t-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\cos 2(t-\tau)d\tau)=\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}\sin 2(t-\tau)\Big|_0^t=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t.$$

Таким образом, $\dfrac{1}{p^2(p^2+4)}\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}t-\dfrac{1}{8}\sin 2t.$

2 способ. Разлагаем $F(p)$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{p^2(p^2+4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2+4};$$

$Ap(p^2+4)+B(p^2+4)(Cp+D)p^2=1.$ Отсюда

$A=C=0;B=\dfrac{1}{4};D=-\dfrac{1}{4}.$ Тогда

$$F(p)=\frac{1}{4p^2}-\frac{1}{4(p^2+4)}\Leftrightarrow\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t.$$

Пример 7. Найти оригинал для изображения

$$F(p)=\frac{1}{p^2+2p+5}.$$

Решение. Выделим в знаменателе полный квадрат и воспользуемся теоремой смещения:

$$\frac{1}{p^2+2p+5}=\frac{1}{(p+1)^2+4}=\frac{1}{2}\frac{2}{(p+1)^2+4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

Пример 8. Найти оригинал для изображения

$$F(p)=\frac{p+3}{p^2-4p+13}.$$

Решение. Выделим в знаменателе полный квадрат и воспользуемся теоремой смещения:

$$\frac{p+3}{p^2-4p+13}=\frac{p-2+5}{(p-2)^2+9}=\frac{p-2}{(p-2)^2+9}+\frac{5}{3}\frac{3}{(p-2)^2+9}\Leftrightarrow$$

$$e^{2t}\cos 3t+\frac{5}{3}e^{2t}\sin 3t.$$

Пример 9. Найти оригинал для изображения

$$F(p)=\frac{e^{-3p}}{(p+4)^3}.$$

Решение. Найдем вначале оригинал для дроби $\frac{1}{(p+4)^3}$.

Известно, что $\frac{1}{p^3}\Leftrightarrow\frac{t^2}{2!}$. Используя теорему смещения, имеем

$\frac{1}{(p+4)^3}\Leftrightarrow\frac{t^2}{2}e^{-4t}$. Умножение изображения на

e^{-3p} соответствует запаздыванию оригинала, поэтому

$$\frac{e^{-3p}}{(p+4)^3}\Leftrightarrow\frac{(t-3)^2}{2}e^{-4(t-3)}\eta(t-3).$$

В некоторых случаях удобно использовать формулу Дюамеля.

Пример 10. $F\ \ p\ =\frac{p^3}{p^2+4\ \ p^2+9}$. Найти $f\ \ t$.

Решение. $\dfrac{p^3}{(p^2+4)(p^2+9)}=p\cdot\dfrac{p}{p^2+4}\cdot\dfrac{p}{p^2+9}$;

$$\frac{p}{p^2+4}\Leftrightarrow\cos 2t;\ \frac{p}{p^2+9}\Leftrightarrow\cos 3t.$$

По формуле Дюамеля имеем:

$$p\cdot\frac{p}{p^2+4}\cdot\frac{p}{p^2+9}\Leftrightarrow\cos 2t\cdot\cos 0+\int_0^t\cos 2\tau\cdot\left(-3\sin 3(t-\tau)\right)d\tau=$$

$$=\cos 2t-\frac{3}{2}\int_0^t\left(\sin(3t-\tau)+\sin(3t-5\tau)\right)d\tau=$$

$$=\cos 2t-\frac{3}{2}\left(\cos(3t-\tau)+\frac{1}{5}\cos(3t-5\tau)\right)\Bigg|_0^t=$$

$$=\cos 2t-\frac{3}{2}\cos 2t+\frac{3}{2}\cos 3t-\frac{3}{10}\cos 2t+\frac{3}{10}\cos 3t=$$

$$=-\frac{4}{5}\cos 2t+\frac{9}{5}\cos 3t.$$

Можно находить $f(t)$ по $F(p)$, используя теорию вычетов (теорему разложения, которая выводится из (1)). А именно: если $F(p)$ – правильная рациональная дробь, то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt};p_k\right],$$

где p_k – полюсы функции $F(p)$.

В приложениях, главным образом электротехнических, важнее разновидность предыдущей формулы, когда $F(p)=\dfrac{A(p)}{pB(p)}$, где степень $A(p)$ не превосходит степени

$B\quad p$ и $B\quad p$ имеет простые корни, отличные от нуля. Тогда

$$\frac{A\quad p}{pB\quad p} \Leftrightarrow \frac{A\ \ 0}{B\ \ 0} + \sum_{k=1}^{L} \frac{A\quad p_k}{p_k B'\quad p_k} e^{p_k t}.$$

Упражнения. Найти оригиналы для данных функций $F(p)$:

1. $\dfrac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$. 2. $\dfrac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$.

3. $\dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$. 4. $\dfrac{1}{(p+1)^3(p+3)}$.

5. $\dfrac{1}{p^3(p+1)^4}$. 6. $\dfrac{1}{(p+2)^3(p-1)^2}$.

7. $\dfrac{a^4}{p(p^2+a^2)^2}$. 8. $\dfrac{1}{(p-2)^2(p+3)}$.

9. $\dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p++5)}$. 10. $\dfrac{1}{(p+3)^3(p+1)}$.

Ответы: 1. $-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{2}{3}e^{t}+\dfrac{1}{12}e^{-2t}$. 2. $\dfrac{1}{6}-e^{-t}+\dfrac{5}{2}e^{-2t}-\dfrac{5}{3}e^{-3t}$.

3. $\dfrac{1}{2}(t^2e^{2t}-4te^{2t}+6e^{2t}-2te^{t}-6e^{t})$. 4. $\dfrac{1}{8}((2t^2-2t+1)e^{-t}-e^{-3t})$.

5. $\dfrac{t^2}{2}-4t+10-e^{-t}(\dfrac{t^3}{6}+\dfrac{3}{2}t^2+6t+10)$.

6. $\dfrac{e^{t}}{27}(t-1)+\dfrac{e^{-2t}}{18}(t^2+\dfrac{4}{3}t+\dfrac{2}{3})$. 7. $1-\cos at-\dfrac{at}{2}\sin at$.

8. $\dfrac{1}{25}(e^{-3t}+(5t-1)e^{2t})$. 9. $e^{t}-e^{-t}(\cos 2t-\dfrac{3}{2}\sin 2t)$.

10 $\dfrac{1}{8}(e^{-t}-e^{-3t}(2t^2+2t+1))$.

7.4. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1. Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим применение правил и теорем операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем

Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t). \tag{7.5}$$

Требуется найти решение уравнения для $t \geq 0$ при начальных условиях

$$x(0) = x_0; x'(0) = x_0',\ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \tag{7.6}$$

Предполагаем, что искомое решение $x(t)$, его производные и правая часть $f(t)$ дифференциального уравнения являются оригиналами.

Схема решения дифференциального уравнения.

1. Заменяем искомую функцию, ее производные, входящие в данное дифференциальное уравнение и правую часть их изображениями. В результате получается так называемое операторное уравнение.

2. Решаем операторное уравнение относительно изображения искомой функции.

3. Переходим от изображения искомой функции к оригиналу.

Схема решения систем дифференциальных уравнений такая же.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения $x'' + x' - 12x = 3$, если $x(0) = 1, x'(0) = 0$.

Решение. Пусть $x(t) \Leftrightarrow X(p)$, тогда

$$x'(t) \Leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$

$$x''(t) \Leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p;\ 3 = \frac{3}{p}.$$

Переходя в уравнении от оригиналов к изображениям, получим операторное уравнение

$$p^2 X(p) - p + pX(p) - 1 - 12X(p) = \frac{3}{p}.$$

Отсюда $X(p) = \dfrac{3+p+p^2}{p^3+p^2-12p} = \dfrac{3+p+p^2}{p(p-3)(p+4)} = \dfrac{A(p)}{B(p)}$. Так как корни знаменателя $B(p)$ различны, то

$$x(t) = \frac{A(0)}{B'(0)}e^{0t} + \frac{A(-4)}{B'(-4)}e^{-4t} + \frac{A(3)}{B'(3)}e^{3t} = -\frac{1}{4} + \frac{15}{28}e^{-4t} + \frac{5}{7}e^{3t}.$$

Ответ: $x(t) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{15}{28}e^{-4t} + \dfrac{5}{7}e^{3t}$.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}$, $\quad x(0) = x'(0) = 0$.

Решение. Пусть

$$x(t) \Leftrightarrow X(p);\ x'(t) \Leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p);$$

$$x''(t) \Leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p); \qquad e^{3t} \Leftrightarrow \frac{1}{p-3}.$$

Запишем операторное уравнение:

$$p^2 X(p) + 3pX(p) + 2X(p) = \frac{2}{p-3}.$$

Откуда

$$X(p) = \frac{p}{(p-3)(p^2-3p+2)} = \frac{p}{(p-3)(p-2)(p-1)} =$$

$$= \frac{1}{p-1} - \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-3}.$$

Используя теорему линейности и формулы соответствия, имеем:

$x\ t\ = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}$.

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения $x''+4x'+4x = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$, если $x(0) = -1, x'(0) = 1$.

Решение. Пусть $x(t) \Leftrightarrow X(p)$, тогда

$$x'(t) \Leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) + 1;$$

$$x''(t) \Leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + p - 1;$$

$\cos t + 2\sin t \Leftrightarrow \dfrac{p}{p^2+1} + 2\dfrac{1}{p^2+1} = \dfrac{p+2}{p^2+1}$, и по теореме смещения $e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) \Leftrightarrow \dfrac{p+4}{(p+2)^2+1}$.

Переходя в уравнении от оригиналов к изображениям, получим операторное уравнение

$$p^2 X(p) + p - 1 + 4pX(p) + 4 + 4X(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Отсюда $X(p) = -\dfrac{p^3 + 7p^2 + 16p + 11}{((p+2)^2+1)(p+2)^2}$. Разложим изображение $X(p)$ на элементарные дроби. Имеем

$$-\frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 11}{((p+2)^2+1)(p+2)^2} = \frac{Ap+B}{(p+2)^2+1}.+\frac{C}{(p+2)^2} + \frac{D}{p+2},$$

или $-p^3 - 7p^2 - 16p - 11 = (Ap+B)(p+2)^2 + C((p+2)^2+1) +$
$+D(p+2)((p+2)^2+1).$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, находим $A = -1, B = -4, C = 1, D = 0.$

Тогда $X(p) = -\dfrac{p+4}{(p+2)^2+1} + \dfrac{1}{(p+2)^2}$. Перейдя к оригиналу, пользуясь свойством линейности и теоремой смещения, получаем искомое решение $x(t)=e^{-2t}(t-\cos t-2\sin t)$.

Ответ: $x(t)=e^{-2t}(t-\cos t-2\sin t)$.

Пример 4. Найти частное решение дифференциального уравнения $x''+4x'+4x=t^3e^{-2t}$, $\quad x(0)=1, \quad x'(0)=2$.

Решение.

$x(t)\Leftrightarrow X(p)$; $x'(t)\Leftrightarrow pX(p)-x(0)=pX(p)-1$;

$x''(t)\Leftrightarrow p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-p-2$;

$$t^3e^{-2t}\Leftrightarrow\frac{3!}{(p+2)^4};$$

$$p^2X(p)-p-2+4pX(p)-4+4X(p)=\frac{3!}{(p+2)^4};$$

$$X(p)\left(p^2+4p+4\right)=\frac{3!}{(p+2)^4}+p+2+4;$$

$$X(p)=\frac{3!}{(p+2)^6}+\frac{1}{p+2}+\frac{4}{(p+2)^2}.$$

Используя формулы соответствия и теорему линейности, имеем:

$$x(t)=\frac{1}{20}t^5e^{-2t}+e^{-2t}+4te^{-2t}.$$

Пример 5. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x''+5y'-4x=0, \\ y''-5x'-4y=0, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям :

$$x(0)=0; x'(0)=1; y(0)=0; y'(0)=0.$$

Решение. Пусть $x(t)\Leftrightarrow X(p)$, $y(t)\Leftrightarrow Y(p)$,тогда

$x'(t) \Leftrightarrow pX(p); y'(t) \Leftrightarrow pY(p); x''(t) \Leftrightarrow p^2X(p)-1; y''(t) \Leftrightarrow p^2Y(p).$

Преобразованная система имеет вид:

$$\begin{cases} (p^2-4)X(p)+5pY(p)=1, \\ -5pX(p)+(p^2-4)Y(p)=0. \end{cases}$$

Определим $X(p), Y(p)$:

$$X(p)=\frac{p^2-4}{(p^2+16)(p^2+1)};\ Y(p)=\frac{5p}{(p^2+16)(p^2+1)}.$$

Найдем по $X(p)$ и $Y(p)$ оригиналы $x(t)$ и $y(t)$. Пусть $A(p)=p^2-4; B(p)=p^4+17p^2+16;\ p_{1,2}=\mp 4i,\ p_{3,4}=\mp i,$

$B'(p)=4p^3+34p.$ Тогда

$$x(t)=\frac{A(4i)}{B'(4i)}e^{4it}+\frac{A(-4i)}{B'(-4i)}e^{-4it}+\frac{A(i)}{B'(i)}e^{it}+\frac{A(-i)}{B'(-i)}e^{-it}=$$

$$=2\operatorname{Re}(-\frac{i}{6}e^{4it})+2\operatorname{Re}(\frac{i}{6}e^{it})=2\operatorname{Re}(-\frac{i}{6}(\cos 4t+i\sin 4t))+$$

$$+2\operatorname{Re}(\frac{i}{6}(\cos t+i\sin t))=\frac{1}{3}(\sin 4t-\sin t).$$

$$Y(p)=\frac{5p}{(p^2+16)(p^2+1)};\ A(p)=5p;\ B(p)=p^4+17p^2+16.$$

$$y(t)=2\operatorname{Re}(-\frac{1}{6}e^{4it})+2\operatorname{Re}(\frac{1}{6}e^{it})=-\frac{1}{3}\operatorname{Re}(\cos 4t+i\sin 4t)+$$

$$+\frac{1}{3}\operatorname{Re}(\cos t+i\sin t)=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 4t)$$

Ответ: $x(t)=\frac{1}{3}(\sin 4t-\sin t);\ y(t)=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 4t).$

Пример 6. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2y-x, \quad x\ 0\ =1, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-4y, \quad y\ 0\ =1. \end{cases}$

Решение. Пусть $x(t) \Leftrightarrow X(p)$, $y(t) \Leftrightarrow Y(p)$, тогда

$$x'(t) \Leftrightarrow pX(p)-1,\quad y'(t) \Leftrightarrow pY(p)-1.$$

Система операторных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} (p+1)X(p)-2Y(p)=1, \\ X(p)+(p+4)Y(p)=1 \end{cases}$$ и является СЛАУ.

Решим ее по формуле Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -2 \\ 1 & p+4 \end{vmatrix} = p^2+p+4p+4+2 = p^2-5p+6.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & p+4 \end{vmatrix} = p+4+2 = p+6.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = p+1-1 = p.$$

$$X(p) = \frac{p+6}{p^2-5p+6} = \frac{p+6}{(p+2)(p+3)};$$

$$Y(p) = \frac{p}{(p+2)(p+3)}.$$

Раскладывая на простейшие дроби, имеем:

$$X(p) = \frac{4}{p+2} - \frac{3}{p+3};\ Y(p) = \frac{3}{p+3} - \frac{2}{p+2}.$$

Используя теорему линейности и таблицу соответствия, получаем:

$$x(t) = 4e^{-2t} - 3e^{-3t},\qquad y(t) = 3e^{-3t} - 2e^{-2t}.$$

Упражнения.

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

1. $x''+3x' = e^t;\ x(0)=0;\ x'(0)=-1.$

Ответ: $\frac{1}{4}e^{t}+\frac{5}{12}e^{-3t}-\frac{2}{3}$.

2. $x''-2x'=2e^{2t}; x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $\frac{1}{4}(1-e^{2t}+2te^{2t})$.

3. $4x''+12x'+9x=144e^{-\frac{3}{2}t}; x(0)=1, x'(0)=0,5.$

Ответ: $e^{-\frac{3}{2}t}(18t^{2}+2t+1)$.

4. $x''-2x'=e^{t}(t^{2}+t-3); \quad x(0)=2, x'(0)=2.$

Ответ: $e^{t}(e^{t}-t^{2}-t+1)$.

5. $x''+4x'+3x=\operatorname{sh}t\sin t; x(0)=0, x'(0)=1.$

Ответ:

$$-\frac{79}{170}e^{-3t}+0,3e^{-t}-\frac{3}{85}e^{t}\cos t+\frac{7}{170}e^{t}\sin t+0,2e^{-t}\cos t+0,1e^{-t}\sin t.$$

6. $x''+2x'+x=e^{-t}(\cos t+t); x(0)=1, x'(0)=-1.$

Ответ: $2e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-t}t^{3}-e^{-t}\cos t$.

7. $x''+6x'+8x=2e^{-t}(\cos 3t+1); x(0)=2, x'(0)=1.$

Ответ: $-\frac{25}{12}e^{-4t}+\frac{69}{20}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{1}{30}e^{-t}\cos 3t+\frac{1}{15}e^{-t}\sin 3t$.

8. $x''+2x'+2x=2e^{-t}\sin t; x(0)=x'(0)=1.$

Ответ: $e^{-t}(3\sin t+(1-t)\cos t)$.

9. $x'''-3x'+2x=8te^{-t}; x(0)=x'(0)=0; x''(0)=1.$

Ответ: $2te^{-t}+te^{t}-e^{t}+e^{-2t}$.

10. $x'''-x''+4x'-4x=5e^{-t}\sin t; x(0)=0; x'(0)=0; x''(0)=1.$

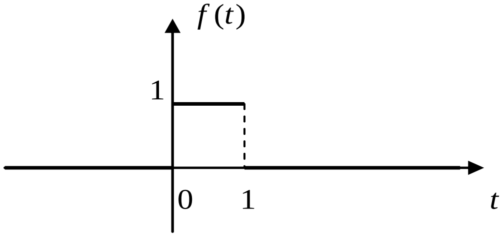
Ответ: $\frac{13}{20}\sin 2te-\frac{1}{5}\cos 2t+e^{t}(\frac{5}{6}-\cos t-\frac{1}{2}\sin t)$.

11. $x'''+2x''+x'+2e^{-2t}=0; x(0)=2; x'(0)=x''(0)=1.$

Ответ: $4-3e^{-t}+e^{-2t}$.

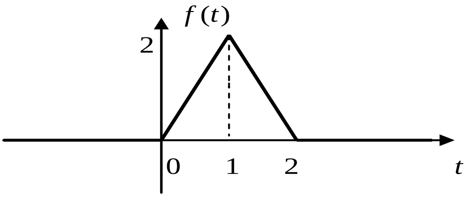
Найти частные решения дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями:

12. $x''+2x'+5x=f(t); x(0)=1; x'(0)=0.$



Ответ: $$\begin{gathered}0,4e^{-t}(2\cos 2t+\sin 2t)+0,2+0,04((2\cos 2(t-1)-\\-1,5\sin 2(t-1))e^{-(t-1)}+5(t-1)-2)\eta(t-1).\end{gathered}$$

13. $x''+4x=f(t); x(0)=x'(0)=0.$



Ответ: $$\begin{gathered}\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\eta(t)-((t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1))\eta(t-1)+\\+\frac{1}{2}((t-2)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2))\eta(t-2).\end{gathered}$$

14. $x''+4x'+4x=2e^{-t}(1-\eta(t-1)); x(0)=1; x'(0)=0.$

Ответ: $e^{-2t}+2e^{-t}-2\eta(t-1)(e^{-t}-te^{-2t-1})$.

15. $x''+4x=\sin t(1-\eta(t-\pi)); x(0)=0; x'(0)=1.$

Ответ: $\frac{1}{3}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin t+\eta(t-\pi)(\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{6}\sin 2t).$

16. $x''+x=f(t); x(0)=x'(0)=0.$

$$f(t)=\begin{cases}2,\ 0<t<1,\\ 4,\ t>1,\\ 0,\ t<0.\end{cases}$$

Ответ: $(2-\cos t)\eta(t)+(2-2\cos(t-1))\eta(t-1).$

17. $x''+9x=f(t); x(0)=0; x'(0)=1.$

$$f(t)=\begin{cases}t-1, & 1<t<2,\\ -t+3, & 2<t<3,\\ 0, & t<0, t>3.\end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{3}\sin 3t\eta(t)+\frac{1}{9}((t-1)-\frac{1}{3}\sin 3(t-1))\eta(t-1)-$

$-\frac{2}{9}((t-2)-\frac{1}{3}\sin 3(t-2))\eta(t-2)+\frac{1}{9}((t-3)-\frac{1}{3}\sin 3(t-3))\eta(t-3).$

Решить системы уравнений:

18. $\begin{cases}x'+y=0,\\ y'+x=0;\end{cases}$ $x(0)=1; y(0)=-1.$

Ответ: $x(t)=e^t; y(t)=-e^t$.

19. $\begin{cases}x+x'=y+e^t,\\ y+y'=x+e^t;\end{cases}$ $x(0)=y(0)=1.$

Ответ: $x(t)=e^t; y(t)=e^t$.

20. $\begin{cases}x'-y'-2x+2y=1-2t,\\ x''+2y'+x=0;\end{cases}$ $x(0)=y(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $x(t)=2(1-e^{-t}-te^{-t}), y(t)=2-t-2e^{-t}-2te^{-t}$.

21. $\begin{cases}x''-3x'+2x+y'-y=0,\\ -x'+x+y''-5y'+4y=0;\end{cases}$ $x(0)=x'(0)=y'(0)=0; y(0)=1.$

Ответ: $x(t)=\frac{1}{4}(e^t-e^{3t}+2te^{3t}); y(t)=\frac{1}{4}(5e^t-e^{3t}-2te^{3t})$.

22. $\begin{cases} x' + 2x + y = \sin t, \\ y' - 4x - 2y = \cos t; \end{cases}$ $\quad x(0) = 0; y(0) = 1.$

Ответ: $x(t) = 2\sin t - 3t, y(t) = 6t + 3 - 2\cos t - 3\sin t.$

23. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0; \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x(0) = x'(0) = 1, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{matrix}$

Ответ: $\begin{matrix} x(t) = \frac{1}{3}(e^t + 2\cos 2t + \sin 2t); \\ y(t) = \frac{1}{3}(2e^t - 2\cos 2t - \sin 2t). \end{matrix}$

24. $\begin{cases} x' + 2x + 4y = \frac{1}{2}\sin 2t, \\ y'' - x - 3y = -t; \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = x'(0) = 0; y'(0) = 1.$

Ответ: $\begin{matrix} x(t) = -2t - \frac{7}{36}\sin 2t + \frac{28}{9}\sin t - \frac{13\sqrt{2}}{36}\operatorname{sh}\sqrt{2}t; \\ y(t) = t + \frac{1}{36}\sin 2t - \frac{7}{9}\sin t + \frac{13\sqrt{2}}{36}\operatorname{sh}\sqrt{2}t. \end{matrix}$

25. $\begin{cases} x' - x + 2y = 0, \\ x'' - 2y' = 2t - \cos 2t; \end{cases}$

$x(0) = 0; y(0) = \frac{1}{2}; x'(0) = -1; y'(0) = 0.$

Ответ: $\begin{matrix} x(t) = -6 - 4t - t^2 + \frac{100}{17}e^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{17}\cos 2t + \frac{1}{34}\sin 2t; \\ y(t) = -1 - t - \frac{t^2}{2} + \frac{25}{17}e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{34}\cos 2t + \frac{9}{68}\sin 2t. \end{matrix}$

2. Применение формулы Дюамеля для решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При решении дифференциальных уравнений иногда удобно использовать формулу Дюамеля. В этом случае не требуется находить изображение правой части.

Пусть требуется найти частное решение дифференциального уравнения

$$L[x]=f(t)\ ;\ x(0)=x'(0)=...=x^{(n-1)}(0)=0, \tag{7.7}$$

где $L[x]=x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+a_2x^{(n-2)}+...+a_{n-1}x'+a_nx$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$L[x]=1,\ x(0)=x'(0)=...=x^{(n-1)}(0)=0. \tag{7.8}$$

Если $x_1(t)$ - решение задачи (7.8), то при помощи интеграла Дюамеля можно найти решение $x(t)$ задачи (7.7) с любой правой частью $f(t)$ и нулевыми начальными условиями:

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau \text{ или } x(t)=\int_0^t x_1(\tau)f'(t-\tau)d\tau. \tag{7.9}$$

Замечание. Задачу с ненулевыми начальными условиями заменой искомой функции всегда можно свести к задаче с нулевыми начальными условиями.

Пример 1. Найти решение уравнения $x''-x=\dfrac{1}{1+e^t}$,

удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=x'(0)=0$.

Решение. Найдем решение $x_1(t)$ задачи $x_1''-x_1=1, x_1(0)=x_1'(0)=0.$ Составим операторное уравнение $p^2X_1(p)-X_1(p)=\dfrac{1}{p}$. Отсюда $pX_1(p)=\dfrac{1}{p^2-1}$, поэтому $x_1'(t)=\operatorname{sh}t.$ По формуле (9) получим:

$$x(t)=\int_0^t \frac{1}{1+e^\tau}\operatorname{sh}(t-\tau)d\tau=\int_0^t \frac{e^{t-\tau}-e^{-t+\tau}}{2(1+e^\tau)}d\tau=\frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{1+e^\tau}d\tau-$$

$$-\frac{e^{-t}}{2}\int_0^t \frac{d(e^{\tau}+1)}{1+e^{\tau}} = -\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{e^t+1}{2} - \frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{e^{-\tau}de^{-\tau}}{e^{-\tau}+1} = -\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{e^t+1}{2} +$$

$$-\frac{e^t}{2}(e^t-1) + \frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{d(e^{-\tau}+1)}{e^{-\tau}+1} = -\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{e^t+1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^t}{2} + \frac{e^t}{2}\ln\frac{e^{-t}+1}{2} =$$

$$= \operatorname{sh} t \ln\frac{e^t+1}{2} + \frac{1}{2}[-te^t + e^t - 1].$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, т.е. $y\ 0\ = 0$, $y'\ 0\ = 0$.

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{1+t^2}.$$

Решение. Решаем сначала уравнение $y'' + 2y' + y = 1$ операционным методом:

$$y\ t\ \Leftrightarrow Y\ p\ ;\ y'\ t\ \Leftrightarrow pY\ p\ ;\ y''\ t\ \Leftrightarrow p^2Y\ p\ ;\ \frac{1}{p} \Leftrightarrow 1;$$

$$p^2Y\ p\ + 2pY\ p\ + Y\ p\ = \frac{1}{p};$$

$Y\ p\ = \dfrac{1}{p\ \ p+1\ ^2}$ разложим на простейшие дроби:

$$\frac{1}{p\ \ p+1\ ^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{\ p+1\ ^2};$$

$$1 = A\ \ p+1\ ^2 + B\,p\ \ p+1\ + C\,p;$$

$p = 0$, $A = 1$;

$p = -1$, $\qquad C = -1$;

$p = 1$, $1 = 4 + 2B - 1$, $B = -1$.

$$Y\ p\ = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{\ p+1\ ^2}.$$

Используя теорему линейности и формулы соответствия, получим:

$$y_1(t)=1-e^{-t}-te^{-t}, \qquad y_1'(t)=e^{-t}-e^{-t}+te^{-t}=te^{-t}.$$

Применяя формулу Дюамеля, имеем:

$$y(t)=\int_0^t (t-\tau)\, e^{-(t-\tau)}\cdot\frac{e^{-\tau}}{1+\tau^2}d\tau=e^{-t}\cdot\int_0^t\frac{t-\tau}{1+\tau^2}\, d\tau=$$

$$=e^{-t}\cdot t\int_0^t\frac{d\tau}{1+\tau^2}-e^{-t}\int_0^t\frac{\tau}{1+\tau^2}d\tau=e^{-t}\cdot t\cdot arctg\,\tau\Big|_0^t-\frac{1}{2}e^{-t}\cdot\ln\left|1+\tau^2\right|\Big|_0^t=$$

$$=e^{-t}\cdot t\cdot arctg\,t-\frac{1}{2}e^{-t}\ln\left(1+t^2\right).$$

Таким образом, решением данного уравнения будет функция $y(t)=e^{-t}t\,arctg\,t-\frac{1}{2}e^{-t}\ln\left(1+t^2\right)$.

Упражнения. С помощью интеграла Дюамеля найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

29. $x''-x'=\dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2};\ x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $\dfrac{1}{2}(e^t-1)-\ln\dfrac{1+e^t}{2}.$

30. $x''+2x'+x=\dfrac{e^{-t}}{1+t};\ x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $e^{-t}((t+1)\ln(t+1)-t).$

31. $x''-x'=\dfrac{e^{2t}}{2+e^t};\ x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $(e^t+2)\ln\dfrac{2+e^t}{3}-e^t+1.$

32. $x''-x'=\dfrac{1}{1+e^t};\ x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $e^t-1-(t+\ln 2)(e^t+1)+(e^t+1)\ln(e^t+1).$

33. $x''-x=\dfrac{1}{3+e^t};\ x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $\dfrac{1}{3}(e^t-1)-\dfrac{t}{9}e^t+\dfrac{1}{9}e^t\ln\dfrac{e^t+3}{4}.$

34. $x''+x=\dfrac{1}{1+\cos^2 t};\ x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $\cos t\,\mathrm{arctg}(\cos t)-\dfrac{\pi}{4}\cos t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\ln\left|\dfrac{\sin t-\sqrt{2}}{\sin t+\sqrt{2}}\right|.$

35. $x''-x=\mathrm{th}t;\ x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $-\mathrm{sh}\,t+2\,\mathrm{ch}\,t(\mathrm{arctg}\,e^t-\dfrac{\pi}{4}).$

36. $x'''+x'=\dfrac{1}{2+\sin t};\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$

Ответ:

$$\ln 2\cos t-\cos t\ln(2+\sin t)-t\sin t+\frac{2}{\sqrt{3}}(2\sin t+1)(\mathrm{arctg}\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}).$$

3. Применение преобразования Лапласа при расчете электрических цепей

Методы операционного исчисления широко используются при расчетах процессов, протекающих в электрических цепях.

Пусть $i(t)$ и $u(t)$, соответственно, ток и напряжение в цепи. Применение операторного метода основано на справедливости законов Кирхгофа для операторного тока $I(p)=i(t)$ и напряжения $U(p)=u(t)$. На основании закона Ома для основных элементов электрической цепи могут быть записаны следующие соотношения:

$$u_R(t) = Ri(t)$$

для сопротивления R,

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

для индуктивности L и

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + u_C(0)$$

для емкости C. Переходя к изображениям, отсюда получаем

$$U_R(p) = RI(p), U_L(p) = pLI(p) - Li(0),$$

$$U_C(p) = \frac{1}{pC}I(p) + \frac{1}{p}u_C(0).$$

Используя закон Ома в операторной форме, для произвольного участка цепи можем записать

$$U(p) = Z(p)I(p), \tag{7.10}$$

где $Z(p)$- операторное сопротивление указанного участка цепи. Для участков с сопротивлением R, индуктивностью L или емкостью C при нулевых начальных условиях операторное сопротивление имеет, соответственно вид:

$$Z_R(p) = R, Z_L(p) = Lp, Z_C(p) = \frac{1}{Cp}.$$

При ненулевых начальных условиях к имеющимся в цепи источникам э.д.с. добавляются дополнительные источники. Величины э.д.с. дополнительных источников определяются запасами энергии в индуктивности и емкости и равны в операторном виде, соответственно, $Li(0)$ и $-\frac{1}{p}u_C(0)$.

Соотношение (7.10) является основным для расчетов заданного участка цепи в операторной форме.

Пример 1. Найти ток $i(t)$ в цепи при подключении постоянной э.д.с. $e(t) = E$. Начальные условия нулевые.

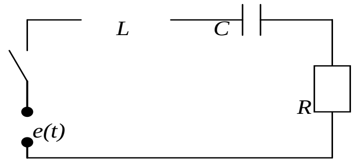


Рис. 28.

Решение. Так как $e(t) = E = \frac{E}{p}$, то, используя соотношение (7.10), находим:

$$Z(p)I(p) = E / p, \qquad (7.11)$$

где операторное сопротивление $Z(p)$ цепи имеет вид

$$Z(p) = Z_L(p) + Z_C(p) + Z_R(p) = Lp + \frac{1}{Cp} + R,$$

в силу нулевых начальных условий. Подставляя полученное выражение для $Z(p)$ в (2), находим

$$I(p) = \frac{E}{pZ(p)} = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{Cp}} = \frac{E}{L}\frac{1}{(p + \frac{R}{2L})^2 + (\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2})}. \qquad (7.12)$$

Для отыскания оригинала $i(t)$ следует рассмотреть три случая в зависимости от вида корней квадратного трехчлена в правой части выражения (7/12)

Пусть $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$, тогда по таблице изображений находим

$$i(t) = \frac{E}{(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}})L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}})t\ .$$

Пусть $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$, тогда по таблице изображений

находим $\quad i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}$.

Если $\dfrac{1}{LC} < \dfrac{R^2}{4L^2}$, то находим

$$i(t) = \frac{E}{\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)L} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t .$$

При расчете электрических цепей, когда воздействие на схему представляет собой функцию произвольного вида, полезно использовать интеграл Дюамеля. Сначала определяется переходная характеристика цепи - закон изменения напряжения или тока при подаче на вход системы единичного воздействия $e(t) = \eta(t)$. В этом случае, из соотношения (7.10) находим операторный ток $I_1(p) = \dfrac{1}{p} Z(p)$, где $Z(p)$ операторное сопротивление всей цепи.

Если теперь на вход схемы подается произвольное $e(t)$, то операторный ток $I(p)$ имеет вид

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = pI_1(p)U(p),$$

где $U(p) = e(t)$. Применяя формулу Дюамеля, окончательно находим:

$$i(t) = e(0)i_1(t) + \int_0^t e'(\tau)i_1(t-\tau)d\tau = e(0)i_1(t) + \int_0^t e'(t-\tau)i_1(\tau)d\tau =$$

$$= e(0)i_1(t) + e' * i_1. \tag{7.13}$$

Пример 3. Найти ток в RL- цепи при подключении э.д.с. $(t) = e^{\mu t}$.

Решение. Сначала определяем переходную характеристику цепи, в данном случае ток $i_1(t)$, возникающий в RL-цепи при подключении э.д.с. $e(t) = \eta(t)$. Имеем $i_1(t) = \dfrac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$.

Для определения тока $i(t)$ воспользуемся формулой (4). Предварительно вычислим второе слагаемое:

$$e'*i_1 = \int_0^t e'(t-\tau)i_1(\tau)d\tau = \frac{\mu}{R}\int_0^t e^{\mu(t-\tau)}(1-e^{-\frac{R}{L}\tau})d\tau =$$

$$= \frac{\mu}{R}e^{\mu t}\int_0^t (e^{-\mu\tau} - e^{-\tau(\mu+\frac{R}{L})})d\tau = \frac{\mu}{R}e^{\mu t}\left(-\frac{1}{\mu}e^{-\mu\tau}\Big|_0^t + \frac{1}{\mu+\frac{R}{L}} - \frac{1}{\mu}e^{-\tau(\mu+\frac{R}{L})}\Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{1}{L(\mu+\frac{R}{L})}(e^{\mu t} - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

Окончательно находим:

$$i(t) = e(0)i_1(t) + e'*i_1 = \frac{1}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R/L}{\mu+\frac{R}{L}}(e^{\mu t} - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

Упражнения.

1. Найти ток $i(t)$ в RC-цепи (последовательно включены сопротивление R и емкость C) при подключении постоянной э.д.с. $e(t) = E$, если $u_C(0) = u_0$.

2. Найти ток $i(t)$ в RL-цепи (последовательно включены сопротивление R и индуктивность L) при подключении постоянной э.д.с. $e(t) = E$.

3. Найти ток $i(t)$ в цепи, изображенной на рис.4, при подключении постоянной э.д.с. $e(t) = E$, если $u_C(0) = u_0$.

4. Найти ток в RL-цепи при включении синусоидальной э.д.с. $e(t) = E\sin\omega t.$,

5. Найти ток в RC-цепи, в которую при нулевых начальных условиях подключена $e(t) = Ete^{-\frac{1}{CR}t}$.

Ответы:

1. $\frac{E-u_0}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$. 2. $\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$.

3. $\dfrac{E-u_0}{(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}})L}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}})t$ при $\dfrac{1}{LC}>\dfrac{R^2}{4L^2}$;

$\dfrac{E-u_0}{L}te^{-\frac{R}{2L}t}$ при $\dfrac{1}{LC}=\dfrac{R^2}{4L^2}$;

$\dfrac{E-u_0}{(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}})L}e^{-\frac{R}{2L}t}\operatorname{sh}(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}})t$ при $\dfrac{1}{LC}<\dfrac{R^2}{4L^2}$.

4. $\dfrac{E}{R^2+L^2\omega^2}(L\omega e^{-\frac{R}{L}t}+R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t)$.

5. $\dfrac{E}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}(t-\dfrac{t^2}{2})$.

4. Применение преобразования Лапласа при решении уравнений с частными производными

Операционный метод применим не только при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, но и некоторых уравнений с частными производными, например, линейных уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда неизвестная функция зависит от двух переменных. С помощью преобразования Лапласа такое уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с параметром. Решая это уравнение и применяя к его решению обратное преобразование Лапласа по параметру, получаем решение исходной задачи.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Стержень длины l находится в состоянии покоя и один его конец закреплен, а к свободному концу приложена сила $A\sin\omega t$ направленная по оси стержня. Найти продольные колебания стержня $u(x,t)$ при заданных начальных и граничных условиях:

$$u(x,0)=0,\ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$$

$$u(0,t)=0,\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{A}{E}\sin\omega t, \qquad (7.14)$$

где E- модуль упругости (по закону Гука сила, действующая вдоль стержня, равна $A\sin\omega t=E\frac{\partial u}{\partial x}$, поэтому $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\frac{A}{E}\sin\omega t)$.

Уравнение колебания стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad (7.15)$$

где a – коэффициент, зависящий от материала стержня. Имеем

$$u(x,t)\Leftrightarrow U(x,p);\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\Leftrightarrow p^2U(x,p)-pu(x,0)-\frac{\partial u(x,0)}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\Leftrightarrow p^2U(x,p),\ \text{и}\ \ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Leftrightarrow\frac{d^2U(x,p)}{dx^2}.$$

Операторное уравнение, соответствующее уравнению (7.15) имеет вид

$$\frac{d^2U(x,p)}{dx^2}-\frac{p^2}{a^2}U(x,p)=0. \qquad (7.16)$$

Из (7.14) получаем граничные условия для уравнения (7.16)

$$\left.u(x,t)\right|_{x=0}=0\Leftrightarrow\ \left.U(x,p)\right|_{x=0}=0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\frac{A}{E}\sin\omega t\Leftrightarrow\left.\frac{\partial U(x,p)}{\partial x}\right|_{x=l}=\frac{A}{E}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \qquad (7.17)$$

Интегрируя уравнение (7.16), получаем $U(x,p)=\bar{c}_1 e^{-\frac{p}{a}x}+\bar{c}_2 e^{\frac{p}{a}x}$ или $U(x,p)=c_1\operatorname{ch}\frac{p}{a}x+c_2\operatorname{sh}\frac{p}{a}x.$

Пользуясь граничными условиями (7.17), определяем произвольные постоянные. Имеем $c_1=0$ и

$$c_2=\frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{1}{p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{p}{a}l}.$$

Таким образом, операторное уравнение (7.16) имеет решение

$$U(x,p)=\frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{a}p}{p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{l}{a}p}.$$

Обозначим $A(p)=\operatorname{sh}\frac{x}{a}p$ и $B(p)=p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{l}{a}p.$

Тогда $U(x,p)=\frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{A(p)}{B(p)}$ и

$$B'(p)=(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{l}{a}p+2p^2\operatorname{ch}\frac{l}{a}p+\frac{l}{a}p(p^2+\omega^2)\operatorname{sh}\frac{l}{a}p.$$

Решая уравнение $B(p)=0$ и принимая во внимание, что $\operatorname{ch}\frac{l}{a}p=\cos i\frac{l}{a}p,$ находим нули функции $B(p)$. Имеем

$$p=0,\ p_k=\pm i\omega_k,\ p=\pm i\omega,\ \text{где}\ \omega_k=\frac{\pi a}{l}(k-\frac{1}{2})(k=1,2,\ldots).$$

Функция $U(x,p)$ имеет простые полюсы $p=0,\ p=\pm i\omega,\ p_k=\pm i\omega_k\,(k=1,2,\ldots)$, определяющиеся нулями функции $B(p)$ (предполагаем, что условие резонанса отсутствует, то есть $\omega_k\neq\omega$). Оригинал $u(x,t)$ для изображения

$U(x,p)$ находим по теореме разложения. Имеем

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}\left(\left(\frac{A(p)}{B'(p)}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=0}+2\operatorname{Re}\left(\frac{A(i\omega)}{B'(i\omega)}e^{i\omega t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A(i\omega_k)}{B'(i\omega_k)}e^{i\omega_k t}\right)\right).$$

Подставляя в это равенство значения функций $A(p)$ и $B'(p)$ в полюсах, получаем

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}2\operatorname{Re}\left(\frac{i\sin\frac{\omega}{a}x}{-2\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}}e^{i\omega t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i\sin\frac{\omega_k}{a}xe^{i\omega_k t}}{\frac{l}{a}i\omega_k(\omega^2-\omega_k^2)i\sin\frac{l}{a}\omega_k}\right).$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t}{\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}}+\frac{2a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\frac{\omega_k}{a}x\sin\omega_k t}{(\omega_k^2-\omega^2)\omega_k}\right),$$

где $\omega_k=\dfrac{\pi a}{l}(k-\dfrac{1}{2})$, $k=1,2,\ldots$.

Пример 2. Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданным условиям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}+u=x,0<x<\infty,0<y<\infty, \qquad (7.18)$$

$$u(0,y)=y, \qquad (7.19)$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0. \qquad (7.20)$$

Решение. Предположим, что функция $u(x,y)$ и ее частные производные являются оригиналами по переменной x. Применим к (7.18) преобразование Лапласа по x при каждом значении y. Учитывая, что $u(x,y)\Leftrightarrow U(p,y)$,

$\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \Leftrightarrow p^2 U(p,y) - py,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow \dfrac{\partial U}{\partial y},\ \ x \Leftrightarrow \dfrac{1}{p^2}$, получим для функции $U(p,y)$ обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром p:

$$\frac{dU(p,y)}{dy} - (p^2+1)U(p,y) = -py - \frac{1}{p^2},\ 0 < y < \infty. \qquad (7.21)$$

Все условия задачи уже использованы. Но из всех решений уравнения (7.21) нам понадобится только такое, которое как функция параметра p является изображением по Лапласу. Найдем сначала общее решение уравнения (7.21). Для этого в данном случае можно снова применить преобразование Лапласа (то, что любое решение (7.21) является оригиналом, очевидно). Получим алгебраическое уравнение:

$$(q-(p^2+1))\,\mathrm{V}(p,q) = -\frac{p}{q^2} - \frac{1}{p^2 q} + U(p,0);$$

$$\mathrm{V}(p,q) = \frac{-p-q/p^2}{q^2(q-(p^2+1))} + \frac{U(p,0)}{q-(p^2+1)} = \qquad (7.22)$$

$$= \left(\frac{p}{(p^2+1)^2} + \frac{1}{p^2(p^2+1)}\right)\frac{1}{q} + \frac{p}{(p^2+1)}\frac{1}{q^2} + \left(-\frac{p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2(p^2+1)} + \right.$$

$$\left. + U(p,0)\right) \cdot \frac{1}{q-(p^2+1)}.$$

До сих пор функция $U(p,0)$ была произвольной. Выберем теперь ее таким образом, чтобы выражение в последних скобках равнялось нулю. В противном случае функция $U(p,y)$ будет содержать слагаемое $e^{(p^2+1)y}$, которое при $y > 0$ не является изображением по Лапласу. Учитывая сказанное, получаем из (7.22)

$$U(p,y)=\frac{p}{(p^2+1)^2}+\frac{1}{p^2(p^2+1)}+\frac{p}{(p^2+1)}y=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'+\frac{1}{p^2}-$$

$$-\frac{1}{p^2+1}+\frac{p}{(p^2+1)}y.$$

Найдем оригинал по изображению, получим

$$u(x,y)=\frac{1}{2}x\sin x+x-\sin x+\cos x\cdot y.$$

Легко проверить, что полученная функция и в самом деле является решением задачи (7.18), (7.19), (7.20). Вопрос о единственности решения этой задачи остается открытым.

Упражнения.

1.Найти решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

при следующих граничных и начальных условиях (n - натуральное число):

а) $u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=A\sin\frac{n\pi x}{l},\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0, 0\le x\le l;$

б) $u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=0,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=B\sin\frac{n\pi x}{l}0, 0\le x\le l;$

в) $u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=Ax(l-x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0, 0\le x\le l;$

г) $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0, u(x,0)=A\cos\frac{n\pi x}{l},\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0, 0\le x\le l;$

д) $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0, u(x,0)=0,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=B\cos\frac{n\pi x}{l}0, 0\le x\le l.$

2. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

при следующих граничных и начальных условиях (n - натуральное число):

а) $u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=A\sin\dfrac{n\pi x}{l}, 0\le x\le l;$

б) $u(0,t)=A, u(l,t)=0,\ u(x,0)=\dfrac{A}{l}(l-x), 0\le x\le l;$

в) $u(0,t)=0, \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0,\ u(x,0)=A\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}, 0\le x\le l;$

г) $u(0,t)=A, \lim\limits_{x\to\infty}u(x,t)=0,\ u(x,0)=0, x\ge 0;$

д) $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0, u(l,t)=A, u(x,0)=0, 0\le x\le l.$

Ответы:1.

а) $U(x,p)=\dfrac{Ap}{p^2+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}}\sin\dfrac{n\pi x}{l};\ u(x,t)=A\cos\dfrac{n\pi at}{l}\sin\dfrac{n\pi x}{l};$

б) $U(x,p)=\dfrac{B}{p^2+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}}\sin\dfrac{n\pi x}{l};\ u(x,t)=\dfrac{Bl}{n\pi a}\sin\dfrac{n\pi at}{l}\sin\dfrac{n\pi x}{l};$

в) $U(x,p)=2Aa^2\left(\dfrac{e^{-\frac{p}{a}x}+e^{-\frac{p}{a}(l-x)}}{1+e^{-\frac{p}{a}l}}-1\right)\dfrac{1}{p^3}+A\dfrac{x(l-x)}{p};$

$$u(x,t)=A(x(l-x)-a^2t^2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\eta(t-\frac{nl+x}{a})(t-\frac{nl+x}{a})^2+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\eta(t-\frac{nl-x}{a})(t-\frac{nl-x}{a})^2).$$

г) $U(x,p)=\dfrac{Ap}{p^2+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}}\cos\dfrac{n\pi x}{l};\ u(x,t)=A\cos\dfrac{n\pi at}{l}\cos\dfrac{n\pi x}{l};$

д) $U(x,p)=\dfrac{B}{p^2+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}}\cos\dfrac{n\pi x}{l}$; $u(x,t)=\dfrac{Bl}{n\pi a}\sin\dfrac{n\pi at}{l}\cos\dfrac{n\pi x}{l}$.

2.а) $U(x,p)=\dfrac{A}{p^2+\dfrac{n^2\pi^2}{a^2l^2}}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$; $u(x,t)=Ae^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2l^2}}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$;

б) $U(x,p)=\dfrac{A}{lp}(l-x)$; $u(x,t)=\dfrac{A}{l}(l-x)\eta(t)$;

в) $U(x,p)=\dfrac{A}{p+\dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4a^2l^2}}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}$;

$$u(x,t)=Ae^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4a^2l^2}}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l};$$

г) $U(x,p)=\dfrac{A}{p}e^{-a\sqrt{p}x}$; $u(x,t)=A\mathrm{Erf}\left(\dfrac{ax}{2\sqrt{t}}\right)$;

д) $U(x,p)=\dfrac{A\,\mathrm{ch}\,a\sqrt{p}x}{p\,\mathrm{ch}\,a\sqrt{p}l}$; $u(x,t)=$

$$=A\left(1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\frac{\pi}{a^2l^2}t}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)$$

Таблица изображений основных функций

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	6	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	7	$\mathrm{ch}\,\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	8	$\mathrm{sh}\,\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
4	$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$	9	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
5	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	10	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальные и интегральные исчисления: в 2 т. Т.2 / Н.С. Пискунов. М.: Наука, 2001. 576 с.

2. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа / П.И. Романовский. М.: Наука, 1980. 336 с.

3. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учеб пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Наука, 1981. 302 с.

4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: «Оникс 21век» «Мир и образование», 2003.

5. Ефимов А.В. Сборник задач по математике для втузов: в 3 ч. Ч.2 / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович; под ред. А.В. Ефимова. - М.: Наука,1986. 368 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Глушко Елена Георгиевна
Дубровская Алевтина Петровна

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В авторской редакции

Компьютерный набор Е.Г. Глушко

Подписано к изданию 25.05.2011.
Объем данных 6,5 Мб

ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14