

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования

«Воронежский государственный технический
университет»

Кафедра радиотехники

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам №3-4
для студентов направления 11.04.01 «Радиотехника»,
магистерская программа «Радиотехнические средства
обработки и защиты информации в каналах связи»

Воронеж 2025

УДК 621.39(075.8)
ББК 32.811я7

Составитель
д-р техн. наук А. Б. Токарев

Анализ и синтез дискретных фильтров: методические указания к лабораторным работам №3-4 для студентов направления 11.04.01 «Радиотехника», магистерская программа «Радиотехнические средства обработки и защиты информации в каналах связи» / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А. Б. Токарев. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2025. 40 с.

Содержат краткие сведения и рекомендации по подготовке к лабораторным занятиям, индивидуальные варианты заданий и указания по проведению исследований в рамках лабораторных работ №3-4 дисциплины «Цифровые алгоритмы обработки и демодуляции сигналов».

Предназначены для магистрантов направления 11.04.01 «Радиотехника», магистерская программа «Радиотехнические средства обработки и защиты информации в каналах связи».

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле «мРТ_ЛР_3_4_Дискретные фильтры.pdf»

Ил. 9. Табл. 3. Библиогр.: 6 назв.

УДК 621.39(075.8)
ББК 32.811я7

Рецензент – А.В. Башкиров, д-р техн. наук, зав. кафедрой конструирования и производства радиоаппаратуры ВГТУ

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ВВЕДЕНИЕ

Освоение дисциплины «Цифровые алгоритмы обработки и демодуляции сигналов» предполагает изучение студентами теоретических основ ЦОС, особенностей процессов дискретизации и квадратурной обработки сигналов, вопросов изменения частоты дискретизации, способов частотно-избирательной и адаптивной фильтрации сигналов. В соответствии с этим, методические указания содержат краткое теоретическое введение, определяющее круг вопросов, подлежащих изучению, домашнее задание к лабораторным исследованиям и методические рекомендации по проведению экспериментов. Работы выполняются побригадно (в малых исследовательских группах), что позволяет не только освоить навыки командной работы, но и способствует более глубокой проработке материалов за счет обсуждения получаемых результатов в малых исследовательских группах. Состав малых исследовательских групп (бригад) студенты согласуют с преподавателем на начальном этапе освоения учебного курса. При этом каждой бригаде присваивается номер **НБ**. Выполнение работ завершается защитой полученных результатов перед преподавателем.

Следует иметь в виду, что предусматриваемый данным пособием объем теории и лабораторных исследований является лишь необходимым минимумом. Студентам, заинтересованным в получении высококачественной подготовки необходимо расширять этот минимум чтением рекомендованной учебной литературы и проработкой дополнительных вопросов по индивидуальному согласованию с преподавателем.

1. Краткое знакомство с системой компьютерной математики MATLAB

Одним из наиболее удачных средств анализа и синтеза дискретных фильтров является система компьютерной математики MATLAB, поэтому до проведения исследований дискретных фильтров следует ознакомиться с основами работы в этой системе, например, с использованием учебной литературы [1-3], а также приобрести соответствующие навыки, выполнив первую работу текущего лабораторного цикла.

Минимальное знакомство с основами MATLAB предполагает ознакомление с учебной литературой хотя бы в объеме [1, с. 34-41, 60-88] или [2, с. 11-44, 75-90].

2. Основные характеристики аналоговых линейных систем и их анализ в MATLAB

Многие цифровые, дискретные и аналоговые фильтры относятся к классу линейных устройств, обладают похожими свойствами и описываются однотипными характеристиками. Как следствие, до исследования особенностей цифровых и дискретных фильтров необходимо восстановить в памяти информацию об импульсных и частотных характеристиках линейных устройств, а также о взаимосвязях между ними.

Как следствие, при подготовке к работе с дискретными фильтрами следует предварительно вспомнить основные характеристики аналоговых систем, например по весьма удачной книге А.Б. Сергиенко [3, с. 87-91], в которой помимо теоретических основ можно найти немало удачных и поучительных примеров анализа подобных устройств в системе MATLAB, и/или по учебным пособиям [4, 6].

3. Теорема Котельникова. Особенности дискретизации радиосигналов

3.1. Теоретические основы

Цель работы – экспериментальное исследование процесса дискретизации и восстановления сигналов по их дискретным отсчетам. Предполагается, что дискретизация осуществляется без квантования; влияние шумов квантования на качество обработки сигналов будет исследоваться отдельно.

При подготовке к работе следует изучить теоретические основы дискретизации сигналов по учебным пособиям [3, с. 127-142; 4, с. 39-45].

3.1.1. Теоретической основой дискретизации сигналов служит теорема Котельникова. В первом приближении она утверждает, что сигнал, спектр которого ограничен частотой F_m , может быть без погрешности восстановлен по отсчетам своих мгновенных значений, взятых с частотой дискретизации

$$F \geq 2 \cdot F_m. \quad (3.1)$$

И формально для сигналов, обладающих ограниченной энергией, вариант $F = 2 \cdot F_m$ действительно справедлив в предположении, что для восстановления будет использоваться идеальный фильтр.

На практике же необходимо учитывать следующие факты:

а) импульсы конечной длительности имеют бесконечно широкий спектр (хотя и затухающий по мере роста частоты);

б) в рамках теоретических расчетов можно попытаться использовать в операциях восстановления характеристики идеального фильтра (хотя сделать это без привнесения погрешности проблематично), но физическая реализация процесса восстановления потребует использования реального фильтра, что будет приводить к некоторому росту погрешности.

Как следствие, при осуществлении дискретизации и восстановления сигналов на практике следует руководствоваться положениями теории, но реализовывать процедуры необходимо с учетом неустраняемых отклонений свойств реальных сигналов и устройств от их идеальных моделей.

3.1.2. Известно, что замена континуального сигнала $s(t)$ дискретизированным

$$s_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k \cdot T) \cdot T \cdot \delta(t - k \cdot T), \quad (3.2)$$

где $T = 1/F$ - интервал дискретизации сигнала, вызывает периодическое по частоте повторение спектральной плотности исходного сигнала (рис. 3.1)

$$\dot{G}_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{G}_s(f - n \cdot F), \quad (3.3)$$

где

$$\dot{G}_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (3.4)$$

– комплексная спектральная плотность детерминированного сигнала, получаемая из временного описания при помощи прямого преобразования Фурье.

3.1.3. На рис. 3.1 представлен спектр дискретизированного сигнала для случая, когда частота дискретизации заметно превышает минимально допустимое значение в $2 \cdot F_M$ и перекрытия спектральных полос при дискретизации не происходит. Пунктиром показана АЧХ «восстанавливающего фильтра», т.е. фильтра, на который следует подавать воздействие (3.2) чтобы по совокупности отсчетных значений восстановить исходный сигнал $s(t)$. Выходной сигнал может быть рассчитан как

$$s_B(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k \cdot T) \cdot T \cdot h_{вф}(t - k \cdot T), \quad (3.5)$$

где $h_{вф}(t)$ – импульсная характеристика восстанавливающего фильтра.

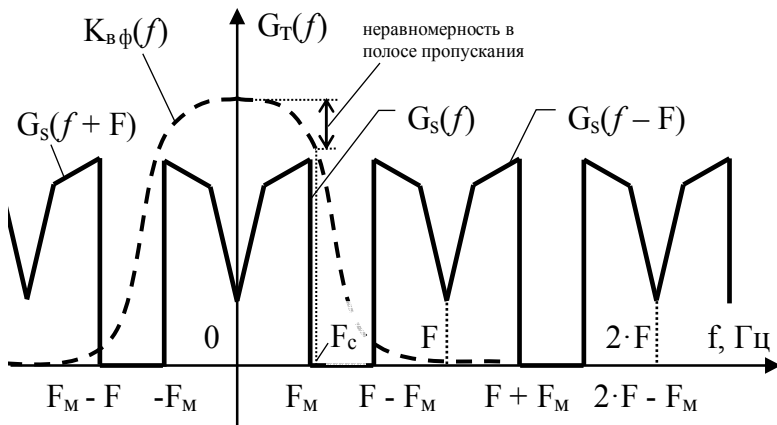


Рис. 3.1. Спектральная плотность дискретизированного сигнала

Из характера перекрытия функции $K_{вф}(f)$ со спектром (3.3) видно, что источниками погрешности при восстановлении сигнала $s(t)$ являются:

- а) неидеальные фильтрующие свойства восстанавливающего фильтра, из-за которых на выходе этого фильтра частично сохраняются элементы высокочастотных копий спектра исходного сигнала;
- б) неравномерность АЧХ фильтра на частотах основной полосы спектра сигнала $s(t)$.

Для улучшения качества фильтрации необходим фильтр с минимальной неравномерностью в полосе пропускания и максимальной прямоугольностью АЧХ, что предполагает использование фильтра высокого порядка, сложного в изготовлении и настройке. Для снижения остроты проблемы следует при дискретизации использовать частоту $F \gg 2 \cdot F_M$.

3.1.4. Ещё одним источником погрешности служит проблематичность формирования на входе восстанавливающего фильтра воздействия (3.2). На практике вместо последовательности дельта-функций Дирака на вход фильтра подают последовательность прямоугольных импульсов, модулированных по амплитуде отсчетами исходного сигнала (рис. 3.2а). Аналитически сигнал $s_{T\text{реал}}(t)$ представляет собой свертку дискретизированного сигнала (3.2) с прямоугольным импульсом $T^{-1} \cdot \text{rect}(t/T)$. Такие прямоугольные импульсы будут

иметь спектр $\dot{G}_{rect}(\omega) = \text{sinc}(0,5\omega T)$, а спектр свертки будет определяться произведением спектров её компонент.

Таким образом, спектр сигнала $s_{T \text{ реал}}(t)$, формируемого по отсчетам сигнала $s(t)$ и подаваемого на восстанавливающий фильтр, будет определяться соотношением

$$\dot{G}_T(f) = \text{sinc}(\pi f T) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{G}_s(f - n \cdot F). \quad (3.6)$$

Наличие множителя « $\text{sinc}()$ » влечет завал высокочастотных составляющих спектра (рис. 3.2б).

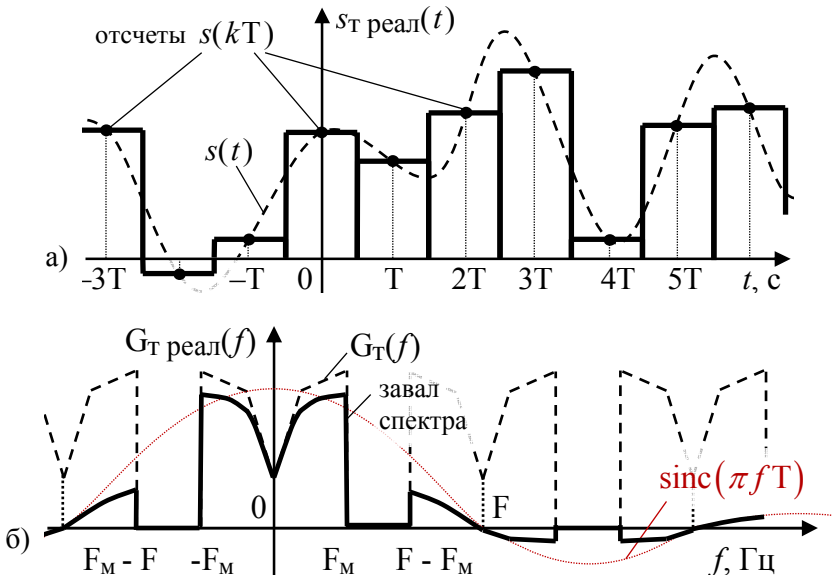


Рис. 3.2. Реальный дискретизированный сигнал, подаваемый на вход восстанавливающего фильтра, и его спектр

3.1.5. При работе с радиочастотными узкополосными сигналами их цифровая обработка осложняется формальной необходимостью использования высокой частоты дискретизации из-за высокочастотного расположения спектра сигнала. Однако полезная информация, как правило, определяется не несущей частотой, а законами изменения амплитуды и фазы сигнала. Соответственно, интерес для обра-

ботки представляет не сам сигнал, а его комплексная огибающая $\dot{A}(t) = I(t) + j \cdot Q(t)$. Исходный высокочастотный сигнал связан со своей комплексной огибающей соотношением

$$s(t) = \operatorname{Re}\{\dot{A}(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\} = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (3.7)$$

где ω_0 – центральная частота спектра сигнала. Для узкополосных радиосигналов $\dot{A}(t)$ представляет собой комплексное низкочастотное колебание; его спектр занимает полосу частот $[-F_{\text{МА}} \dots + F_{\text{МА}}]$, где $F_{\text{МА}} \ll \omega_0/2\pi$. Тогда, очевидно, для дискретизации комплексной огибающей требуется частота дискретизации $F \geq 2 \cdot F_{\text{МА}}$ существенно более низкая, чем для самого радиосигнала (а, согласно (3.7), колебания $\dot{A}(t)$ достаточно для восстановления и самого сигнала $s(t)$).

Проанализируем результат умножения $s(t)$ на гармонические колебания $\cos(\omega_0 t)$ и $\sin(\omega_0 t)$:

$$\begin{aligned} s(t) \cdot \cos(\omega_0 t) &= A(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \cdot \cos(\omega_0 t) = \\ &= 0,5 \cdot A(t) \cdot \cos(\varphi(t)) + 0,5 \cdot A(t) \cdot \cos(2\omega_0 t + \varphi(t)) = \\ &= 0,5 \cdot \operatorname{Re}\{\dot{A}(t)\} + 0,5 \cdot A(t) \cdot \cos(2\omega_0 t + \varphi(t)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(t) \cdot \sin(\omega_0 t) &= A(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \cdot \sin(\omega_0 t) = \\ &= -0,5 \cdot A(t) \cdot \cos(\varphi(t)) + 0,5 \cdot A(t) \cdot \cos(2\omega_0 t - \varphi(t)) = \\ &= -0,5 \cdot \operatorname{Im}\{\dot{A}(t)\} + 0,5 \cdot A(t) \cdot \cos(2\omega_0 t - \varphi(t)). \end{aligned}$$

Отделяя в каждом из полученных выражений низкочастотную компоненту от высокочастотной, можно сформировать комплексную огибающую, а дополнив каждый из каналов обработки аналого-цифровым преобразователем, можно получить схему, так называемой, квадратурной дискретизации радиосигналов (рис. 3.3).

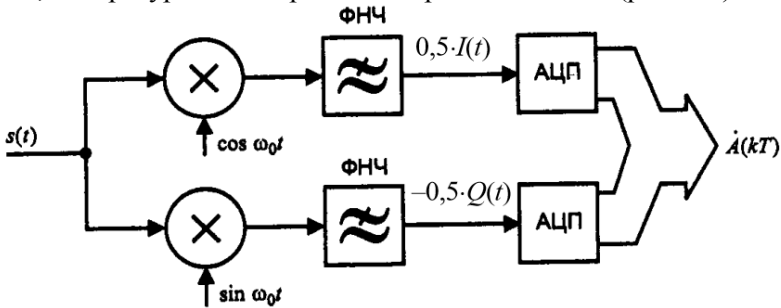


Рис. 3.3. Схема квадратурной дискретизации радиосигналов

Аналогично, с использованием квадратурных составляющих $\cos(\omega_0 t)$ и $\sin(\omega_0 t)$, производится восстановление радиосигнала по отсчетам его комплексной огибающей:

$$s(t) = I(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - Q(t) \cdot \sin(\omega_0 t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (3.8)$$

где в отношении восстановления компонент $I(t)$ и $Q(t)$ остаются справедливыми все замечания из п. 3.1.3-3.1.4.

3.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

3.2.1. Для анализа причин возникновения погрешностей при дискретизации имеет смысл сравнивать спектральные характеристики исходного, дискретизированного и восстановленного сигналов. Интегральным же показателем успешности представления сигнала его дискретными отсчетами может служить среднеквадратическая погрешность восстановления сигнала из последовательности его отсчетов.

3.2.2. Отправляемый на вход восстанавливающего фильтра сигнал, состоящий из совокупности прямоугольных импульсов с амплитудами, определяемыми последовательностью отсчетов сигнала, может быть сформирован в MATLAB с помощью функции «pulstran». Её аргументами служат:

- массив t моментов времени, для которых необходимо сформировать значения выходного «столбчатого» сигнала;
- массив d , характеризующий задержки (столбец 1) и амплитуды (столбец 2) прямоугольных импульсов сигнала;
- аргумент '`rectpuls`', определяющий форму импульсов, из которых будет формироваться «столбчатый» сигнал;
- аргумент $\tau_{\text{имп}} = T$, определяющий длительность импульсов, формирующих сигнал.

Для формирования сигнала $s_{\text{г реал}}(t)$, соответствующего, к примеру, сигналу $s(t)$, имеющему форму трапеции, можно использовать М-код:

```
clear variables; close all;  
% функция s_t(t) определяет сигнал в виде трапеции:
```

```

s_t = @(t,As,Ts) As.*( (4 .* t ./ Ts) .* ((t>=0) & (t<Ts/4)) ...
    + 1 .* ((t>=Ts/4) & (t<3*Ts/4)) ...
    + (4 - 4 .* t ./ Ts) .* ((t>=3*Ts/4) & (t<Ts)) ...
    );
% амплитуда и длительность формируемого сигнала:
As = 10; tau = 10.e-3;
% физические частота и интервал дискретизации:
F = 5000; T = 1 / F; beta = 1;
% набор моментов времени, в которые берутся отсчеты
tk = 0 : T : tau;
% набор отсчетов сигнала, взятых с интервалом T
s_arr = s_t( tk, As, tau );
% массив «настроек» для функции pulstran():
d = [ tk; s_arr ];
% частота и интервал дискретизации при моделировании:
outF = 150*F; outT = 1 / outF;
% частота и интервал дискретизации при моделировании:
t = 0 : outT : 2 * tau; % ← «2 * tau» взято с запасом
% итоговый «столбчатый» сигнал с инт. дискр-ции outT
sTreal = beta .* pulstran(t,d,'rectpuls',T/beta);

```

Естественно, для формирования сигнала $s_{T \text{ реал}}(t)$, соответствующего иному сигналу $s(t)$ в приведенном коде необходимо будет заменить стартовую часть, определяющую форму сигнала, подлежащего дискретизации, либо определить этот сигнал в независимом М-файле. Также следует перепроверить и при необходимости скорректировать массив отсчетных точек «tk» и массив точек моделирования «t».

3.2.3. Для осуществления операции восстановления (сглаживания сигнала $s_{T \text{ реал}}(t)$) необходимо синтезировать восстанавливающий фильтр; это можно сделать по аналогии с процедурами, уже освоенными в предыдущей лабораторной работе. К примеру, если предполагается целесообразным использовать в качестве восстанавливающего низкочастотный фильтр Чебышева 5-го порядка с частотой среза 1800 Гц, то для синтеза фильтра и расчета отклика этого фильтра на сигнал $s_{T \text{ реал}}(t)$ можно использовать М-код:

```

% параметры синтезируемого фильтра
R2 = 5; rp = 1.0; Wn2 = 2 * pi * 1800;

```

```

% полиномы числителя и знаменателя хар-ки фильтра
[bs,as] = cheby1(R2,rp,Wn2,'s');
% системная характеристика фильтра
sys = tf(bs,as);
% вычислим реакцию фильтра на сигнал  $s_{T\text{реал}}(t)$ 
s2 = lsim( sys, sTreal, t );
% апостроф в конце выражения не является обязательным
% и используется, чтобы превратить вектор-столбец
% в вектор-строку

```

Если для восстановления будет необходим иной фильтр, то в представленный код нужно будет ввести корректировку.

3.2.4. При расчете погрешности необходимо принять во внимание, что восстанавливающий фильтр является устройством инерционным, и сигнал на выходе фильтра появляется с некоторым запаздыванием «tz» по отношению к исходному. Это запаздывание не является ошибкой, а потому при оценивании погрешности сигнал $s_2(t)$ следует сравнивать со смещенной на tz копией $s_1(t)$ исходного сигнала $s(t)$. Для оценки задержки tz и формирования задержанной копии $s_1(t)$ можно воспользоваться приводимой далее функцией, которую следует оформить как отдельный файл «makeEqDelay.m»:

```

function [ itz s1 ] = makeEqDelay( s, s2 )
len = max( length( s ), length( s2 ) );
if length( s ) < len, s( end+1 : len ) = 0; end
if length( s2 ) < len, s2( end+1 : len ) = 0; end
xx = xcorr( s, s2 );
[ mv, mi ] = max( xx );
itz = ((length(xx)+1)/ 2 - mi);
s1 = zeros( 1, len ); s1(itz+1:end) = s(1:end-itz);
end

```

3.2.5. Показателем погрешности восстановления будем считать долю энергии сигнала ошибки по отношению к энергии самого исходного сигнала. Полагая, что оптимально задержанная во времени копия исходного сигнала обозначена как $s_1(t)$, а восстановленный сигнал обозначается как $s_2(t)$, для расчета величины погрешности (в процентах) можно предложить код

```

E1 = sum( s1 .^ 2 );
E21 = sum( (s2 - s1) .^ 2 );
result = 100 * E21 / E1;

```

Поиск минимального значения предложенного показателя для разных вариантов дискретизации и разных восстанавливающих фильтров позволит выявить вариант, гарантирующий наивысшее качество представления сигнала его дискретными отсчетами. Возможный вид сигнала и результата его восстановления по дискретным отсчетам показан на рис. 3.4.



Рис. 3.4. Пример восстановления сигнала трапецевидной формы по его дискретным отсчетам

3.3. Выполнение лабораторных исследований

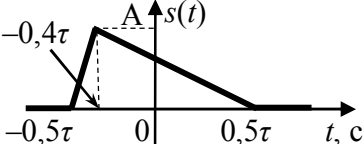
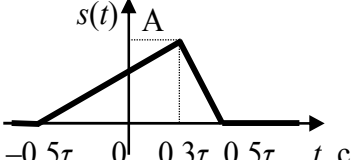
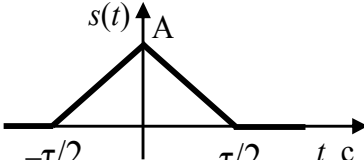
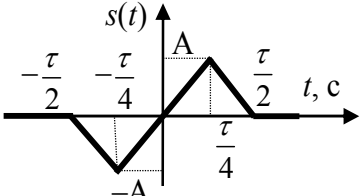
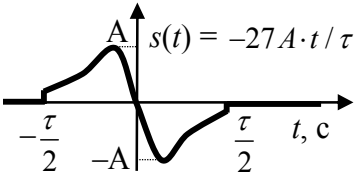
Этап 1. Проверка корректности работы процедуры оценивания погрешности восстановления сигналов

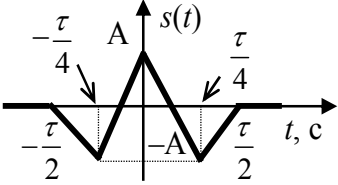
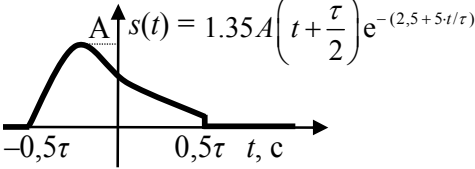
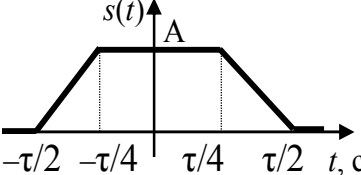
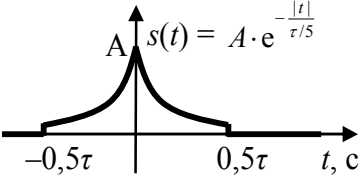
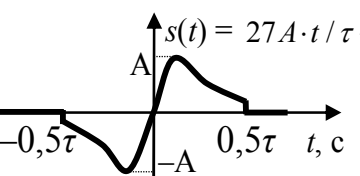
3.3.1. Запустите систему MATLAB, в каталоге, где предполагается хранить М-сценарии, создайте файл «makeEqDelay.m», представленный в п. 3.2.4 и предназначенный для формирования копий сигнала, с расположением на оси времени минимизирующим различие сопоставляемых сигналов .

3.3.2. Сформируйте в редакторе системы MATLAB код для создания «персонального» сигнала из табл. 3.1, сформируйте сигнал $s_1(t) = s(t)$ и $s_2(t) = s(t-0,25\tau)$. Создайте М-код, позволяющий рассчиты-

вать относительную погрешность при замене сигнала $s_1(t)$ сигналом $s_2(t)$. Убедитесь, что при сопоставлении сигналов $s_1(t)$ и $s(t)$ наблюдается нулевая погрешность, а для сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ погрешность $\text{result} > 0$ (см. п. 3.2.5).

Таблица 3.1

Индив. вариант	Анализируемый сигнал	Параметры
1, 11	 <p>The graph shows a signal $s(t)$ on a coordinate system with time t on the horizontal axis and amplitude $s(t)$ on the vertical axis. The signal is zero for $t < -0.5\tau$ and $t > 0.5\tau$. It rises linearly from $t = -0.5\tau$ to a peak value of A at $t = -0.4\tau$. From the peak, it falls linearly, crossing the t-axis at $t = 0.5\tau$, and remains at zero for $t > 0.5\tau$.</p>	$A = 4,0 \text{ В}$ $\tau = 0,2 \text{ мс}$ <hr/> $f_0 = 0,4 \text{ МГц}$
2, 12	 <p>The graph shows a signal $s(t)$ on a coordinate system with time t on the horizontal axis and amplitude $s(t)$ on the vertical axis. The signal is zero for $t < -0.5\tau$ and $t > 0.5\tau$. It rises linearly from $t = -0.5\tau$ to a peak value of A at $t = 0.3\tau$. From the peak, it falls linearly to zero at $t = 0.5\tau$ and remains at zero for $t > 0.5\tau$.</p>	$A = 5,0 \text{ В}$ $\tau = 1 \text{ мс}$ <hr/> $f_0 = 50 \text{ кГц}$
3, 13	 <p>The graph shows a signal $s(t)$ on a coordinate system with time t on the horizontal axis and amplitude $s(t)$ on the vertical axis. The signal is zero for $t < -\tau/2$ and $t > \tau/2$. It rises linearly from $t = -\tau/2$ to a peak value of A at $t = 0$. From the peak, it falls linearly to zero at $t = \tau/2$ and remains at zero for $t > \tau/2$.</p>	$A = 2,0 \text{ В}$ $\tau = 0,5 \text{ мс}$ <hr/> $f_0 = 0,1 \text{ МГц}$
4, 14	 <p>The graph shows a signal $s(t)$ on a coordinate system with time t on the horizontal axis and amplitude $s(t)$ on the vertical axis. The signal is zero for $t < -\tau/2$ and $t > \tau/2$. It rises linearly from $t = -\tau/4$ to a peak value of A at $t = \tau/4$. It falls linearly from the peak to a trough value of $-A$ at $t = -\tau/4$, and then rises linearly to zero at $t = \tau/2$.</p>	$A = 25 \text{ В}$ $\tau = 2 \text{ мс}$ <hr/> $f_0 = 50 \text{ кГц}$
5, 15	 <p>The graph shows a signal $s(t)$ on a coordinate system with time t on the horizontal axis and amplitude $s(t)$ on the vertical axis. The signal is zero for $t < -\tau/2$ and $t > \tau/2$. It rises smoothly to a peak value of A at $t = -\tau/2$, falls smoothly to a trough value of $-A$ at $t = \tau/2$, and then rises smoothly to zero at $t = \tau/2$.</p>	$s(t) = -27A \cdot t / \tau \cdot e^{-\frac{ t }{\tau/10}}$ $A = 6,0 \text{ В}$ $\tau = 20 \text{ мкс}$ <hr/> $f_0 = 2,5 \text{ МГц}$

Индив. вариант	Анализируемый сигнал	Параметры
6, 16		$A = 2,0 \text{ В}$ $\tau = 0,5 \text{ мс}$ $f_0 = 0,1 \text{ МГц}$
7, 17		$A = 1,5 \text{ В}$ $\tau = 2 \text{ мс}$ $f_0 = 50 \text{ кГц}$
8, 18		$A = 2,5 \text{ В}$ $\tau = 250 \text{ мкс}$ $f_0 = 0,2 \text{ МГц}$
9, 19		$A = 6,0 \text{ В}$ $\tau = 20 \text{ мкс}$ $f_0 = 2 \text{ МГц}$
10, 20		$A = 12 \text{ В}$ $\tau = 1 \text{ мс}$ $f_0 = 0,1 \text{ МГц}$

Этап 2. Первичный подбор параметров
восстанавливающего фильтра

3.3.3. По аналогии с подходом, изложенным в л/р №1 сформируйте М-код для расчета спектральной плотности амплитуд «персо-

нального» сигнала из табл. 3.1. На основе анализа спектра оцените приближенно максимальную частоту спектра сигнала (по критерию охвата не менее 90% его энергии), сделайте стартовый выбор частоты дискретизации F_1 .

3.3.4. Добавьте в М-сценарий код синтеза восстанавливающего фильтра 3-го порядка с неравномерностью характеристики в полосе пропускания 0,1...0,3 дБ с частотой среза $F_{cut1} = F_1/2$, а также ещё двух аналогичных фильтров, но с частотами среза на 20% больше и на 20% меньше F_{cut1} .

3.3.5. Рассчитайте (аналогично п. 3.3.3) спектральную плотность амплитуд сигнала, воздействующего на восстанавливающий фильтр, и сигнала, возникающего на выходе восстанавливающего фильтра после фильтрации. Сопоставьте их со спектром исходного сигнала; при наличии грубых отклонений скорректируйте частоту дискретизации и/или параметры фильтра(ов).

Этап 3. Исследование показателей качества восстановления сигнала по его дискретным отсчетам

3.3.6. В соответствии с рекомендациями из пп. 3.2.3-3.2.5 осуществите восстановление сигнала по его дискретным отсчетам, сопоставляя относительные погрешности, сопутствующие использованию фильтров с разными частотами среза.

Если наилучший результат будет характеризоваться погрешностью, превышающей 1%, за счет повышения частоты дискретизации F_1 и коррекции характеристик восстанавливающего фильтра добейтесь снижения погрешности.

Если обеспечиваемая погрешность менее 0,25% попробуйте снижать частоту дискретизации F_1 пока погрешность не увеличится до значений 0,5...1 %.

3.3.7. Возьмите результат из п. 3.3.6 за базовый проанализируйте, сколь малой погрешности восстановления можно достигнуть при увеличении частоты дискретизации до значения $2 \cdot F_1$ и при её уменьшении до значения $0,7 \cdot F_1$.

Этап 4. Проверка влияния на качество восстановления
длительности импульсов в составе сигнала, подаваемого
на восстанавливающий фильтр

3.3.8. За счет изменения параметра «beta», определяющего степень укорочения протяженности прямоугольного импульса по отношению к интервалу дискретизации (см. М-код из п. 3.2.2), проанализируйте влияние формы сигнала, подаваемого на вход восстанавливающего фильтра, на качество восстановления сигнала по его дискретным отсчетам.

Внимание! Параметр «beta» - целочисленный!

Этап 5. Исследование особенностей квадратурной
дискретизации радиосигналов (опциональный этап)

3.3.9. Сформируйте М-код, позволяющий продискретизировать с частотой дискретизации F_1 из п. 3.3.6 высокочастотный сигнал вида

$$s(t) = A(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi),$$

где $A(t)$ – ранее исследовавшийся импульс из табл. 3.1, частота f_0 определяется последней колонкой табл. 3.1, а фаза φ формируется как случайное число из диапазона $0 \dots 2\pi$.

3.3.10. Сформируйте в соответствии с положениями п. 3.1.5 вектор отсчетов комплексной огибающей $\dot{A}(t)$ такого радиосигнала, используя в качестве ФНЧ низкочастотный фильтр Чебышева 5-го порядка с частотой среза $F_s = 0,45 \cdot F_1$ и граничной частотой задержания сигнала $0,5 \cdot F_1$.

3.3.11. Промоделируйте восстановление квадратурных составляющих радиосигнала и восстановление самого радиосигнала $s(t)$ на основе (3.8). Сопоставьте восстановленный сигнал с исходным колебанием $s(t)$.

Все полученные в ходе исследований результаты кратко опишите в выводах к лабораторной работе.

3.4. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Что представляет собой дискретизированный сигнал? Почему каждый отсчёт идеального дискретизированного сигнала взвешен с дельта-функцией? Как выглядит спектр дискретизированного сигнала?

ла? Как он связан со спектром исходного непрерывного сигнала и чем от него отличается? Как зависит этот спектр от частоты дискретизации сигнала?

2. Сформулируйте теорему Котельникова применительно к дискретизации и восстановлению видеосигналов. Почему частоту дискретизации сигнала следует выбирать по теореме Котельникова? Ответ аргументируйте с частотных позиций. Чем следует восстанавливать исходный видеосигнал? Каковы должны быть характеристики такого устройства?

3. Для чего при восстановлении непрерывного сигнала по дискретным отсчётам требуется фильтр нижних частот? Из каких соображений следует выбирать полосу пропускания такого фильтра? Почему в случае, когда полоса пропускания восстанавливающего фильтра значительно превышает высшую частоту спектра исходного сигнала F_M , частоту дискретизации нельзя выбирать из условия: $F = 2 \cdot F_M$? При каком соотношении между высшей частотой спектра исходного сигнала и частотой дискретизации фильтр должен быть идеальным?

4. Почему при использовании теоремы Котельникова на практике возникают погрешности? Укажите возможные причины возникновения погрешностей, охарактеризуйте каждую в отдельности. Укажите возможные способы уменьшения этих погрешностей. Ответ аргументируйте с частотных позиций.

5. Изобразите спектры двух дискретизированных сигналов, имеющих одинаковую форму исходных непрерывных сигналов, равные интервалы между отсчётами, но обладающих существенно разной длительностью. Для какого дискретизированного сигнала качество восстановленного сигнала будет хуже, если их подать на один и тот же восстанавливающий фильтр?

6. Почему с увеличением длительности дискретизированного сигнала (при фиксированной частоте дискретизации и правильно выбранной полосе пропускания ФНЧ) погрешность восстановленного сигнала уменьшается? Как это согласуется с данными, полученными в лабораторной работе?

7. Изобразите спектры двух дискретизированных сигналов, имеющих одинаковую форму исходных непрерывных сигналов и равные длительности, но отличающихся интервалом между отсчётами. Если оба сигнала будут поданы на один и тот же восстанавли-

вающий фильтр, то в каком случае качество восстановленного сигнала будет выше?

8. Почему при фиксированной полосе пропускания восстанавливающего ФНЧ и неизменном количестве отсчётов сигнала увеличение частоты дискретизации может приводить сначала к уменьшению погрешности восстановления, а затем к её росту?

9. Чем отличаются спектры идеального и реального (с конечной длительностью отсчётов) дискретизированных сигналов? Как влияет конечная длительность отсчётных импульсов на погрешность восстановления сигнала? При каких условиях увеличение длительности отсчётов приводит к улучшению качества восстановления, при каких – к снижению?

10. Можно ли с помощью реального фильтра восстановить абсолютно точно (без какой-либо погрешности) непрерывный сигнал, уменьшая сколь угодно интервал между отсчётами дискретизированного сигнала? увеличивая сколь угодно его длительность сигнала? Ответ аргументируйте.

11. Какой должна быть импульсная характеристика восстанавливающего фильтра, чтобы форма восстановленного непрерывного сигнала (с ограниченным спектром) отличалась от исходного сигнала как можно меньше? Чем отличается импульсная характеристика реального фильтра, который применяется в качестве восстанавливающего в лабораторной работе? Как это отличие сказывается на форме восстановленных сигналов?

12. Сформулируйте теорему Котельникова применительно к дискретизации узкополосных радиосигналов. Чем определяется при этом частота дискретизации радиосигнала? Какое устройство, и с какими параметрами может быть использовано для восстановления радиосигнала по его дискретным отсчётам?

13. Изложите суть и технологию дискретизации комплексной огибающей узкополосного радиосигнала. Как определяется в этом случае минимальная частота дискретизации огибающей? Каким образом производится восстановления радиосигнала по дискретным отсчётам его комплексной огибающей?

4. Характеристики дискретных систем. Нерекурсивные и рекурсивные фильтры

При подготовке к работе следует изучить способы определения характеристик нерекурсивных и рекурсивных дискретных фильтров по учебным пособиям [3, с. 189-210; 4, с. 59-62].

4.1. Теоретические основы

4.1.1. Дискретным фильтром называют линейное устройство, предназначенное для обработки дискретных сигналов (последовательностей дискретных отсчетов) функционирующее в соответствии с правилом

$$s_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n \cdot s_1(k-n) + \sum_{m=0}^{M-1} a_m \cdot s_2(k-m). \quad (4.1)$$

где $s_1(k)$ - отсчеты входного, $s_2(k)$ - отсчеты выходного сигнала, а константы b_n и a_m - коэффициенты прямой и обратной передачи сигнала в ветвях фильтра (индексы n и m обозначают число тактов, на которые задерживаются соответственно входной и выходной сигналы до воздействия на данную ветвь).

Графически такое устройство принято отображать структурной схемой, показанной на рис. 4.1, где треугольники - это масштабирующие устройства, блоки с пометкой "Г" - устройства задержки сигналов на один такт, а элемент со значком "+" - многовходовой сумматор.

Как уравнение (4.1), так и структурная схема, показанная на рис. 4.1, однозначно определяют свойства фильтра, однако более универсальными способами описания фильтра являются его импульсная и частотная характеристики.

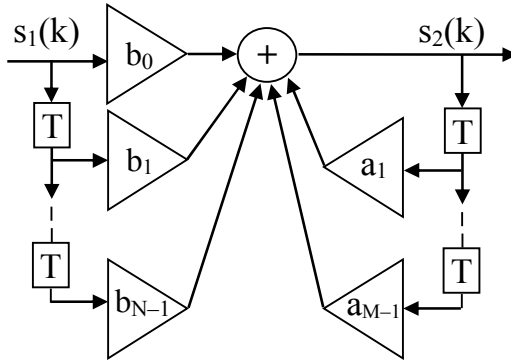


Рис. 4.1. Структурная схема дискретного фильтра

4.1.2. Импульсной характеристикой дискретного фильтра называют безразмерную последовательность чисел $h(m)$, соответствующую реакции этого фильтра на единичный отсчет, воздействующий на вход фильтра в начальный момент времени. Из линейности фильтра следует, что его реакция на произвольную входную последовательность отсчетов $s_1(k)$ равна

$$s_2(k) = \sum_{m=-\infty}^k h(k-m) \cdot s_1(m) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m) \cdot s_1(k-m). \quad (4.2)$$

Выражение (4.2) является дискретным аналогом интеграла Дюамеля.

Пределы суммирования в (4.2) соответствуют принципу причинности, утверждающему, что реакция не может опережать воздействие и потому импульсная характеристика любого реализуемого фильтра удовлетворяет соотношению $h(m) \equiv 0$ при $m < 0$. Для идеальных фильтров пределы суммирования расширяются до бесконечных, а само выражение (4.2) превращается в классическую дискретную свертку функций $h(m)$ и $s_1(k)$.

4.1.3. Комплексный коэффициент передачи дискретного фильтра представляет собой комплексное число, модуль которого определяет во сколько раз после прохождения через фильтр увеличивается амплитуда гармонического колебания, а аргумент - какое приращение получает при этом начальная фаза колебания. Можно показать, что с импульсной характеристикой и масштабными коэффициентами ветвей фильтра его комплексный коэффициент передачи связан соотношением

$$\dot{K}_T(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) \cdot e^{-j\omega m T} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n \cdot e^{-j\omega n T}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} (-a_m) \cdot e^{-j\omega m T}}. \quad (4.3)$$

4.1.4. Применение Z-преобразования при анализе дискретных и цифровых фильтров позволяет преобразовать разностное уравнение (4.1) в алгебраическое уравнение, связывающее Z-образы сигналов на входе и выходе фильтра

$$\dot{S}_2(z) = H(z) \cdot \dot{S}_1(z). \quad (4.4)$$

где $\dot{S}_1(z)$ и $\dot{S}_2(z)$ – результаты Z-преобразования соответственно входного и выходного сигналов, а $\dot{H}(z)$ – системная функция фильтра, определяемая соотношением

$$\dot{H}(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) \cdot z^{-m} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n \cdot z^{-n}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} (-a_m) \cdot z^{-m}}. \quad (4.5)$$

Системная функция $\dot{H}(z)$ дискретного фильтра является аналогом его комплексного коэффициента передачи, рассчитанным (в отличие от последнего) на работу в комплексной плоскости z и более удобным для анализа дискретных сигналов вследствие простоты применения теоремы о вычетах (см. пособие по практическим занятиям) для нахождения реакции фильтра на заданное воздействие.

4.1.5. Для обеспечения возможности применять дискретные фильтры на практике необходимо гарантировать их устойчивость. Устойчивым называется фильтр, сигнал на выходе которого однозначно определяется входным воздействием. Для устойчивости фильтра необходимо, в частности, чтобы после прекращения действия входного сигнала отклик фильтра носил затухающий характер. Математическим условием устойчивости фильтра является выполнение неравенства

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |h(m)| < \infty . \quad (4.6)$$

где $h(m)$ – импульсная характеристика дискретного фильтра.

При анализе устойчивости дискретных фильтров, задаваемых их структурными схемами, правило (4.6) является не слишком удобным, так как требует, во-первых, нахождения импульсной характеристики (обычно бесконечной и весьма громоздкой), а, во-вторых, оценки сходимости ряда (4.6). В подобных случаях выгодно оценивать устойчивость непосредственно по системной функции фильтра:

Для устойчивости дискретного (цифрового) фильтра необходимо и достаточно, чтобы все полюсы z_i его системной функции находились на z -плоскости внутри окружности единичного радиуса

$$|z_i| < 1 \quad \text{для всех } i < M . \quad (4.7)$$

В частности, нерекурсивные фильтры, т. е. фильтры у которых $a_m = 0$ для всех $m \geq 1$, всегда устойчивы.

4.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

4.2.1. Для исследования свойств дискретных и цифровых фильтров в системе MATLAB имеется много удобных инструментов. Часть из них специально предназначены для анализа эффектов, связанных с квантованием коэффициентов фильтров и с представлением (и обработкой) данных с использованием чисел ограниченной разрядности; подобные инструменты будут анализироваться применительно к синтезу цифровых фильтров в следующей работе. В текущем же исследовании будут задействованы инструменты MATLAB, подходящие для работы как с цифровыми, так и дискретными фильтрами (т.е. фильтрами, не предполагающими ограничений на разрядность представления данных).

4.2.2. Для осуществления прямого и обратного Z -преобразования, необходимых для работы с системной функцией $\dot{H}(z)$, могут оказаться полезными функции MATLAB «ztrans» и «invtrans», а отображение на комплексной z -плоскости нулей и полюсов $\dot{H}(z)$, полезное для анализа устойчивости дискретных и цифровых фильтров, можно осуществить с помощью функции «zplane»:

В качестве входных аргументов этой функции выступают либо векторы-столбцы нулей и полюсов \mathbf{z} и \mathbf{p} , либо векторы-строки весовых коэффициентов полиномов числителя \mathbf{b} и знаменателя \mathbf{a} передаточной функции цифрового фильтра соответственно. В качестве отличительного признака для двух указанных способов задания свойств цифрового фильтра используется тип входного аргумента (вектор-столбец или вектор-строка).

Поскольку работа данной функции сводится к простому нахождению корней полиномов числителя и знаменателя, то она применима как к цифровым, так и к аналоговым системам. Единственным нюансом является наличие на графике окружности единичного радиуса, которая для аналоговых систем не имеет особого смысла.

Пример использования функции «zplane» для анализа свойств полосового эллиптического фильтра четвертого порядка с неравномерностью в полосе пропускания 0,5 дБ, затуханием в полосе задержания 50 дБ и нормированными (по отношению к $f_{\text{Найквиста}} = F/2$) границами полосы пропускания 0,2...0,4 показан на рис. 4.2.

```
% параметры синтезируемого полосового фильтра
R2 = 4; rp = 0.5; rs = 50; Wn = [ 0.2 0.4 ];
% синтез числителя и знаменателя фильтра
[b,a] = ellip(R2,rp,rs,Wn);
% отображение полюсов и нулей фильтра на Z-плоскости
zplane(b,a); grid on;
```

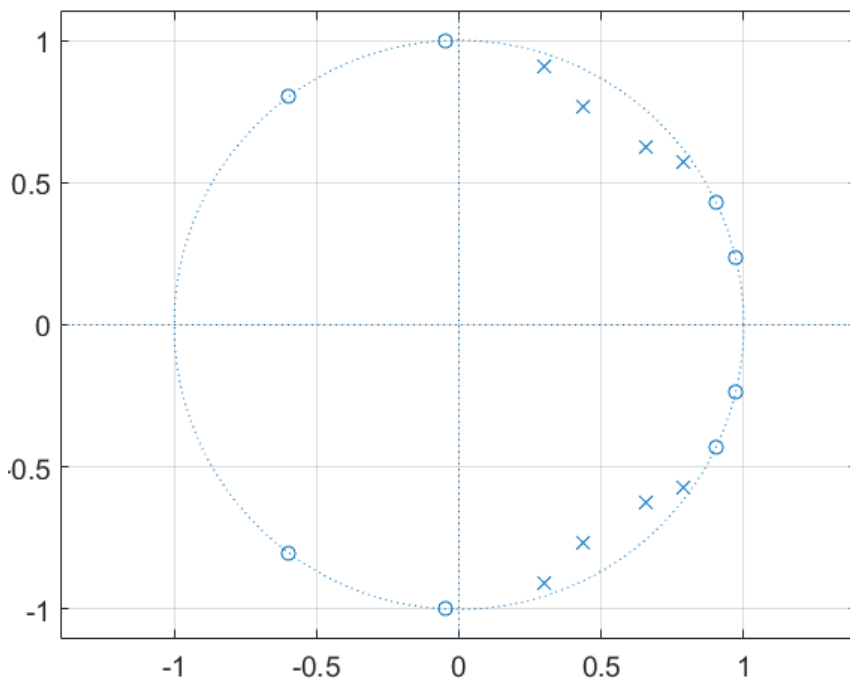


Рис. 4.2. Пример отображения на Z -плоскости полюсов и нулей эллиптического фильтра при помощи функции «zplane»

Для получения импульсной характеристики дискретного фильтра предназначена функция «impz». Пример получаемого с ее помощью результата показан на рис. 4.3:

```
n = 60;      % число отображаемых отсчетов ИХ
F = 20000;  % частота дискретизации в герцах (необязат.)
impz(b,a,n,F);
```

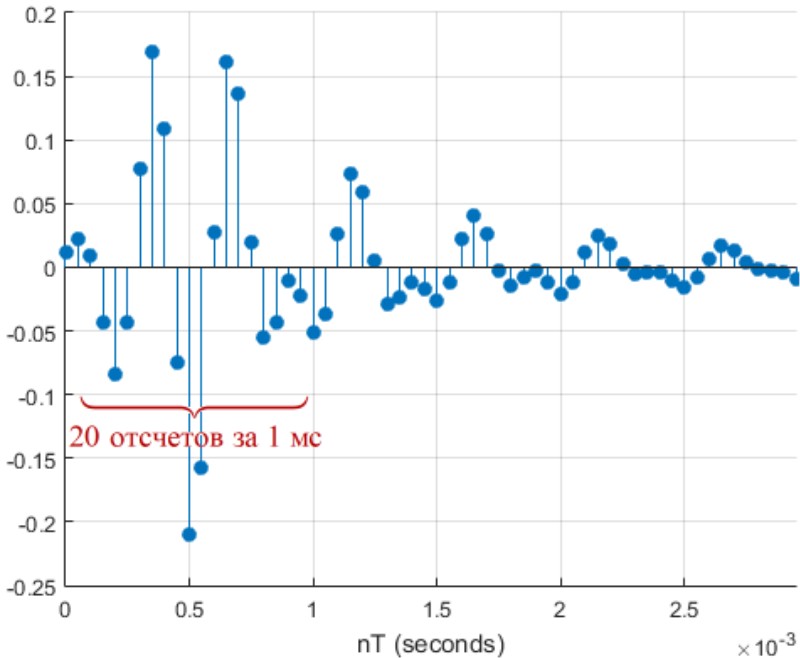


Рис. 4.3. Импульсная характеристика полоснопропускающего фильтра, отображаемая функцией «`impz`»

Оценить изменения группового времени задержки дискретного фильтра можно с помощью функции «`grpdelay`». Она возвращает n -мерные вектора `gd` и `w`, содержащие групповую задержку и частоты (в радианах), на которых будет производиться оценка.

```
[ gd, w ] = grpdelay( b, a, n );
```

Вместо `n` можно непосредственно указать вектор частот, для которых следует оценивать групповое время задержки.

Использование функции `grpdelay()` для анализируемого в данном пункте фильтра даёт результаты, показанные на рис. 4.4. Как следует из представленного рисунка, даже в полосе пропускания фильтра групповое время задержки не является стабильным, а на её границах (нормированные частоты 0,2 и 0,4) наблюдается заметное увеличение времени задержки сигналов, что означает: фильтрация сигналов, содержащих спектральные составляющие с частотами порядка 0,2 и 0,4 частоты Найквиста, может сопровождаться заметным изменением их формы.

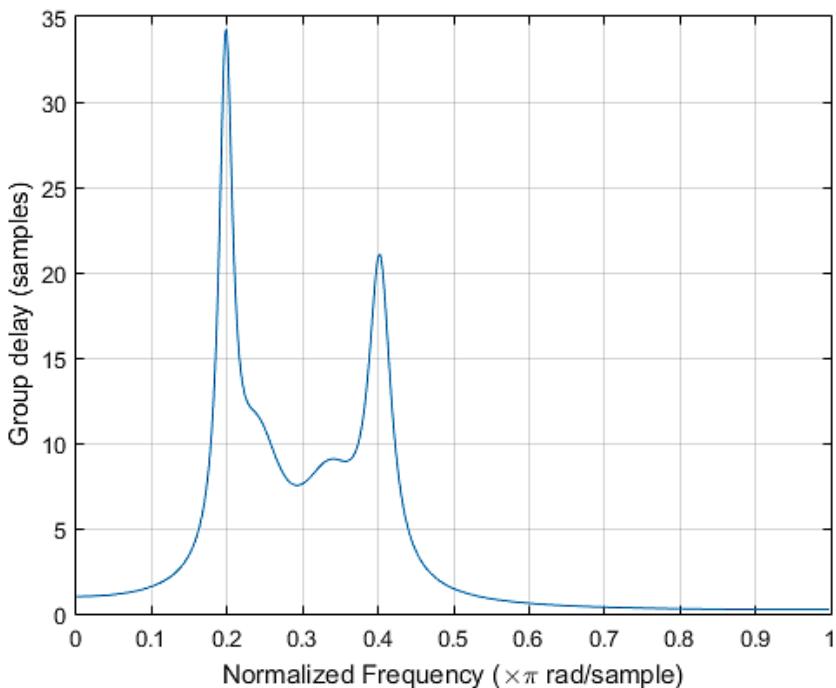


Рис. 4.4. Анализ группового времени задержки для анализируемого полоснопропускающего фильтра

4.2.3. Если анализируемый фильтр характеризуется конечной импульсной характеристикой \mathbf{h} (КИХ-фильтр), то для определения отклика такого фильтра на воздействие последовательности отсчетов \mathbf{s} можно использовать функцию расчета дискретной свертки «conv»:

$$z = \text{conv}(s, h);$$

Длина выходного вектора составляет при этом $\text{length}(s) + \text{length}(h) - 1$.

4.2.4. Более универсальной функцией, реализующей в MATLAB дискретную фильтрацию, является функция «filter». В простейшем виде она имеет следующий синтаксис:

$$y = \text{filter}(b, a, x);$$

Здесь \mathbf{b} – вектор коэффициентов нерекурсивной части фильтра (числителя функции передачи), \mathbf{a} – вектор коэффициентов рекурсивной части фильтра (знаменателя функции передачи), \mathbf{x} – входной сигнал. Возвращаемой величиной является вектор отсчетов

выходного сигнала фильтра. Если первый элемент вектора a не равен 1, значения векторов b и a нормируются – делятся на $a(1)$.

Функция `filter()` позволяет анализировать как нерекурсивные, так и рекурсивные фильтры, реализуя в том числе и бесконечные импульсные характеристики. И, во-вторых, функция `filter()` возвращает результат, длина которого равна длине входного сигнала, что позволяет организовать блочную обработку сигнала. Для этого функция `filter()` позволяет задавать и считывать внутреннее состояние дискретного фильтра за счет дополнительных входного и выходного параметров:

```
[y, z2] = filter(b, a, x, z1);
```

Здесь $z1$ – начальное внутреннее состояние фильтра (входной параметр), $z2$ – конечное внутреннее состояние фильтра (выходной параметр). По умолчанию предполагается нулевое внутреннее состояние фильтра.

Для понимания понятия вектора внутреннего состояния фильтра нужно знать, как организованы вычисления в функции `filter()`. Данная функция реализует рекурсивный дискретный фильтр в транспонированной форме (см. рис. 4.8 в [3]).

Блочную обработку, базирующуюся на доступе к внутреннему состоянию фильтра, можно реализовать, в частности, так:

```
% 1-й блок данных  
[ y(1:N), z ] = filter( b, a, x(1:N) );  
% 2-й блок данных  
[ y(N+1:2*N), z ] = filter( b, a, x(N+1:2*N), z);
```

Если текущее внутреннее состояние фильтра не известно, но известны предыдущие отсчеты входного и выходного сигналов, состояние фильтра можно получить с помощью функции «`filtic`» («`ic`» обозначает начальное состояние — *initial conditions*):

```
z = filtic(b, a, y, x);
```

Здесь b и a – параметры фильтра, y – предыдущие значения выходного сигнала, x – предыдущие значения входного сигнала.

Предыдущие значения сигналов задаются в обратном порядке: первые элементы векторов x и y – это последние значения входного и выходного сигналов, вторые элементы – предпоследние значения

и т. д. Число элементов векторов x и y , необходимое для расчетов, на единицу меньше длин векторов b и a соответственно. При недостаточной длине векторов x и/или y они дополняются нулями, при чрезмерной длине лишние элементы игнорируются. Вектор x может не задаваться, тогда он считается заполненным нулями.

Возвращаемый функцией результат – вектор-столбец внутреннего состояния фильтра.

4.2.5. Во всех предыдущих примерах формирование векторов b и a коэффициентов, определяющих работу фильтра, производилось самой системой MATLAB и не было потребности в детальном исследовании элементов структурной схемы фильтра. При возникновении же необходимости проанализировать в MATLAB уже имеющийся фильтр, заданный своей структурной схемой, необходимо **ОБРАТИТЬ ОСОБОЕ ВНИМАНИЕ** на порядок переноса в MATLAB сведений о коэффициентах усиления в ветвях дискретного фильтра. Этот порядок проиллюстрирован на рис. 4.5:

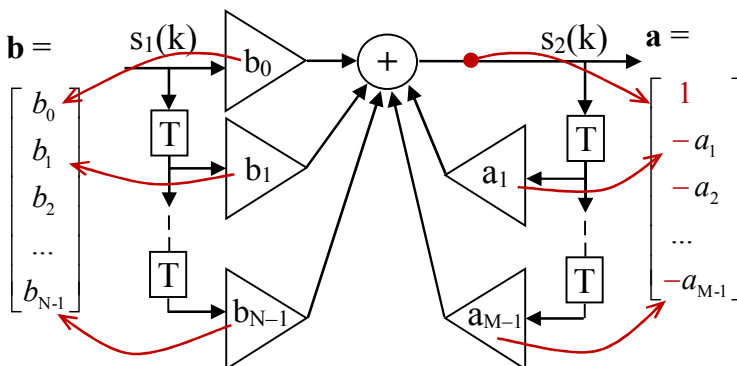


Рис. 4.5. Формирование MATLAB-описания дискретного фильтра по его структурной схеме

Таким образом, если для вектора b характерна перенумерация элементов (т.е. $b(1) = b_0$, $b(2) = b_1$ и т.д.), то вектор a формируется в соответствии со знаменателем формул (4.3) и (4.5) – в его начало добавляется фиксированный элемент $a(1) = \langle 1 \rangle$, а далее следует соответствие $a(2) = -a_1$, $a(3) = -a_2$ и т.д.

Как следствие, если при выполнении расчетов в MATLAB для заданных структурной схемой фильтров будут наблюдаться некие па-

радоксальные результаты, то необходимо в первую очередь проверить корректность заполнения векторов **b** и **a**, опираясь на рис. 4.5.

4.3. Выполнение лабораторных исследований

Этап 1. Исследование характеристик нерекурсивного дискретного фильтра

4.3.1. Задайте вектор коэффициентов рекурсивной части фильтра **a** = [1], вектор коэффициентов нерекурсивной части фильтра **b** в соответствии с данными из табл. 4.1, а тактовую частоту цифрового фильтра (частоту дискретизации) равной

$$F = \begin{cases} 2500 \cdot N_{в\ гр}, & \text{если } N_{в\ гр} - \text{четный} \\ 2500 \cdot (N_{в\ гр} + 1), & \text{если } N_{в\ гр} - \text{нечетный} \end{cases} \quad (4.8)$$

Внесите структурную схему этого дискретного фильтра в отчёт.

Таблица 4.1

Весовые коэффициенты нерекурсивного фильтра

Номер в группе	$b_0 \dots b_{\max}$
1, 11	1/16, 1/8, 1/8, 3/16, 3/16, 1/8, 1/8, 1/16
2, 12	-1/8, 0, +1/8, +3/8, +3/8, +1/8, 0, -1/8
3, 13	1/16, 1/16, 1/12, 1/8, 3/16, 3/16, 1/8, 1/12, 1/16, 1/16
4, 14	-1/5, +1/5, -1/5, +1/5, -1/5
5, 15	-1/8, 0, +1/4, +1/3, +1/3, +1/4, 0, -1/8
6, 16	-1/8, +1/8, -1/4, +1/4, -1/8, +1/8
7, 17	-1/16, 1/16, -1/8, 1/8, -1/8, 1/8, -1/8, 1/8, -1/16, 1/16
8, 18	-1/8, 0, +1/6, -3/8, +3/8, -1/6, 0, +1/8
9, 19	-1/16, 0, -1/8, -1/4, +1/4, +1/4, -1/4, -1/8, 0, -1/16
10, 20	+1/8, +1/6, +1/5, +1/5, +1/6, +1/8

4.3.2. Проанализируйте амплитудно-частотную, фазо-частотную характеристику фильтра и зависимость от частоты груп-

пового времени задержки в фильтре. Отметьте частоты, на которых характеристика фильтра оказывается равной нулю.

Примечание: для упрощения перехода к реальным частотам в герцах можно использовать M-код:

```
[ h, w_norm ] = freqz( b, a );  
F = 20000; % частота дискретизации в герцах  
plot( w_norm.*F./(2*pi), abs(h) );
```

Сопоставьте полученную АЧХ фильтра с расположением на Z-плоскости его полюсов и нулей. Занесите в отчет выводы по результатам сопоставления.

Определите импульсную характеристику фильтра. Задайтесь входным сигналом, повторяющим импульсную характеристику фильтра, и рассчитайте отклик фильтра на подобный сигнал с использованием дискретной свёртки и с использованием функции filter(). Сигнал, получаемый на выходе фильтра, внесите в отчет. Проверьте корректность результата для 4-5 стартовых отсчетов отклика, выполнив анализ работы фильтра методом потактного прохождения сигнала.

Этап 2. Исследование характеристик рекурсивного фильтра

4.3.3. Задайте вектора коэффициентов рекурсивной (**a**) и нерекурсивной части фильтра (**b**) в соответствии с данными из табл. 4.2, полагая, что для всех анализируемых случаев $b_0 = 1$, $b_2 = b_4 = 0$. Внесите в отчёт структурную схему рекурсивного фильтра с заданными коэффициентами (При выполнении этого пункта обратите внимание на рекомендации из п. 4.2.5 и, в частности, на рис. 4.5).

Получите и внесите в отчёт амплитудно-частотную характеристику анализируемого фильтра; определите по ней центральную частоту и полосу пропускания АЧХ, определяемую по уровню 0.707.

Сопоставьте полученную АЧХ фильтра с расположением на Z-плоскости его полюсов и нулей. Занесите в отчет выводы по результатам сопоставления.

Получите и занесите в отчет импульсную характеристику фильтра с коэффициентами, определяемыми табл. 4.2. После этого

попробуйте увеличить один из весовых коэффициентов a_m , имеющий исходно малое значение до величины, превышающей по модулю единицу. Вновь снимите импульсную характеристику цифрового фильтра, проанализируйте её поведение для протяженного набора отсчетов. Занесите в отчет вывод относительно изменения свойств фильтра под влиянием изменения коэффициента a_m .

Таблица 4.2

Весовые коэффициенты рекурсивного фильтра

Номер в группе	b_1	b_3	a_1	a_2	a_3	a_4
1, 11	+0,075	-0,064	-0,231	-1,689	-0,196	-0,721
2, 12	+0,131	-0,096	-0,213	-1,412	-0,156	-0,540
3, 13	+0,171	-0,132	0	-1,422	0	-0,592
4, 14	+0,163	-0,125	+1,064	-1,716	+0,819	-0,592
5, 15	+0,137	-0,099	+0,070	-1,375	+0,051	-0,524
6, 16	+0,158	-0,133	+0,076	-1,586	+0,064	-0,709
7, 17	+0,180	-0,147	+0,554	-1,582	+0,453	-0,668
8, 18	+0,096	-0,087	+0,594	-1,872	+0,540	-0,828
9, 19	+0,048	-0,043	+0,239	-1,814	+0,216	-0,818
10, 20	+0,077	-0,065	+0,192	-1,676	+0,162	-0,714

Этап 3. Исследование отклика рекурсивного фильтра на протяженное воздействие

4.3.4. Для воздействия, определяемого формулой

$$s(t) = \begin{cases} 5 \cdot \exp(-10t) \cdot \cos(1200\pi \cdot N_{\text{в.гр}} \cdot t), & \text{если } N_{\text{в.гр}} - \text{четный} \\ 5 \cdot \cos(1200\pi \cdot (N_{\text{в.гр}} + 1) \cdot t), & \text{если } N_{\text{в.гр}} - \text{нечетный} \end{cases} \quad (4.9)$$

применительно к нулевым начальным условиям и задаваемой формулой (4.8) частоте дискретизации определите отклик фильтра, разделив воздействие на 3 блока по 200 отсчетов. Зафиксируйте в отчете отклики, соответствующие первым трём блокам воздействия.

4.4. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Какой фильтр называют цифровым (дискретным)? Чем определяется интервал между отсчётами импульсной характеристики цифрового фильтра? Что такое разностное уравнение цифрового фильтра?

2. Нарисуйте структурную схему цифрового фильтра и поясните принцип его работы. Каким устройством является этот фильтр – линейным, нелинейным, параметрическим?

3. В чём заключается принципиальное отличие рекурсивного фильтра от нерекурсивного? Каковы достоинства и недостатки каждого типа фильтра?

4. Что такое импульсная характеристика цифрового фильтра? Как её получить теоретически и экспериментально? Возможна ли реализация рекурсивного (нерекурсивного) фильтра по его импульсной характеристике? Чем отличаются импульсные характеристики рекурсивного и нерекурсивного фильтров?

5. Что такое операторный коэффициент передачи цифрового фильтра и системная функция фильтра? Как найти системную функцию цифрового фильтра по разностному уравнению?

6. Что такое АЧХ цифрового фильтра? Изложите методику экспериментального измерения АЧХ цифрового фильтра. Надо ли при снятии АЧХ использовать восстанавливающий фильтр?

7. Чем отличаются АЧХ цифрового и аналогового фильтров? Как объяснить периодичность частотных характеристик цифрового фильтра? Как экспериментально убедиться в периодичности АЧХ цифрового фильтра? Какое для этого колебание следует подавать на вход фильтра? Какой частоты?

8. Как сказывается на импульсной и частотной характеристике цифрового фильтра изменение тактовой частоты его работы (частоты дискретизации)?

9. Какова связь между системной функцией и АЧХ цифрового фильтра? между системной функцией и импульсной характеристикой? между АЧХ и импульсной характеристикой?

10. Что такое порядок цифрового фильтра и как его значение влияет на реализацию фильтра? Чем определяется минимально необходимая разрядность весовых коэффициентов цифрового фильтра?

11. В чём проявляется неустойчивость цифрового фильтра? Может ли быть неустойчивым нерекурсивный фильтр? Как определить устойчивость цифрового фильтра по значениям полюсов его системной функции и/или по отсчетам его импульсной характеристики?

12. Изложите и проиллюстрируйте на конкретном примере методику расчёта отклика цифрового фильтра на заданное входное воздействие по разностному уравнению фильтра.

13. Изложите и проиллюстрируйте на конкретном примере методику расчёта отклика цифрового фильтра на заданное входное воздействие с помощью дискретной свёртки сигналов.

14. Что понимают под z -образом цифрового сигнала? Получите z -образ цифрового сигнала, порождающего на выходе цифрового фильтра его импульсную (переходную) характеристику.

15. Что такое системная функция цифрового фильтра? Как она связана с комплексным коэффициентом передачи фильтра и его импульсной характеристикой? Как по системной функции получить структурную схему цифрового фильтра?

16. Запишите выражение для системной функции рекурсивного цифрового фильтра. Как, зная полюсы системной функции, выполнить анализ фильтра на устойчивость? Представить фильтр в виде последовательного или параллельного соединения элементарных звеньев низшего порядка?

17. Изложите и проиллюстрируйте на конкретном примере методику расчёта отклика цифрового фильтра на заданное входное воздействие с помощью z -преобразования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Солонина, А.И. Цифровая обработка сигналов и MATLAB: учеб. пособие / А.И. Солонина, Д.М. Клионский, Т.В. Меркучева, С.Н. Перов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2013. – 512 с.
2. Лазарев Ю.Ф. Начала программирования в среде MATLAB. – К.: НТУУ "КПИ", 2003. - 424 с.
3. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.
4. Матвеев Ю.Н. Цифровая обработка сигналов. Учебное пособие / Ю.Н. Матвеев, К.К. Симончик, А.Ю. Тропченко, М.В. Хитров – СПб: СПбНИУ ИТМО, 2013. – 166 с.
5. Побережский Е.С. Цифровые радиоприёмные устройства. – М.: Радио и связь, 1987. – 184 с.
6. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-пресс», 2006. – 656 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

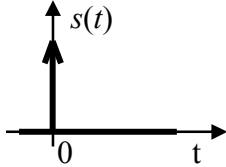
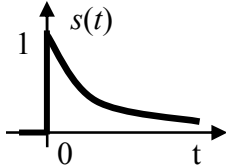
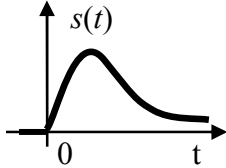
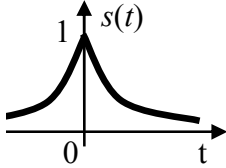
Спектры сигналов и основные спектральные теоремы

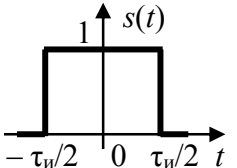
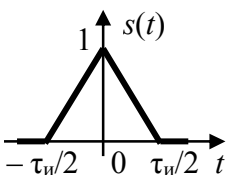
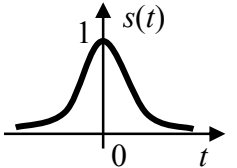
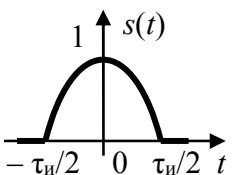
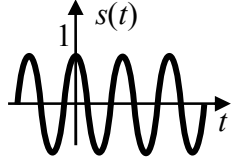
Комплексная спектральная плотность сигнала, характеризует спектральные свойства непериодических сигналов и может быть рассчитана с помощью прямого интегрального преобразования Фурье

$$G_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (\text{П.1.1})$$

Комплексные спектральные плотности для набора типовых сигналов приведены в представленной ниже таблице.

Таблица П.1.1

Сигнал $s(t)$	График сигнала	Комплексная спектр. плотность $\dot{G}_s(\omega)$
$\delta(t)$		1
$e^{-\alpha t} \cdot \mathbf{1}(t)$		$\frac{1}{\alpha + j\omega}$
$t \cdot e^{-\alpha t} \cdot \mathbf{1}(t)$		$\frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$
$e^{-\alpha t }$		$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

$\text{rect}(t / \tau_n) =$ $= \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq \tau_n / 2 \\ 0 & \text{при } t > \tau_n / 2 \end{cases}$		$\tau_n \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau_n}{2}\right)$
$\begin{cases} 1 - \frac{2 t }{\tau_n}, & t \leq \frac{\tau_n}{2} \\ 0 & \text{при } t > \frac{\tau_n}{2} \end{cases}$		$\frac{\tau_n}{2} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau_n}{4}\right)$
$s(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$		$\frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\exp\left(\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right)}$
$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi t}{\tau_n}\right), & t \leq \frac{\tau_n}{2} \\ 0 & \text{при } t > \frac{\tau_n}{2} \end{cases}$		$\frac{2\pi}{\tau_n} \cdot \frac{\cos(\omega \tau_n / 2)}{(\pi / \tau_n)^2 - \omega^2}$
$\cos(\omega_0 t)$		$\pi \cdot \delta(\omega + \omega_0) + \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$

Для расчета спектральных характеристик сигналов, отсутствующих в представленной выше таблице, следует использовать свойства комплексной спектральной плотности, представленные в табл. П.1.2.

Таблица П.1.2

Характер, свойство преобразования	Колебание во временной области $s(t)$	Комплексная спектральная плотность колебания $\dot{G}(\omega)$
1. Свойство симметрии	$\dot{G}(t)$	$2\pi \cdot s(-\omega)$
2. Инверсия аргумента функции	$s(-t)$	$\dot{G}_s^*(\omega)$, где * - знак комплексного сопряжения
3. Изменение масштаба времени	$a \cdot s(at)$	$\dot{G}_s\left(\frac{\omega}{a}\right)$
4. Дифференцирование по времени	$s'(t)$	$j\omega \cdot \dot{G}_s(\omega)$
5. Теорема о запаздывании	$s(t-t_3)$	$\dot{G}_s(\omega) \cdot e^{-j\omega t_3}$
6. Свойство частотного сдвига	$s(t) \cdot \exp(j\Omega t)$	$\dot{G}_s(\omega - \Omega)$
7. Умножение на гармоническую функцию	$s(t) \cdot \cos(\Omega t + \psi)$	$0,5 \cdot \dot{G}_s(\omega + \Omega) \cdot e^{-j\psi} +$ $+ 0,5 \cdot \dot{G}_s(\omega - \Omega) \cdot e^{j\psi}$
8. Произведение двух функций	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$\dot{G}_1(\omega) \otimes \dot{G}_2(\omega)$
9. Теорема о свёртке	$s_1(t) \otimes s_2(t)$	$\dot{G}_1(\omega) \cdot \dot{G}_2(\omega)$

Здесь в пунктах 8 и 9 значком \otimes обозначена операция интегральной свертки, определяемая выражением

$$s_1(t) \otimes s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(x) \cdot s_2(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(y) \cdot s_1(t-y) dy \quad (\text{П.1.2})$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. КРАТКОЕ ЗНАКОМСТВО С СИСТЕМОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATLAB	4
2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АНАЛОГОВЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И ИХ АНАЛИЗ В MATLAB	4
3. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА. ОСОБЕННОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ РАДИОСИГНАЛОВ	5
3.1. Теоретические основы	5
3.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям	10
3.3. Выполнение лабораторных исследований	13
3.4. Контрольные вопросы для защиты работы	17
4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ. НЕРЕКУРСИВНЫЕ И РЕКУРСИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ.....	20
4.1. Теоретические основы	20
4.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям	23
4.3. Выполнение лабораторных исследований	30
4.4. Контрольные вопросы для защиты работы	33
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	35
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	36
СПЕКТРЫ СИГНАЛОВ И ОСНОВНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ..	

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам №3-4
для студентов направления 11.04.01 «Радиотехника»,
магистерская программа «Радиотехнические средства
обработки и защиты информации в каналах связи»

Составитель

Токарев Антон Борисович

В авторской редакции

Компьютерный набор А. Б. Токарева

Подписано к изданию 27.01.2025.

Уч.-изд. л. 1,5.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»

394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84