ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

И.Н. Пантелеев

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ: ПРАКТИКУМ

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2016

УДК 681.3.06(075)

Пантелеев И.Н. Интегральное исчисление: практикум: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые, граф. данные (1920 Кб) / И.Н. Пантелеев. - Воронеж : ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2016. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: ПК 500 и выше ; 256 Мб ОЗУ ; Windows XP ; Adobe Acrobat ; 1024x768 ; CD-ROM ; мышь. – Загл. с экрана.

Учебное пособие включает материал, необходимый для подготовки к практическим занятиям по курсу высшей математики во втором семестре. Содержит краткий теоретический материал по методам вычисления неопределенных, определенных и несобственных интегралов и приложениям определенного интеграла к задачам геометрии, механики и физики.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению 20.01.03 «Техносферная безопасность», направленности «Защита в чрезвычайных ситуациях», «Безопасность жизнедеятельности в техносфере», «Защита окружающей среды», дисциплине «Высшая математика».

Табл. 2. Ил. 34. Библиогр.: 12 назв.

Рецензенты: кафедра физики, теплотехники и теплоэнергетики Воронежского государственного университета инженерных технологий
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, доц. А.В. Буданов);
канд. физ.-мат. наук, проф. Г.Е. Шунин

ВВЕДЕНИЕ

В плане изучения высшей математики наибольшие трудности возникают при решении конкретных задач и примеров, которые требуют знание определенных методов и приемов. Цель пособия - помочь студентам научиться самостоятельно решать задачи по курсу высшей математики, при условии, что изучение теории должно выполняться по рекомендованному в программе учебнику и конспекту лекций.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, приводятся основные определения, теоремы без доказательств, главнейшие формулы, методы и способы решения задач. Решение типовых примеров и задач в параграфе, как правило, расположено по возрастающей трудности.

Характерной особенностью является включение решений задач вычислительного характера, что позволяет развивать необходимые навыки и умение для студентов инженерных специальностей. Кроме того, значительное внимание уделено методам решения прикладных задач с физическим смыслом.

Часть задач была заимствована из сборников: Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа, 1975; Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике, 1972; Задачи и упражнения по математическому анализу, под редакцией Б.П. Демидовича, 1968; Сборник задач по математике для вузов. Под редакцией А.В.Ефимова, ч.1-2, 1993-1994; Бугров Я.С., Никольский Я.С. Высшая математика. Задачник, 1982.

Пособие включает задания для типового расчета по интегральному исчислению по основным разделам, изучаемым в курсе высшей математики в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 20.01.03 «Техносферная безопасность».

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов и простейшие примеры

1°. Пусть дана функция $f(x)$, требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество различных первообразных функций, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым, то есть, если $F(x)$ есть первообразная от функции $f(x)$, то $F(x) + C$ есть также первообразная от $f(x)$, ибо $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$. Здесь C — произвольная постоянная.

Определение 2. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

если $F'(x) = f(x)$.

Функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией; $f(x)dx$ — подынтегральным выражением; C — постоянной интегрирования.*

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$. Отсюда видно, что интегрирование есть действие обратное дифференцированию. Правильность интегрирования всегда можно проверить, выполнив обратное действие, т. е. найдя производную функции, получившейся в результате интегрирования.

Производная должна быть равна подынтегральной функции.

2°. Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть, если $F'(x) = f(x)$, то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала или производной некоторой функции равен этой функции плюс постоянная интегрирования

$$\int dF(x) = F(x)+C \quad \text{или} \quad \int F'(x)dx = F(x)+C.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен сумме их интегралов

$$\int (f_1(x)+f_2(x)-f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть, если $a - const$, то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

3°. Таблица основных интегралов. Таблица интегралов вытекает непосредственно из определения неопределенного интеграла и таблицы производных:

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C; \qquad \alpha \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C;$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C;$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C;$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

8. $\int e^x dx = e^x + C;$

9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$

12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C;$

14. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \mathrm{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$

15. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \mathrm{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$

16. $\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C;$

17. $\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C;$

18. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C;$

19. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C.$

Так как неопределенный интеграл не зависит от выбора переменной интегрирования, то все табличные интегралы имеют место для любой переменной.

Процесс нахождения первообразной сводится к преобразованию подынтегральной функции к табличному виду.

Простейшие интегралы могут быть найдены путем разложения подынтегральной функции на слагаемые. В состав каждого интеграла входит постоянная интегрирования, но все они могут быть объединены в одну, поэтому обычно при интегрировании алгебраической суммы функций пишут только одну постоянную интегрирования.

4°. Существуют целые классы интегралов, которые в зависимости от постоянных сомножителей или показателей степеней могут быть найдены по обобщенным формулам интегрирования. Приведем некоторые из них.

1. $$\int P(x)\sin ax dx = \sin ax\left(\frac{P'}{a}-\frac{P'''}{a^4}+\ldots\right)-\cos ax\left(\frac{P'}{a}-\frac{P''}{a^3}+\ldots\right)+C,$$

где $P(x)$ — целый относительно x многочлен.

2. $$\int P(x)\cos ax dx = \sin ax\left(\frac{P}{a}-\frac{P'}{a^3}+\ldots\right)+\cos ax\left(\frac{P'}{a^2}-\frac{P'''}{a^4}+\ldots\right)+C;$$

3. $$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{P}{a}-\frac{P'}{a^2}+\frac{P''}{a^3}-\right)+C;$$

4. $$\int x^m \ln^n x dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1}\ln^n x-\frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x dx,$$

где n — любое вещественное число и $n \neq -1;$ $m = 1, 2, 3, \ldots$

5. $$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C;$$

6. $$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C;$$

7. $$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a}+a\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right)+C;$$

8. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} \right) + C;$

9. Если обозначить $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2} I_n;$$

10. $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx;$

11. $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx;$

12. $\int \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + C,\ (n = 1, 2, \ldots);$

13. $\int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = x + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2kx}{2k} + C,\ (n = 1, 2, \ldots);$

14. $\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x} = \frac{\sin x}{2k\cos^{2k} x} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right)\int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x};$

15. $\int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x} = -\frac{1}{2k}\frac{\cos x}{\sin^{2k} x} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right)\int \frac{dx}{\sin^{2k-1} x};$

16. $\int x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1} e^{-x} dx;$

17. $\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln\left|cx+d\right| + C;$

18. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C.$

1.1. Найти интегралы: а) $\int \left(x^3 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx;$

б) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^3}\right) dx;$ в) $\int \mathrm{ctg}^2 x dx;$ г) $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx;$

д) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$; е) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Решение. а) Представим интеграл как сумму интегралов и воспользуемся табличными интегралами

$$\int x^3dx+\int 2xdx+\int\frac{dx}{x}=\frac{x^4}{4}+2\frac{x^2}{2}+\ln|x|+C=\frac{1}{4}x^4+x^2+\ln|x|+C;$$

Проверка: $\left(\frac{1}{4}x^4+x^2+\ln|x|+C\right)'=x^3+2x+\frac{1}{x}$, т. е. производная равна подынтегральной функции.

б) Внесем первый множитель в скобки и представим интеграл в виде разности двух интегралов

$$\int e^x dx-\int\frac{dx}{x^3}=e^x-\int x^{-3}dx=e^x-\frac{x^{-2}}{-2}+C=e^x+\frac{1}{2x^2}+C.$$

в) Сделаем следующие преобразования

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int dx=-\operatorname{ctg}x-x+C.$$

г) Вычтем и прибавим в числителе единицу

$$\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx=\int\left(\frac{x^4-1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\int\left(x^2-1\right)dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C.$$

д) Заменим корни отрицательными степенями и представим интеграл в виде разности двух интегралов

$$\int x^{-\frac{1}{3}}dx-\int x^{-\frac{3}{4}}dx=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{4}}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[4]{x}+C.$$

е) Считаем, что в числителе множителем стоит тригонометрическая единица $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, тогда

$$\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

1.2. Найти интегралы: а) $\int \frac{dx}{x^2-9}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; г) $\int 2^x e^x dx$; д) $\int \frac{dx}{x^2+2}$.

Решение. а) Представим 9 как 3^2 и воспользуемся табличным интегралом (11), где $a = 3$

$$\int \frac{dx}{x^2-3^2} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

б) Приведем подынтегральную функцию к виду $\frac{1}{\sqrt{5^2-x^2}}$ и воспользуемся табличным интегралом (10)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{5} + C.$$

в) Воспользуемся табличным интегралом (12)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

г) Объединим множители в подынтегральной функции и воспользуемся табличным интегралом (7)

$$\int (2e)^x\,dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C.$$

д) Преобразуем следующим образом

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

1.2. Непосредственное интегрирование

В простейших случаях, применяя следующие преобразования дифференциала

$$dx = \frac{1}{a} d\left(ax+b\right);\ nx^{n-1}dx = dx^n;\ \cos x dx = d\left(\sin x\right);$$

$$\sin x dx = -d\left(\cos x\right);\ \frac{dx}{x} = d\left(\ln x\right);\quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d\left(\operatorname{tg} x\right);$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(\operatorname{ctg} x\right);\quad \frac{dx}{1+x^2} = d\left(\operatorname{arctg} x\right);$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\left(\arcsin x\right);\ e^x dx = d\left(e^x\right),$$

их возможные комбинации и обозначая мысленно выражение в скобках за новую переменную t, интегралы сводятся к табличным.

2.1. Найти интегралы: а) $\int e^{-2x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$;

в) $\int \left(2-3x\right)^5 dx$; г) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{6-5x}}dx$; д) $\int \frac{dx}{1-6x}$; е) $\int \frac{e^{2x}}{3-2e^{2x}}dx$.

Решение. а) Вносим (-2) под знак дифференциала и делим на (-2), тогда интеграл равен

$$\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-2x}d\left(-2x\right) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C.$$

б) Приводим к одному аргументу $4x$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 4x} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(4x\right)}{\cos^2 4x} = \frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x + C.$$

в) Запишем под знаком дифференциала такое же выражение, что и в скобках

$$\int \left(2-3x\right)^5 dx = -\frac{1}{3}\int \left(2-3x\right)^5 d\left(2-3x\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\left(2-3x\right)^6}{6} + C = -\frac{1}{18}\left(2-3x\right)^6 + C.$$

г) Преобразуем интеграл следующим образом

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{6-5x}}=\int(6-5x)^{-\frac{1}{3}}dx=-\frac{1}{5}\int(6-5x)^{-\frac{1}{3}}d(6-5x)=-\frac{3}{10}(6-5x)^{\frac{2}{3}}+C.$$

д) Запишем под знаком дифференциала выражение такое же, что и в знаменателе, тогда

$$\int\frac{dx}{1-6x}=-\frac{1}{6}\int\frac{d(1-6x)}{1-6x}=-\frac{1}{6}\ln|1-6x|+C.$$

е) Преобразуем интеграл следующим образом

$$\int\frac{e^{2x}dx}{3-2e^{2x}}=\frac{1}{2}\int\frac{de^{2x}}{3-2e^{2x}}=-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(-2e^{2x}\right)}{3-2e^{2x}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(3-2e^{2x}\right)}{3-2e^{2x}}=-\frac{1}{4}\ln\left|3-2e^{2x}\right|+C.$$

2.2. Найти интегралы: а) $\int\frac{\cos x}{1+4\sin x}dx$; б) $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}$;

в) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$; г) $\int x^2e^{x^3}dx$; д) $\int\frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$; е) $\int\frac{x^2dx}{9+x^6}$.

Решение. а) Вносим косинус под знак дифференциала и преобразуем интеграл к табличному

$$\int\frac{\cos x}{1+4\sin x}dx=\int\frac{d\sin x}{1+4\sin x}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4\sin x)}{1+4\sin x}=$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{d(1+4\sin x)}{1+4\sin x}=\frac{1}{4}\ln|1+4\sin x|+C.$$

б) Выполнив преобразование дифференциала, получим

$$\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}=\int\frac{d\ln x}{1+\ln x}=\int\frac{d(1+\ln x)}{1+\ln x}=\ln|1+\ln x|+C.$$

в) Вносим $\sqrt{x}$ под знак дифференциала

$$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int e^{\sqrt{x}}d\sqrt{x}=2e^{\sqrt{x}}+C.$$

г) Преобразовав дифференциал, получим

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

д) Вносим синус под знак дифференциала и преобразуем

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos^5 x} = -\int \cos^{-5} x d\cos x = \frac{1}{4}\cos^{-4} x + C.$$

е) Вносим x^2 под знак дифференциала и преобразуем к табличному виду

$$\int \frac{x^2 dx}{9+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{3^2+\left(x^3\right)^2} = \frac{1}{9}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{3} + C.$$

2.3. Найти интегралы: а) $\int \frac{dx}{\left(\arcsin x\right)^3\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$;

в) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$; г) $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; д) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2xdx$;

е) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; ж) $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}dx$; з) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1+x\right)}dx.$

Решение. а) Преобразуем дифференциал и приведем интеграл к табличному виду

$$\int \frac{dx}{\left(\arcsin x\right)^3\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d\arcsin x}{\left(\arcsin x\right)^3} =$$

$$= \int \left(\arcsin x\right)^{-3} d\arcsin x = -\frac{1}{2\left(\arcsin x\right)^2} + C.$$

б) Вносим x под знак дифференциала и преобразуем интеграл к табличному

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}\right| + C.$$

в) Выполнив преобразования, получим

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x+3\right)}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|+C.$$

г) Вносим $\sin 2x$ под знак дифференциала и преобразуем

$$\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}=-\int\frac{d\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}=-\int\left(1+\cos^2 x\right)^{-1/2}d\left(1+\cos^2 x\right)=$$

$$=-2\left(1+\cos^2 x\right)^{1/2}+C.$$

д) Вносим под знак дифференциала $\sin 2x$ следующим образом

$$\int e^{\sin^2 x}\sin 2xdx=\int e^{\sin^2 x}d\sin^2 x=e^{\sin^2 x}+C.$$

е) Вносим x^3 под знак дифференциала и преобразуем интеграл к табличному

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx^4}{\sqrt{1-\left(x^4\right)^2}}=\frac{1}{4}\arcsin x^4+C.$$

ж) Преобразуем подынтегральную функцию

$$\int\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}dx=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int\frac{d\left(\cos x+\sin x\right)}{\cos x+\sin x}=\ln\left|\cos x+\sin x\right|+C.$$

з) Преобразуем дифференциал следующим образом

$$\int\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1+x\right)}dx=2\int\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}=2\int\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}d\sqrt{x}=$$

$$=2\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}d\operatorname{arctg}\sqrt{x}=\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2+C.$$

1.3. Интегрирование методом замены переменной

1°. Пусть требуется найти интеграл $\int f\left(x\right)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем. Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении $x=\varphi(t)$, $\varphi(t)$ непрерывная функция, имеющая обратную производную $x=\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\varphi'(t)}$. Тогда $dx=\varphi'(t)\,dt$.

В этом случае имеет место следующее равенство

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Если полученный интеграл с новой переменной интегрирования t будет найден, то преобразовав результат к переменной x, получим искомое выражение.

Общего правила выбора требуемой подстановки нет, поэтому некоторые частные правила рассмотрим на примерах.

2°. Тригонометрические подстановки.

1. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то обычно полагают $x=a\sin t\vee x=a\cos t;$ отсюда $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t\vee a\sin t.$

2. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то полагают $x=\dfrac{a}{\cos t};$ отсюда $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{tg}t.$

3. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2+a^2}$, то полагают $x=a\operatorname{tg}t;$ отсюда $\sqrt{x^2+a^2}=\dfrac{a}{\cos x}.$

3°. Некоторые другие подстановки:

1. Интегралы вида $\int R(e^x)\,dx,$ где R — некоторая рациональная функция, приводятся к рациональному алгебраическому виду подстановкой $e^x=t,\ x=\ln t,\ dx=\dfrac{dt}{t}.$

2. Интегралы вида $\int R(\ln x)\dfrac{dx}{x},$ где R — некоторая рациональная функция, приводятся к рациональному алгебраическому виду подстановкой $\ln x=t,\ \dfrac{dx}{x}=dt.$

3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^m \sqrt{\left(ax^2+b\right)^n}}$, приводятся к рациональному виду подстановкой $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$.

3.1. Найти интегралы: а) $\int x\left(2x+3\right)^9 dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$;

в) $\int \frac{\ln\ \mathrm{tg}\, x}{\sin 2x}dx$; г) $\int \sin\sqrt{x+1}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; д) $\int \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x\ln x}dx$; е) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}dx$.

Решение. а) Сделаем замену переменной $2x+3=t$, $x=\frac{t-3}{2}$, $dx=\frac{1}{2}dt$, тогда будем иметь

$$I=\int x\left(2x+3\right)^9 dx=\frac{1}{4}\int\left(t-3\right)t^9 dt=\frac{1}{4}\int\left(t^{10}-3t^9\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^{11}}{11}-\frac{3}{10}t^{10}\right)+C=\frac{1}{4}t^{10}\left(\frac{t}{11}-\frac{3}{10}\right)+C.$$

Переходя к переменной x, получим

$$I=\frac{1}{4}\left(2x+3\right)^{10}\left(\frac{2x+3}{11}-\frac{3}{10}\right)+C=\frac{1}{44}\left(2x+3\right)^{10}\left(2x-27/10\right)+C.$$

б) Сделаем замену переменной $\frac{1}{x}=t$, $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$, тогда получим

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}=-\int\frac{dt}{t^2\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1-2t^2}}{t}}=--\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2}t\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\left(\sqrt{2}t\right)+C.$$

Переходя к переменной x, будем иметь

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+C.$$

в) Преобразуем подынтегральную функцию

$$I=\int\frac{\ln\ \operatorname{tg} x}{\sin 2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\ln\ \operatorname{tg} x}{\sin x\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\ln\ \operatorname{tg} x}{\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x}dx$$

и сделаем замену $\operatorname{tg} x=t,\ \frac{dx}{\cos^2 x}=dt,$ тогда получим $I=\frac{1}{2}\int\frac{\ln t}{t}dt.$

Сделаем еще одну замену $\ln t=z,\ \frac{dt}{t}=dz,$ тогда будем иметь $I=\frac{1}{2}\int zdz=\frac{1}{4}z^2+C.$ Перейдем теперь к переменной x

$$I=\frac{1}{4}\ln^2 t+C=\frac{1}{4}\ln^2 \operatorname{tg} x+C.$$

г) Сделаем замену переменной $x+1=t^2,\ dx=2tdt,$ тогда получим

$$I=\int\sin\sqrt{x+1}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}=2\int\sin t\frac{tdt}{t}=2\int\sin tdt=-2\cos t+C.$$

Переходя к переменной x, будем иметь $I=-2\cos\sqrt{x+1}+C.$

д) Сделаем замену $\ln x=t,\ \frac{dx}{x}=dt,$ тогда получим

$$I=\int\frac{\sqrt{1-\ln x}}{x\ln x}dx=\int\frac{\sqrt{1-t}}{t}dt.$$

Чтобы избавиться от радикала сделаем еще одну замену переменной $1-t=z^2,\ t=1-z^2,\ dt=-2zdz,$ тогда будем иметь

$$I=\int\frac{2z^2dz}{z^2-1}=2\int\frac{z^2-1+1}{z^2-1}dz=2\int\left(1+\frac{1}{z^2-1}\right)dz=2\left(z+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right)+C.$$

Теперь перейдем к переменной x

$$I=2\left(\sqrt{1-t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-t}-1}{\sqrt{1-t}+1}\right|\right)+C=$$

$$=2\sqrt{1-\ln x}+\ln\left|\frac{\ln x+2\sqrt{1-\ln x}-2}{\ln x}\right|+C.$$

е) Сделаем замену переменной $x=t^2$, $dx=2tdt$, тогда получим

$$I=\int\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}dx=2\int\frac{t^2+1}{t+1}tdt=2\int\frac{t^3+t}{t+1}dt.$$

Деля числитель на знаменатель, выделим целую часть в подынтегральной функции

$$\frac{t^3+t}{t+1}=t^2-t+2-\frac{2}{t+1}.$$

Таким образом

$$I=2\int\left(t^2-t+2-\frac{2}{t+1}\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+2t-2\ln|t+1|\right)+C.$$

Переходя к переменной x, окончательно получим

$$I=2\left(\frac{x\sqrt{x}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x+1}\right|\right)+C.$$

3.2. ***Найти*** интегралы: а) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;

в) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$.

Решение. а) Сделаем замену $x=\sin t$, тогда $dx=\cos tdt$ и $\sqrt{1-x^2}=\cos t$. Подставим эти выражения под знак интеграла, проинтегрируем и перейдем к старой переменной

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos t}dt=\int\sin^2 tdt=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{1}{2}\left(t-\sin t\cos t\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t-\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C=\frac{1}{2}\left(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}\right)+C.$$

б) Сделаем замену $x=\operatorname{tg} t,$ тогда $dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$ и $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{\cos t}$. Переходим под знаком интеграла к новой переменной

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\cos t dt}{\operatorname{tg} t\cos^2 t}=\int\frac{dt}{\sin t}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C=\ln\left|\frac{\sin t}{1+\cos t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\operatorname{tg} t}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|+C=\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|+C.$$

в) Сделаем замену $x=\dfrac{a}{\cos t},$ тогда $dx=\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$ и $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{tg} t$. Преобразуем интеграл к новой переменной

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\int\frac{a\operatorname{tg} t\cos t\cdot a\sin t}{a\cos^2 t}dt=a\int\operatorname{tg}^2 tdt=a\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt=$$

$$=a\left(\int\frac{dt}{\cos^2 t}-\int dt\right)=a\left(\operatorname{tg} t-t\right)+C=a\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}-t\right)+C=$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

3.3. Найти интегралы: а) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}+1}dx$; б) $\displaystyle\int\frac{e^{3x}}{\left(1+e^{3x}\right)^2}dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{3x^2+2}}$; г) $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(ax^2+b\right)^{3/2}}$; д) $\displaystyle\int\frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$.

Решение. а) Делаем замену $e^x = t$, тогда $dx = \frac{dt}{t}$ и интеграл примет вид

$$\int \frac{e^{2x} - 3e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{t^2 - 3t}{t^2 + 1} \frac{dt}{t} = \int \frac{t-3}{t^2+1} dt = \int \frac{tdt}{t^2+1} - 3\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} - 3 \text{ arctg } t = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) - 3 \text{ arctg } t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right) - 3 \text{ arctg } e^x + \text{C}.$$

б) Делаем замену $e^{3x} = t$, тогда $dx = \frac{1}{3}\frac{dt}{t}$ и интеграл примет вид

$$\int \frac{e^{3x}}{\left(1+e^{3x}\right)^2} dx = \frac{1}{3}\int \frac{t}{\left(1+t\right)^2} \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\int \left(1+t\right)^{-2} d\left(1+t\right) =$$

$$= -\frac{1}{3\left(1+t\right)} + C = -\frac{1}{3\left(1+e^{3x}\right)} + C.$$

в) Воспользуемся подстановкой $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, тогда получим

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3x^2+2}} = -\int \frac{tdt}{\sqrt{3+2t^2}} = -\frac{1}{4}\int \left(3+2t^2\right)^{-1/2} d\left(3+2t^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{3+2t^2} + C = -\frac{\sqrt{3x^2+2}}{2x} + C.$$

г) Используем подстановку $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, тогда будем иметь

$$\int \frac{dx}{\left(ax^2+b\right)^{3/2}} = -\int \frac{tdt}{\left(a+bt^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{2b}\int \left(a+bt^2\right)^{-3/2} d\left(a+bt^2\right) =$$

$$=\frac{1}{b}\frac{1}{\sqrt{a+bt^2}}+C=\frac{1}{b}\frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}+C.$$

д) Заменяем $e^x=t,\ dx=\dfrac{dt}{t},$ тогда

$$\int\frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}=\int\frac{dt}{t^2-6t+13}=\int\frac{dt}{(t-3)^2+4}=\int\frac{d(t-3)}{(t-3)^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t-3}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x-3}{2}+C.$$

1.4. Интегрирование по частям

1°. Формула интегрирования по частям

$$\int u dv=uv-\int v du. \qquad (1)$$

Для применения формулы интегрирования по частям подынтегральное выражение следует представить в виде произведения двух множителей u и $dv.$ За u выбирается функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv выбирается такое выражение, содержащее $dx,$ из которого посредством интегрирования можно найти $v.$

По этой формуле отыскание интеграла от udv сводится к отысканию интеграла от $vdu,$ причем применять ее следует в тех случаях, если интеграл от vdu проще исходного интеграла

2°. Есть целые классы интегралов, например:

$$\int x^n \ln x dx,\ \int x^n e^{ax} dx,\ \int x^n \sin bx dx,$$

$$\int x^n \cos bx dx,\ \int x^n \arcsin bx dx,\ \int x^n \operatorname{arctg} bx dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx,\quad \int e^{ax}\cos bx dx$$

и т.д., которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно и в некоторых случаях получают выражение, из которого определяется исходный интеграл. Так последние два интеграла могут быть найдены по формулам

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C;$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C. \qquad (2)$$

3°. Интегрируя по частям, можно вывести формулы "понижения степени" для интегралов

$$\int \sin^n xdx = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}xdx,$$

$$\int \cos^n xdx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}xdx. \qquad (3)$$

4.1. Найти интегралы:

а) $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$; б) $\int x \operatorname{arctg} xdx$; в) $\int \ln xdx$;

г) $\int x^2 \sin xdx$; д) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; е) $\int \arcsin xdx$.

Решение. а) Положим $x = u$ и $e^{\frac{x}{2}}dx = dv$, тогда $du = dx$ и $v = 2e^{\frac{x}{2}}$. Запишем по формуле интегрирования по частям интеграл в виде

$$\int xe^{\frac{x}{2}}dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - 2\int e^{\frac{x}{2}}dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + C = 2e^{\frac{x}{2}}\left(x-2\right) + C.$$

б) Положим $\operatorname{arctg} x = u$, $xdx = dv$, тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{x^2}{2}$. По формуле (1) имеем:

$$\int x\operatorname{arctg} xdx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1-1)dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\left(x^2\operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

в) Положим $\ln x = u$, $dx = dv$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$. По формуле (1) имеем

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\left(\ln x - 1\right) + C.$$

г) Положим $x^2 = u,$ $\sin x dx = dv,$ тогда $du = 2xdx,$ $v = -\cos x.$ По формуле (1) имеем

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x\cos x dx.$$

Применим еще раз формулу интегрирования по частям, положив $x = u$ и $\cos x dx = dv,$ тогда получим

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x dx\right) =$$

$$= \left(2 - x^2\right)\cos x + 2x\sin x + C.$$

д) Положим $x = u,$ $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = dv,$ тогда $du = dx,$ $v = -\operatorname{ctg} x.$ По формуле (1) имеем

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = -x\operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x dx = -x\operatorname{ctg} x + \ln\left|\sin x\right| + C.$$

е) Полагаем $\arcsin x = u,$ $dx = dv,$ тогда $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$ $v = x.$

По формуле (1) имеем

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} = x\arcsin x +$$

$$+\frac{1}{2}\int \left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1 - x^2\right) = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

4.2. Найти интегралы: а) $\int \sqrt{x^2 + k}dx;$ б) $\int \cos\left(\ln x\right)dx;$

в) $\int e^{2x}\cos 3x dx.$

Решение. а) Положим $\sqrt{x^2 + k} = u,$ $dx = dv,$ тогда $du = \dfrac{xdx}{x^2 + k},$ $v = x.$ По формуле (1) имеем

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}} = x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2+k-k}{\sqrt{x^2+k}}dx =$$
$$= x\sqrt{x^2+k} - \int \sqrt{x^2+k}\,dx + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} =$$
$$= x\sqrt{x^2+k} + k\ln\left|x + x\sqrt{x^2+k}\right| - \int \sqrt{x^2+k}\,dx.$$

Перенося последний интеграл в левую часть равенства, получим

$$2\int \sqrt{x^2+k}\,dx = x\sqrt{x^2+k} + k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|,$$

откуда

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\right) + C.$$

б) Положим $\cos(\ln x) = u,\ dx = dv,$ тогда $du = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx,\ v = x.$ По формуле (1) имеем

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx.$$

Положим теперь $\sin(\ln x) = u,\ dx = dv,$ тогда $du = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx,$ $v = x.$ Применяя еще раз формулу (1), получим

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Переносим последний интеграл в левую часть

$$2\int \cos(\ln x)\,dx = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$$

откуда

$$\int \cos\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x) + C.$$

в) Полагаем $\cos 3x = u,\ e^{2x}dx = dv,$ тогда $du = -3\sin 3x\,dx,$ $v = \dfrac{1}{2}e^{2x}.$ По формуле (1) имеем

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

Полагаем теперь $\sin 3x = u,\ e^{2x}dx = dv,$ тогда $du = 3\cos 3x dx,\ v = \frac{1}{2}e^{2x}.$ Применим еще раз формулу (1)

$$\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x dx.$$

Переносим последний интеграл в левую часть

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\left(\cos 3x + \frac{3}{2}\sin 3x\right),$$

откуда

$$\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{2}{13}e^{2x}\left(\cos 3x + \frac{3}{2}\sin 3x\right) + C.$$

Этот же результат можно получить сразу, если воспользоваться формулами (2).

4.3. Найти интегралы: а) $\int e^{\sqrt{x}}dx;$ б) $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx;$

в) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$

Решение. а) Сделаем замену переменной $x = t^2,\ dx = 2tdt,$ тогда $\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int te^t dt.$

Теперь обозначим $t = u,\ e^t dt = dv,$ тогда $du = dt,\ v = e^t.$ По формуле (1) будем иметь

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = e^t\left(t-1\right) + C.$$

Переходя к переменной $x,$ окончательно получим

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right) + C.$$

б) Делаем замену $\operatorname{arctg} x = t,$ тогда $\frac{dx}{1+x^2} = dt$ и $x^2 = \operatorname{tg}^2 t.$

Интеграл примет вид

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int t\ \operatorname{tg}^2 t dt.$$

Полагаем $t = u,\ \text{tg}^2 t dt = dv,$ тогда $du = dt,\ v = \text{tg}\, t - t.$ По формуле (1) имеем

$$\int t\ \text{tg}^2 t dt = t(\text{tg}\, t - t) - \int(\text{tg}\, t - t)dt = t(\text{tg}\, t - t) + \ln|\cos t| + \frac{t^2}{2} + C.$$

Переходя к переменной $x,$ получим

$$\int \frac{x^2 \text{arctg}\, x}{1+x^2}dx = \text{arctg}\, x(x - \text{arctg}\, x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}(\text{arctg}\, x)^2 + C =$$

$$= x\ \text{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\text{arctg}\, x)^2 + C.$$

в) Делаем замену $\arcsin\sqrt{x} = t,$ тогда $\sqrt{x} = \sin t,$ $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sin t dt.$ Интеграл примет вид

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = 2\int t \sin t dt.$$

Интегрируем по частям: $t = u,\ \sin t dt = dv$ и $du = dt,\ v = -\cos t.$ Откуда

$$\int t \sin t dt = -t\cos t + \int \cos t dt = -t\cos t + \sin t + C.$$

Окончательно

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = -2\arcsin\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x} + C.$$

4.4. Найти интегралы: а) $\int \cos^7 x dx;$ б) $\int \sin^{10} x dx.$

Решение. а) Воспользуемся второй формулой (3)

$$\int \cos^7 x dx = \frac{1}{7}\sin x \cos^6 x + \frac{6}{7}\int \cos^5 x dx = \frac{1}{7}\sin x\cos^6 x +$$

$$+\frac{6}{7}\left(\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x dx\right) =$$

$$=\frac{1}{7}\sin x\cos^6 x+\frac{6}{7}\left(\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\sin x\cos^2 x+\frac{2}{3}\sin x\right)\right)+C=$$

$$=\frac{1}{7}\sin x\left(\cos^6 x+\frac{6}{5}\left(\cos^4 x+\frac{4}{3}\left(\cos^2 x+2\right)\right)\right)+C.$$

б) Воспользуемся несколько раз первой формулой (3)

$$\int\sin^{10} xdx=-\frac{1}{10}\cos x\sin^9 x+\frac{9}{10}\int\sin^8 xdx=-\frac{1}{10}\cos x\sin^9 x+$$

$$+\frac{9}{10}\left(-\frac{1}{8}\cos x\sin^7 x+\frac{7}{8}\int\sin^6 xdx\right)=-\frac{1}{10}\cos x\sin^9 x+$$

$$+\frac{9}{10}\left(-\frac{1}{8}\cos x\sin^7 x+\frac{7}{8}\left(-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x+\frac{5}{6}\int\sin^4 xdx\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{10}\cos x\sin^9 x+\frac{9}{10}\left(-\frac{1}{8}\cos x\sin^7 x+\frac{7}{8}\left(-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x+\frac{3}{4}\int\sin^2 xdx\right)\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{10}\cos x\sin^9 x+\frac{9}{10}\left(-\frac{1}{8}\cos x\sin^7 x+\frac{7}{8}\left(-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos x\sin x+\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right)+C.$$

1.5. Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен

1°. Рассмотрим интеграл вида $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx.$

Путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и замены $ax^2+bx+c=t,\ x+\frac{b}{2a}=z$ интеграл приводится к табличным (2,9,11) интегралам

$$\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dz}{z^2\pm k^2},$$

где $k^2=\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

С помощью аналогичных преобразований решаются интегралы вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;\quad \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

2°. Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{(mx+n)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ сводятся к рассмотренным выше интегралам с помощью подстановки $mx+n=\frac{1}{t}$.

3°. Интегралы вида

$$\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

находятся методом выделения алгебраической части по формуле

$$\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\left(A_0x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}\right)\sqrt{ax^2+bx+c}+A_m\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1)$$

где коэффициенты $A_i\left(i=0,1,\ \ldots\ ,m\right)$ находятся приравниванием коэффициентов правой и левой части при одинаковых степенях неизвестных x после дифференцирования равенства и освобождения его от знаменателя.

Аналогичным путем можно найти и интеграл

$$\int\left(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m\right)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=$$

$$=\left(A_0x^{m+1}+A_1x^m+\ldots+A_{m+1}\right)\sqrt{ax^2+bx+c}+A_{m+2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Неопределенные коэффициенты определяются путем дифференцирования правой и левой части и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x.

4°. Интегралы вида $I=\int\frac{\left(Mx+N\right)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где корни трехчлена x^2+px+q мнимые, находятся подстановкой $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$. Интеграл в этом случае принимает вид $\int\frac{\varphi_n\left(t\right)dt}{\left(At^2+Bt+C\right)^n\sqrt{A_1t^2+B_1t+C_1}}$, где $\varphi_n\left(t\right)$ — полином степени n.

Приравнивая коэффициенты B и B_1 нулю, получим уравнения $B=2\alpha\beta+p\left(\alpha+\beta\right)+2q=0$; $B_1=2a\alpha\beta+b\left(\alpha+\beta\right)+2c=0$ для определения вещественных значений α и β.

При этом интеграл представляется суммой интегралов двух видов:

$$\int \frac{t^{2k+1}dt}{\left(At^2+C\right)^n\sqrt{A_1t^2+C_1}} \quad \text{и}$$

$$\int \frac{t^{2k}dt}{\left(At^2+C\right)^n\sqrt{A_1t^2+C_1}}; \quad \left(k=0,1,2,\ \dots\ \right),$$

которые интегрируются подстановками, соответственно,

$$A_1t^2+C_1=u^2 \quad \text{и} \quad A_1+C_1t^{-2}=v^2.$$

Если $p=b=0,$ то интеграл представляется суммой двух интегралов

$$I=M\int \frac{xdx}{\left(x^2+q\right)^n\sqrt{ax^2+c}}+N\int \frac{dx}{\left(x^2+q\right)^n\sqrt{ax^2+c}},$$

которые находятся подстановками, соответственно, $ax^2+c=u^2$ и $a+cx^{-2}=v^2$.

5.1. Найти интегралы: а) $\int \frac{(5x-3)dx}{x^2-6x-7}$; б) $\int \frac{xdx}{3x^2+4x+5}$;

в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x-x^2}}$; г) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}}dx$; д) $\int \sqrt{x^2+2x-2}dx$; е) $\int \frac{2^x dx}{2^{2x}-4\cdot 2^x+2}$.

Решение. а) Выделим в знаменателе полный квадрат

$$\int \frac{(5x-3)dx}{x^2-6x+9-16}=\int \frac{(5x-3)dx}{(x-3)^2-16}$$

и сделаем замену $x-3=t,\ dx=dt,\ x=t+3,$ тогда получим

$$\int \frac{5t+12}{t^2-16}dt=\frac{5}{2}\int \frac{d\left(t^2-16\right)}{t^2-16}+12\int \frac{dt}{t^2-4^2}=\frac{5}{2}\ln\left|t^2-16\right|+\frac{12}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right|+C=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left|x^2-6x-7\right|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right|+C.$$

б) Выделим в знаменателе полный квадрат

$$\frac{1}{3}\int \frac{xdx}{x^2+2\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{5}{3}}=\frac{1}{3}\int \frac{xdx}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{9}}$$

и сделаем замену $x+\frac{2}{3}=t,\ dx=dt,\ x=t-\frac{2}{3},$ тогда получим

$$\frac{1}{3}\int \frac{t-\frac{2}{3}}{t^2+\frac{11}{9}}dt=\frac{1}{3}\int \frac{tdt}{t^2+\frac{11}{9}}-\frac{2}{9}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|t^2+\frac{11}{9}\right|-\frac{2}{9}\frac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3t}{\sqrt{11}}+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|x^2+\frac{4}{3}x+\frac{15}{9}\right|-\frac{2}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x+2}{\sqrt{11}}+C.$$

в) Выделим под корнем полный квадрат

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{4}+2\frac{x}{2}+x^2\right)}}=\int \frac{xdx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}}$$

и сделаем замену $x+\frac{1}{2}=t,\ dx=dt,\ x=t-\frac{1}{2},$ тогда получим

$$\int \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}=\int \frac{tdt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{5}{4}-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(\frac{5}{4}-t^2\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{\sqrt{5}}=-\left(\frac{5}{4}-t^2\right)^{1/2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=-\sqrt{1-x-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$$

г) Выделим под корнем полный квадрат

$$\int \frac{(x+3)}{\sqrt{x^2+2x+1-1}}dx = \int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

и сделаем замену $x+1=t,\ dx=dt,\ x=t-1,$ тогда получим

$$\int \frac{t+2}{\sqrt{t^2-1}}dt = \frac{1}{2}\int \left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(t^2-1\right) + 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+2\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C = \sqrt{x^2+2x} + 2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right| + C.$$

д) Выделим под корнем полный квадрат

$$\int \sqrt{x^2+2x+1-3}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2-3}\,dx$$

и сделаем замену $x+1=t,\ dx=dt,$ тогда получим $\int \sqrt{t^2-3}\,dt.$

При нахождении данного интеграла воспользуемся обобщенной формулой (7.п.10.1).

$$\int \sqrt{t^2-3}\,dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2-3} - 3\ln\left(t+\sqrt{t^2-3}\right)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x-2} - 3\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-2}\right)\right) + C.$$

е) Сделаем замену $2^x=t,\ 2^x\ln 2dx=dt,$ тогда получим

$$\frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t^2-4t+2} = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t^2-4t+4-2} = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2-2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\ln 2}\ln\left|\frac{t-2-\sqrt{2}}{t-2+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}\ln 2}\ln\left|\frac{2^x-2-\sqrt{2}}{2^x-2+\sqrt{2}}\right| + C.$$

5.2. Найти интегралы: а) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$;

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-4x+3}}$; г) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x+2x^2}}$.

Решение. а) Сделаем подстановку $x+1=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2},$

тогда получим

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2+1}} = -\int \frac{tdt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= -\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}\right| + C.$$

б) Делаем замену $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}} = -\int \frac{tdt}{t^2\sqrt{\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2t-1}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(2t-1)}{(2t-1)^{1/2}} = -\frac{1}{2}\frac{(2t-1)^{1/2}}{1/2} + C = -(2t-1)^{1/2} + C = -\left(\frac{2}{x}-1\right)^{1/2} + C.$$

в) Делаем замену $x-1 = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, тогда получим

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{(x-2)^2-1}} = -\int \frac{t^2dt}{t^2\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-1}} = -\int \frac{tdt}{\sqrt{1-2t}}.$$

Сделаем еще замену $1-2t = z^2$, $t = \frac{1-z^2}{2}$, $dt = -zdz$, будем иметь

$$\frac{1}{2}\int \frac{\left(1-z^2\right)zdz}{z} = \frac{1}{2}\int\left(1-z^2\right)dz = \frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{3}z^3\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-2t}-\frac{1}{3}(1-2t)^{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{1}{3}\frac{x\sqrt{x-3}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} + C.$$

г) Сделаем замену $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, тогда получим

$$-\int \frac{t^2 dt}{t^2\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}}} = -\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-t+2}} = -\int \frac{tdt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}.$$

Сделаем еще замену $t-\frac{1}{2}=z,\ t=z+\frac{1}{2},\ dt=dz,$ будем иметь

$$-\int \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)dz}{\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}} = -\frac{1}{2}\int \left(z^2+\frac{7}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(z^2+\frac{7}{4}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}} =$$

$$= -\sqrt{z^2+\frac{7}{4}} - \frac{1}{2}\ln\left|z+\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}\right| + C = -\sqrt{t^2-t+2} -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+2}\right| + C = -\frac{\sqrt{1-x+2x^2}}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x+2x^2}+1}{x}-\frac{1}{2}\right| + C.$$

5.3. *Найти* интеграл: а) $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$;

б) $\int \frac{(2x+1)dx}{(3x^2+4x+4)\sqrt{x^2+6x-1}}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой (1), тогда получим

$$\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = (A_0x+A_1)\sqrt{x^2+2x+2} + A_2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Продифференцируем правую и левую часть

$$\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = A_0\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{(A_0x+A_1)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{A_2}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Приведем к общему знаменателю и приравняем правую и левую части

$$x^2+4x = A_0\left(x^2+2x+2\right) + (A_0x+A_1)(x+1) + A_2.$$

Приравниваем неопределенные коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных

$$\begin{aligned} &x^2 \quad 1 = A_0 + A_0, \\ &x \quad\ \ 4 = 2A_0 + A_0 + A_1, \\ &x^0 \quad 0 = 2A_0 + A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Решая данную систему уравнений, получим $A_0 = \dfrac{1}{2},\ A_1 = \dfrac{5}{2},$

$A_2 = -\dfrac{7}{2}.$ Таким образом, интеграл примет вид

$$\int \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx = \frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{7}{2}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} =$$

$$= \frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{7}{2}\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C.$$

б) Воспользуемся подстановкой

$x = \dfrac{\alpha t + \beta}{t+1},\ dx = \dfrac{\alpha - \beta}{(t+1)^2}dt,$ тогда интеграл примет вид

$$I = \int \frac{(2x+1)\,dx}{\left(3x^2 + 4x + 4\right)\sqrt{x^2 + 6x - 1}} =$$

$$= \int \frac{(2\alpha t + 2\beta + t + 1)(\alpha - \beta)\,dt}{\left(3(\alpha t + \beta)^2 + 4(\alpha t + \beta)(t+1) + 4(t+1)^2\right)\sqrt{(\alpha t + \beta)^2 + 6(\alpha t + \beta)(t+1) - (t+1)^2}}.$$

Приравнивая в квадратных трехчленах коэффициенты при t к нулю, запишем систему уравнений относительно α, β

$$\begin{cases} 6\alpha\beta + 4(\alpha + \beta) + 8 = 0, \\ 2\alpha\beta + 6(\alpha + \beta) - 2 = 0, \end{cases}$$

откуда $\alpha = -1,\ \beta = 2.$

Интеграл в этом случае будет

$$I=\int\frac{(t-5)\,dt}{\left(t^2+8\right)\sqrt{15-6t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{tdt}{\left(t^2+8\right)\sqrt{5-2t^2}}-\frac{5}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\left(t^2+8\right)\sqrt{5-2t^2}}.$$

Первый интеграл находим с помощью подстановки $5-2t^2=u^2,\ t^2=\frac{1}{2}\left(5-u^2\right),\ tdt=-\frac{1}{2}udu,$ тогда

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{tdt}{\left(t^2+8\right)\sqrt{5-2t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{du}{21-u^2}=-\frac{1}{6\sqrt{7}}\ln\left|\frac{u+\sqrt{21}}{u-\sqrt{21}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{6\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\left(u+\sqrt{21}\right)^2}{u^2-21}\right|+C=-\frac{1}{6\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x^2+6x-1}+(x+1)\sqrt{7}\right)^2}{\sqrt{4\left(3x^2+4x+4\right)^2}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{3\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6x-1}+(x+1)\sqrt{7}}{\sqrt{2\left(3x^2+4x+4\right)}}\right|+C.$$

Второй интеграл решаем посредством подстановки $-2+5t^{-2}=v^2,\ \frac{dt}{t}=-\frac{1}{5}vdv,\ t^2=\frac{5}{v^2+2},$ тогда

$$-\frac{5}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\left(t^2+8\right)\sqrt{5-2t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{v^2+2}{8v^2+21}dv=\frac{1}{8\sqrt{3}}v-\frac{5}{8\sqrt{3}}\int\frac{dv}{8v^2+21}=$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{3}}v-\frac{5}{48\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{8}{21}}v+C=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+6x-1}}{8(2-x)}-\frac{5}{48\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8\left(x^2+6x-1\right)}}{(2-x)\sqrt{7}}+C.$$

Окончательно получим

$$I=\frac{\sqrt{x^2+6x-1}}{8(2-x)}-\frac{5}{48\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8\left(x^2+6x-1\right)}}{(2-x)\sqrt{7}}-$$

$$-\frac{1}{3\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6x-1}+(x+1)\sqrt{7}}{\sqrt{2\left(3x^2+4x+4\right)}}\right|+C.$$

1.6. Интегрирование рациональных дробей

1°. Если подынтегральная функция представляет неправильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ т. е. $m>n$, то следует выделить целую часть делением числителя на знаменатель «уголком». В этом случае дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.

2°. Интегрирование правильной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $m<n$ производится разложением ее на сумму простых всегда интегрируемых дробей. Для этого необходимо:

1. Разложить знаменатель $Q_n(x)$ на простейшие множители, причем могут встретиться следующие случаи:

а) корни знаменателя действительны и различны;

б) корни знаменателя действительные и некоторые из них кратные;

в) среди корней знаменателя есть комплексные;

г) среди корней знаменателя есть комплексные кратные.

В общем случае разложение имеет вид

$$Q_n(x)=a_0(x-a)^m\cdot\ \ldots\ \cdot(x-b)^n\left(x^2+px+q\right)^k\cdot\ \ldots\ \cdot\left(x^2+cx+d\right)^l,$$

где $m,n,k,l=1,2,3,\ \ldots$; a_0,a,b,p,q,c,d — постоянные, причем $p^2-4q<0,\ c^2-4d<0.$

2. Написать схему разложения данной дроби на сумму простых дробей

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ \dots\ +\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{B_1}{x-b}+\ \dots\ +\frac{B_n}{(x-b)^n}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\ \dots\ +\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d}+\ \dots\ +\frac{C_lx+D_l}{\left(x^2+cx+d\right)^l},$$

где $A_1, A_2,\ \dots\ , A_m, B_1,\ \dots\ , B_n, M_1,\ \dots\ , M_k, N_1,\ \dots\ , N_k, C_1,\ \dots\ , C_l,$ $D_1,\ \dots\ , D_l$ — некоторые неопределенные постоянные. Для каждого множителя в разложении знаменателя $Q_n(x)$ выписывается столько простых дробей, какова его кратность (m,n,k,l). Знаменателями простых дробей являются целые степени каждого множителя, начиная с первого и кончая той степенью, которую множитель имеет в разложении.

3. Освободиться от знаменателей, умножая обе части равенства на $Q_n(x)$.

4. Составить систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (метод неопределенных коэффициентов). Число уравнений должно быть равно числу неопределенных коэффициентов.

5. Решить систему и подставить найденные значения неопределенных коэффициентов $A_1, B_1, M_1, N_1, C_1, D_1,\ \dots$ в схему разложения.

Неопределенные коэффициенты можно найти, если положить x в разложении равным действительным значениям корней знаменателя $Q_n(x)$ или подходяще выбранным числам. При решении некоторых примеров этот метод определения коэффициентов целесообразно комбинировать с методом неопределенных коэффициентов.

3°. *Метод Остроградского.* Если многочлен $Q_n(x)$ имеет кратные корни, то справедлива формула

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

где $Q_1(x)$ — наибольший общий делитель многочлена $Q_n(x)$ и его производной $Q_n'(x)$; $Q_2(x)$ определяется делением $Q_n(x)/Q_1(x)$; $P_1(x)$, $P_2(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, у которых степени на единицу меньше, соответственно, степеней $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$.

Дифференцируя формулу Остроградского, представим ее в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Для определения неопределенных коэффициентов $P_1(x)$, $P_2(x)$ можно использовать метод неопределенных коэффициентов.

6.1. Найти интегралы: а) $\int \frac{x^4}{x^2+a^2}dx$; б) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)^2}$;

в) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$; г) $\int \frac{dx}{x^4+4x^2}$; д) $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$; е) $\int \frac{dx}{x^4-x^2-6}$.

Решение. а) Выделим целую часть в подынтегральной функции $\frac{x^4}{x^2+a^2} = x^2 - a^2 + \frac{a^4}{x^2+a^2}$, тогда

$$\int \frac{x^4}{x^2+a^2}dx = \int\left(x^2 - a^2 + \frac{a^4}{x^2+a^2}\right)dx = \int x^2dx - \int a^2dx + a^4\int \frac{dx}{x^2+a^2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - a^2x + a^3\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

б) Учитывая кратность корней, подынтегральную функцию представим в виде суммы простых дробей

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}.$$

Приводя к общему знаменателю в правой части, приравниваем числители

$$x=A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)$$

или

$$x=Ax^2-4Ax+4A+Bx^2-3Bx+2B+Cx-C.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{array}{ll} x^2 & 0=A+B, \\ x & 1=-4A-3B+C, \\ x^0 & 0=4A+2B-C. \end{array}$$

Из решения этой системы имеем: $A=1;\ B=-1;\ C=2.$

Таким образом

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x-2)^2}=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{(x-2)^2}=$$

$$=\ln|x-1|-\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C=\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{2}{x-2}+C.$$

в) Так как $(x+a)-(x+b)=a-b,$ то

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right).$$

Отсюда

$$\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\left(\int\frac{dx}{x+b}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\ln|x+b|-\ln|x+a|\right)+C=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C.$$

г) Раскладываем подынтегральную функцию на множители и, учитывая кратность корней, представим ее в виде суммы простых дробей

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Откуда $1=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2$. Составляем систему

$$\begin{aligned}
&x^3 \quad 0=A+C,\\
&x^2 \quad 0=B+D,\\
&x \quad\;\; 0=4A,\\
&x^0 \quad 1=4B.
\end{aligned}$$

Из решения системы имеем: $A=0,\ B=\frac{1}{4},\ C=0,\ D=-\frac{1}{4}.$

Таким образом

$$\int\frac{dx}{x^4+4x^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=-\frac{1}{4x}-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

д) Поскольку один корень действительный, а два комплексные, то подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{2x+1}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Откуда $2x+1=Ax^2+A+Bx^2+Cx-Bx-C$. Приравнивая коэффициенты, имеем

$$\begin{aligned}
&x^2 \quad 0=A+B,\\
&x \quad\;\; 2=C-B,\\
&x^0 \quad 1=A-C.
\end{aligned}$$

Из решения системы находим: $A=\frac{3}{2},\ B=-\frac{3}{2},\ C=\frac{1}{2}.$ Таким

образом

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{3x-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{dx}{x^2+1} = \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\ln(x^2+1) +$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C = \frac{3}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

е) Раскладываем знаменатель подынтегральной функции на множители и представим ее в виде простых дробей

$$\frac{1}{x^4 - x^2 - 6} = \frac{1}{(x^2-3)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2-3} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Откуда $\quad 1 = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx^3 - 3Cx + Dx^2 - 3D.$ Составляем систему

$$\begin{array}{ll} x^3 & 0 = A + C, \\ x^2 & 0 = B + D, \\ x & 0 = 2A - 3C, \\ x^0 & 1 = 2B - 3D. \end{array}$$

Из решения системы имеем: $A = 0,\ B = \frac{1}{5},\ C = 0,\ D = -\frac{1}{5}.$

Таким образом

$$\int \frac{dx}{x^4 - x^2 - 6} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2-3} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+2} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

6.2. Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x^4+1}$; б) $\int \frac{4x^2 - 4x + 7}{(x+1)(2x-3)(2x+5)}dx.$

Решение. а) Воспользуемся разложением

$$x^4+1=\left(x^4+2x^2+1\right)-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(x\sqrt{2}\right)^2=$$

$$=\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)$$

и представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Отсюда имеем

$$1=(Ax+B)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{array}{ll} x^3 & 0=A+C, \\ x^2 & 0=-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D, \\ x & 0=A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D, \\ x^0 & 1=B+D. \end{array}$$

Из решения системы уравнений получим $A=-C=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $B=D=\dfrac{1}{2}$.

Таким образом, решение примет вид

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}dx}{\left(x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right)+C.$$

б) Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{4x^2-4x+7}{(x+1)(2x-3)(2x+5)}=\frac{x^2-x+7/4}{(x+1)(x-3/2)(x+5/2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3/2}+\frac{C}{x+5/2},$$

откуда следует равенство

$$x^2-x+7/4=A(x-3/2)(x+5/2)+B(x+1)(x+5/2)+C(x+1)(x-3/2).$$

Вместо приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях слева и справа будем полагать в этом равенстве последовательно $x=-1,\ 3/2,\ -5/2$, тогда сразу получим $A=-1,\ \ B=\frac{1}{4},\ C=\frac{7}{4}$, т.к. справа всякий раз остается лишь один член. Таким образом,

$$\int\frac{4x^2-4x+7}{(x+1)(2x-3)(2x+5)}dx=-\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-3/2}+\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x+5/2}=$$

$$=-\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-3/2|+\frac{7}{4}\ln|x+5/2|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(2x+5)(2x-3)^7}{256(x+1)^4}\right|+C.$$

6.3. ***Найти*** интегралы: а) $\displaystyle\int\frac{2-3x+x^2}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)^2}dx;$

б) $\displaystyle\int\frac{4x^5-1}{\left(x^5+x+1\right)^2}dx;$ в) $\displaystyle\int\frac{\left(x^2-1\right)^2}{(x+1)\left(x^2+1\right)^3}dx;$ г) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)^3}.$

Решение. а) Воспользуемся методом Остроградского

$$\frac{2-3x+x^2}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)^2}=\left[\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+2x^2+2x+1}\right]'+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+2x^2+2x+1},$$

откуда $2-3x+x^2=(2Ax+B)(x^3+2x^2+2x+1)-$
$-(Ax^2+Bx+C)(3x^2+4x+2)+(Dx^2+Ex+F)(x^3+2x^2+2x+1).$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях, получим систему уравнений, из которой и определяются неопределенные коэффициенты

$$\begin{array}{ll} x^5 & 0=D, \\ x^4 & 0=2A-3A+2D+E, \\ x^3 & 0=4A+B-4A-3B+2D+2E+F, \\ x^2 & 1=4A+2B-2A-4B-3C+D+2E+2F, \\ x & -3=2A+2B-4C-2B+E+2F, \\ x^0 & 2=B-2C+F. \end{array}$$

Из решения данной системы уравнений получим: $A=-9,\ B=-20,\ C=-7,\ D=0,\ E=-9,\ F=-2.$

Интеграл примет вид

$$I=\int\frac{2-3x+x^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}dx=-\frac{9x^2+20x+7}{(x+1)(x^2+x+1)}-\int\frac{9x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx.$$

Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{9x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

откуда $9x+2=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)$,

$$\begin{array}{ll} x^2 & 0=A+B, \\ x & 9=A+B+C, \\ x^0 & 2=A+C. \end{array}$$

Из решения системы имеем $A=-7,\ B=7,\ C=9.$ Таким образом,

$$I=-\frac{9x^2+20x+7}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}+7\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{7x+9}{x^2+x+1}dx=$$

$$=-\frac{9x^2+20x+7}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}+7\ln|x+1|-\int\frac{7x+9}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx.$$

В последнем интеграле сделаем замену $x+\frac{1}{2}=t,\ dx=dt,$

$x=t-\frac{1}{2},$ тогда получим

$$\int\frac{7x+9}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int\frac{7t+11/2}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt=\frac{7}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{11}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{7}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Окончательный результат будет

$$I=-\frac{9x^2+20x+7}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}+7\ln|x+1|-\frac{7}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

б) Воспользуемся методом Остроградского

$$\frac{4x^5-1}{\left(x^5+x+1\right)^2}=\left(\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1}\right)'+\frac{Fx^4+Gx^3+Hx^2+Ix+J}{x^5+x+1},$$

$$4x^5-1=\left(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D\right)\left(x^5+x+1\right)-\left(Ax^4+Bx^3+\right.$$
$$\left.+Cx^2+Dx+E\right)\left(5x^4+1\right)+\left(Fx^4+Gx^3+Hx^2+Ix+J\right)\left(x^5+x+1\right),$$

$$
\begin{array}{ll}
x^9 & 0 = F, \\
x^8 & 0 = 4A - 5A + G, \\
x^7 & 0 = 3B - 5B + H, \\
x^6 & 0 = 2C - 5C + I, \\
x^5 & 4 = D - 5D + J + F, \\
x^4 & 0 = 4A + 5E - A + F + G, \\
x^3 & 0 = 4A + 3B - B + G + H, \\
x^2 & 0 = 3B + 2C - C + H + I, \\
x & 0 = 2C + D - D + I + J, \\
x^0 & -1 = D - E + J.
\end{array}
$$

Из решения системы $A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D = -1,\ E = 0,$ $F = 0,\ G = 0,\ H = 0,\ I = 0,\ J = 0.$

Интеграл примет вид

$$\int \frac{4x^5 - 1}{\left(x^5 + x + 1\right)^2} dx = -\frac{x}{x^5 + x + 1} + C.$$

в) Воспользуемся методом Остроградского

$$\frac{\left(x^2 - 1\right)^2}{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)^3} = \left[\frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{\left(x^2+1\right)^2}\right]' + \frac{E}{x+1} + \frac{Fx + G}{x^2 + 1},$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) - 4\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + \right.$$

$$\left. + D\right)\left(x^2 + x\right) + E\left(x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1\right) + \left(Fx + G\right)\left(x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных, получим

$$
\begin{array}{ll}
x^6 & 0 = E + F, \\
x^5 & 0 = -A + F + G, \\
x^4 & 1 = -A - 2B + 3E + 2F + G, \\
x^3 & 0 = 3A - 2B - 4C + 2F + 2G, \\
x^2 & -2 = 3A + 2B - 4C - 4D + 3E + F + 2G, \\
x & 0 = 2B + C - 4D + F + G, \\
x^0 & 1 = C + E + G.
\end{array}
$$

Из решения системы: $A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{2}{3},\ D = 0,$

$E = 0,\ F = 0,\ G = \frac{1}{3}.$ Интеграл примет вид

$$
\int \frac{\left(x^2 - 1\right)^2}{(x+1)\left(x^2+1\right)^3} dx = \frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{1}{3}\frac{dx}{x^2+1} =
$$

$$
= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x}{\left(x^2+1\right)^2} + \operatorname{arctg} x \right) + C.
$$

г) Представим подынтегральную функцию в виде

$$
\frac{1}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)^3} = \frac{1}{(x-1)^5 (x+1)^3}
$$

и воспользуемся методом Остроградского

$$
\frac{1}{(x-1)^5 (x+1)^3} = \left[\frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F}{(x-1)^4 (x+1)^2} \right]' + \frac{G}{x-1} + \frac{H}{x+1}.
$$

Найдем производную, приведем к общему знаменателю и приравняем числители

$$1=\left(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E\right)\left(x^2-1\right)-\left(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+\right.$$

$$\left.+Ex+F\right)\left(6x+2\right)+G\left(x^6-3x^4+3x^2-1\right)\left(x-1\right)+H\left(x^3-3x^2+\right.$$

$$\left.+3x-1\right)\left(x^4-2x^2+1\right).$$

$$\begin{array}{ll} x^7 & 0=G+H, \\ x^6 & 0=5A=6A-G-3H, \\ x^5 & 0=4B-2A-6B-3G-2H+3H, \\ x^4 & 0=-5A+3C-2B-6C+3G+6H-H, \\ x^3 & 0=-4B+3D-6D-2C+3G+H-6H, \\ x^2 & 0=-3C+E-2D-6E-3G+H, \\ x & 0=-2D-2E-6F-G+3H, \\ x^0 & 1=-E-2F+G-H. \end{array}$$

Из решения системы имеем: $A=\dfrac{1}{3},\ B=-\dfrac{1}{6},\ C=-\dfrac{5}{9},$ $D=\dfrac{23}{36},\ E=-\dfrac{1}{18},\ F=-\dfrac{11}{36},\ G=\dfrac{1}{6},\ H=-\dfrac{1}{6}.$ Таким образом, интеграл будет равен

$$\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^2\left(x^2-1\right)^3}=\frac{\frac{1}{3}x^5-\frac{1}{6}x^4-\frac{5}{9}x^3+\frac{23}{36}x^2-\frac{1}{18}x-\frac{11}{36}}{\left(x-1\right)^4\left(x+1\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{12x^5-6x^4-20x^3+23x^2-2x-11}{\left(x-1\right)^4\left(x+1\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{6x-1}{x+1}\right|+C.$$

1.7. Интегралы от иррациональных функций

Интегралы от иррациональных функций берутся только в некоторых частных случаях. Основным приемом интегрирования является отыскание таких подстановок, которые приводят подынтегральное выражение к рациональному виду.

1°. Интегралы вида $R\left(x,\ x^{\frac{m_1}{n_1}},\ x^{\frac{m_2}{n_2}},\ \ldots\right)dx,$ где R — некоторая рациональная функция; $m_1,\ m_2,\ n_1,\ n_2$ — целые числа, приводятся к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x = t^k,\ dx = kt^{k-1}dt,$ где k — общий знаменатель дробных показателей.

2°. Интегралы более общего вида $\int R\left(x, (ax+b)^{\alpha}, (ax+b)^{\beta}\ \ldots\right)dx$ или

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta},\ \ldots\right)dx$$

приводятся к рациональному виду с помощью аналогичных подстановок $ax+b=t^k,\ \frac{ax+b}{cx+d}=t^k,$ где k — общий знаменатель дробей $\alpha, \beta,\ \ldots$.

3°. Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,$ где m, n, p, a, b — постоянные числа, преобразуется с помощью подстановки $x = z^{1/n}$ к виду $\frac{1}{n}\int z^q\left(a+bz\right)^p dz,$ где $q=\frac{m+1}{n}-1$ и приводится к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях:

1. Если p — целое, то подстановка $z=t^{n_1},$ где n_1 — знаменатель дроби $q=\frac{m_1}{n_1}.$

2. Если $\frac{m+1}{n}$ — целое, то и $\frac{m+1}{n}-1$ — тоже целое и подстановка $a+bx^n = a+bz = t^{n_1}$, где n_1 — знаменатель дроби $p=\frac{m_1}{n_1}$.

3. Если $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, то $p+q=\frac{m+1}{n}-1+p$ — тоже целое и интеграл равен $\int z^q\left(a+bz\right)^p dz = z^{q+p}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz$. Интеграл приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $ax^{-n}+b=\frac{a+bz}{z}=t^{n_1}$, где n_1 — знаменатель дроби $p=\frac{m_1}{n_1}$.

4°. Интегрирование выражений вида $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. Подстановки Эйлера.

1. Если $a>0$, тогда $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x$, откуда

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$

$$dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t+b\right)^2}dt.$$

2. Если $c>0$, тогда $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$, откуда

$$x=\frac{2\sqrt{a}t-b}{a-t^2},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}}{a-t^2},$$

$$dx=2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{\left(a-t^2\right)^2}dt.$$

3. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет различные вещественные корни, т. е. $ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$, тогда $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$, откуда

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a},$$

$$dx=2\frac{a(\mu-\lambda)t}{\left(t^2-a\right)^2}dt.$$

З а м е ч а н и е. При $a>0,\ c>0,$ т. е. в первой и второй подстан о в к а х можно б ы л о б ы положить, соответственно, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}\,x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}.$ В третьей подстановке $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\mu)$. Следует заметить, что в большинстве случаев подстановки Эйлера приводят к более длинным вычислениям, чем другие методы.

5°. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}\right)dx,$ где R — рациональная функция, называемые эллиптическими, вообще говоря не интегрируются, если между коэффициентами функции R или полинома под знаком радикала нет особых соотношений. В ряде случаев, при наличии возвратных полиномов, интеграл находится с помощью подстановок $x+\frac{1}{x}=t$ или $x-\frac{1}{x}=t.$

7.1. Найти интегралы: а) $\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$; б) $\int x\sqrt{3-x}dx$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$; г) $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$; д) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}.$

Решение. а) Общий знаменатель дробных показателей степеней равен четырем, поэтому делаем замену $x=t^4,\ dx=4t^3dt.$

Отсюда

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = 4\int \frac{1+t}{t^4+t^2}t^3dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt = 4\int \left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 4\left(t+\int \frac{tdt}{t^2+1} - \frac{dt}{t^2+1}\right) = 4\left(t+\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) - \operatorname{arctg} t\right) + C =$$

$$= 4\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+1\right) - \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\right) + C.$$

б) Чтобы избавиться от радикала, сделаем замену $3-x=t^2,\ x=3-t^2,\ dx=-2tdt,$ тогда получим

$$\int x\sqrt{3-x}dx = -2\int\left(3-t^2\right)t^2dt =$$

$$= -2\int\left(3t^2-t^4\right)dt = -2\left(t^3-\frac{1}{5}t^5\right)+C = -\frac{2}{5}(3-x)^{3/2}(x+2)+C.$$

в) Общий знаменатель дробных показателей равен шести, поэтому делаем замену $x+1=t^6;\ dx=6t^5dt.$ Отсюда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = 6\int \frac{t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+C = 6\left(\frac{1}{3}\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x+1}+\right.$$

$$\left.+\sqrt[6]{x+1}-\ln\left|\sqrt[6]{x+1}+1\right|\right)+C.$$

г) Чтобы избавиться от радикала, сделаем замену $\frac{x+1}{x-1}=t^2;\ x=\frac{t^2+1}{t^2-1};\ dx=-\frac{4tdt}{\left(t^2-1\right)^2},$ тогда получим

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = -4\int \frac{t^2-1}{t^2+1}\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt = -4\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)\left(t^2-1\right)}.$$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы двух более простых дробей с неопределенными коэффициентами

$$\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)\left(t^2-1\right)}=\frac{A}{t^2+1}+\frac{B}{t^2-1};\; t^2=At^2-A+Bt^2+B;$$

$\{1=A+B,\; 0=-A+B\}\Rightarrow A=\frac{1}{2};\; B=\frac{1}{2},$ таким образом

$$-4\left(\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}\right)=-2\left(\operatorname{arctg} t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C=$$

$$=-\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C.$$

д) Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{1+x}-\left(1+\sqrt{x}\right)$, тогда будем иметь

$$\int\frac{\sqrt{1+x}-1-\sqrt{x}}{1+x-\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx=\int\frac{\sqrt{1+x}-1-\sqrt{x}}{-2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{2}\int dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$$

Рассмотрим $\int\frac{1+x}{x}dx=I$ отдельно. Сделаем замену $\frac{1+x}{x}=t^2,\; x=\frac{1}{t^2-1},\; dx=\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}.$ Интеграл примет вид $I=-2\int\frac{t^2dt}{\left(t^2-1\right)^2}.$ Подынтегральную функцию представим в виде суммы двух более простых дробей

$$\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}=\frac{At+B}{\left(t-1\right)^2}+\frac{Ct+D}{\left(t+1\right)^2}.$$

Приравниваем числители

$$t^2=\left(At+B\right)\left(t^2+2t+1\right)+\left(Ct+D\right)\left(t^2-2t+1\right)$$

и неопределенные коэффициенты при одинаковых степенях t

$$\begin{array}{ll} t^3 & 0 = A + C, \\ t^2 & 1 = 2A + B - 2C + D, \\ t & 0 = A + 2B + C - 2D, \\ t^0 & 0 = B + D. \end{array}$$

Решая данную систему уравнений, находим: $A = \frac{1}{4}$, $B = 0$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = 0$.

Отсюда

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{tdt}{(t-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t-1} + \int (t-1)^{-2}\,dt\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t+1} - \int (t+1)^{-2}\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(-\ln|t-1| + \frac{1}{t-1} + \ln|t+1| + \frac{1}{t+1}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{t}{t^2-1} + C = \ln\left|\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right| + \sqrt{x(1+x)} + C.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}\left(x + 2\sqrt{x} - \ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right| - \sqrt{x(1+x)}\right) + C.$$

7.2. Найти интегралы: а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$; б) $\int \frac{dx}{x^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$; в) $\int \frac{\left(x^2-1\right)dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

Решение. а) Подынтегральное выражение представляет дифференциальный бином. $p = -2$ — целое число, поэтому применяем подстановку $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$. Интеграл примет вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2} = 4\int \frac{t^3dt}{t^2\left(1+t\right)^2} = 4\int \frac{t+1-1}{\left(t+1\right)^2}dt =$$

$$= 4\left(\int \frac{dt}{t+1} - \int \left(t+1\right)^{-2} d\left(t+1\right)\right) = 4\left(\ln\left|t+1\right| + \frac{1}{t+1}\right) + C =$$

$$= 4\left(\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + \frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}\right) + C.$$

б) Подынтегральное выражение представляет дифференциальный бином $p=\frac{1}{3},\ m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ \ \frac{m+1}{n}=2$ — целое число, поэтому применяем подстановку $x=z^4,\ dx=z^3dz,$ получим

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = 4\int \frac{\sqrt[3]{1+z}}{z^2}z^3dz = 4\int z\left(1+z\right)^{1/3}dz.$$

Поскольку $\frac{m+1}{n}-1=\frac{-1/2+1}{1/4}-1=1$ — целое число, то используем подстановку $1+z=t^3,\ z=t^3-1,\ dz=3t^2dt.$ Отсюда

$$I = 12\int \left(t^3-1\right)t^3dt = 12\int \left(t^6-t^3\right)dt = 12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C =$$

$$= \frac{12}{7}\left(z-\frac{3}{4}\right)\left(1+z\right)^{4/3}+C = \frac{12}{7}\left(\sqrt[4]{x}-\frac{3}{4}\right)\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4/3}+C.$$

в) Подынтегральное выражение представляет дифференциальный бином $m=-2,\ n=3,\ p=\frac{1}{3},\ \frac{m+1}{n}+p=-z$ — целое число, поэтому применим подстановку $x=z^{1/3},\ dx=\frac{1}{3}z^{-2/3}dz,$ и получим

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}}=\frac{1}{3}\int\frac{z^{-2/3}dz}{z^{2/3}\left(1+z\right)^{5/3}}=\frac{1}{3}\int\frac{z^{-4/3}z^{-5/3}}{\left(\frac{1+z}{z}\right)^{5/3}}dz=\frac{1}{3}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-5/3}dz.$$

Интеграл приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $\frac{1+z}{z}=t^3,\ z=\frac{1}{t^3-1},\ dz=\frac{3t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}.$

$$I=-\int\left(t^3-1\right)^3t^{-5}\frac{t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}=-\int\frac{t^3-1}{t^3}dt=\int\frac{dt}{t^3}-\int dt=$$

$$=-\frac{1}{2t^2}-t+C=-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1+z}\right)^{2/3}-\left(\frac{1+z}{z}\right)^{1/3}+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{1+x^3}\right)^{2/3}-\left(\frac{1}{x^3}+1\right)^{1/3}+C.$$

7.3. Найти интегралы: а) $\int\frac{dx}{x^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$;

б) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$; в) $\int\frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$

Решение. а) Воспользуемся первой подстановкой Эйлера $x^2+1=t-x.$

Возводя в квадрат, получим $x=\frac{t^2-1}{2t},\ dx=\frac{t^2+1}{2t^2}dt.$

Подставляя под знак интеграла, будем иметь

$$I=\int\frac{dx}{x^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\int\frac{\left(t^2+1\right)dt}{2t^2\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2\left(\frac{t^2-1}{2t}+\frac{t^2+1}{2t}\right)}=2\int\frac{t^2+1}{t\left(t^2-1\right)^2}dt.$$

Воспользуемся методом Остроградского. Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{t^2+1}{t\left(t^2-1\right)^2}=\left[\frac{At+B}{t^2-1}\right]'+\frac{C}{t}+\frac{Dt+E}{t^2-1}.$$

Найдем производную, приведем к общему знаменателю и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных

$$\begin{array}{ll} t^4 & 0=C+D, \\ t^3 & 0=-A+E, \\ t^2 & 1=-2B-2C-D, \\ t & 0=-A-E, \\ t^0 & 1=C. \end{array}$$

Отсюда: $A=0,\ B=-1,\ C=1,\ D=-1,\ E=0.$ Интеграл примет вид

$$I=2\left(-\frac{1}{t^2-1}+\int\frac{dt}{t}-\int\frac{tdt}{t^2-1}\right)=2\left(\ln\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}-\frac{1}{t^2-1}\right)+C.$$

Переходя к переменной x, окончательно будем иметь

$$I=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}-\frac{1}{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)+C.$$

б) Воспользуемся второй подстановкой Эйлера $\sqrt{x^2-x+1}=tx+1.$ Возводя в квадрат, получим $x=\frac{2t+1}{1-t^2},$ $dx=2\frac{t^2+t+1}{\left(1-t^2\right)^2}dt,$ $\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2+t+1}{1-t^2}.$ Подставляя все это под знак интеграла, будем иметь

$$I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=-2\int\frac{t^2+t+1}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+3t+2\right)}dt.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{t^2+t+1}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+3t+2\right)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{\left(t+1\right)^2}+\frac{D}{t+2},$$

$$t^2+t+1=A\left(t+2\right)\left(t^2+2t+1\right)+B\left(t+2\right)\left(t^2-1\right)+$$

$$+C\left(t-1\right)\left(t+2\right)+D\left(t+1\right)\left(t^2-1\right),$$

$$\begin{array}{ll} t^3 & 0=A+B+D, \\ t^2 & 1=4A+2B+C+D, \\ t & 1=5A-B+C-D, \\ t^0 & 1=2A-2B-2C-D. \end{array}$$

Отсюда $A=\frac{1}{6},\ B=\frac{3}{2},\ C=-1,\ D=-\frac{5}{3}.$ Таким образом:

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1}-3\int\frac{dt}{t+1}+2\int\frac{dt}{\left(t+1\right)^2}+\frac{10}{3}\int\frac{dt}{t+2}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|t-1\right|-3\ln\left|t+1\right|-\frac{2}{t+1}+\frac{10}{3}\ln\left|t+2\right|+C.$$

Переходя к переменной x, получим

$$I=-\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-1-x\right|-3\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-1+x\right|+$$

$$+10\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-1+2x\right|-\frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}-1+x}+C.$$

в) Поскольку подкоренное выражение имеет два действительных корня, то воспользуемся третьей подстановкой Эйлера

$$\sqrt{3-2x-x^2}=\left(3+x\right)t,\ \text{откуда}\ x=\frac{1-3t^2}{1+t^2},\ dx=-\frac{8tdt}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

Интеграл примет вид

$$I=\int\frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx=4\int\frac{1+4t^2-21t^4}{\left(t^2+1\right)^3}dt.$$

Воспользуемся методом Остроградского

$$\frac{1+4t^2-21t^4}{\left(t^2+1\right)^3}=\left[\frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{\left(t^2+1\right)^2}\right]'+\frac{Et+F}{t^2+1},$$

откуда

$1+4t^2-21t^4=\left(3At^2+2Bt+C\right)\left(t^2+1\right)-4t\left(At^3+Bt^2+Ct+\right.$

$\left.+D\right)+\left(Et+F\right)\left(t^4+2t^2+1\right)$

$$\begin{array}{ll} t^5 & 0=E, \\ t^4 & -21=3A-4A+F, \\ t^3 & 0=2B-4B+2E, \\ t^2 & 4=3A+C-4C+2F, \\ t & 0=2B-4D+E, \\ t^0 & 1=C+F. \end{array}$$

Отсюда: $A=14,\ B=0,\ C=8,\ D=0,\ E=0,\ F=-7.$ Таким образом,

$$I=4\left(\frac{14t^3+8t}{\left(t^2+1\right)^2}-7\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=4\left(\frac{2t\left(7t^2+4\right)}{\left(t^2+1\right)^2}-7\operatorname{arctg}t\right)+C.$$

Учитывая, что $t^2=\dfrac{1-x}{3+x}$, и переходя к переменной x, окончательно получим

$$I=\frac{1}{2}(19-3x)\sqrt{3-2x-x^2}-28\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{3+x}}+C.$$

7.4. Найти интегралы: а) $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)}{(x^2-1)}\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$;

б) $\displaystyle\int\frac{\left(x^2-1\right)dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

Решение. а) Воспользуемся подстановкой $x+\dfrac{1}{x}=t,$ $\dfrac{x^2-1}{x^2}dx=dt.$

Выведем некоторые нужные соотношения $\dfrac{x^2+1}{x}=t,$ $x^4+1=\left(t^2-2\right)x^2,$ $\dfrac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{1}{t^2-4},$ тогда интеграл примет вид

$$I=\int\frac{(x^2+1)}{(x^2-1)}\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}=\int\frac{tdt}{\left(t^2-4\right)\sqrt{t^2-2}}.$$

Сделаем еще одну замену $t^2-2=z^2,$ $tdt=zdz$ и представим интеграл в виде

$$I=\int\frac{dz}{z^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Переходя к переменной $t,$ а затем к $x,$ будем иметь

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\left(\sqrt{t^2-2}-\sqrt{2}\right)^2}{\left|t^2-4\right|}+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^4+1}-x\sqrt{2}}{x^2-1}\right|+C.$$

б) Воспользуемся подстановкой $x-\dfrac{1}{x}=t,$ $\dfrac{x^2+1}{x^2}dx=dt.$

Введем некоторые дополнительные соотношения $\dfrac{x^2-1}{x}=t,$ $\sqrt{x^4+3x^2+1}=x\sqrt{t^2+5},$ $\dfrac{x^2+1}{x}=\sqrt{t^2+2}.$ Интеграл в этом случае примет вид

$$I=\int\frac{\left(x^2-1\right)dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}=\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+2}\sqrt{t^2+5}}.$$

Сделаем еще одну замену $t^2+2=z^2$, $tdt=zdz$, тогда интеграл преобразуется к виду

$$I=\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+3}}=\ln\left|z+\sqrt{z^2+3}\right|+C.$$

Переходя к переменной t, а затем к x, получим

$$I=\ln\left|\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t^2+5}\right|+C=\ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right|+C.$$

1.8. Интегрирование тригонометрических функций

1°. Интеграл от четной степени $\sin x$, $\cos x$ можно найти путем понижения степени вдвое по формулам

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x). \qquad (1)$$

2°. Интеграл от нечетной степени $\sin x$, $\cos x$ можно найти путем отделения от нее одного множителя и замены его произведения на дифференциал новой переменной.

3°. Интегралы вида $\int\sin^m x\cos^n x dx$ можно найти по правилу (1°), если m и n оба четные неотрицательные числа, или по правилу (2°), если m или n (или и m и n) нечетно. Если $m+n=-2k$, т. е. четное отрицательное число, то целесообразно использовать подстановку $\operatorname{tg} x=t$ или $\operatorname{ctg} x=t$, откуда $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ или $dx=-\frac{dt}{1+t^2}$. В общем случае интегралы данного вида, где m и n целые числа, находятся с помощью рекуррентных формул, которые выводятся интегрированием по частям.

4°. Если подынтегральная функция зависит только от $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$, то применяют замену $\operatorname{tg} x=t$ или $\operatorname{ctg} x=t$.

5°. Если интеграл имеет вид $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $\sin x$, $\cos x$ входят только в четных степенях, то применяется подстановка $\operatorname{tg} x = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, поскольку $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются через $\operatorname{tg} x$ рационально $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ и $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.

6°. Если интегралы имеют вид: $\int \sin ax \cos bx dx$; $\int \sin ax \sin bx dx$; $\int \cos ax \cos bx dx$, то их можно найти путем разложения на слагаемые по формулам:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right),$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right),$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right). \qquad (2)$$

7°. Интегралы от рациональной функции вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ всегда сводятся к интегралам от рациональной функции, т. к. $\sin x$, $\cos x$ и dx выражаются через t рационально

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (3)$$

Рассмотренная подстановка позволяет проинтегрировать любую функцию вида $R(\sin x, \cos x)$, поэтому ее иногда называют «универсальной тригонометрической подстановкой».

8°. Интегралы от произведения трех тригонометрических функций могут быть найдены по формулам

$$\int \cos ax \cos bx \cos cx dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c} + \frac{\sin(b+c-a)x}{b+c-a} + \frac{\sin(a+c-b)x}{a+c-b} + \frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c} \right) + C,$$

$$\int \cos ax \sin bx \sin cx dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c} + \frac{\sin(a+c-b)x}{a+c-b} - \frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{\sin(b+c-a)x}{b+c-a} \right) + C,$$
$$\int \sin ax \cos bx \cos cx dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{\cos(b+c-a)x}{b+c-a} + \frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c} + \frac{\cos(a+c-b)x}{a+c-b} \right) + C,$$
$$\int \sin ax \sin bx \sin cx dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{\cos(a-b+c)x}{a-b+c} - \frac{\cos(b+c-a)x}{b+c-a} - \frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c} \right) + C.$$

8.1. Найти интегралы: а) $\int \sin^4 x dx$; б) $\int \cos^3 x dx$; в) $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$; г) $\int \sin x \cos^5 x dx$; д) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; е) $\int \mathrm{tg}^3 5x dx$.

Решение. а) Пользуемся формулами тригонометрии для половинного угла

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1-\cos 2x\right)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx = \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x\right) + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x\right) + \frac{1}{8}\int \left(1 + \cos 4x\right) dx = \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x\right) + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x \right) + C.$$

б) Отделяем от нечетной степени один множитель первой степени и вносим его под знак дифференциала

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) d \sin x = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

в) По формулам половинных углов имеем

$$\int \cos^2 x \sin^4 x dx = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x)(1-\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{8}(1-\cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) - \frac{1}{16}\int (1+\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x)d\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) - \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + \frac{1}{16}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) + C.$$

г) Вносим синус под знак дифференциала

$$\int \sin x \cos^5 x dx = -\int \cos^5 x d\cos x = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

д) Отделяем в числителе от нечетной степени один множитель первой степени и вносим под знак дифференциала

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}d\cos x = -\int \frac{d\cos x}{\cos^4 x} + \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= -\int \cos^{-4} x d\cos x + \int \cos^{-2} x d\cos x = \frac{1}{3}\cos^{-3} x - \frac{1}{\cos x} + C.$$

е) Делаем замену $\mathrm{tg} 5x = t$, тогда $x = \frac{1}{5}\mathrm{arctg}\, t$ и $dx = \frac{dt}{5(1+t^2)}$. Переходим под знаком интеграла к новой переменной

$$\int \mathrm{tg}^3 5x dx = \frac{1}{5}\int \frac{t^3 dt}{t^2+1}.$$

Выделяем, деля числитель на знаменатель, целую часть

$$\frac{1}{5}\int \frac{t^3 dt}{t^2+1} = \frac{1}{5}\int \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \frac{1}{10}t^2 - \frac{1}{10}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{10}\left(t^2 - \ln(t^2+1)\right) + C = \frac{1}{10}\left(\mathrm{tg}^2 5x - \ln(\mathrm{tg}^2 5x + 1)\right) + C.$$

8.2. Найти интегралы: а) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x}$; б) $\int \cos 3x \cos 7x dx$;

в) $\int \frac{dx}{2\cos x + 3\sin x + 2}$; г) $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$; д) $\int \cos 2x \sin 3x \sin 4x dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 8\sin x \cos x - \cos^2 x}$; ж) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} dx$.

Решение. а) Поскольку синус и косинус в четных степенях, используем подстановку $\operatorname{tg} x = t$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, тогда

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int t^2 \left(1+t^2\right)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int \left(t^2 + t^4\right) dt =$$

$$= \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C.$$

б) Преобразуя по формулам (2), имеем

$$\int \cos 3x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int \left(\cos 4x + \cos 10x\right) dx = \frac{1}{8} \int \cos 4x d\left(4x\right) +$$

$$+ \frac{1}{20} \int \cos 10x d\left(10x\right) = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{20} \sin 10x + C.$$

в) Пользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, тогда по формулам (3) получим

$$\int \frac{dx}{2\cos x + 3\sin x + 2} = 2\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\frac{2t}{1+t^2} + 2} = 2\int \frac{dt}{2 - 2t^2 + 6t + 2 + 2t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{3t+2} = \frac{1}{3} \ln\left|3t+2\right| + C = \frac{1}{3} \ln\left|3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\right| + C.$$

г) Воспользуемся обобщенной формулой интегрирования (13)

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x}\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg} x + \sec x\right|\right) + C.$$

д) Пользуясь формулами пункта (8°), имеем

$$\int \cos 2x \sin 3x \sin 4x dx = \frac{1}{4}\left(\sin(2+3-4)x + \frac{1}{3}\sin(2+4-3)x -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{9}\sin(2+3+4)x - \frac{1}{5}\sin(3+4-2)x\right) + C = \frac{1}{4}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{9}\sin 9x - \frac{1}{5}\sin 5x\right) + C.$$

е) Разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 x$, будем иметь

$$\int \frac{d\ \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x - 1} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x - 4)}{(\operatorname{tg} x - 4)^2 - 17} = \frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 4 - \sqrt{17}}{\operatorname{tg} x - 4 + \sqrt{17}}\right| + C.$$

ж) Умножим числитель и знаменатель на $\cos x$, получим

$$\int \frac{\cos x\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos^2 x}dx = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x} d\ \operatorname{tg} x = \int \operatorname{tg}^{-\frac{1}{2}} x d\ \operatorname{tg} x = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$$

1.9. Интегрирование гиперболических функций

1°. Интегрирование гиперболических функций производится аналогично интегрированию тригонометрических функций. Интегралы от квадратов и других четных степеней $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ находятся применением формул:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;\ \operatorname{sh} 2x = 2\ \operatorname{sh} x\ \operatorname{ch} x;\ \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1);$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1);\ \operatorname{sch}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x;\ \operatorname{csch}^2 x = 1 - \operatorname{cth}^2 x.$$

Интегралы от нечетных степеней $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ находятся так же, что и интегралы от нечетных степеней $\sin x$, $\cos x$.

2°. Гиперболические подстановки могут применяться при нахождении интегралов вида

$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ — подстановкой $x = a \operatorname{ch} t$;

$\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ — подстановкой $x = a \operatorname{sh} x$;

$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ — подстановкой $x = a \operatorname{th} x$.

При этом: если $x = a \operatorname{sh} t$, то $t = \ln \dfrac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$, если $x = a \operatorname{ch} x$, то $t = \ln \dfrac{x+\ln\sqrt{x^2-a^2}}{a}$.

9.1. Найти интегралы: а) $\int \operatorname{sh}^2 2x dx$; б) $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x dx$; в) $\int \operatorname{th}^4 x dx$; г) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch} x+1}$; д) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh} x}$; е) $\int x^2 \operatorname{sh} x dx$; ж) $\int \sqrt{\operatorname{ch} x - 1} dx$; з) $\int \dfrac{e^x dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$; и) $\int \sin x \operatorname{sh} x dx$.

Решение. а) Пользуясь формулами понижения степени, имеем

$$\int \operatorname{sh}^2 2x dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 4x - 1)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\int \operatorname{ch} 4x d4x - x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 4x - x\right) + C.$$

б) Внесем $\operatorname{ch} x$ под знак дифференциала, тогда будем иметь

$$\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x dx = \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x d\operatorname{sh} x = \int \operatorname{sh}^2 x \left(1+\operatorname{sh}^2 x\right) d\operatorname{sh} x =$$

$$= \int \operatorname{sh}^2 x d\operatorname{sh} x + \operatorname{sh}^4 x d\operatorname{sh} x = \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + C.$$

в) Сделаем замену $\operatorname{th} x = t$; $\dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = dt$; $dx = \dfrac{dt}{1-t^2}$, тогда получим

$$\int \operatorname{th}^4 x dx = \int \frac{t^4 dt}{1-t^2} = -\int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = -\left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C =$$

$$= -\left(\frac{1}{3} \operatorname{th}^3 x + \operatorname{th} x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{th} x - 1}{\operatorname{th} x + 1} \right| \right) + C.$$

г) Преобразуем подынтегральную функцию по формулам половинных углов

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1} = \int \frac{dx}{2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{th} \frac{x}{2} + C.$$

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{dx}{2\operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}} = \int \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{2} dx}{2\operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d \operatorname{th} \frac{x}{2}}{\operatorname{th} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C.$

е) Воспользуемся дважды формулой интегрирования по частям, принимая $x^2 = u$, $\operatorname{sh} x dx = dv$, $2x dx = du$, $v = \operatorname{ch} x$. Будем иметь

$$\int x^2 \operatorname{sh} x dx = x^2 \operatorname{ch} x - 2\int x \operatorname{ch} x dx.$$

Принимаем $x = u$, $\operatorname{ch} x dx = dv$, отсюда $dx = du$, $v = \operatorname{sh} x$. Окончательно получим $\int x^2 \operatorname{sh} x dx = x^2 \operatorname{ch} x - 2\left(x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \right) + C.$

ж) $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{ch} x - 1} dx = \int \sqrt{2\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} dx = 2\sqrt{2} \int \operatorname{sh} \frac{x}{2} d \frac{x}{2} = 2\sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2} + C.$

з) Воспользуемся заменой $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x} \right)$, $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} \right)$, тогда будем иметь

$$\int \frac{e^x dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} = 2\int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}} = \int dx = x + C.$$

и) Раскроем гиперболический синус и воспользуемся обобщенной формулой (6)

$$\int \sin x \text{ sh } x dx = \frac{1}{2}\int e^{x} \sin x dx - \frac{1}{2}\int e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{4}(\sin x - \cos x)e^{x} +$$

$$+\frac{1}{4}(\sin x + \cos x)e^{-x} + C = \frac{1}{2}(\sin x \text{ ch } x - \cos x \text{ sh } x) + C.$$

9.2. ***Найти*** интегралы: а) $\int \sqrt{x^2+4}dx$; б) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Решение. а) Сделаем замену $x = 2\text{sh } t;\ dx = 2\text{ch } xdt,$ тогда

$$\int \sqrt{x^2+4}dx = 4\int \sqrt{\text{sh}^2 t+1} \text{ ch } tdt = 4\int \text{ch}^2 tdt = 2\int (\text{ch } 2t+1)dt =$$

$$= \text{sh } 2t + 2t + C = 2\text{sh } t\sqrt{1+\text{sh}^2 t} + 2t + C = \frac{x}{2}\sqrt{4+x^2} + 2\ln\frac{x+x^2+4}{2} + C.$$

б) Сделаем замену $x = a \text{ ch } tdt,\ dx = a \text{ sh } tdt,$ тогда

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = a^2\int \frac{\text{ch}^2 t \text{ sh } tdt}{\text{sh } t} = a^2\int \text{ch}^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int (\text{ch } 2t+1)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}(\text{sh } 2t + t) + C = a^2\left(\text{ch } t\sqrt{\text{ch}^2 t-1} + t\right) + C =$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} + a^2 \ln\frac{x+\ln\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C.$$

в) Выделяя полный квадрат и делая замену $1-x=t,\ dx=-dt,$ получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = -\int \frac{dt}{1-t^2}.$$

Сделаем еще одну замену $t = \text{th } z,\ dt = \frac{dz}{\text{ch}^2 z},$ тогда

$$-\int \frac{dt}{1-t^2} = -\int \frac{dz}{\text{ch } z} = -\int \frac{\text{ch } zdz}{\text{ch}^2 z} = -\int \frac{d \text{ sh } z}{1+\text{sh}^2 z} = -\text{arctg sh}^2 z + C =$$

$$= -\text{arctg}\frac{\text{th}^2 z}{1-\text{th}^2 z} + C = -\text{arctg}\frac{t^2}{1-t^2} + C = -\text{arctg}\frac{(1-x)^2}{2x-x^2} + C.$$

1.10. Задачи, приводящие к понятию неопределенного интеграла

Из геометрического смысла первообразной следует, что производная функции $y = F(x)$ дает угловой коэффициент касательной к соответствующему графику $y = F(x) + C.$ Поэтому задача отыскания первообразной для заданной функции $f(x),$ равносильна задаче нахождения кривой, для которой закон изменения углового коэффициента известен $\operatorname{tg} \alpha = f(x).$

Поскольку кривые отличаются друг от друга на постоянную интегрирования, то для того, чтобы из этого множества кривых выбрать одну кривую, достаточно задать точку $(x_0, y_0),$ через которую кривая должна проходить, т. е. определить постоянную интегрирования.

Из механического истолкования неопределенного интеграла следует, что если задан закон изменения скорости от времени $v = f(x),$ то зависимость пути S от времени определяется интегралом $S = \int f(t)\,dt,$ т. к. скорость движения точки есть производная $\dfrac{dS}{dt}.$ Постоянная интегрирования находится из заданного начального условия, иначе получим бесчисленное множество решений.

10.1. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(1,2),$ если угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен обратной величине абсциссы точки касания.

Решение. Закон изменения углового коэффициента известен $f(x)=\frac{1}{x}$. Поскольку производная от $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, то $y=\ln x+C$ — искомая кривая.

Для определения постоянной интегрирования воспользуемся условием, что кривая проходит через точку M, тогда $2=\ln 1+C$ и $C=2$. Таким образом: $y=\ln x+2$.

10.2. Скорость тела задана функцией $v=3t^2$ м/с**. Найти** закон изменения пути S, если за $t=2$с, тело прошло путь $S=20$м.

Решение. Имеем: $S=\int v\,dt=3\int t^2dt=t^3+C$. Согласно начальному условию: $20=2^3+C$, откуда $C=12$. Таким образом, искомый закон $S=t^3+12$.

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Определение определенного интеграла. Свойства. Формула Ньютона-Лейбница

1°. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей. В каждом из отрезков $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ возьмем по точке ξ_i, и вычислим значение функции $f(\xi_i)$. Сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. В зависимости от деления отрезка $[a,b]$ на n частичных отрезков и выбора точек ξ_i. можно составить бесчисленное множество интегральных сумм.

Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке $[a,b]$ *называется число, равное общему пределу всех интегральных сумм при стремлении к нулю максимального отрезка разбиения*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Числа a и b называются, соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования, отрезок $[a,b]$ - промежутком интегрирования.

2°. *Свойства:* 1. Определенный интеграл зависит только от вида функции *f(x)* и пределов интегрирования, но не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt .$$

2. Определенный интеграл меняет знак при перестановке пределов интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx .$$

3. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^b f(x)dx = 0 .$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx .$$

5. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx .$$

6. Отрезок интегрирования можно разбивать на части

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ,$$

причем точка c может быть как внутренней точкой деления отрезка $(a < c < b)$, так и внешней $(a < b < c)$.

3°. *Формула Ньютона-Лейбница.* Если *F(x)* есть первообразная от непрерывной функции *f(x)*, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

По формуле Ньютона-Лейбница сначала находят первообразную, а затем находят разность первообразных, соответственно, при верхнем и нижнем значении предела.

4°. Нахождение интегралов от четных и нечетных функций с симметричными пределами интегрирования можно упростить, применяя формулы $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, если $f(x)$ - четная функция, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, если $f(x)$ - нечетная функция.

5°. Если функция периодическая с периодом *T*, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx; \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...) .$$

1.1. Вычислить интегралы:

а) $\int_1^3 \left(3x^2+1\right)dx$; б) $\int_0^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; в) $\int_{-1}^7 \frac{dt}{\sqrt{3t+4}}dt$; г) $\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}dx$;

Решение. а) Представим определенный интеграл в виде суммы двух интегралов и для каждого из них воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница

$$\int_1^3 \left(3x^2+1\right)dx = 3\int_1^3 x^2dx + \int_1^3 dx = x^3\Big|_1^3 + x\Big|_1^3 = (3^3 - 1^3) + (3-1) = 28.$$

б) По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_0^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx = \left(x + 4e^{\frac{x}{4}}\right)\Bigg|_0^4 = (4+4e) - (0+4) = 4e.$$

в) По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_{-1}^7 \frac{dt}{\sqrt{3t+4}}dt = \frac{1}{3}\int_{-1}^7 (3t+4)^{-\frac{1}{2}}d(3t+4) = \frac{2}{3}(3t+4)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{-1}^7$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{21+4} - \sqrt{-3+4}) = \frac{8}{3}.$$

г) Пользуемся формулой Ньютона-Лейбница

$$\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2}\Bigg|_0^\pi = -2(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = 2.$$

***1.2. Вычислить* интегралы:** а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$;

б) $\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^7 dx}{x^6+4x^2+7}$; в) $\int\limits_{\frac{9\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{3}} \frac{\sin^2 x+\sin 2x}{\cos^4 x} dx.$

Решение. а) Подынтегральная функция есть произведение двух нечетных функций, т. е. является четной функцией, поэтому

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x) dx = \left(x-\frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2.}$$

б) В силу нечетности подынтегральной функции и симметричности пределов интегрирования данный определенный интеграл равен нулю

$$\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^7 dx}{x^6+4x^2+7} = 0\,.$$

в) Подынтегральная функция имеет период π, поэтому из верхнего и нижнего пределов интегрирования можно вычесть 2π. Определенный интеграл примет вид

$$\int\limits_{\frac{9\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{3}} \frac{\sin^2 x+\sin 2x}{\cos^4 x} dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x+\sin 2x}{\cos^4 x} dx =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (tg^2 x+2tgx) dtgx = \left(\frac{1}{3} tg^3 x + tg^2 x \right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} 3\sqrt{3}+3-\frac{1}{3}-1 = \sqrt{3}+\frac{5}{3}.$$

2.2. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть дан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$. Введем новую переменную t по формуле $x=\varphi(t)$.

Если $\varphi(\alpha)=a;\ \varphi(\beta)=b$, функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$ и $f\left(\varphi(t)\right)$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

2.1. Вычислить определенные интегралы: а) $\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$;

б) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$; г) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+tg^2x}{(1+tgx)^2}dx$; д) $\int\limits_0^4 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

е) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx$; ж) $\int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Решение. а) Сделаем замену переменной $x=t^2$, тогда $dx=2tdt$. Находим новые пределы интегрирования: при $x=0, t=0$ и при $x=3, t=\sqrt{3}$. Интеграл примет вид

$$\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}=\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2}tdt=2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\int\limits_0^{\sqrt{3}} dt-2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=2t\Big|_0^{\sqrt{3}}-2arctgt\Big|_0^{\sqrt{3}}=2\left(\sqrt{3}-arctg\sqrt{3}\right)=2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$$

б) Полагаем $e^x=t$, тогда $dx=\frac{dt}{t}$. Находим новые пределы интегрирования: при $x=\ln 2, t=2$ и при $x=\ln 3, t=3$. Отсюда

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int_2^3\frac{dt}{\left(t-t^{-1}\right)t}=\int_2^3\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

в) Сделаем замену $t=tg\frac{x}{2}$, тогда $dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Перейдем к новым пределам интегрирования: при $x=0, t=0$ и при $x=\frac{\pi}{2}, t=1$. Интеграл примет вид

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+2\cos x}=2\int_0^1\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int_0^1\frac{dt}{3+3t^2+2-2t^2}=$$

$$=2\int_0^1\frac{dt}{t^2+5}=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1=\frac{2\sqrt{5}}{5}arctg\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

г) Сделаем замену $tgx=t$, тогда $dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Перейдем к новым пределам интегрирования: при $x=\frac{\pi}{4}, t=1$ и при $x=\frac{\pi}{3}, t=\sqrt{3}$. Интеграл имеет вид

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+tg^2x}{\left(1+tgx\right)^2}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1+t^2}{\left(1+t\right)^2}\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\sqrt{3}}\left(1+t\right)^{-2}d\left(1+t\right)=$$

$$=-\left|\frac{1}{1+t}\right|_1^{\sqrt{3}}=-\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

д) Сделаем замену $x = 4\sin t$, тогда $dx = 4\cos t dt$. Перейдем к новым пределам интегрирования: при $x = 0, t = 0$ и при $x = 4, t = \frac{\pi}{2}$. Интеграл примет вид

$$\int_0^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}} = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t 4\cos t dt}{4\cos t} = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\, dt = 8\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.$$

е) В данном определенном интеграле первообразная не выражается через элементарные функции. Воспользуемся искусственным приемом. Сделаем подстановку $x = tgt$, тогда $dt = \frac{dx}{1 + x^2}$ и при $x = 0, t = 0$, а при $x = 1, t = \frac{\pi}{4}$. Таким образом

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(tgt + 1)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\sin t + \cos t}{\cos t} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt =$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt.$$

Последние два интеграла равны между собой, т. к. приводятся один к другому с помощью подстановки $t = \frac{\pi}{4} - \varphi$. Действительно, $dt = -d\varphi$, причем при $t = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = 0$ и интегралы равны.

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 - \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt =$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

ж) Воспользуемся подстановкой $x = \pi - t$, тогда при $x = 0$, $t = \pi$ и при $x = \pi$, $x = \pi, t = 0$. Интеграл примет вид

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt =$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$$

Поскольку величина определенного интеграла не зависит от переменной интегрирования, то, заменяя в последнем интеграле t на x и перенося его в левую часть, будем иметь

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{1+\cos^2 t} = -\frac{\pi}{2} arctg(\cos t)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(arctg(-1) - arctg 1\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

2.3. Интегрирование по частям

1°. Интегрирование по частям в определенном интеграле выполняется по формуле

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \,. \qquad (1)$$

2°. Обобщенная формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = \left(uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n u^n v\right)\Big|_a^b + \\ +(-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}vdx. \qquad (2)$$

Пользуясь обобщенной формулой интегрирования по частям, можно вывести ряд рекурентных формул:

1. Интегралы $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx,\ \ I'_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx$ находятся с помощью рекурентной формулы $I_m = \dfrac{m-1}{m} I_{m-2}$ и равны.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m xdx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{при } m \text{ - четном,} \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{при } m \text{ - нечетном.} \end{cases}$$

2. Если m и n натуральные числа, то интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n xdx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{при } m \text{ и } n - \text{четных;} \\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

3. Интеграл вида $I_{n,m} = \int_0^1 x^n \ln^m x\,dx$ находится по рекурентной формуле $I_{n,m} = -\dfrac{m}{n+1} I_{n,m-1}$ и равен.

$$I_{n,m} = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

4. Если m и n натуральные числа, то имеет место следующий интеграл

$$\int_0^1 (1-x)^n x^m dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}.$$

5. Интеграл вида $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin mx\, dx$ находится по рекурентной формуле $I_m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + I_{m-1}\right)$ и равен

$$I_m = \frac{1}{2^{m+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^m}{m}\right).$$

6. Интеграл вида $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos mx\, dx$ равен $I_m = \frac{\pi}{2^{m+1}}$.

7. Приведем еще некоторые известные соотношения:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x\, dx = 0$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(m+2)x\, dx = \frac{1}{m+1}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos(m+2)x\, dx = -\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m+1}$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \sin(m+2)x\, dx = \frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1}$.

3.1. Вычислить интегралы: а) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x\, dx$;

б) $\int_0^1 (x+2)e^{5x} dx$.

Решение. а) Полагаем $u = x; \sin x\, dx = dv$, тогда $du = dx$; $v = -\cos x$. Пользуемся формулой (1)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x\, dx = -x\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx =$$

$$= -(\pi\cos\pi + \pi\cos\pi) + \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.$$

б) Полагаем $u = x+2;\ e^{5x}dx = dv,$ тогда $du = dx;\ v = \frac{1}{5}e^{5x}$.

По формуле (1) имеем

$$\int_0^1 (x+2)e^{5x}dx = \frac{1}{5}(x+2)e^{5x}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}\int_0^1 e^{5x}dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(3e^5 - 2\right) - \frac{1}{25}e^{5x}\Big|_0^1 = \frac{1}{25}\left(14e^5 - 9\right).$$

3.2. Вычислить интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 x\,dx$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x\,dx$; в) $\int_0^1 x^4 \ln^3 x\,dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos 7x\,dx$.

Решение. а) Воспользуемся формулой пункта 1. При $m = 9$, т.е. нечетном, будем иметь

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 9x\,dx = \frac{8!!}{9!!} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot} \simeq 0,406\,.$$

б) По формуле пункта (2), где $m = 5;\ n = 4$, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x dx = \frac{4!!3!!}{9!!} = \frac{2\cdot4\cdot3}{3\cdot5\cdot7\cdot9} \simeq 0,0254\,.$$

в) По формуле пункта 3, где $n = 4,\ m = 3$, имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \ln^3 x dx = (-1)^3 \frac{3!}{(4+1)^{3+1}} = -\frac{2\cdot3}{5^4} = -0,0096\,.$$

г) По формуле пункта 7 имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos 7x dx = -\frac{1}{6}\sin\frac{5\pi}{2} = -\frac{1}{6}\,.$$

2.4. Теоремы об оценке определенного интеграла

1°. ЕСЛИ функция $f(x) \ge 0$ в промежутке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0\,.$$

2°. Если функции *f(x)* и $\varphi(x)$ интегрируемы в промежутке $[a,b]$, причем $a<b$, то справедливо неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx .$$

4°. Теорема об оценке определенного интеграла. Если функция непрерывна и интегрируема в промежутке $[a,b]$, причем $a<b$, и если во всем этом промежутке выполняется неравенство $m \le f(x) \le M$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

где m и M - наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ в промежутке $[a,b]$.

5°. Обобщенная теорема об оценке определенного интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b]$, а $\varphi(x) \ge 0$ интегрируема на $[a,b]$, то

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \le M\int_a^b \varphi(x)dx .$$

6°. Теорема о среднем значении. Если $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b]$, то существует такая точка $c \in (a,b)$, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Число $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ - называется средним значением функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$.

7°. Обобщенная теорема о среднем. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы в промежутке $[a,b]$, $\varphi(x)$ во всем промежутке не меняют знака $\varphi(x)\geq 0(\varphi(x)\leq 0)$ и выполняется неравенство $m\leq f(x)\leq M$, то существует такая точка $c\in(a,b)$, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)dx.$$

8°. *Неравенство Коши-Буняковского.* Если квадраты функций $f^2(x)$ и $\varphi^2(x)$ интегрируемы в промежутке $[a,b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b \varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.1. Не вычисляя интеграла, **определить** их знак:
а) $\int_{-2}^{1} x^3 dx$; б) $\int_{-1}^{1} xe^x dx$; в) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x dx$.

Решение. а) Разобьем отрезок интегрирования на отрезки [-2,-1] и [-1,1]. Поскольку подынтегральная функция нечетная, то на отрезке [-1,1] интеграл равен нулю. На отрезке [-2,-1] подынтегральная функция отрицательна, следовательно, интеграл имеет знак минус.

б) Поскольку подынтегральная функция на отрезке [-1,1] положительна, то интеграл имеет знак плюс.

в) Так как логарифм при $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ отрицательный, то подынтегральная функция то же отрицательна, следовательно, интеграл имеет знак минус.

4.2. Не вычисляя интегралов, **выяснить,** какой из интегралов больше: а) $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^3}dx$ или $\int_0^1 xdx$. б) $\int_0^1 x^2\cos^2 xdx$ или $\int_0^1 x\sin^2 xdx$.

Решение. а) Поскольку на отрезке [0,1] выполняется неравенство $\sqrt[3]{1+x^3} > x$, òî $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^3}dx > \int_0^1 xdx$

б) Поскольку на отрезке [0,1] выполняется неравенство $x^2\cos^2 x < x\sin^2 x$, то $\int_0^1 x^2\cos^2 x\,dx < \int_0^1 x\sin^2 x\,dx$.

4.3. Оценить интеграл $\int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{\sqrt{3+2\cos x}}$.

Решение. При $0 \le x \le 2\pi$ имеем $1 \le 3+2\cos x \le 5$, т.е. $m=\dfrac{1}{\sqrt{5}}, M=1$. Поскольку $b-a=2\pi$,то по теореме 4° имеем

$$\frac{2\pi}{\sqrt{5}} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{3+2\cos x}} \le 2\pi .$$

4.4. Оценить интеграл $\int_0^1 \sqrt{x\left(1+x^3\right)}\,dx$, пользуясь: а) обобщенной теоремой об оценке интеграла; б) неравенством Коши-Буняковского.

Решение. а) Пусть $\varphi(x)=\sqrt{x}$, а $f(x)=\sqrt{1+x^3}$. Найдем наибольшее и наименьшее значение $f(x)$ на $[0,1]$: $m=1, M=\sqrt{2}$.

По теореме 5° имеем $\int_0^1 \sqrt{x}dx \le \int_0^1 \sqrt{x\left(1+x^3\right)}dx \le \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{x}dx$, откуда $\dfrac{2}{3} \le \int_0^1 \sqrt{x\left(1+x^3\right)}dx \le \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

б) Поскольку $f^2(x)=1+x^3$ и $\varphi^2(x)=x$ интегрируемы на [0,1], то неравенство Коши-Буняковского имеет вид

$$\left|\int_0^1 \sqrt{x\left(1+x^3\right)}dx\right| \le \left(\int_0^1 \left(1+x^3\right)dx \int_0^1 xdx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(x+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

4.5. Найти средние значения функций на заданных промежутках: а) $f(x)=x^2, 0\le x\le 1$; б) $\cos^3 x, 0\le x\le \frac{\pi}{2}$.

Решение. а) Находим, что $b-a=1$. Среднее значение функции (6°) на отрезке [0,1] находим по формуле

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.$$

б) Среднее значение функции равно

$$f(c)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)d\sin x=\frac{2}{\pi}\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3\pi}.$$

2.5. Определенный интеграл как функция верхнего предела

Если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a,b]$, то она интегрируема и в промежутке $[a,x]$, где $x\in[a,b]$. Заменяя верхний предел b переменной x, получим выражение

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

которое является функцией от *x*. Чтобы не смешивать переменную интегрирования с ее верхним пределом *x*, здесь она обозначена через t.

1°. Если функция непрерывна в точке $t=x$, где $x\in[a,b]$ то в этой точке функция $\hat{O}(x)$ имеет производную

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x).$$

2°. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы в любой точке *x*, принадлежащей промежутку $[a,b]$, и $f(t)$ непрерывна при $\varphi(a) \le t \le \psi(b)$, то справедливо равенство

$$\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt \right)'_x = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

5.1. *Найти* производные следующих функций:

а) $\Phi(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^2}dt$; б) $\Phi(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt$.

Решение. а) Используя свойство (1°), находим

$$\Phi'(x) = \left(\int_0^x \frac{e^t}{t^2}dt \right)'_x = \frac{e^x}{x^2}.$$

б) Используя свойство (2°) и учитывая, что $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $\psi(x) = x^2$, $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\psi'(x) = 2x$, находим

$$\Phi'(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin\sqrt{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\frac{1}{2x}\sin x - \sin\sqrt[4]{x} \right).$$

5.2. *Найти* точки экстремума функции

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt, (x > 0).$$

Решение. Находим производную от функции $\hat{O}(x)$ и приравниваем ее к нулю $\Phi'(x) = \frac{\sin x}{x}; \sin x = 0$,отсюда $x = \pi k$, $(k = 0,1,2,...)$.

5.3. *Найти* производные от интегралов:

а) $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$; б) $\frac{d}{da}\int_a^b \sqrt{1-t^3}\,dt$.

Решение. а) Используя свойство (1°), имеем

$$\frac{d}{da}\int_a^b \frac{dt}{\ln t} = \frac{1}{\ln x}.$$

б) Если изменить пределы интегрирования в определенном интеграле, то справедливы преобразования

$$\frac{d}{da}\int_a^b \sqrt{1-t^3}\,dt = -\frac{d}{da}\int_b^a \sqrt{1-t^3}\,dt = -\sqrt{1-t^3}.$$

2.6. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами или от разрывных функций называются *несобственными.*

1°. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, то этот предел называется *несобственным интегралом первого рода* от функции $f(x)$ на интервале $[a,\infty]$ и обозначается

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Несобственный интеграл существует или сходится, если существует конечный предел. Если несобственный интеграл конечного предела не имеет, то интеграл расходится.

Для других бесконечных интервалов несобственные интегралы выражаются аналогичным образом

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx; \qquad (2)$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int\limits_c^\infty f(x)\,dx. \qquad (3)$$

С геометрической точки зрения определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ выражает площадь области, ограниченной кривой $f(x)\geq 0$, прямыми $x=a, x=b$ и осью абсцисс. Несобственный интеграл в этом смысле выражает площадь неограниченной области, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и прямой $x=a$.

2°. Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=c$, принадлежащей отрезку $[a,b]$ и непрерывна во всех других точках этого отрезка, то интеграл от функции $f(x)$ называется *несобственным интегралом второго рода* и вычисляется по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \qquad (4)$$

где ε - произвольная бесконечно малая величина.

Геометрически несобственный интеграл (4) есть сумма площадей двух фигур, ограниченных графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a,\ x=b$, вертикальной асимптотой $x=c$ и осью абсцисс.

При $c=a$ или $c=b$ несобственные интегралы равны

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx; \ \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx;$$

3°. Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов.

1. Пусть при $a\le x\le\infty$ имеет место равенство $f(x)\le\varphi(x)$, тогда из сходимости интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$, следует расходимость $\int_0^\infty \varphi(x)dx$

2. Если при $a\le x\le+\infty$ существует конечный предел $\lim\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=k\ (0\le k\le+\infty)$, то интегралы $\int_a^\infty f(x)dx$ и $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Если при $x \to \infty$, функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}$ $(\alpha > 1)$, то при $\alpha > 1$ и $\varphi(x) \le c \le +\infty$ интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, а при $\alpha \le 1$ и $\varphi(x) > c > 0$ расходится.

4. Если сходится интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$, то тем более сходится и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$. Последний интеграл называется *абсолютно сходящимся,* а функция $f(x)$ - *абсолютно интегрируемой* в промежутке $[a, +\infty]$.

5. *Признак Абеля.* Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на отрезке $[a, +\infty)$, причем функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке, т. е. интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, а функция $\varphi(x)$ - монотонна и ограничена $|\varphi(x)| \le L\,(L - const, x \in [a, \infty))$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$ сходится.

6. *Признак Дирихле.* Если функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$ $(b > a)$, причем интеграл $\left|\int_a^{b} f(x)\,dx\right| \le L$ $(L - const, a \le b < \infty)$ оказывается ограниченным, а функция $\varphi(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$ сходится.

7. Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны.

Если для достаточно близких к c значений x функция $f(x)$ имеет вид $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{(c-x)^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$, то при $\alpha<1$ и $\varphi(x)\le L<+\infty$ $(L-const)$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится $(a\le c\le b)$, при $\alpha>1$ и $\varphi(x)\ge L>0$ интеграл расходится.

6.1. ***Вычислить*** несобственный интеграл или установить его расходимость: а) $\int_1^{\infty}\dfrac{x^2dx}{1+x^6}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{x^2+2x+2}$; в) $\int_{-\infty}^{0}xe^{-\frac{x}{2}}dx$; г) $\int_1^{\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; д) $\int_9^{\infty}\dfrac{dx}{x\ln^3 x}$.

Решение. а) Преобразуем подынтегральное выражение и воспользуемся формулой (1)

$$\int_1^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^6}=\frac{1}{3}\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx^3}{1+\left(x^3\right)^2}=\frac{1}{3}\lim_{\beta\to\infty}\operatorname{arctg}x^3\Big|_1^{\beta}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\beta\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\beta^3-\operatorname{arctg}1\right)=\frac{\pi}{12}.$$

б) Разбиваем точкой $x=0$ промежуток интегрирования на два интервала, а интеграл на два несобственных интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}+\int_0^{\infty}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2 1}=$$

$$=\lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{0}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}+\lim_{\beta\to\infty}\int_0^{\beta}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=\lim_{\beta\to-\infty}\operatorname{arctg}\,(x+1)\Big|_{\beta}^{0}+$$

$$+\lim_{\beta\to\infty}\operatorname{arctg}\,(x+1)\Big|_0^{\beta}=\lim_{\beta\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(\beta+1)\right)+$$

$$+\lim_{\beta\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(\beta+1)-\operatorname{arctg}1\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

в) Представим несобственный интеграл с помощью предельного перехода в виде определенного и воспользуемся формулой интегрирования по частям, полагая $x = u$, $e^{-\frac{x}{2}}dx = dv$; $dx = du$, $v = -2e^{-\frac{x}{2}}$

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-\frac{x}{2}}dx = \lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{0} xe^{-\frac{x}{2}}dx = \lim_{\beta\to-\infty}\left(-2xe^{-\frac{x}{2}}\Big|_{\beta}^{0} + 2\int_{\beta}^{0} e^{-\frac{x}{2}}dx \right) =$$

$$= -2\lim_{\beta\to-\infty}(x+2)e^{-\frac{x}{2}}\Big|_{\beta}^{0} = -2\lim_{\beta\to-\infty}\left(2-(\beta+2)e^{-\frac{\beta}{2}} \right) = -\infty.$$

Интеграл расходится.

г) Перейдем к новой переменной $x = t^2; dx = 2tdt$ при $x = 1$, $t = 1$, при $x = \infty, t = \infty$ и интеграл примет вид

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_{1}^{\infty}\frac{2tdt}{t(1+t^2)} = 2\int_{1}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}.$$

С помощью предельного перехода приводим интеграл к определенному интегралу и вычисляем значение предела

$$2\int_{1}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = 2\lim_{\beta\to\infty}\int_{1}^{\beta}\frac{dt}{1+t^2} = 2\lim_{\beta\to\infty}\operatorname{arctg} t\Big|_{1}^{\beta} =$$

$$= 2\lim_{\beta\to\infty}(\operatorname{arctg}\beta - \operatorname{arctg} 1) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

д) Сделаем следующие преобразования

$$\int_{9}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{\beta\to\infty}\int_{9}^{\beta}\ln^{-3} x\,d\ln x = -\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\ln^2 x}\Big|_{9}^{\beta} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{\ln^2\beta} - \frac{1}{\ln^2 9}\right) = \frac{1}{2\ln^2 9} = \frac{1}{8\ln^2 3}.$$

6.2. Вычислить интегралы:

а) $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; б) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$; в) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^3-3x^2}$; г) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-6x+5}$;

Решение. а) Поскольку в точке $x=1$, принадлежащей промежутку интегрирования, функция терпит разрыв, то интеграл относится к несобственным интегралам второго рода и вычисляется по формуле (4)

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{1-\varepsilon}(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^{2}=3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{1-\varepsilon-1}-\sqrt[3]{-2}\right)+$$

$$+3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{1+\varepsilon-1}\right)=3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

б) Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x = 1$, т.е. на конце промежутка [1,2]. Следовательно, интеграл относится к несобственным интегралам второго рода и вычисляется

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\ln x\Big|_{1+\varepsilon}^{2}=\ln\ln 2-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\ln(1+\varepsilon)=\ln\ln 2+\infty=\infty$$

.

в) При $x=0$ подынтегральная функция обращается в бесконечность, во всех остальных точках промежутка [0,1] она непрерывна. Следовательно, имеем

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^3-3x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2(x-3)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\left(-\frac{1}{9x}-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{9(x-3)}\right)dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{9}\ln x+\frac{1}{3}\frac{1}{x}+\frac{1}{9}\ln|x-3|\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\ln 2-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{9}\ln\varepsilon+\frac{1}{3}\frac{1}{x}+\frac{1}{9}\ln|\varepsilon-3|\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\varepsilon+1)-\frac{1}{3}\ln 3\right)=-\infty,$$

т.е. интеграл расходится.

г) Подынтегральная функция непрерывна в промежутке [0,2] за исключением точки $x=1$, в которой она терпит разрыв. Следовательно,

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-6x+5} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-3)^2-4} + \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{(x-3)^2-4}.$$

Первый интеграл равен

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-3)^2-4} = \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{\varepsilon+4}{\varepsilon}-\ln 5\right)=\infty$$

и представляет неограниченную площадь криволинейной трапеции (рис. 3.1), ограниченную осью y, кривой $y=\dfrac{1}{x^2-6x+5}>0$ на данном промежутке, осью абсцисс и вертикальной асимптотой $x=1$

Второй интеграл равен

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{(x-3)^2-4} = \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|_{1+\varepsilon}^{2} = \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 3-\ln\left|\frac{\varepsilon-4}{\varepsilon}\right|\right)=-\infty$$

и представляет неограниченную площадь криволинейной трапеции (рис. 2.1), ограниченную осью x, прямой $x=2$, вертикальной асимптотой $x=1$ и функцией $y=\dfrac{1}{x^2-6x+5}<0$ на данном промежутке

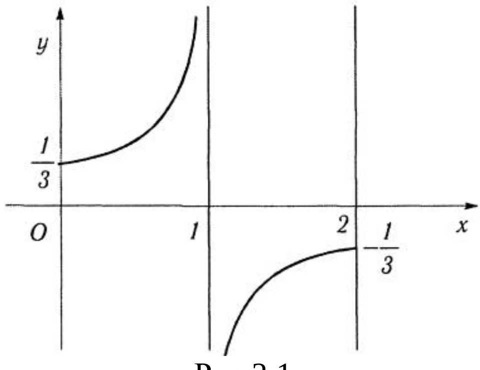


Рис.2.1

Данный интеграл представляет два расходящихся интеграла, т.е. расходится.

6.3. *Исследовать* на сходимость интегралы:

а) $\int_1^\infty \frac{dx}{1+3x^2+x^6}$; б) $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx$; в) $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx\ (\alpha>0)$;

г) $\int_1^\infty \frac{2x^2+\sqrt{(x-1)^3}}{3x^2+\sqrt[3]{x^4}+2}dx$; д) $\int_0^\infty e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^\alpha}dx\ (\alpha>0)$.

Решение. а) Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{1+3x^2+x^6}$ в промежутке интегрирования меньше, чем $\varphi(x)=\frac{1}{x^6}$. Так как $\int_1^\infty \frac{dx}{x^6}$ сходится, то данный интеграл тем более сходится.

б) Разобьем промежуток интегрирования

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\int_1^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx .$$

Первый интеграл в правой части не является несобственным, а второй сходится, так как $e^{-\frac{x^2}{2}}\le e^{-\frac{x}{2}}$, при $x\ge 1$, а

$$\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx=2\lim_{\beta\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}\Big|_1^\beta=-2\lim_{\beta\to\infty}\left(e^{-\frac{\beta}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}\right)=2e^{-\frac{1}{2}} .$$

Следовательно, данный интеграл сходится.

в) Пользуясь признаком Дирихле, полагаем $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=\frac{1}{x^\alpha}$. Поскольку $\left|\int_a^b \sin x dx\right|=\left|\cos a-\cos b\right|\le 2\ (a\le b<\infty)$ и функция $\frac{1}{x^\alpha}$, монотонно убывая, стремится к нулю при $x\to\infty$, то интеграл $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ при $\alpha>0$ сходится.

г) Сравним подынтегральную функцию $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2+\sqrt{\left(x-1\right)^3}}{3x^2+\sqrt[3]{x^4}+2}$ с функцией $\varphi\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$. Найдем предел их отношения

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+\sqrt{\left(x-1\right)^3}}{3x^2+\sqrt[3]{x^4}+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\sqrt{\left(\frac{1}{x^{1/3}}-\frac{1}{x^{4/3}}\right)^3}}{3+\sqrt[3]{\frac{1}{x^5}}+\frac{2}{x^3}}=\frac{2}{3}.$$

Поскольку $\int_1^\infty\dfrac{dx}{x}$ расходится, то на основании второго при-знака сходимости несобственных интегралов расходится и данный интеграл.

д) Пользуясь признаком Дирихле, полагаем $f\left(x\right)=e^{\sin x}\sin 2x$, $\varphi\left(x\right)=\dfrac{1}{x^\alpha}$. Функция $\dfrac{1}{x^\alpha}\to 0$ при $x\to\infty$, монотонно убывая. Делая замену $t=\sin x$, $\left|x=0,t=0;x=b,t=\sin b\right|$, получим $\left|\int_0^b e^{\sin x}\sin 2x dx\right|=2\left|\int_0^{\sin b}te^t dt\right|$.

Интегрируя по частям, будем иметь

$$2\left|\int_0^{\sin b}te^t dt\right|=2\left|e^t\left(t-1\right)\right|_0^{\sin b}<2e,$$

т. е. интеграл от функции $f\left(x\right)$ ограничен.

Поскольку условия признака Дирихле выполнены, то данный интеграл сходится.

6.4. Исследовать сходимость интегралов: а) $\int_1^2\dfrac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$; б) $\int_0^1\dfrac{dx}{\ln x}$; в) $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x\left(e^x-e^{-x}\right)}}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$; д) $\int_0^\infty\dfrac{\ln x}{x^2+1}dx$.

Решение. а) В точке $x=1$ подынтегральная функция имеет разрыв, т.е. обращается в бесконечность. Разложим подкоренное выражение на множители

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)}}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x^2+1)}}.$$

Отсюда, при $x\to 1$ будем иметь $\dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}\sim\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Так как интеграл

$$\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{\beta\to 1}\int_\beta^2(x-1)^{-\frac{1}{2}}dx=2\lim_{\beta\to 1}\sqrt{x-1}\Big|_\beta^2=2$$

сходится, то данный интеграл также сходится.

б) В точке $x=1$ подынтегральная функция имеет разрыв. Найдем предел отношения подынтегральной функции и функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1.$$

Поскольку порядок подынтегральной функции по отношению к функции $\dfrac{1}{x-1}$ равен единице $(\alpha=1)$, то данный интеграл расходится.

в) В точке $x=0$ подынтегральная функция имеет разрыв. Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}=2,$$

то порядок подынтегральной функции относительно $\dfrac{1}{x}$ равен $\alpha=\dfrac{2}{3}<1$. Следовательно, данный интеграл сходится.

г) В точке $x=0$ подынтегральная функция имеет разрыв. Воспользуемся интегрированием по частям. Полагая $u=\ln\sin x$, $dv=dx;\ du=\dfrac{\cos x}{\sin x}dx,\ v=x$, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx = x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos x}{\sin x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\,dx}{\mathrm{tg}x}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{tgx}=1$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{x}{tgx}=0$, то последний интеграл является собственным. Следовательно, данный интеграл сходится.

д) Представим исходный интеграл в виде суммы двух интегралов

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx = \int_0^{1}\frac{\ln x}{x^2+1}dx + \int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx.$$

Сделаем во втором интеграле замену переменной $x=\dfrac{1}{t}$, $dx=-\dfrac{dt}{t^2}$ и воспользуемся свойствами определенного интеграла, тогда получим

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx = -\int_1^{0}\frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}\frac{dt}{t^2} = \int_1^{0}\frac{\ln t\,dt}{t^2+1} = -\int_0^{1}\frac{\ln t\,dt}{t^2+1} = -\int_0^{1}\frac{\ln x\,dx}{x^2+1}.$$

Отсюда следует сходимость и данного интеграла.

3. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ, МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ

3.1. Общая схема применения определенного интеграла к вычислению различных величин

Определенный интеграл широко используется для вычисления различных геометрических и физических величин. Рассмотрим общую схему применения определенного интеграла к вычислению некоторой величины *u* в заданных пределах или на отрезке $[a,b]$.

1°. а) Заданный отрезок разделим на *n* промежутков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и найдем длину каждого из этих частичных промежутков.

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_1, \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n .$$

б) Выберем в каждом из этих промежутков произвольную точку ξ_k так, что $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, определим соответствующее значение функции в этой точке $f(\xi_k)$ и представим приближенное значение каждого элемента Δu_k в виде произведения $\Delta u_k \simeq f(\xi_k)\Delta x_k$.

в) Составим сумму таких произведений по всем промежуткам заданного отрезка

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Выражаемая этой суммой величина будет тем ближе к истинному значению *m*, чем меньше каждый из промежутков Δx_k.

г) Истинная величина u определяется пределом, к которому стремится указанная сумма, при условии, что каждый из промежутков $\Delta x_k \to 0$, т.е.

$$u=\lim_{\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\Delta x_k .$$

В предложенной схеме определенный интеграл рассматривается как предел интегральной суммы.

2°. Некоторые величины целесообразнее вычислять посредством определенного интеграла, пользуясь другой схемой.

а) Пусть некоторая часть искомой величины u есть неизвестная функция Δu от переменной x, которая изменяется в известном из условия задачи интервале $x\in[a,b]$.

б) Представим дифференциал функции du в виде произведения $du=f\left(x\right)dx$, где $f(x)$ - заданная из условия задачи функция от x.

в) Поскольку дифференциал функции du при $dx\to 0$ и приращение Δu есть бесконечно малые величины одного порядка малости, то искомая величина u находится интегрированием du в пределах от $x=a$ до $x=b$, т.е.

$$u=\int_a^b f\left(x\right)dx$$

1.1. Найти площадь криволинейного треугольника, ограниченного параболой $y=x^2$, осью Ox и прямой $x=1$:а) рассматривая определенный интеграл как предел интегральной суммы; б) посредством дифференциала искомой площади.

Решение. а) Разобьем отрезок интегрирования [0,1] на n равных частей точками деления с абсциссами $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n-1}{n},1$ и выберем из полученных n частичных отрезков правые концы, т.е. $x_1=\frac{1}{n},x_2=\frac{2}{n},...,x_{n-1}=\frac{n-1}{n},x_n=1$. Длина каждого из этих частичных промежутков равна $\Delta x_k=\frac{1}{n}$.

Так как $y = x^2$, то

$$f(x_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2, f(x_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2, \ldots, f(x_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

и приближенное значение каждого элемента ΔS_k выразится в виде произведения

$$\Delta S_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{k^2}{n^3}.$$

Составим сумму таких произведений

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right).$$

Пользуясь формулой суммы квадратов целых чисел

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

находим

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Искомая площадь определяется пределом при $\Delta x_k \to 0$, т.е. при $n \to \infty$

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

б) Для криволинейного треугольника, прилежащего к оси Ox (рис. 3.1) дифференциал переменной площади $S(x) = S_{OMx}$ есть площадь прямоугольника со сторонами *y* и *dx*, т.е. $dS = ydx$.

Подставляя сюда значение функции и интегрируя в заданных пределах $a = 0$, $b = 1$, получим

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

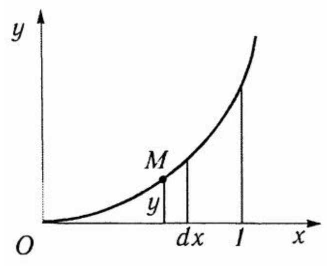


Рис.3.1

3.2. Площадь плоской фигуры

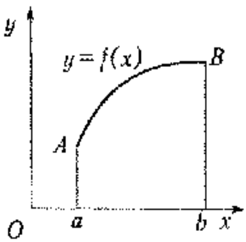
Площадь всякой плоской фигуры в декартовой системе координат может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, прилежащих к оси Ox или Oy.

1°. Площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 3.2), прилежащей к оси Ox находится по формуле

$$S=\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^b ydx. \qquad (1)$$

2°. Площадь криволинейной трапеции $cCDd$ (рис. 3.3), прилежащей к оси Oy находится по формуле

$$S=\int_c^d \varphi\left(y\right)dy=\int_c^d xdy. \qquad (2)$$



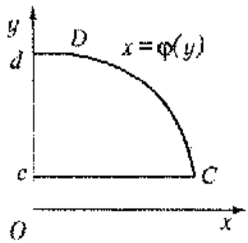
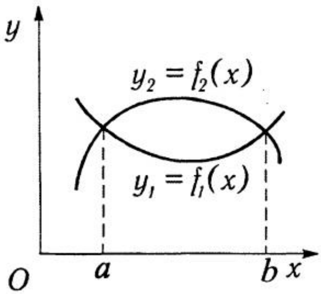


Рис.3.2 Рис.3.3

3°. Если фигура образована пересечением кривых так, что любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает ее границы не более чем в двух точках (рис. 3.4), то ее площадь равна разности площадей соответствующих криволинейных трапеций и определяется по формуле

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=\int_a^b\left(y_2-y_1\right)dx. \qquad (3)$$



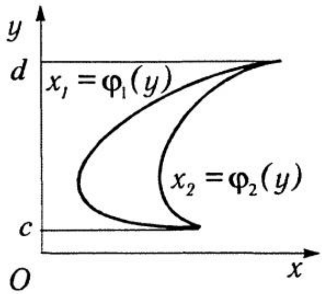


Рис.3.4 Рис.3.5

Если фигура образована пересечением кривых так, что любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает ее границы не более, чем в двух точках (рис. 3.5), то ее площадь определяется по формуле

$$S=\int_c^d\left(\varphi_2(y)-\varphi_1(y)\right)dx=\int_c^d\left(x_2-x_1\right)dy. \qquad (4)$$

4°. Площадь всякой плоской фигуры в полярной системе координат может быть составлена из площадей криволинейных секторов.

Площадь криволинейного сектора OAB (рис. 3.6) находится по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi.$$

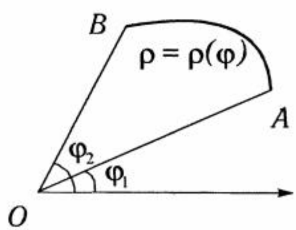


Рис.3.6

5°. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной в параметрической форме $x=\varphi(t); y=\psi(t)$, где $t\in[\alpha,\beta]$ и $\varphi(\alpha)=a; \varphi(\beta)=b$, определяется по формуле

$$S=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (6)$$

2.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=x+2, y^2=9x$; б) $xy=1, y=\sqrt{x}, x=4, y=0$; в) $x=\frac{1}{2}y^2$, осью ординат и прямыми $y=1, y=-3$; г) $y=x^2, y^2=-x$;
д) $y=x^2, y=x^3, x=\pm1$; е) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ и ее асимптотой;
ж) $y^2=x(x-a)^2$.

Решение. а) Построим графики (рис. 3.7) и найдем точки пересечения этих линий. Для этого решим систему

$$\begin{cases} y=x+2; \\ y^2=9x. \end{cases}$$

Откуда $(x+2)^2=9x$ или $x^2-5x+4=0$. Точки пересечения $x_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4}=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}; x_1=4; x_2=1$.

Применяя формулу (3) будем иметь

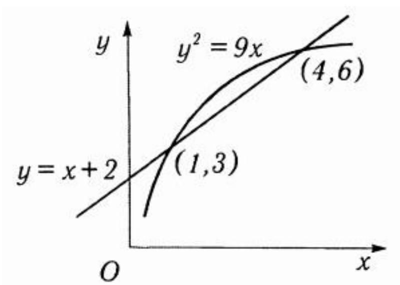


Рис.3.7

$$S=\int_1^4\left[\sqrt{9x}-(x+2)\right]dx=3\int_1^4\sqrt{x}dx-\int_1^4(x+2)dx=\left(3\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=\left(2x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_1^4=2\cdot8-8-8-2+\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}.$$

б) Построим графики (рис. 3.8) и найдем координаты точки A пересечения гиперболы и параболы, решая их уравнения совместно; А(1,1). Поскольку криволинейная трапеция сверху ограничена различными кривыми, то разбивая промежуток интегрирования на два промежутка и пользуясь формулой (1), получим

$$S=\int_0^1\sqrt{x}dx+\int_1^4\frac{dx}{x}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1+\ln|x|\Big|_1^4=\frac{2}{3}+\ln4-\ln1=\frac{2}{3}+2\ln2\,.$$

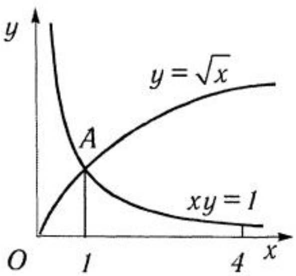


Рис.3.8

в) Площадь криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 3.9) находим по формуле (2)

$$S=\frac{1}{2}\int_{-3}^{1}y^2dy=\frac{1}{6}y^3\Big|_{-3}^{1}=\frac{1}{6}(1+27)=\frac{14}{3}\,.$$

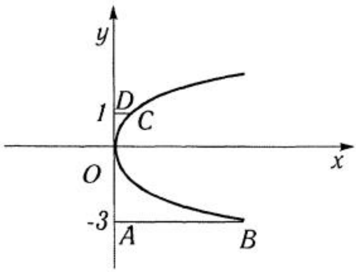


Рис.3.9

г) Построим графики (рис. 3.10) и из решения системы: $y = x^2, y^2 = -x$ найдем точки пересечения этих линий (0,0), (-1,1). Применяя формулу (3), получим

$$S = \int_{-1}^{0}\left(\sqrt{(-x)} - x^2\right)dx = \left(-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{2}{3}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

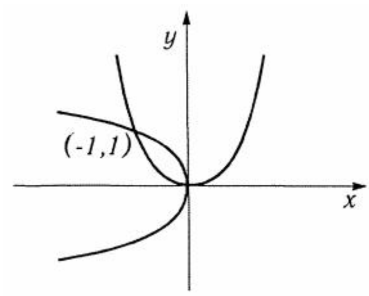


Рис.3.10

д) Сделаем чертеж (рис. 3.11). Пределы интегрирования даны по условию. Искомая площадь будет

$$S = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - x^3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

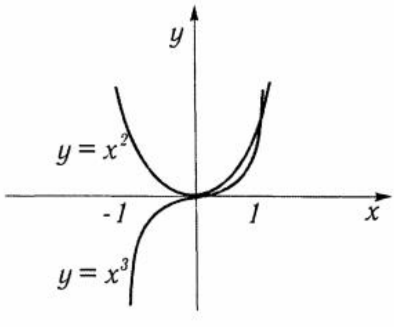


Рис.3.11

е) Функция нечетная, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. Найдем ее асимптоту

$$y = kx + b:\ k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0,\ b = \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0,$$

таким образом, асимптотой будет прямая $y = 0$, т.е. ось Ox (Рис.3.12)

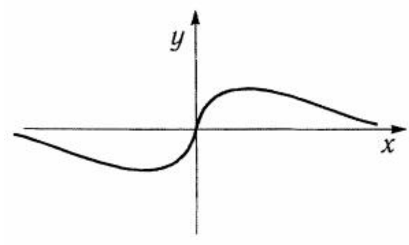


Рис.3.12

Вследствие симметрии, достаточно найти половину площади

$$\frac{1}{2}S = \int_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta e^{-\frac{x^2}{2}}d\left(-\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= -\lim_{\beta\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg|_0^\beta = -\lim_{\beta\to\infty}\left(e^{-\frac{\beta^2}{2}} - 1\right) = 1,\ S = 2.$$

ж) Функция четная относительно переменной *y*, следовательно, фигура, ограниченная заданной кривой, симметрична относительно оси Ox (рис. 3.13).

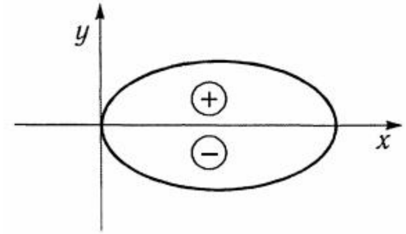


Рис.3.13

Найдем точки пересечения с осью Ox. Полагая $y=0$, будем иметь $x=0, x=a$, следовательно, *x* изменяется от 0 до *a*.

Половину площади найдем по формуле (1)

$$\frac{1}{2}S=\int_0^a \sqrt{x}\left(x-a\right)dx=\int_0^a\left(x^{\frac{3}{2}}-ax^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^a=-\frac{4}{15}a\sqrt{a}.$$

Знак минус означает, что фигура расположена ниже оси Ox. Это, кстати, следует даже из того, что подынтегральная функция на промежутке интегрирования отрицательна $\sqrt{x}\left(x-a\right)\le 0$ при $x\in\left[0,a\right]$. Следовательно, найденный результат надо взять с противоположным знаком. Таким образом, вся площадь будет равна $S=\frac{8}{15}a\sqrt{a}$.

2.2. Найти площадь, ограниченную: а) эллипсом $x=a\cos t, y=b\sin t$; б) одной аркой циклоиды $x=a\left(t-\sin t\right), y=a\left(1-\cos t\right)$ и осью *x;* в) астроидой $x=a\cos^3 t \quad y=\sin^3 t$; г) кривой $x=2\left(t^2-1\right), y=t\left(4-t^2\right)$.

Решение. а) Оси координат делят эллипс на четыре одинаковые части. Найдем площадь, расположенную в первом квадранте

$$\frac{1}{4}S=\int_0^a ydx.$$

Поскольку эллипс задан уравнениями в параметрическом виде, то преобразуем интеграл к переменной *t*. При $x=0,\ t=\dfrac{\pi}{2}$, а при $x=a,\ t=0$. Таким образом

$$S=-4\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}ab\sin^2 t\,dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

б) При $x=0,t=0$; при $y=0,t=2\pi$. По формуле (6) имеем

$$S=\int_0^{2\pi}a^2\left(1-\cos t\right)^2dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

в) Оси координат делят астроиду на четыре одинаковые части. Найдем площадь, расположенную в первом квадранте. При $x=0,t=\dfrac{\pi}{2}$; при $y=0,t=0$. Отсюда по формуле (6) вся площадь будет равна

$$S=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}3a^2\sin^3 t\cos^2 t\sin t\,dt=\frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\left[\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 4t\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 2t\right)d\sin 2t\right]=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

г) Найдем точки пересечения кривой с осями координат. Если $x=0$, то $t=\pm1$; если $y=0$, то $t=0$, $t=\pm2$. Отсюда получим следующие точки:

при $t=-1$ $\left(0,-3\right)$, при $t=1$ $\left(0,3\right)$; при $t=0$ $\left(0,-2\right)$;

при $t=\pm2$ $\left(6,0\right)$.

Если $t \in [-2, 0]$, то $y \le 0$; если $t \in [0, 2]$, то $y \ge 0$. Точка (6,0) является точкой самосопряжения кривой. Следовательно, кривая имеет форму петли (рис. 3.14).

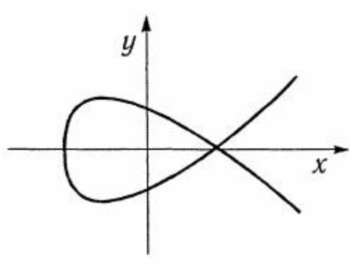


Рис.3.14

Вследствие симметрии фигуры относительно оси *x*, достаточно найти половину площади; тогда вся площадь по формуле (6) будет равна

$$S = 2\int_0^2 t\left(4 - t^2\right)4t dt = 8\int_0^2 \left(4t^2 - t^4\right)dt = 8\left(4\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{512}{15}.$$

2.3. Найти площадь, ограниченную линиями: а) одним витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$; б) кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$; в) лемнискатой $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$; г) окружностями $\rho = a\cos\varphi$ и $\rho = \sqrt{3}a\sin\varphi$; д) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (декартов лист).

Решение. а) Один виток спирали Архимеда описывается концом полярного радиуса при изменении полярного угла φ от 0 до 2π. По формуле (5) находим

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{6}\varphi^3\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

б) Поскольку кардиоида симметрична относительно полярной оси, то достаточно найти половину ее площади, когда полярный угол φ изменяется от 0 до π. Отсюда по формуле (5) имеем

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right)\right)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

в) Лемниската симметрична относительно координатных осей и делится ими на четыре равные части. Если перейти к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$, то уравнение лемнискаты в полярных координатах примет вид

$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi .$$

Четвертой части площади соответствует изменение полярного угла от 0 до $\dfrac{\pi}{4}$. Отсюда вся площадь по формуле (5) будет равна

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2 .$$

г) Решая совместно уравнения окружностей, находим точку (рис. 3.15) их пересечения $A\left(a\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$. Искомая площадь равна сумме площадей двух сегментов OBA и OCA.

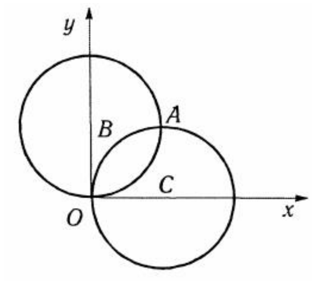


Рис.3.15

Дуга OCA описывается концом полярного радиуса большой окружности при изменении полярного угла φ от 0 до $\frac{\pi}{6}$, следовательно

$$S_{OCA}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}3a^2\sin^2\varphi d\varphi=\frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{3}{4}a^2\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{4}a^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Дуга OBA описывается концом полярного радиуса меньшей окружности при изменении φ от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$S_{OBA}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$\frac{a^2}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Таким образом, искомая площадь

$$S=S_{OCA}+S_{OBA}=\frac{a^2}{4}\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\right).$$

д) Переходя к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ в уравнении декартова листа, получим

$\rho = \dfrac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}$. Так как петля кривой соответствует изменению полярного угла φ от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ (рис. 3.16), то площадь будет равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi\right)^2}d\varphi .$$

Деля числитель и знаменатель на $\cos^6\varphi$, получим

$$S = \frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^2\varphi dtg\varphi}{\left(1+tg^3\varphi\right)^2} = \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(1+tg^3\varphi\right)}{\left(1+tg^3\varphi\right)^2} = -\frac{3}{2}a^2\left.\frac{1}{1+tg^3\varphi}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2}.$$

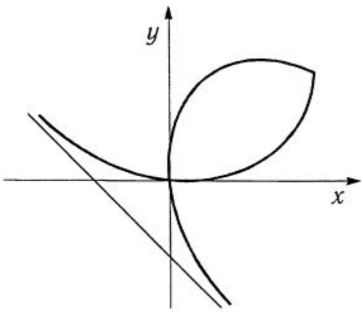


Рис.3.16

3.3. Объем тела

1°. Объем тела по площадям его параллельных сечений. Пусть известна площадь *S(x)* любого сечения тела плоскостью перпендикулярной оси *x* (рис. 3.17). Если *x* - расстояние сечения от начала координат, то при изменении *x* на величину *dx* дифференциал объема тела равен объему прямого цилиндра с высотой *dx* и площадью основания *S(x)*, т.е. $dV = S\left(x\right)dx$. Объем всего тела выражается интегралом

$$V = \int_a^b S(x)\,dx\,, \tag{1}$$

где a, b - левая и правая границы тела

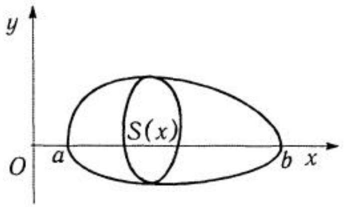


Рис.3.17

2°. Если тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 3.18), то любое его сечение, перпендикулярное к оси Ox, будет круг, площадь которого равна πy^2. Объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx\,. \tag{2}$$

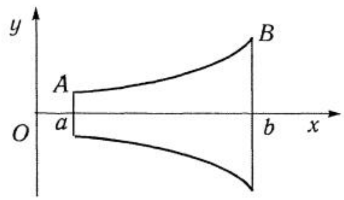


Рис.3.18

Если тело образуется вращением криволинейной трапеции вокруг оси Oy, то объем тела находится по формуле

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy\,, \tag{3}$$

где c и d - ординаты границ тела.

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $aABb$, то элемент объема равен объему тела, образованного вращением вокруг оси Oy прямоугольника со сторонами y и dx отстоящего от оси Oy на расстоянии x. Объем тела вращения в этом случае равен

$$V = 2\pi \int_a^b xydx\,. \qquad (4)$$

В более общих случаях объемы тел, образованных вращением криволинейных трапеций, ограниченных кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, если $f_1(x) < f_2(x)$, и прямыми $x = a$, $x = b$, вокруг координатных осей Ox, Oy, соответственно равны

$$V_x = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right)dx \text{ и } V_y = 2\pi \int_a^b x\left(y_2 - y_1\right)dx\,. \qquad (5)$$

Если кривая задана параметрические, то, в приведенных формулах вычисления объема тел вращения, следует сделать соответствующую замену переменной интегрирования.

3°. Если криволинейный сектор вращается вокруг полярной оси и ограничен кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, то объем тела вращения определяется по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\varphi d\varphi\,. \qquad (6)$$

3.1. Найти объем трехосного эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. В сечении плоскости, перпендикулярной к оси *y* и отстоящей от начала координат на расстоянии *l*, будет эллипс (рис. 3.19).

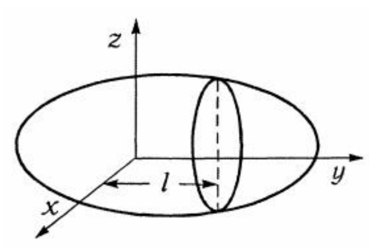


Рис.3.19

Подставляя вместо *y* в уравнение эллипсоида *l*, находим уравнение проекции эллипса на плоскость *xz*

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{l^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{l^2}{b^2}\right)}=1.$$

Полуоси эллипса будут, соответственно, $a\sqrt{1-\frac{l^2}{b^2}}$ и $C\sqrt{1-\frac{l^2}{b^2}}$, а его площадь в функции переменной l равна $S(l)=\pi ac\left(1=\frac{l^2}{b^2}\right)$.

Таким образом, по формуле (1) искомый объем равен
$$V=\pi ac\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{l^2}{b^2}\right)dl=\frac{\pi ac}{b^2}\int_{-b}^{b}\left(b^2-l^2\right)dl=\frac{\pi ac}{b^2}\left(b^2l-\frac{l^3}{3}\right)\Bigg|_{-b}^{b}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

3.2. Два круговых цилиндра радиуса r пересекаются под прямым углом. **Найти** объем тела, ограниченного этими цилиндрами.

Решение. На рис. 3.20 показана восьмая часть интересующего нас объема. В сечении искомого тела плоскостью, проведенной на расстоянии y от начала координат перпендикулярно к оси Oy, получается квадрат *ABCD*. Из треугольника *ABO* сторона квадрата равна $AB=\sqrt{r^2-y^2}$. Площадь квадрата в функции y будет $S(y)=r^2-y^2$. Отсюда, по формуле (1) имеем
$$V=8\int_{0}^{r}\left(r^2-y^2\right)dy=8\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{r}=\frac{16}{3}r^3.$$

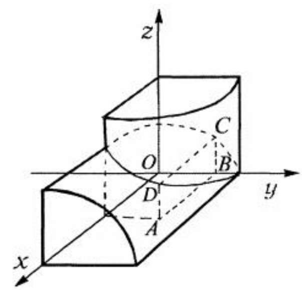


Рис.3.20

3.3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = xe^x$ и прямыми y =0 и x = 1.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 3.21) и воспользуемся формулой (2), тогда

$$V = \pi\int_0^1 x^2e^{2x}dx.$$

Интегрируя дважды по частям, получим

$$V = \pi\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int_0^1 xe^{2x}dx\right) = \pi\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}\left(xe^{2x} - \int_0^1 e^{2x}dx\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right).$$

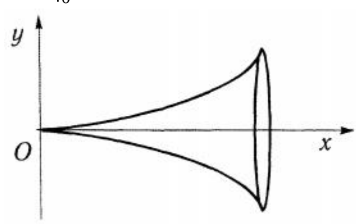


Рис.3.21

3.4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $y^2 = 4x$ и прямыми $x = 0$ и $y = 4$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 3.22) и воспользуемся формулой (3), тогда

$$V = \pi\int_0^4 4xdx = 2\pi x^2\Big|_0^4 = 32\pi \ .$$

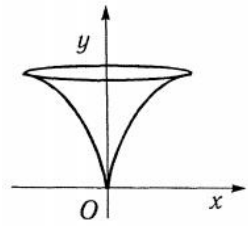


Рис.3.22

3.5. Найти объем кольца (тора), образованного вращением окружности $x^2+\left(y-4\right)^2=9$ вокруг оси Ox.

Решение. Центр окружности сдвинут на четыре единицы вверх, а радиус окружности равен *R* = *3* (рис. 3.23). Решая уравнение окружности относительно y, находим уравнение верхней и нижней дуги полуокружности $y_{1,2}=4\pm\sqrt{9-x^2}$. Объем тора представим как разность тел вращения, ограниченных этими окружностями. Учитывая симметрию относительно оси Oy, будем иметь

$$V = 2\pi\int_0^3\left(y_1^2-y_2^2\right)dx = 2\pi\int_0^3\Big(25-x^2+8\sqrt{9-x^2}-$$

$$-25+8\sqrt{9-x^2}+x^2\Big)dx = 16\pi\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx.$$

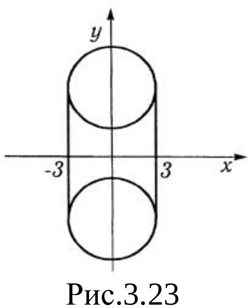


Рис.3.23

Сделаем замену: $x=3\sin t, dx=3\cos tdt$; при $x=0, t=0$; при $x=3, t=\frac{\pi}{2}$. Тогда получим

$$V=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2 tdt=72\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt=$$

$$=72\pi\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=36\pi^2.$$

3.6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной полуокружностью $x^2+y^2=1$ (при $x>0$) и параболой $y=-x$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 3.24) и из решения системы

$$\begin{cases} y^2=\dfrac{3}{2}x; \\ y^2=1-x^2 \end{cases}$$

найдем абсциссу точки пересечения кривых: $2x^2+3x-2=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\dfrac{-3\pm 5}{4}$; $x=\dfrac{1}{2}$.

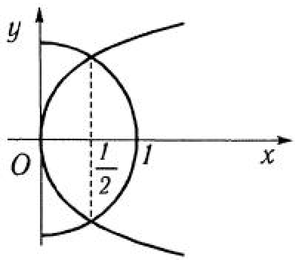


Рис.3.24

Поскольку криволинейная трапеция, которая вращается вокруг оси Ox, ограничена различными кривыми, то, вычисляя объем тела вращения по формуле (2), представим его в виде суммы двух интегралов

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}xdx+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-x^2\right)dx=\pi\,\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}+\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=\pi\left(\frac{3}{2}\frac{1}{8}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right)=\frac{19}{48}\pi.$$

3.7. Доказать, что объем параболоида вращения равен половине объема кругового цилиндра, имеющего то же основание и ту же высоту.

Решение. Считаем, что параболоид образован вращением параболы $y^2=2px$ вокруг оси Ox, причем сечение возьмем в произвольной точке с абсциссой x (рис. 3.25). Тогда его объем равен

$$V_n=\pi\int_0^x 2pxdx=\pi\,p\,x^2\Big|_0^x=\pi\,px^2.$$

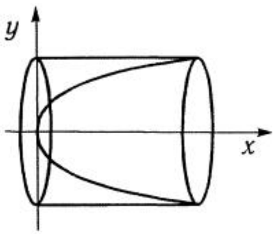


Рис.3.25

Объем цилиндра, имеющего то же основание и ту же высоту, равен $V_ö=\pi y^2x$. Поскольку $y^2=2px$, то $V_ö=2\pi\,px^2$.

Сравнивая результаты, получим $V_ö=2V_n$, что и требовалось доказать.

3.8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y=\cos x$ и $y=-1$ вокруг прямой $y=-1$ при $-\pi\le x\le\pi$

Решение. Тело, образованное вращением фигуры, ограниченной заданными линиями, показано на рис. 3.26.

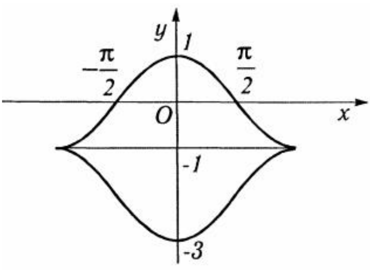


Рис.3.26

Поскольку кривая вращается вокруг прямой $y=-1$, то целесообразно перейти к новой системе координат $x'=x;\ y'=y+1$. Тогда объем тела вращения равен

$$V=\pi\int_{-\pi}^{\pi}(y')^2\,dx'=\pi\int_{-\pi}^{\pi}(y+1)\,dx=\pi\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x+1)^2\,dx=$$

$$=\pi\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{3}{2}+\cos 2x+2\cos x\right)dx=\pi\frac{3}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}=3\pi^2.$$

3.9. Найти объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси: а) кардиоиды $\rho=a(1-\cos\varphi)$*;* б) лемнискаты $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

Решение. а) Очевидно, что φ изменяется от 0 до π. Отсюда по формуле (6) имеем

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}a^3(1-\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi=\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^3\,d(1-\cos\varphi)=$$

$$=\frac{1}{6}\pi a^3(1-\cos\varphi)^4\Big|_0^{\pi}=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

б) Так как лемниската симметрична относительно начала координат, то половина объема по формуле (6) равна

$$\frac{1}{2}V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^3(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi=\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos^2\varphi-1\right)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi\,.$$

Сделаем замену: $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin t}, \sin\varphi d\varphi = \dfrac{\cos t dt}{\sqrt{2}\sin^2 t}$; при $\varphi = 0, t = \dfrac{\pi}{4}$; при $\varphi = \dfrac{\pi}{4}, t = \dfrac{\pi}{2}$, тогда

$$V = \frac{4}{3\sqrt{2}}\pi a^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^4 t dt}{\sin^2 t} = \frac{4}{3\sqrt{2}}\pi a^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 2 + \sin^2 t \right) dt =$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{2}}\pi a^3 \left(-\mathrm{ctg} t - 2t + \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right) \right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\pi a^3 \left(5 - \frac{3\pi}{2} \right).$$

3.10. Найти объем тела, образованного вращением: а) одной ветви циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси *Ox;* б) фигуры, ограниченной кривой $x = 3t^2, y = 2\ln t$ и осями координат, вокруг координатных осей; в) астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг прямой $x = a$.

Решение. а) Одна ветвь циклоиды получается при изменении t от 0 до 2π, а x от 0 до $2\pi a$. Следовательно, искомый объем равен

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx .$$

Используя параметрические уравнения циклоиды, получим

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \Bigg(1 - \cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) -$$

$$- \left(1 - \sin^2 t\right)\cos t \Bigg) dt = \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t \right)\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

б) Фигура, ограниченная заданной кривой и осями координат, показана на рис. 3.27, где $t \in [0,1]$. Объем тела вращения вокруг оси Ox находим по формуле

$$V = \pi \int_0^3 y^2 dx \text{ или } V = 24\pi \int_0^1 t \ln^2 t dt .$$

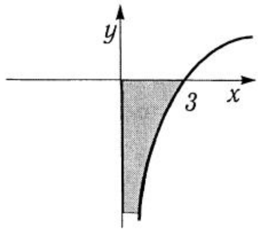


Рис.3.27

При $t = 0$ подынтегральная функция терпит разрыв. Интегрируя несобственный интеграл дважды по частям: $\ln^2 t = u$, $2\frac{1}{t}\ln t dt = du;\ t dt = dv,\ v = \frac{t^2}{2}$, получим

$$V = 24\pi \lim_{\beta\to 0}\left(\frac{t^2}{2}\ln^2 t\Big|_{\beta}^{1} - \int_{\beta}^{1} t\ln t dt\right) = 24\pi\left(-\lim_{\beta\to 0}\frac{\ln^2\beta}{\frac{2}{\beta^2}}\right) +$$

$$+\lim_{\beta\to 0}\left(-\frac{t^2}{2}\ln t + \frac{t^2}{4}\right)\Bigg|_{\beta}^{1} = 24\pi\left(-\lim_{\beta\to 0}\frac{\frac{2}{\beta}\ln\beta}{-\frac{4}{\beta^3}} + \lim_{\beta\to 0}\frac{\beta^2}{2}\ln\beta + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 24\pi\left(\lim_{\beta\to 0}\frac{\ln\beta}{\frac{1}{\beta^2}} + \frac{1}{4}\right) = 6\pi.$$

Объем тела вращения вокруг оси Oy находим по формуле (3). При $y = -\infty, t = 0$; при $y = 0, t = 1$, отсюда

$$V = \pi\int_{-\infty}^{0} x^2 dy = 9\pi\int_{0}^{1} t^4\,\frac{dt}{t} = \frac{9}{4}\pi t^4\Big|_{0}^{1} = \frac{9}{4}\pi\ .$$

в) Поскольку астроида симметрична относительно оси Ox, то достаточно найти половину объема тела вращения. Так как астроида вращается вокруг прямой $x = a$, то перенесем начало координат в точку $(a,0)$, тогда в новой системе координат $x' = x - a, y' = y$ формула для вычисления объема примет вид

$$\frac{1}{2}V = \pi\int_0^a \left(x'\right)^2 dy' = \pi\int_0^a \left(x-a\right)^2 dy .$$

Рассматривая только объем тела, получающийся от вращения вокруг прямой $x = a$ фигуры, ограниченной верхними ветвями астроиды, и переходя к переменной t, представим его как разность интегралов

$$V = 6\pi a^3\left(\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 t - 1\right)^2 \sin^2 t\cos t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 t - 1\right)^2 \sin^2 t\cos t dt \right) =$$

$$= 6\pi a^3\left(\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\left(2 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t - \sin^6 t\right)\sin^2 t d\sin t - 2\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t - \sin^6 t\right)\sin^2 t d\sin t + 2\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t dt \right) =$$

$$6\pi a^3(\left(\frac{2}{3}\sin^3 t - \frac{3}{5}\sin^5 t + \frac{3}{7}\sin^7 t - \frac{1}{9}\sin^9 t \right)\Bigg|_\pi^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\frac{1}{4}\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \cos 2t - \frac{1}{2}\left(1+\cos 4t\right) - \left(1 - \sin^2 2t\right)\cos 2t \right)dt -$$

$$-\left(\frac{2}{3}\sin^3 t - \frac{3}{5}\sin^5 t + \frac{3}{7}\sin^7 t - \frac{1}{9}\sin^9 t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \cos 2t - \frac{1}{2}\left(1+\cos 4t\right) - \left(1 - \sin^2 2t\right)\cos 2t \right)dt) =$$

$$= 6\pi a^3(\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) - \frac{1}{8}t\Bigg|_\pi^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{8}t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}\pi^2 a^3.$$

3.4. Длина дуги кривой

1°. Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнением $y = f(x)$ или $x = F(y)$, или параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то дифференциал dl длины ее дуги (рис. 3.28) определяется, соответственно, по формулам

$$dl = \sqrt{1+(y')^2 dx} = \sqrt{1+(x')^2}dy = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt . \qquad (1)$$

Интегрируя дифференциал дуги в заданных пределах, находим длину дуги

$$L = \int_0^b dl = \int_a^b \sqrt{1+\left(y'\right)^2}dy = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt . \qquad (2)$$

2°. Если плоская кривая отнесена к полярной системе координат и задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 3.29), то дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'\right)^2}d\varphi$, а длина дуги определяется по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'\right)^2}d\varphi . \qquad (3)$$

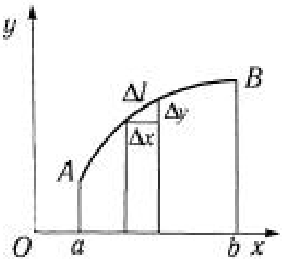


Рис. 3.28

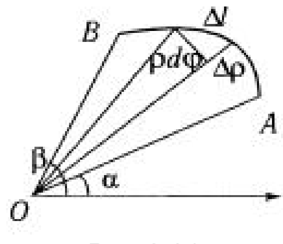


Рис.3.29

3°. Длина дуги пространственной кривой, заданной параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ при изменении t от α до β, определяется по формуле

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt\ . \qquad (4)$$

4.1. Найти длину дуги: а) кривой $y=\ln\cos x$ от $x = 0$ до $x=\dfrac{\pi}{2}$; б) астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; в) кривой $y^2 = 9-x$ между точками пересечения ее с осью Oy; г) полукубической параболы $y^2=x^3$ заключенной внутри окружности $x^2+y^2=6x$.

Решение. а) Применяя формулу (1), имеем

$$L=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+[(\ln\cos x)']^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\cos x}=$$

$$=\lim_{p\to\frac{\pi}{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\beta}=\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}}\ln tg\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\infty$$

б) Поскольку астроида симметрична относительно координатных осей, то достаточно найти длину одной ее ветви. Дифференцируя уравнение астроиды, имеем $y'=-(y/x)^{1/3}$. Длина одной четверти астроиды находится по формуле (2) и равна

$$\frac{1}{4}L=\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}}\,dx=\int_0^a\sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx=\int_0^a\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}a^{1/3}x^{2/3}\Big|_0^a=\frac{3}{2}a$$

Отсюда длина всей астроиды $L = 6a$.

в) Кривая представляет параболу симметричную относительно оси Ox (рис. 3.30).

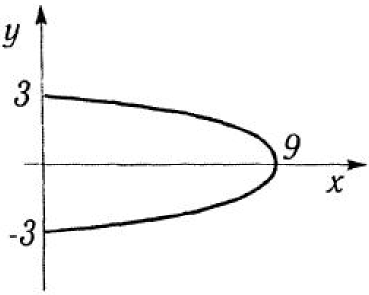


Рис. 3.30

Найдем точки пересечения с осью Oy: при $x = 0$, $y = \pm 3$.
Вследствие симметрии кривой относительно оси Ox достаточно найти половину длины заданной кривой. Используя формулу (1), будем иметь

$$\frac{1}{2}L = \int_0^3 \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int_0^3 \sqrt{1+4y^2}\,dy .$$

Интегрируя по частям $\sqrt{1+4y^2} = u$, $dy = dv$;

$du = \dfrac{4y dy}{\sqrt{1+4y^2}}$, $u = y$, получим

$$\frac{1}{2}L = y\sqrt{1+4y^2}\Big|_0^3 - \int_0^3 \sqrt{1+4y^2}\,dy + \int_0^3 \frac{dy}{\sqrt{1+4y^2}} .$$

Отсюда

$$L = y\sqrt{1+4y^2} + \frac{1}{2}\ln\left|2y+\sqrt{1+4y^2}\right|\Big\|_0^3 = 3\sqrt{37} + \frac{1}{2}\ln\left(6+\sqrt{37}\right).$$

г) Сделаем чертеж (рис. 3.31) и найдем точки пересечения окружности и параболы.
Для этого решим систему $y^2 = x^3$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$. Абсциссы точек пересечения будут 0 и 2.
Вследствие симметрии достаточно найти половину длины дуги. По формуле (1) имеем

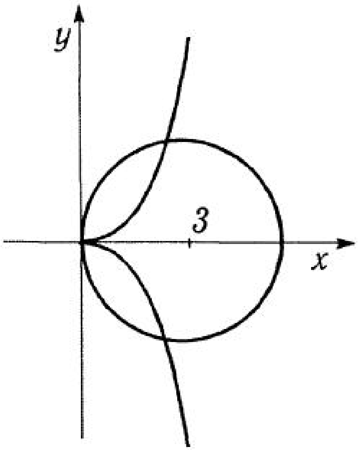


Рис 3.31

$$\frac{1}{2}L=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx=\frac{4}{9}\int_0^2\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}d\left(\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^2=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

Таким образом $L=\frac{16}{27}\left(\left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$.

4.2. Найти длину дуги кривой: а) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ от точки $t_1 = 0$ до точки $t_2 = 2\pi$; б) одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1- \cos t)$; в) $x=\frac{t^6}{6}$, $\quad y=2-\frac{t^4}{4}$ между точками пересечения с осями координат.

Решение. а) Заданная кривая представляет эвольвенту (развертку) окружности (рис. 3.32). Находим производные $\dot{x} = at\cos t$, $\dot{y} = at\sin t$. Длина дуги кривой находится по формуле (2)

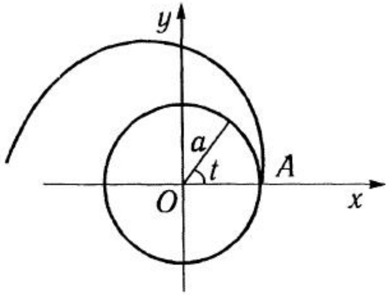


Рис 3.32

$$L=\int_0^2\sqrt{a^2t^2\cos^2 t+a^2t^2\sin^2 t}dt=a\int_0^{2\pi}tdt=\frac{at^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=2a\pi^2.$$

б) Здесь t изменяется от 0 до 2π. Находим производные $\dot{x}=a\left(1-\cos t\right)$, $\dot{y}=a\sin t$. Длина одной арки циклоиды по формуле (2) равна

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}dt=$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=8a.$$

в) Найдем пределы интегрирования: при x = 0, t = 0; при y=0, $t=\sqrt[4]{8}$. Вычисляя производные $\dot{x}=t^3$, $\dot{y}=-t^3$ и используя формулу (2), находим

$$L=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^{10}+t^6}dt=\int_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}dt=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[4]{8}}\left(t^4+1\right)^{\frac{1}{2}}d\left(t^4+1\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(t^4+1\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}}=\frac{13}{3}.$$

4.3. Определить длину дуги кривой: а) первого витка спирали Архимеда $\rho=a\varphi$; б) кардиоиды ρ = a(1 +cosφ);

в) $\rho = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$; г) логарифмической спирали $\rho = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$, находящейся внутри круга $\rho = a$.

Решение. а)Длина дуги первого витка ($0 \le \varphi \le 2\pi$) спирали
Архимеда определяется по формуле (3) и равна

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(\alpha\varphi)^2 + a^2}\,d\varphi = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$$

Интегрируя по частям $1+\varphi^2 = u, \quad d\varphi = dv, \quad \varphi = v,$

$du = \dfrac{\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$, получим

$$L = a\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi + \ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\Big|_0^{2\pi}\right),$$

откуда

$$L = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} = a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right).$$

б) Вследствие симметрии кардиоиды относительно полярной оси достаточно вычислить половину ее длины. По формуле (3) имеем

$$L = 2\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2\sqrt{2}a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 4a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

в) Изменяя φ от 0 до 3π, получим кривую (рис. 3.33). Находим, что $\rho' = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$. Отсюда по формуле (3) имеем

$$L = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\varphi\right)\Bigg|_0^{3\pi} = \frac{3}{2}a\pi.$$

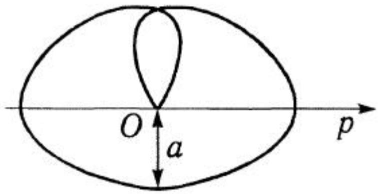


Рис. 3.33

г) При φ = 0 из уравнения логарифмической спирали находим, что $\rho = a$. Следовательно, φ изменяется от -∞ до 0. Представим логарифмическую спираль и круг $\rho = a$. Находим производную $\rho' = ame^{m\varphi}$. Длина дуги логарифмической спирали, находящейся внутри круга, по формуле (3) равна

$$L = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{a^2e^{m\varphi} + m^2a^2e^{2m\varphi}}\,d\varphi = a\sqrt{1+m^2}\int_{-\infty}^{0} e^{m\varphi}d\varphi =$$

$$= a\sqrt{1+m^2}\lim_{\beta\to-\infty}\frac{1}{m}\int_\beta^0 e^{m\varphi}d\left(m\varphi\right) = \frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}\lim_{\beta\to-\infty}e^{m\varphi}\Big|_\beta^0 = \frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}.$$

4.4. Найти длину дуги пространственной кривой: а) одного витка винтовой линии $x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ z = ct$;

б) $y = \dfrac{1}{2}\ln x,\ z = \dfrac{x^2}{2}$ *от* $x = 1$ *до* $x = 2$.

Решение. а) При изменении *t* от 0 до *2π* получим один виток. Находим производные $\dot{x} = -a\sin t,\ \ \dot{y} = a\cos t,\ \ \dot{z} = c$. Длина дуги по формуле (4) будет равна

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + c^2}\,dt = \sqrt{a^2 + c^2}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + c^2}.$$

б) Запишем уравнение пространственной кривой в параметрическом виде. Пусть *x = t*, тогда $y = \dfrac{1}{2}\ln t,\ \ z = \dfrac{t^2}{2}$; при x=1, t=1; при x=2, t=2. Найдем производные $\dot{x} = 1,\ \ \dot{y} = \dfrac{1}{2t},\ \ \dot{z} = t$ и воспользуемся формулой (4). Тогда

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4t^2} + t^2}\,dt = \int_1^2 \frac{\sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1}}{2t}\,dt = \int_1^2 \left(t + \frac{1}{2t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t^2 + \ln t\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(3 + \ln 2\right).$$

3.5. Площадь поверхности вращения

Если поверхность образована вращением дуги *AB* плоской кривой *y = f(x)* вокруг оси *Ox* (рис. 3.34), то площадь поверхности, образованная вращением дуги, определяется по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b y\,dl = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx. \qquad (1)$$

При вращении дуги вокруг оси *Oy* площадь поверхности вращения определяется по формуле

$$S = 2\pi \int_{c}^{d} x dl = 2\pi \int_{c}^{d} x \sqrt{1 + (x')^2} dy. \qquad (2)$$

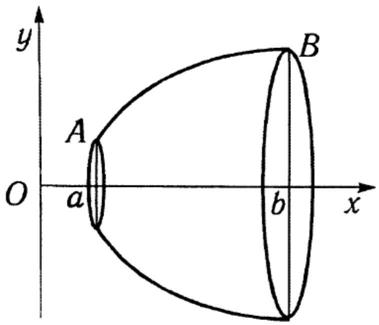


Рис. 3.34

Если дуга задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha < t < \beta$, то площадь поверхности вращения вокруг оси Ox равна

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt. \qquad (3)$$

Если дуга кривой задана в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi. \qquad (4)$$

Если дуга кривой вращается вокруг произвольной оси, то площадь поверхности вращения определяется по формуле

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{b} R dl, \qquad (5)$$

где R — расстояние от произвольной точки кривой до оси вращения; dl — дифференциал дуги; a, b — пределы интегрирования, соответствующие концам дуги. Здесь R и dl следует выразить через переменную интегрирования.

5.1. Найти площадь поверхности, образованной вращением: а) цепной линии $y = a ch \dfrac{x}{a}$ вокруг оси Ox от

$x = 0$ до $x = a$; б) эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox и оси Oy; в) петли кривой $9ay^2 = x(3a-x)^2$ - вокруг оси Ox и оси Oy,

Решение. а) Поверхность, образованная вращением дуги цепной линии вокруг оси Ox показана на рис. 3.35. Находим производную $y' = sh\dfrac{x}{a}$ и значение $\sqrt{1+\left(y_x'\right)^2} = ch\dfrac{x}{a}$. Тогда по формуле (1) имеем

$$S = 2\pi\int_0^a ach^2\frac{x}{a}dx = \pi a\int_0^a\left(ch\frac{2x}{a}+1\right)dx = \pi a\left(\frac{a}{2}sh\frac{2x}{a}+x\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \pi a^2\left(\frac{1}{2}sh2+1\right).$$

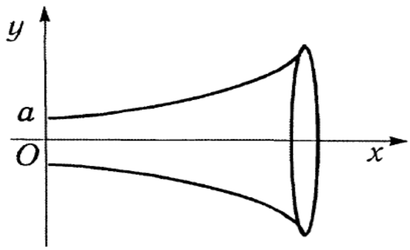


Рис. 3.35

б) Пусть эллипс вращается вокруг оси Ox, причем $a>b$, тогда $y^2 = b^2 - \dfrac{b^2}{a^2}x^2$, $\quad yy' = -\dfrac{b^2}{a^2}x$. Воспользуемся формулой (1) и найдем подынтегральную функцию

$$y\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{y^2+(yy')^2} = \sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^4}{a^4}x^4} =$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}$$

где $a^2 - b^2 = c^2$, $\frac{c}{a} = \varepsilon$ - эксцентриситет эллипса. Таким образом,

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}\, dx = 4\pi \frac{b}{a} \int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}\, dx.$$

Интегрируя по частям:

$\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} = u$, $dx = dv$; $\frac{-\varepsilon^2 x dx}{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}} = du$, $x = v$, имеем

$$S = 4\pi \frac{b}{a}\left(\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} + \frac{a^2}{2\varepsilon} \arcsin \frac{\varepsilon x}{a} \right)\Bigg|_0^a =$$

$$= 2\pi \frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} + a^2 \arcsin \varepsilon \right) = 2\pi b\left(b + \arcsin \varepsilon \right).$$

Если эллипс вращается вокруг оси Oy, то пользуемся формулой (2): $x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2$, $xx' = -\frac{a^2}{b^2} y$,

$$x\sqrt{1 + (x')^2} = \sqrt{x^2 + (xx')^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 + \frac{a^4}{b^4} y^2} =$$

$$= \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} y^2} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} y^2}.$$

$$S = 2\pi \frac{a}{b} \int_{-b}^{b} \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} y^2}\, dy.$$

Интегрируя по частям: $\sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} y^2} = u$, $dy = dv$;

$du = \dfrac{\frac{c^2}{b^2} y dy}{\sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} y^2}}$, $v = y$, получим

$$S=2\pi\frac{a}{b}\left(\frac{1}{2}y\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2}+\frac{b^3}{2c}\ln\left(\frac{c}{a}y+\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2}\right)\right)\Bigg|_{-b}^{b}=$$

$$=2\pi\frac{a}{b}\left(\sqrt{b^2+c^2}+\frac{b^2}{2c}\ln\frac{\sqrt{b^2+c^2}+c}{\sqrt{b^2+c^2}-c}\right).$$

Так как $b^2+c^2=a^2,\quad c=\varepsilon a$, то окончательно имеем

$$S=2\pi\frac{a}{b}\left(a+\frac{b^2}{2\varepsilon a}\ln\frac{a+\varepsilon a}{a-\varepsilon a}\right)=2\pi\frac{a}{b}\left(a+\frac{b^2}{2\varepsilon a}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

в) Петля данной кривой описывается текущей точкой при изменении *x* то *0* до *3a* (рис. 3.36). Дифференцируем уравнение кривой $18ayy'=(3a-x)^2-2x(3a-x)$, $yy'=\frac{(3a-x)(a-x)}{6a}$. Для нахождения площади поверхности, образованной вращением

петли вокруг оси *Ox*, преобразуем формулу (1).

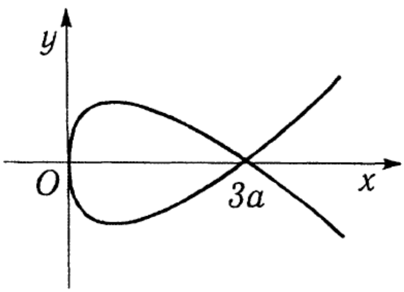


Рис. 3.36

$$S=2\pi\int_0^{3a}\sqrt{y^2+(yy')^2}\,dx=2\pi\int_0^{3a}\frac{x}{9a}(3a-x)^2+\frac{(3a-x)^2(a-x)^2}{36a^2}dx=$$

$$=\frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}(3a-x)\sqrt{a^2+2ax+x^2}\,dx=\frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}3a^2+2ax+x^2dx=$$

$$=\frac{\pi}{3a}\left(3ax^2+ax^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{3a}=3\pi a^2$$

5.2. Найти площадь поверхности, образованной вращением: а) астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг оси Ox; б) одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг ее оси симметрии.

Решение. а) Вследствие симметрии астроиды относительно координатных осей, достаточно найти площадь поверхности, описанной дугой астроиды, лежащей в первом квадранте ($0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$). Воспользуемся формулой (3). Вся площадь вращения будет равна

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/4}a\sin^3 t\sqrt{\left(3a\cos^2 t\sin t\right)^2+\left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt=$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos t\,dt=\frac{12}{5}\pi a^2\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

б) При $y = 0$, $\cos t = 1$, $t = 0$ и $t = 2\pi$. Циклоида при $t = 2\pi$ имеет координату $x = 2\pi a$. Следовательно, ось симметрии проходит через точку с координатами $(\pi a, 0)$. Воспользуемся формулой (5): $R=\pi a-a(t-\sin t)=$

$=a(\pi-t+\sin t)$, $dl=\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$

$=a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt=2a\sin\dfrac{t}{2}dt$. Поверхность вращения образуется вращением половины арки циклоиды вокруг оси симметрии, т. е. переменная t изменяется от 0 до π.

Таким образом,

$$S=4\pi a^2\int_0^{\pi}\left(\pi-t+\sin t\right)\sin\frac{t}{2}dt=4\pi a^2[2\pi\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}d\,\frac{t}{2}-\int_0^{\pi}t\sin\frac{t}{2}dt+$$

$$+4\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}d\sin\frac{t}{2}]=8\pi a^2\left(-\pi\cos\frac{t}{2}+t\cos\frac{t}{2}-2\sin\frac{t}{2}+\frac{2}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=8\pi a^2\left(\pi-2+\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}\pi a^2\left(3\pi-4\right).$$

5.3. Найти площадь поверхности, образованной вращением: а) лемнискаты $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ вокруг полярной оси; б) кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси и вокруг касательной в ее вершине (2π, 0).

Решение. а) Вследствие симметрии лемнискаты относительно полярной оси достаточно найти половину поверхности вращения. Тогда по формуле (4) имеем

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/4}\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\sqrt{2a^2\cos 2\varphi+2a^2\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}d\varphi=$$

$$=8\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\, d\varphi=-8\pi a^2\cos\varphi\Bigg|_0^{\pi/4}=8\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

б) Воспользуемся формулой (4). Пределы интегрирования $0\le\varphi\le\pi$. Площадь поверхности равна

$$S=2\pi\int_0^{\pi}a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}d\varphi=$$

$$=4\pi a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=-16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}d\cos\frac{\varphi}{2}=$$

$$=-\frac{32}{5}\pi a^2\cos^5\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

3.6. Вычисление статических моментов и моментов инерции

1°. Статическим моментом материальной точки массы m относительно оси l называется произведение ее массы на расстояние d от оси $m_l = md$.

Статическим моментом системы n материальных точек называется сумма произведений масс этих точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$ на расстояния их от оси $m_l = \sum_{i=0}^{n} m_i d_i$, причем расстояния точек, лежащих по разные стороны от оси l, берутся с разными знаками.

Если массы непрерывно заполняют линию $y = f(x)$, $a \le x \le b$, то статические моменты относительно осей выражаются интегралами

$$\begin{aligned} m_x &= \int_a^b \delta(x) y dl = \int_a^b \delta(x) y \sqrt{1+(y')^2}\, dx; \\ m_y &= \int_a^b \delta(x) x dl = \int_a^b \delta(x) x \sqrt{1+(y')^2}\, dx; \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\delta(x)$ - плотность, dl – дифференциал дуги.

Статические моменты относительно координатных осей дуги кривой, уравнение которой дано в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, выражаются формулами

$$\begin{aligned} m_x &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi, \\ m_y &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cos\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi, \end{aligned} \qquad (2)$$

здесь плотность полагается равной единице.

Статические моменты плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, выражаются интегралами

$$m_x = \frac{1}{2}\int_a^b \delta(M)\,ydS = \frac{1}{2}\int_a^b \delta(M)\,y^2dx,$$
$$m_y = \frac{1}{2}\int_a^b \delta(M)\,xdS = \frac{1}{2}\int_a^b \delta(M)\,xydx, \qquad (3)$$

где δ *(M)* — плотность в точке *M*, *dS* = *ydx* – дифференциал площади.

Для случая геометрических фигур плотность считается равной единице.

Статический момент тела относительно данной плоскости, если известны площади поперечных сечений тела параллельных этой плоскости *S(x)* в функции расстояния *x* от нее, при плотности, равной единице, определяется интегрированием статического момента элементарного слоя тела на расстоянии *x* от плотности $dm = xS(x)dx$ в заданных пределах

$$m_{yz} = \int_a^b xS(x)dx\,. \qquad (4)$$

Статический момент тела вращения относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения *x*, определяется по формуле

$$m_{yz} = \pi\int_a^b xy^2dx\,. \qquad (5)$$

Если поверхность образована вращением кривой *y* = *f(x)* $(a \le x \le b)$ вокруг оси *Ox* (рис. 3.37) и поверхностная плотность ее равна единице, то статический момент относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения, находится интегрированием элементарного кольцевого слоя $2\pi ydl$ в заданных пределах

$$m_{yz} = 2\pi\int_a^b xydl = 2\pi\int_a^b xy\sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad (6)$$

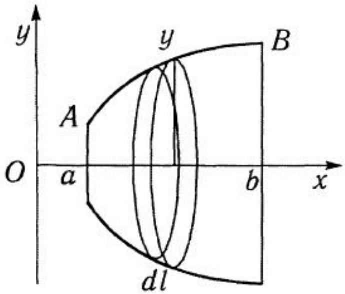


Рис. 3.37

Статические моменты относительно координатных плоскостей для цилиндрической поверхности $x = x(t), y = y(t)$ с образующими параллельными оси z (рис. 3.38) и ограниченной сверху кривой $z = z(t)$ находятся по формулам

$$m_{yz} = \int_L xzdl;\ m_{zx} = \int_L yzdl;\ m_{xy} = \frac{1}{2}\int_L z^2 dl, \qquad (7)$$

где $dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$; L – проекция поверхности на плоскость xOy.

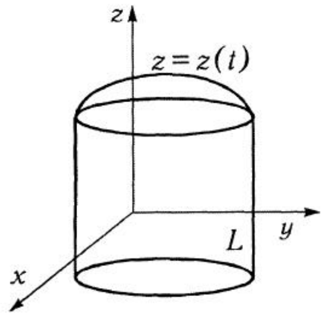


Рис. 3.38

2⁰. Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси l называется произведение её массы на квадрат расстояния d от оси $I_i = md^2$.

Моментом инерции системы n материальных точек называется сумма произведений масс этих точек $m_1, m_2, ..., m_n$ на квадрат расстояния их от оси $I_i = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$.

Моменты инерции относительно координатных осей плоской кривой $y = f(x)\ (a \le x \le b)$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} I_x &= \int_a^b \delta(x) y^2 dl = \int_a^b \delta(x) y^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx, \\ I_y &= \int_a^b \delta(x) x^2 dl = \int_a^b \delta(x) x^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\delta(x)$ - плотность, dl - дифференциал дуги.

Моменты инерции криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ вычисляются по формулам

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \delta(M) y^3 dx;\ I_y = \int_a^b \delta(M) x^2 y\,dx. \tag{9}$$

Моменты инерции плоской фигуры (рис. 3.39), ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, относительно осей координат вычисляются по формулам

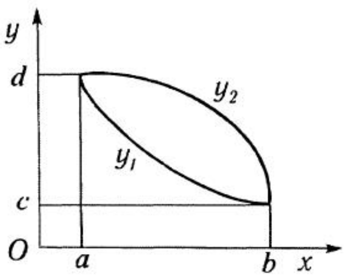


Рис. 3.39

$$I_x = \int_c^d \delta(M) y^2 \left(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\right) dy, \quad ; \qquad (10)$$
$$I_y = \int_c^d \delta(M) x^2 \left(f_2(y) - f_1(y)\right) dx,$$

здесь функции $\varphi_1(y) = x_1, \varphi_2(y) = x_2$ представляют уравнения заданных кривых, разрешённых относительно переменной x.

6.1. Найти статические моменты и моменты инерции относительно оси Ox дуги: а) кривой $y = e^x$ $(0 \le x \le 1)$; б) астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, лежащей в первом квадрате, $\delta(x) = 1$; в) окружности $x^2 + y^2 = a^2$, расположенной в первом квадранте, если в каждой её точке плотность пропорциональна произведению координат точки.

Решение. а) статический момент относительно оси Ox находим по первой из формул (1), полагая плотность равной единице

$$m_x = \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx$$

Делая замену $t = e^x$, $dt = e^x dx$, получим $m_x = \int_1^e \sqrt{1+t^2} dt$.

Интегрируя по частям: $u = \sqrt{1+t^2}$, $dv = dt$; $du = \dfrac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}$, $t = v$, будем иметь

$$m_x = t\sqrt{1+t^2} - \int_1^e \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$m_x = \int_1^e \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)\Bigg|_1^e =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln\frac{e + \sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}\right).$$

По первой из формул (8) находим момент инерции относительно оси Ox

$$I_x=\int_0^1 e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1+e^{2x}\right)^{1/2}d\left(1+e^{2x}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+e^{2x}\right)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(\left(1+e^{2}\right)^{3/2}-2\sqrt{2}\right).$$

б) Запишем уравнение астроиды в параметрическом виде $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

При нахождении статического момента относительно оси Ox воспользуемся формулами (1), для этого вычислим дифференциал дуги

$$dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}dt=$$
$$=3a\sin t\cos t\,dt,$$

$$m_x=\int_0^{\pi/2}ydl=3a^2\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\sin t\cos tdt=\frac{3a^2}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3}{2}a^2.$$

Момент инерции по формулам (8) равен

$$I_x=\int_0^{\pi/2}y^2dl=3a^3\int_0^{\pi/2}\sin^6 t\sin t\cos tdt=\frac{3a^3}{8}\sin^8 t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3}{8}a^3.$$

Следует заметить, что в силу симметрии астроиды относительно координатных осей $m_x=m_y=\frac{3}{5}a^2$ и

$$I_x=I_y=\frac{3}{8}a^3.$$

в) Статический момент и момент инерции находим по формулам (1) и (8).

Дифференциал дуги равен $dl=\sqrt{1+\left(y\right)^2}dx$, где y' находим из дифференцирования уравнения окружности $2x+2yy'=0$, $y'=-\frac{x}{y}$.

Окончательно

$$dl=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx=\frac{1}{y}\sqrt{y^2+x^2}dx=\frac{a}{y}dx.$$

Таким образом,

$$m_x=\int_0^a kxy\cdot y\frac{a}{y}dx=ka\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx=$$

$$=-\frac{ka}{2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)^{1/2}d\left(a^2-x^2\right)=$$

$$=-\frac{ka}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}\Big|_0^a=\frac{ka^4}{3}.$$

$$I_x=\int_0^a kxy\cdot y^2\frac{a}{y}dx=ka\int_0^a xy^2dx=ka\int_0^a x\left(a^2-x^2\right)dx=$$

$$=ka\left(a^2\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a=\frac{ka^5}{4}.$$

Здесь k - коэффициент пропорциональности.

6.2. Найти статический момент и момент инерции полуокружности радиуса a относительно её диаметра.

Решение. Расположим декартову систему координат таким образом, чтобы ось Ox совпала с диметром, а начало координат с центром окружности. В этом случае уравнение окружности в параметрической форме примет вид: $x=a\cos t, y=a\sin t$.

Тогда дифференциал дуги будет $dl=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}dt=adt$. Воспользовавшись формулами (1) и (8), получим

$$m_x=\int_0^\pi ydl=a^2\int_0^\pi \sin tdt=2a^2,$$

$$I_x=\int_0^\pi y^2dl=a^3\int_0^\pi \sin^2 tdt=\frac{1}{2}\pi a^3.$$

6.3. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy дуги окружности $\rho=2a\sin\varphi$.

Решение. Воспользуемся формулами (2). Поскольку $\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=\sqrt{4a^2\sin^2\varphi+4a^2\cos^2\varphi}=2a(0\le\varphi\le\pi)$ (рис. 3.40.),
то

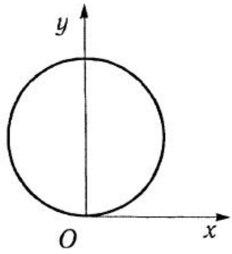


Рис 3.40

$$m_x=4a^2\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi=2a^2\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=2\pi a^2\ ;$$

$$m_y=4a^2\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=0\ .$$

То, что $m_y=0$ и следовало ожидать, так как дуга окружности симметрична относительно оси Oy.

6.4. Найти статические моменты и моменты инерции прямоугольника со сторонами a и b относительно его сторон.

Решение. Расположим оси координат так, как показано на рис. 3.41.

Воспользуемся формулами (3), (9), полагая плотность равной единице. Будем иметь:

$$m_a=\frac{1}{2}\int_0^a y^2dx=\frac{1}{2}\int_0^a b^2dx=\frac{1}{2}ab^2,$$

$$m_b=\int_0^a xydx=\int_0^a bxdx=\frac{1}{2}a^2b,$$

$$I_a=\frac{1}{3}\int_0^a y^3dx=\frac{1}{3}\int_0^a b^3dx=\frac{1}{3}ab^3\ ,$$

$$I_b=\int_0^a x^2ydx=\int_0^a x^2bdx=\frac{1}{3}a^3b\ .$$

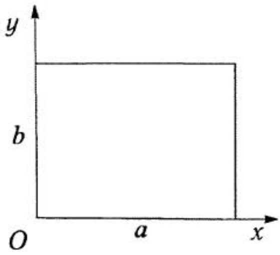


Рис. 3.41.

6.5. Найти статические моменты и моменты инерции треугольника, ограниченного линиями $x=0$, $y=0$ и $x+y=a$; а) относительно координатных осей; б) прямой, параллельной основанию и проходящий через вершину; в) прямой, параллельной основанию и проходящей через центр тяжести треугольника.

Решение. а) Статический момент и момент инерции треугольника (рис. 3.42) относительно оси Ox находим по формулам (3) и (9)

$$m_x = \frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{6};$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^a y^3 dx = \frac{1}{3}\int_0^a (a-x)^3 dx = -\frac{1}{3}\frac{(a-x)^4}{4}\Bigg|_0^a = \frac{a^4}{12}.$$

В силу симметрии $m_x = m_y = \dfrac{a^4}{6}$ и $I_x = I_y = \dfrac{a^4}{12}$.

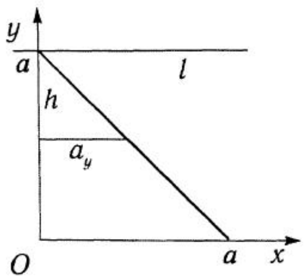


Рис. 3.42

б) Обозначим прямую, проходящую через вершину, за l. Через a_y обозначим ширину сечения, параллельного оси Ox, на расстоянии h от вершины треугольника. Из подобия треугольников $\frac{a_y}{a} = \frac{h}{a}$ и $a_y = h$. Отсюда, статический момент и момент инерции

$$m_l = \int_0^a a_y h dh = \int_0^a h^2 dh = \frac{a^3}{3};$$

$$I_l = \int_0^a a_y h^2 dh = \int_0^a h^3 dh = \frac{h^4}{4}.$$

в) Центр тяжести треугольника расположен на $\frac{1}{3}$ высоты от основания. Проведем через центр тяжести ось l (рис. 3.43). Обозначим через a_y ширину сечения, параллельного оси l, на расстоянии h от неё. Ширина сечения выше оси l равна $a_y = \frac{2}{3}a - h$, ниже $a_y = \frac{2}{3}a + h$.

Поскольку ось l проходит через центр тяжести, то статический момент треугольника относительно оси равен нулю. Действительно, для верхней части треугольника

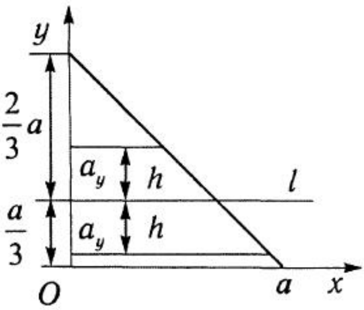


Рис. 3.43

$$m_l^{\hat{a}} = \int_0^{\frac{2}{3}a}\left(\frac{2}{3}a-h\right)hdh = \left.\left(\frac{2}{3}a\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3}\right)\right|_0^{\frac{2}{3}a} = \frac{a^3}{27}\frac{4}{3},$$

для нижней

$$m_l^{\acute{\imath}} = \int_0^{\frac{a}{3}}\left(\frac{2}{3}a+h\right)hdh = \left.\left(\frac{2}{3}a\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}\right)\right|_0^{\frac{a}{3}} = \frac{a^3}{27}\frac{4}{3}.$$

При вычислении статических моментов расстояния точек, лежащих по разные стороны от оси l, берутся с разными знаками, следовательно, $m_l = m_l^{\hat{a}} - m_l^{\acute{\imath}} = 0$.

Момент инерции верхней части треугольника относительно оси l равен

$$I_l^{\hat{a}} = \int_0^{\frac{2}{3}a}\left(\frac{2}{3}a-h\right)h^2dh = \left.\left(\frac{2}{3}a\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}\right)\right|_0^{\frac{2}{3}a} = \frac{a^4}{81}\frac{4}{3}.$$

Момент инерции нижней части треугольника

$$I_l^{\acute{\imath}} = \int_0^{\frac{a}{3}}\left(\frac{2}{3}a+h\right)h^2dh = \left.\left(\frac{2}{3}a\frac{h^3}{3}+\frac{h^4}{4}\right)\right|_0^{\frac{a}{3}} = \frac{a^4}{81}\frac{11}{12}.$$

Таким образом, момент инерции всего треугольника равен

$$I_l = I_l^{â} + I_l^{í} = \frac{a^4}{81}\left(\frac{4}{3}+\frac{11}{12}\right)=\frac{a^4}{36}.$$

6.6. Найти статический момент и момент инерции фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y=\sqrt{x}$ относительно оси абсцисс.

Решение. Плоская фигура, ограниченная заданными линиями, показана на рис. 3.44. Ширина сечения на расстоянии y по оси x определяется разностью абсцисс $x_2(y)-x_1(y)=\sqrt{y}-y^2$.

Статический момент определяем по формуле

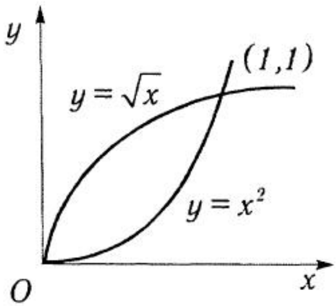


Рис.3.44

$$m_x = \int_0^1 y\left(\sqrt{y}-y^2\right)dy = \left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Момент инерции находим по первой из формул (10)

$$I_x = \int_0^1 y^2\left(\sqrt{y}-y^2\right)dy = \left(\frac{7}{2}y^{\frac{7}{2}}-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{35}.$$

6.7. Найти статический момент относительно основания:

а) кругового конуса; б) полусферы; в) поверхности кругового конуса; г) поверхности полусферы.

Решения. а) Расположим оси координат относительно конуса, как показано на рис. 3.45. Из подобия треугольников

OAB и MNB имеем $\dfrac{H}{H-x}=\dfrac{R}{y}, y=R\left(1-\dfrac{x}{H}\right)$. Статический момент относительно плоскости основания находим по формуле (5)

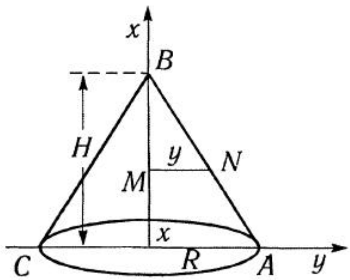


Рис. 3.45

$$m_{yz}=\pi\int_0^H xy^2dx=\pi R^2\int_0^H\left(x-2\frac{x^2}{H}+\frac{x^3}{H^2}\right)dx=$$

$$=\pi R^2\left(\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3H}+\frac{x^4}{4H^2}\right)\Bigg|_0^H=\frac{\pi R^2H^2}{12}.$$

б) Расположим оси координат относительно полусферы, как показано на рис. 3.46. Из треугольника OMN имеем $y^2=R^2-x^2$. Статический момент относительно плоскости основания вычисляем по формуле (5)

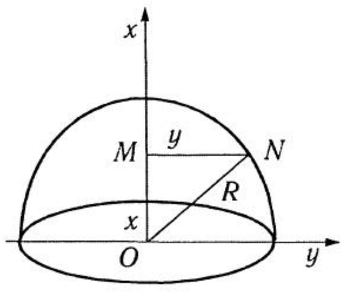


Рис. 3.46

$$m_{yz}=\pi\int_0^R xy^2dx=\pi\int_0^R x\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^R=\frac{\pi R^2}{4}.$$

в) Поскольку поверхность кругового конуса представляет поверхность вращения вокруг оси *Ox* (рис. 3.45), то статический момент относительно плоскости основания вычисляем по формуле (6)

$$m_{yz}=2\pi\int_0^H xy\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_0^H xR\left(1-\frac{x}{H}\right)\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{2\pi R}{H}\sqrt{H^2+R^2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3H}\right)\Bigg|_0^H=\frac{\pi RH}{3}\sqrt{h^2+R^2}\ .$$

г) Статический момент поверхности полусферы (рис. 3.46) относительно плоскости основания вычисляем по формуле (6)

$$m_{yz}=2\pi\int_0^R xy\sqrt{1+y'^2}dx.$$

Производную y' находим из дифференцирования выражения $y^2=R^2-x^2:2yy'=-2x$, $y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Радикал под знаком интеграла примет вид

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Таким образом,

$$m_{yz}=2\pi\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=2\pi R\frac{R^2}{2}=\pi R^3.$$

6.8. Найти. Заданная цилиндрическая поверхность показана на рис. 3.47.

Статические моменты находим по формулам (7), учитывая, что

$$z = y, x^2 + y^2 = R^2, y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \frac{Rdx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

$$m_{yz} = \int_{-R}^{R} xzdl = \int_{-R}^{R} xy\frac{Rdx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R\int_{-R}^{R} xdx = 0.$$

$$m_{zx} = \int_{-R}^{R} yzdl = \int_{-R}^{R} y^2\frac{Rdx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

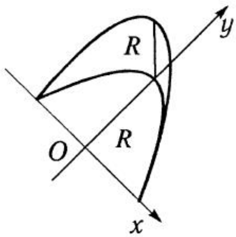


Рис. 3.47

Интегрируя по частям, будем иметь

$$m_{zx} = \frac{R}{2}\left(x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) =$$

$$= \frac{R}{2}\left(x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin\frac{x}{R}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{\pi}{2}R^3.$$

$$m_{xy} = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} z^2 dl = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} y^2\frac{Rdx}{R^2 - x^2}.$$

Используя вычисления предыдущего интеграла, получим

$$m_{xy} = \frac{\pi}{4}R^3$$

6.9. Найти момент инерции эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ относительно его осей.

Решение. Поскольку эллипс симметричен относительно координатных осей, то достаточно найти момент инерции части эллипса, расположенной в первом квадрате, и умножить результат на 4. Согласно формулам (10) будем иметь $I_y=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}x^2dx$. Делаем замену $x=a\sin t$, тогда $dx=a\cos tdt$ и

$$I_y=\frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos ta^2\sin^2 ta\cos tdt=$$

$$=a^3b\int_0^{\pi/2}\sin^2 2tdt=\frac{a^3b}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt=\frac{a^3b}{4}\pi.$$

Аналогично находим момент инерции относительно оси x $I_x=4\int_0^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}y^2dy$. Делаем замену $y=b\sin t$, тогда

$dy=b\cos tdt$ и $I_x=\frac{4a}{b}\int_0^b b\cos tb^2\sin^2 tb\cos tdt=\frac{ab^3}{4}\pi$.

6.10. Найти момент инерции: а) цилиндра; б) конуса относительно его оси, высота которого *H*, а радиус основания R.

Решение. а) Разобьём цилиндр на элементарные цилиндрические трубки параллельно оси цилиндра (рис. 3.48). Объём такой элементарной трубки $V=2\pi yHdy$, где y – радиус трубки толщиной dy и высотой H.

Момент инерции элементарной трубки относительно оси равен $dI_x=2\pi Hy^3dy$.

Суммируя, получим момент инерции цилиндра относительно его оси

$$I_x=\int_0^R dl_x=2\pi H\int_0^R y^3dy=\frac{1}{2}\pi HR^4.$$

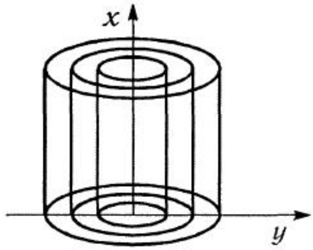


Рис. 3.48

б) Разобьём конус на элементарные цилиндрические трубки параллельно оси конуса (рис. 3.49). Объём элементарной трубки равен $dV = 2\pi yhdy$, где y – радиус трубки толщиной dy и высотой h. Из подобия треугольников OAB и MNB находим, что $h = H\left(1 - \dfrac{y}{R}\right)$. Момент инерции элементарно трубки

$$dl_x = 2\pi H\left(1 - \frac{y}{R}\right)y^3 dy.$$

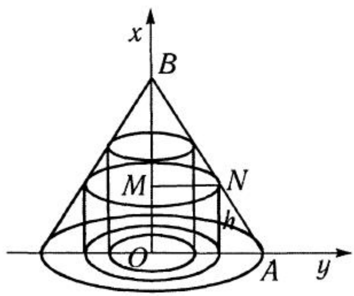


Рис. 3.49

Суммируя, получим момент инерции конуса относительно его оси

$$I_x = \int_0^R dI_x = 2\pi H\int_0^R\left(y^3 - \frac{y^4}{R}\right)dy = 2\pi H\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5R}\right)\Bigg|_0^R = \frac{1}{10}\pi HR^4.$$

6.11. Найти момент инерции боковой поверхности: а) цилиндра, высота которого H, а радиус основания R, относительно его оси; б) шара радиуса R относительно его диаметра.

Решение. а) Масса элементарной полости боковой поверхности цилиндра (рис. 3.50) на расстоянии R от оси вращения есть $\delta 2\pi R dx$.

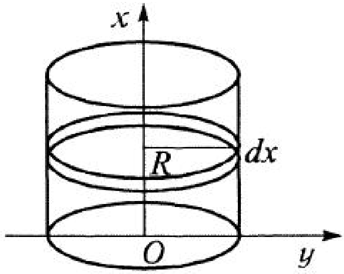


Рис. 3.50

Момент инерции элементарной плоскости относительно оси Ox равен $dl_x = R^2\delta 2\pi R dx$.

Суммируя, получим момент инерции цилиндрической поверхности, высота которой H

$$I_x = \int_0^H dI_x = 2\pi\delta R^3 \int_0^H dx = 2\pi\delta R^3 H = mR^2,$$

где $m = 2\pi\delta RH$ - масса боковой поверхности цилиндра.

б) Рассечём поверхность шара двумя параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии dx, и параллельными плоскостями Oyz (рис. 3.51).

Масса элементарной плоскости боковой поверхности шара на расстоянии y от диаметра, расположенного по оси Ox, есть $\delta 2\pi y dl$.

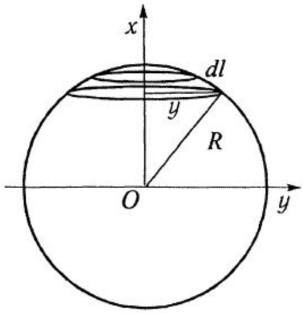


Рис.3.51

Момент инерции элементарной полоски относительно диаметра равен $dI_x = y^2\delta 2\pi y dl$. Суммируя, получим момент инерции поверхности шара относительно его диаметра

$$I_x = \int_{-R}^{R} dI_x = 2\pi\delta\int_{-R}^{R} y^3 dl .$$

Учитывая, что $x^2 + y^2 = R^2$, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$,

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad dl = \sqrt{1 + y'^2}dx = \frac{Rdx}{R^2 - x^2},$$

находим

$$I_x = 2\pi\delta R\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = 2\pi\delta R\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{8}{3}\pi\delta R^4 = \frac{2}{3}mR^2 ,$$

где $m = 4\pi\delta R^2 -$ масса поверхности шара.

3.7. Координаты центра тяжести

Точка C, являющаяся центром параллельных сил тяжести частиц, называется центром данного тела.

1°. Для материальной дуги AB плоской кривой прямоугольные координаты центра тяжести определяются по формулам

$$x_c=\frac{m_y}{m}=\frac{\int_a^b \delta(M)xdl}{\int_a^b \delta(M)xdl};\quad y_c=\frac{m_x}{m}=\frac{\int_a^b \delta(M)ydl}{\int_a^b \delta(M)xdl};\qquad (1)$$

где m — масса дуги AB; m_x, m_y - статические моменты этой дуги относительно осей x, y; $\delta(M)$ —линейная плотность распределения массы в точке $M(x, y)$; dl — дифференциал дуги.

Декартовы координаты центра тяжести дуги кривой L, уравнение которой задано в полярной системе координат, $\delta=\delta(\varphi)$, определяются по формулам

$$x_c=\frac{1}{L}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\cos\varphi\, dL;\qquad y_c=\frac{1}{L}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\sin\varphi\, dL;\qquad (2)$$

где $dL=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi$ - дифференциал дуги; $dL=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}dL$ - длина дуги. Здесь плотность дуги принята равной единице.

2°. Координаты центра тяжести криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox, определяются по формулам

$$x_c=\frac{m_y}{m}=\frac{\int_a^b \delta(M)xydx}{\int_a^b \delta(M)ydx};\quad y_c=\frac{m_x}{m}=\frac{\int_a^b \delta(M)y^2dx}{\int_a^b \delta(M)ydx};\qquad (3)$$

где m — масса плоской фигуры; m_x, m_y — статические моменты этой фигуры относительно осей x, y.

3°. Если плоская фигура ограничена линиями $y_1=f_1(x)$; $y_2=f_2(x)$; $x=a$; $x=b$, то координаты центра тяжести определяются по формулам

$$x_c=\frac{\int_a^b \delta(M)x(f_2(x)-f_1(x))dx}{\int_a^b \delta(M)x(f_2(x)-f_1(x))dx},\quad y_c=\frac{\int_a^b \delta(M)(f_2{}^2(x)-f_1{}^2(x))dx}{\int_a^b \delta(M)x(f_2(x)-f_1(x))dx}.\qquad (4)$$

Здесь $\delta(M)$ — поверхностная плотность, т. е. масса единицы площади поверхности фигуры.

Если плотность $\delta(M)$ постоянна, то в предыдущих формулах δ может быть вынесена за знак интегралов и на ее величину можно сократить.

Если однородная материальная линия или фигура имеет ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси.

Координаты центра тяжести криволинейного сектора, ограниченного двумя полярными радиусами и кривой $\rho = \delta(\varphi)$, определяются по формулам

$$x_c = \frac{1}{3S}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos\varphi \, d\varphi, \quad y_c = \frac{1}{3S}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \sin\varphi \, d\varphi, \qquad (5)$$

где $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p^2 d\varphi$ - площадь сектора.

4°. Расстояние x_c центра тяжести тела от данной плоскости находится по формуле

$$x_c = \int_a^b xSdx \Big/ \int_a^b Sdx, \qquad (6)$$

где $S(x)dx$ — объем элементарного слоя тела на расстоянии x от плоскости; $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью параллельной данной плоскости и отстоящей от нее на расстоянии x.

Для тела, образованного вращением кривой $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ вокруг оси x, расстояние x_C центра тяжести от плоскости yOz определяется по формуле

$$x_c = \frac{\int_a^b xy^2 dx}{\int_a^b y^2 dx}. \qquad (7)$$

Расстояние x_C центра тяжести поверхности вращения от плоскости, перпендикулярной оси x, опредляется по формуле

$$x_c = \frac{m_{yz}}{S} = \frac{\int\limits_a^b xy\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}. \qquad (8)$$

5°. Координаты центра тяжести цилиндрической поверхности, перпендикулярной плоскости *xOy* (рис. 3.29), образующие которой ограничены кривой $z = z(t)$, определяются формулами

$$x_c = \frac{m_{yz}}{S}, \quad y_c = \frac{m_{xz}}{S}, \quad z_c = \frac{m_{xy}}{S}, \qquad (9)$$

где S - площадь цилиндрической поверхности; m_{yz}, m_{xz}, m_{xy} - статические моменты (3.6 (7)) относительно координатных плоскостей.

6°. *Теоремы Гульдина.*

1) Площадь поверхности, полученной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости, но ее не пересекающей, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

2) Объем тела вращения, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и ее не пересекающей, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести площади фигуры.

7.1. Найти координаты центра тяжести дуги: а) цепной линии $y = ach\dfrac{x}{a}$ $(0 \le x \le a)$; б) арки циклоиды $x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t)$, если линейная плотность в каждой ее точке пропорциональна абсциссе точки; в) кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \le \varphi \le \pi)$.

Решение. а) Воспользуемся формулами (1), полагая, что плотность равна единице. Для этого найдем дифференциал дуги

$$dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+sh^2\frac{x}{a}}dx = ch\frac{x}{a}dx\ .$$

Длина дуги равна

$$L = \int_0^a dl = \int_0^a ch\frac{x}{a}dx = ash\frac{x}{a}\bigg|_x^a = ash1\,.$$

Находим статические моменты:

$$m_y = \int_0^a xch\frac{x}{a}dx; \quad m_x = a\int_0^a ch^2\frac{x}{a}dx.$$

Интегрируя по частям: $x = u,\ ch\dfrac{x}{a}dx = dv;\ dx = du;$

$v = ashxa$, будем иметь

$$m_y = ysh\frac{x}{a} - a\int_0^a sh\frac{x}{a}dx = \left(axsh\frac{x}{a} - a^2ch\frac{x}{a}\right)\bigg|_0^a = a^2(sh1 - ch1 + 1).$$

$$m_x = \frac{a}{2}\int_0^a\left(1+ch\frac{2x}{a}\right)dx = \frac{a}{2}\left(x + \frac{a}{2}sh\frac{2x}{a}\right)\bigg|_0^a = \frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}sh\right).$$

Таким образом, координаты центра тяжести дуги будут

$$x_c = \frac{m_y}{L} = \frac{a}{sh1}(sh1 - sh1 + 1) = \left(1 - th\frac{1}{2}\right);$$

$$y_c = \frac{m_x}{L} = \frac{a}{2sh1}\left(1-\frac{1}{2}sh2\right) = \frac{a}{2}(csh1 + ch1).$$

б) Для определения массы дуги арки циклоиды *m* при заданной линейной плотности *δ(M)* = *x* найдем дифференциал ее дуги

$$dl = \sqrt{x^2+y^2}dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

и вычислим интеграл

$$m=\int_0^{2\pi} x\,dl = 2a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt = 2a^2\left(\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - \int_0^{2\pi}\sin t\sin dt\right)=$$

$$=2a^2\left(-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}-\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=8a^2\pi.$$

Статический момент относительно оси Oy равен

$$m_y=\int_0^{2\pi} x^2 dl = 2a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=2a^3\left(\int_0^{2\pi} t^2\sin\frac{t}{2}dt - 2\int_0^{2\pi} t\sin t\sin\frac{t}{2}dt + \int_0^{2\pi}\sin^2 t\sin\frac{t}{2}dt\right).$$

Интегрируя первые два интеграла по частям, получим:

$$m_y=2a^3\left(-2t^2\cos\frac{t}{2}+4\int_0^{2\pi} t\cos\frac{t}{2}dt-\frac{8}{3}t\sin^3\frac{t}{2}+\frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt\right)-$$

$$-2a^3\left(8\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\cos^2\frac{t}{2}\,d\cos\frac{t}{2}\right)=$$

$$=2a^3\left(\left(-2t^2\cos\frac{t}{2}+8t\sin\frac{t}{2}+16\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}-\left(\frac{8}{3}t\sin^3\frac{t}{2}+\frac{16}{3}\left(\cos\frac{t}{2}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi}-\left(\frac{8}{3}\cos^3\frac{t}{2}-\frac{8}{5}\cos^5\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right)=$$

$$2a^3\left(8\left(\pi^2-4\right)+\frac{64}{3}+\frac{32}{15}\right)=16a^3\left(\pi^2-\frac{16}{15}\right).$$

Статический момент относительно оси Ox равен

$$m_y = \int_0^{2\pi} xydl = 2a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 2a^3 \left(\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}\,dt - \int_0^{2\pi} t\cos t\sin\frac{t}{2}\,dt - \right.$$

$$- \int_0^{2\pi} \sin t\sin\frac{t}{2}\,dt + \int_0^{2\pi} t\cos t\sin\frac{t}{2}\,dt -$$

$$\left. - \int_0^{2\pi} \sin t\sin\frac{t}{2}\,dt + \int_0^{2\pi} \sin t\cos t\sin\frac{t}{2}\,dt \right).$$

Интегрируя первые два интеграла по частям, получим

$$m_x = 2a^3 \left(\left(-2t\cos\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} + 2t\left(\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} - \right.$$

$$- \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \cos^3\frac{t}{2}\,dt + 2\int_0^{2\pi} \cos\frac{t}{2}\,dt - \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2} \Bigg|_0^{2\pi} +$$

$$\left. + 2\int_0^{2\pi} \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\left(\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} \right) dt \right) =$$

$$= 2a^3 \left(4\pi + \frac{4}{3}\pi - \left(\frac{8}{3}\left(\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2} \right) - 4\sin\frac{t}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} + \right.$$

$$\left. + 4\left(\frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2} - \frac{2}{5}\sin^5\frac{t}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} \right) = 2a^3\left(4\pi + \frac{4}{3}\pi \right) = \frac{32a^2\pi}{3}.$$

Координаты центра тяжести находим по формулам (1)

$$x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{2a}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{16}{15} \right), \qquad y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{4}{3}a.$$

в) найдём дифференциал дуги:

$$dL = \left(a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi \right)^{1/2} d\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Длина дуги: $L = 2a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 4a.$

Координаты центра тяжести находим по формулам (2):

$$x_c=\frac{1}{4a}\int_0^x p\cos\varphi\cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=\frac{a}{2}\int_0^x(1+\cos\varphi)\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{a}{2}\left(\int_0^{\pi}\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi+\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi\right)=$$

$$=\frac{a}{2}\left(2\int_0^{\pi}\left(1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)d\sin\frac{\varphi}{2}+2\int_0^{\pi}\left(1-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)d\sin\frac{\varphi}{2}=\right.$$

$$=a\left(\sin\frac{\varphi}{2}-\frac{2}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}-4\left(\frac{1}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{5}\sin^5\frac{\varphi}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4}{5}a;$$

$$y_c=\frac{1}{4a}\int_0^x p\sin\varphi\cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=\frac{a}{2}\int_0^x(1+\cos\varphi)\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{a}{2}\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi+\int_0^{\pi}\cos\ \ \varphi\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi\right)=$$

$$=\frac{a}{2}\left(-4\int_0^{\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-4\int_0^{\pi}\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1\right)\cos^2\frac{\varphi}{2}d\cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=-2a\left(\frac{1}{3}\cos^3\frac{\varphi}{2}+\frac{2}{5}\cos^5\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4}{5}a.$$

7.2. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной: а) осью Ox и полуокружностью $y=\sqrt{a^2-x^2}$; б) осями координат и дугой эллипса $x = a\cos t$ $y = b\sin t$, расположенной в первом квадранте, если плотность в каждой ее точке пропорциональна оси ординат; в) линиями $y^2 = ax$ и $x = a$; г) правой петлей лемнискаты Бернулли $p^2=a^2cos2\varphi$.

Решение. а) Поскольку полукруг симметричен относительно оси координат, то центр тяжести находится на оси Oy и координата $x_c = 0$.

Для вычисления координаты y_c воспользуемся формулами (3). В знаменателях формул (3) интегралы при $\delta(M) = 1$ есть не что иное, как площадь фигуры, ограниченной криволинейной трапецией и осью абсцисс. Для полукруга $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi a^2}{2}$.

Таким образом

$$y_c=\frac{1}{\pi a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{1}{\pi a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{1}{\pi a}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}.$$

б) Так как плоская фигура прилежит к оси Ox, то воспользуемся формулами (3). Масса плоской фигуры равна $m=\int_0^a y^2dx$. В первом квадранте при возрастании x от 0 до а величина t убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0, поэтому

$$m=\int_{\pi/2}^{0}b^2\sin^2 t(-a\sin t)dt=ab^2\int_{\pi/2}^{0}\left(1-\cos^2 t\right)=$$

$$=ab^2\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0}=\frac{2}{3}ab^2.$$

Найдем статические моменты:

$$m_x=\frac{1}{2}\int_0^a y^3dx=\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{0}b^3\sin^3 t(-a\sin t)dt=-\frac{ab^3}{2}\int_{\pi/2}^{0}\frac{1}{4}\left(1-\cos 2t\right)^2dt=$$

$$=-\frac{ab^3}{8}\int_{\pi/2}^{0}\left(1-2\cos 2t+\frac{1}{2}\left(1+\cos 4t\right)\right)dt=$$

$$=-\frac{ab^3}{8}\left(t-\sin 2t+\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0}=\frac{3}{32}\pi ab^3,$$

$$m_x=\int_0^a xy^2dx=\int_{\pi/2}^{0}a\cos tb^2\sin^2 t(-a\sin t)dt=-a^2b^2\int_{\pi/2}^{0}\sin^3 td\sin t=$$

$$=-\frac{1}{4}a^2b^2\sin^4 t\Big|_{\pi/2}^{0}=\frac{a^2b^2}{4}.$$

Окончательно получим $x_c = \dfrac{m_y}{m} = \dfrac{3}{8}a, \quad y_c = \dfrac{m_y}{m} = \dfrac{9}{64}\pi b.$

в) Сделаем чертеж (рис. 3.52). Поскольку парабола симметрична относительно оси x, то $y_c = 0$. Уравнения ветвей параболы будут: $y = \sqrt{ax}$ и $y = -\sqrt{ax}$. Отсюда по формуле (4) имеем

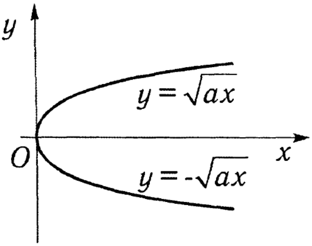


Рис. 3.52

$$x_c = \frac{2\int\limits_0^a x\sqrt{ax}dx}{2\int\limits_0^a \sqrt{ax}dx} = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{a}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a}{\frac{4}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a} = \frac{3}{5}a.$$

г) Поскольку правая петля лемнискаты симметрична относительно оси абсцисс, то центр тяжести находится на оси Ox и $y_c=0$. Для нахождения координаты x_c воспользуемся формулами (5). Площадь петли равна

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} p^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}.$$

Таким образом

$$x_c = \frac{2}{3a^2}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} p^3\cos\varphi d\varphi = \frac{2a}{3}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos 2\varphi)^{3/2}\cos\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{2a}{3}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(1-2\sin^2\varphi\right)^{3/2}\cos\varphi d\varphi.$$

Делаем замену $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t;\;\; \cos\varphi d\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t dt$ при

$$\varphi = \frac{\pi}{4},\;\; t = \frac{\pi}{2};\;\; \varphi = -\frac{\pi}{4},\;\; t = -\frac{\pi}{2},\ \text{получим}$$

$$x_c = \frac{\sqrt{2}a}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t dt = \frac{\sqrt{2}a}{12}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1 + 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1 + \cos 4t)\right)dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{12}\left(t + \sin 2t + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{4}\sin 4t\right)\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}\pi a}{8}$$

7.3. На каком расстоянии от основания лежит центр тяжести: а) тела, ограниченного параболоидом вращения и плоскостью, перпендикулярной его оси, если высота параболоида равна Н; б) конуса, высота которого равна Н; в) полушара радиуса *R?*

Решение. а) Поскольку параболоид образован вращением кривой $x = y^2$ вокруг оси Ox, то для нахождения центра тяжести воспользуемся формулой (7)

$$x_c = \frac{\int\limits_0^H xy^2 dx}{\int\limits_0^H y^2 dx} = \frac{\int\limits_0^H x^2 dx}{\int\limits_0^H x dx} = \frac{2x^3}{3x^2}\Bigg|_0^H = \frac{2}{3}H.$$

Следовательно, от плоскости основания центр тяжести лежит на расстоянии $\dfrac{1}{3}H$.

б) Для нахождения центра тяжести конуса воспользуемся результатами задачи 6.7(а) (рис. 3.45). Так как объем конуса равен $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$, то координата центра тяжести находится по формуле

$$x_c = \frac{m_{yz}}{V} = \frac{\pi R^2 H^2 \cdot 3}{12\pi R^2 H} = \frac{1}{4}H.$$

Этот же результат получается при вычислениях по формуле (7), т.к. расчеты в обоих случаях тождественны.

в) При вычислении центра тяжести полушара воспользуемся результатами задачи 6.7(б) (рис. 3.47). Зная, что объем полушара равен $V=\frac{2}{3}\pi R^3$, расстояние от плоскости основания находим по формуле

$$x_c=\frac{m_{yz}}{V}=\frac{\pi R^2\cdot 3}{4\cdot 2\pi R^3 H}=\frac{3}{8}R.$$

Этот же результат получается при вычислениях по формуле (7).

7.4. Найти центр тяжести поверхности полусферы.

Решение. При вычислении центра тяжести полусферы воспользуемся результатами задачи 6.7(б) (рис. 3.46). Поскольку полусфера представляет поверхность вращения, то по формуле (8) имеем

$$x_c=\frac{m_{yz}}{S}=\frac{\pi\cdot R^3}{2\pi\int\limits_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx}=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{1}{2}R.$$

7.5. Найти координаты центра тяжести цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$, ограниченной плоскостями $z = 0$ и
$z = y$ $(y>0)$.

Решение. Координаты центра тяжести цилиндрической поверхности, перпендикулярной плоскости *Oy* (рис. 3.38), определяем по формулам (9).

Площадь цилиндрической поверхности равна

$S=\int\limits_L zdl=\int\limits_{-R}^{R} z\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Поскольку z=y, $x^2+y^2=R^2$,

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},\ \text{то}$$

$$S=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=Rx\Big|_{-R}^{R}=3R^2.$$

Используя статические моменты, вычисленные в задаче 6.8 получим $x_c=0,\ y_c=\frac{\pi}{2}\frac{R^3}{2R^2}=\frac{\pi}{4}R,\ z_c=\frac{\pi}{4}\frac{R^3}{2R^2}=\frac{\pi}{8}R.$

7.6. Пользуясь теоремой Гульдина, найти координаты центра тяжести: а) дуги астроиды $x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,$ лежащей в первой четверти; б) полукруга.

Решение. а) Вследствие симметрии дуги астроиды относительно биссектрисы первого координатного угла, координаты центра тяжести равны $x_c=y_c$. На основании первой теоремы Гульдина площадь поверхности, полученной вращением астроиды вокруг оси *Ox*, равна длине дуги астроиды, умноженной на длину окружности, описанной ее центром тяжести, т. е.

$$S=L\cdot 2\pi y_c.$$

Площадь поверхности вращения астроиды найдена в задаче 5.2(а) и равна $S=\frac{6}{5}\pi a^2$. Длина дуги найдена в задаче 4.1(б) и равна $L=\frac{3}{2}a$. Таким образом $y_c=\frac{4\pi R^3\cdot 2}{3\pi R^2\cdot 2\pi}=\frac{4R}{3\pi}.$

б) Выберем оси координат таким образом, чтобы ось *Ox* совпадала с диаметром, начало координат с центром круга. Вследствие симметрии полукруга относительно оси *Oy* имеем $x_c=0$. При вращении полукруга вокруг оси *Ox* получим шар, объем которого равен $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. Площадь полукруга равна $S=\frac{1}{2}\pi R^2$. Пользуясь второй теоремой Гульдина, имеем $V=S\cdot 2\pi y_c$ отсюда $y_c=\frac{4\pi R^3\cdot 2}{3\pi R^2\cdot 2\pi}=\frac{4R}{3\pi}$

7.7. Найти поверхность и объем тела, которое получается при вращении окружности $(x\text{-}a)^2+y^2=R^2$, $0<R<a$ вокруг оси Oy (такое тело называется тором).

Решение. Центр тяжести окружности совпадает с ее центром и отстоит от оси вращения Oy на расстоянии a. Используя первую теорему Гульдина, находим площадь поверхности $S = L2\pi a = 2\pi R \cdot 2\pi a = 4\pi^2 aR$. Объем тора находим по второй теореме Гульдина $V = \pi R^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 aR^2$.

3.8. Приложение определенного интеграла к задачам механики и физики

1°. Сила давления жидкости на вертикальную пластинку согласно закону Паскаля (рис. 3.53) равна произведению площади пластинки S на глубину ее погружения x и определяется по формуле $P = \gamma x S$ или

$$P = \gamma \int_a^b x dS = \gamma \int_a^b xy dx, \qquad (1)$$

где $y = f(x)$ — известная функция, зависящая от формы пластинки; a и b — значения переменной интегрирования, соответствующие граничным точкам пластинки; γ - удельный вес жидкости.

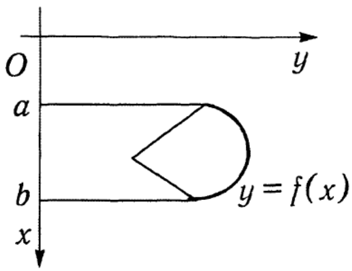


Рис. 3.53

2°. Работа переменной силы *f(s)* при перемещении единицы массы из положения $s = a$ в положение $s=b$ численно равна определенному интегралу

$$A = \int_a^b f(s)ds\,. \qquad (2)$$

Если переменная сила *f(x)* действует в направлении оси *Ox*, то работа силы равна

$$A = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (3)$$

Если положение точки на траектории ее движения $s=s(t)$ описывается с помощью переменной *t*, $a \le t \le \beta$ и величина пройденного пути является непрерывно дифференцируемой функцией, то работа определяется по формуле

$$A = \int_a^b f(s(t))s'(t)dt\,. \qquad (4)$$

3°. Если задан закон изменения скорости $v = f(t)$ при неравномерном движении тела, где *t* — время, то пройденный путь определяется по формуле

$$S = \int_a^b vdt = \int_a^b f(t)dt\,, \qquad (5)$$

где a,b — значения переменной *t* на концах пройденного пути.

4°. Скорость истечения жидкости из отверстия на расстоянии *h* от свободной поверхности по закону Торичелли равна $v = \mu\sqrt{2gh}$, где μ — коэффициент, зависящий от вязкости жидкости, формы сосуда и отверстия (для воды μ = 0,6), *g* — ускорение свободного падения.

Если за время *t* уровень жидкости в сосуде понизился на величину *x*, то, допуская, что скорость истечения в течение малого периода Δt постоянна, ее значение определяется выражением $v = \mu\sqrt{2g(h-x)}$.

Из равенства объема жидкости вытекшей через отверстие и объема опорожнившейся за этот же промежуток части сосуда $\mu s\sqrt{2g(h-x)}\Delta t \cong S(x)\Delta x$, где s — площадь отверстия, *S(x)* - площадь поверхности жидкости, находим, что время полного опорожнения сосуда равно

$$T = \frac{1}{\mu s\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{S(x)dx}{\sqrt{h-x}}. \qquad (6)$$

5°. Зависимость между объемом V и давлением p газа при изотермическом изменении состояния газа, т. е. постоянной температуре, согласно закону Бойля-Мариотта имеет вид $pV=p_o v_o$=с - *const*. Работа при изменении объема газа от значения V_1 до V_2 определяется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV\,, \qquad (7)$$

или на основании закона Бойля-Мариотта по формуле

$$A = c\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = c\ln\frac{V_2}{V_1} = c\ln\frac{p_2}{p_1}, \qquad (8)$$

где p_1 и p_2 — давления в начале и в конце процесса.

Работа, затрачиваемая на сжатие газа в цилиндре при изменении поршня на величину А, находится по формуле

$$A = c\int_0^h \frac{dx}{H-x}, \qquad (9)$$

где Н – высота цилиндра.

В случае адиабатического процесса, когда при расширении
объема газа температура понижается, а при сжатии — повышается, объем V и давление связаны соотношением Пуассона $\mathrm{pV^k = p_o V_o^k = \tilde{n} - const}$, где κ — постоянная для данного газа величина, всегда большая единицы (для воздуха $k \cong 1{,}4$).

Работа при адиабатическом изменении объема газа равна

$$A = c\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^k} = c\frac{1}{1-k}\left(V_2^{1-k} - V_1^{1-k}\right)\ . \qquad (10)$$

При движении поршня в цилиндре работа определяется, соответственно по формуле

$$A=\frac{c}{S^{k-1}}\int_0^k \frac{dx}{(H-x)^k}=\frac{p_0V_0^k}{S^{k-1}(k-1)}\left(\frac{1}{(H-h)^{k-1}}-\frac{1}{H^{k-1}}\right). \qquad (11)$$

6°. Кинетическая энергия материальной точки массы m, обладающей скоростью v, определяется по формуле

$$K=\frac{mv^2}{2}.$$

При расчете кинетической энергии тела его разбивают на элементарные частицы. Суммируя кинетические энергии этих частиц, в пределе при $n\to\infty$, посредством интегрального перехода, находят кинетическую энергию всего тела

$$K=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}m_iv_i^2.$$

Если материальная точка вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $w=\frac{v}{r}$, то ее кинетическая энергия определяется по формуле $K=\frac{1}{2}Iw^2$, где $I=mr^2$ — момент инерции относительно оси вращения, r — расстояние от оси вращения. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, находится аналогично, посредством интегрального перехода.

8.1. Плотина имеет форму трапеции с верхним основанием 200 м, нижним 150 м и высотой 10м. **Определить** давление воды на плотину.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 3.54). В силу симметрии давление на всю плотину равно удвоенному давлению на половину плотины. Согласно формуле (1) имеем $P=2\gamma\int_0^{10}xydx$, где $\gamma=1\text{т/м}^3$.

Найдем зависимость y от x. Возьмем на прямой AB произвольную точку F с координатами (x,y) и рассмотрим два треугольник ABC и AEF,

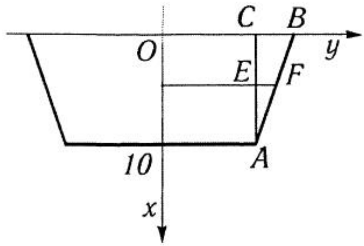


Рис. 3.54

Из подобия треугольников имеем $\dfrac{EF}{CB}=\dfrac{AE}{AC}$ или $\dfrac{EF}{25}=\dfrac{10-x}{10}$,

откуда $EF = 25-\dfrac{5}{2}x$; $\quad y = 75 + EF = 100-\dfrac{5}{2}x$

Таким образом

$$P = 2\int_0^{10} x\left(100-\frac{5}{2}x\right)dx = 2\left(100\frac{x^2}{2}-\frac{5}{3}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{10} = 10328\,\text{т}.$$

8.2. Цилиндрическая цистерна наполовину наполнена маслом $\gamma = 0{,}9$ т/м^3. **Определить** давление масла на каждую из плоских стенок цилиндра, если радиус ее равен 1м.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 3.55). По условию $y=\sqrt{1-x^2}$. Согласно формуле (1) имеем

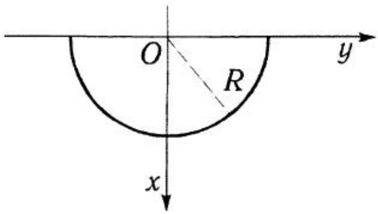


Рис. 3.55

$$P=\gamma\int_0^1 xydx=\gamma\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=-\gamma\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1-x^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\gamma\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1=\frac{\gamma}{3}=\frac{0.9}{3}=0.3\,(\text{т}).$$

8.3. Найти давление жидкости на прямоугольную пластинку длиной a и шириной b, наклоненной к поверхности жидкости под углом α и находящейся на глубине h.

Решение. Выделим на глубине x элементарную полоску (рис. 3.56), площадь которой равна $dS=\dfrac{adx}{\sin\alpha}$. Используя формулу (1), получим

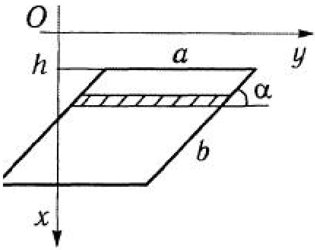


Рис. 3.56

$$P=\gamma\int_h^{h+b\sin\alpha} xdS=\frac{a\gamma}{\sin\alpha}\int_h^{h+b\sin\alpha} xdx=\frac{\alpha\gamma}{2\sin\alpha}x^2\Big|_h^{h+b\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\alpha\gamma}{2\sin\alpha}\left(2hb\sin\alpha+b^2\sin^2\alpha\right)=\gamma ab\left(h+\frac{1}{2}b\sin\alpha\right).$$

8.4. Найти силу, с которой выталкивается круговой конус с радиусом основания R и высотой Н, погруженный в воду вершиной вниз так, что его основание находится на поверхности воды.

Решение. Конус, опущенный в воду, выталкивается вертикальной составляющей сил давления (рис. 3.57) $P_b=P\cos\alpha$.

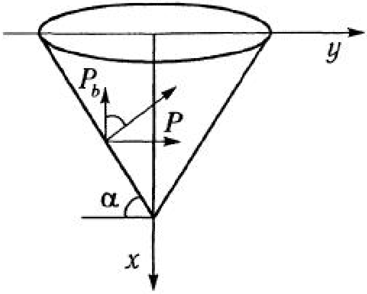


Рис. 3.57

Силы давления действуют на поверхность конуса. Выделим элементарное кольцо, площадь которого равна $dS = 2\pi y dl$, где $dl = \sqrt{1+y'^2}dx$ - дифференциал образующей. Уравнение образующей имеет вид $\dfrac{x}{H} + \dfrac{y}{R} = 1$.

Отсюда $y = R\left(1 - \dfrac{x}{H}\right)$, а $dl = \dfrac{\sqrt{H^2+R^2}}{H}dx$.

По формуле (1) при γ=1 будем иметь

$$P = 2\pi R\int_0^H x\left(1-\frac{x}{H}\right)\frac{\sqrt{H^2+R^2}}{H}dx =$$

$$= \frac{2\pi R}{H}\sqrt{H^2+R^2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3H}\right)\Bigg|_0^H = \frac{1}{3}\pi HR\sqrt{H^2+R^2}.$$

Поскольку $\cos\alpha = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+H^2}}$, то $P_b = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.

8.5. Найти давление воды на поверхность шара радиуса *a*,
если его центр находится на глубине *b* от поверхности воды (*b*>*a*).

Решение. Выделим двумя горизонтальными плоскостями элементарную поверхность шара (рис. 3.58), площадь которой $dS = 2\pi y dl$. Из уравнения окружности $x^2+y^2=a^2$ найдем

$y' = -\dfrac{x}{y}$ и $dl = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{y^2}}dx = \dfrac{a}{x}dx$. Поскольку элементарное кольцо отстоит от поверхности воды на расстоянии $b + x$, то пользуясь формулой (1) при $\gamma = 1$ получим

$$P = 2\pi \int_{-a}^{a} (b + x) y \frac{a}{y} dx = 2\pi a \left(bx + \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-a}^{a} = 4\pi a^2 b.$$

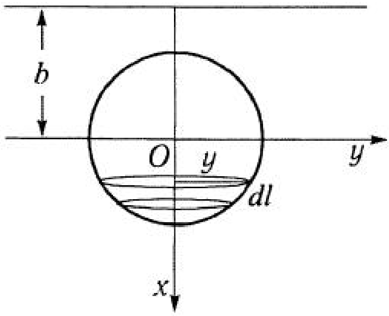


Рис. 3.58

8.6. Найти работу, которую необходимо затратить для запуска ракеты массы ***m*** с поверхности Земли на высоту *h*.

Решение. Сила притяжения тела землей, согласно закону всемирного тяготения, равна $F = k\dfrac{mM}{x^2}$, где M — масса земли, x — расстояние ракеты от центра земли, $к$ — гравитационная постоянная. Поскольку на поверхности земли при $x = R$ сила равна $F = mg$, где g — ускорение свободного падения, то $mg = k\dfrac{mM}{R^2}$.

Отсюда имеем, что $kM = gR^2$ *и* $F = mg\dfrac{R^2}{x^2}$.

Используя формулу (3), находим работу

$$A=\int_{R}^{R+h} mg\frac{R^2}{x^2}dx=-mg\frac{R^2}{x}\bigg|_{R}^{R+h}=-mgR^2\left(\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R}\right)=mgR\frac{h}{R+h}$$

Если ракета уходит в бесконечность, т.е. $h\to\infty$, то работа

$$A=\lim_{n\to\infty} mgR\frac{h}{R+h}=mgR.$$

8.7. Вычислить работу, которую необходимо затратить для выкачивания масла из корыта, имеющего форму полуцилиндра длиной *a* и радиусом *R***.**

Решение. Выделим двумя горизонтальными плоскостями элементарный слой масла (рис. 3.59), находящийся на глубине *x*. Ширина элементарного слоя равна $2y=2\sqrt{R^2-x^2}$, объем $dV=2aydx=2a\sqrt{R^2-x^2}dx$.

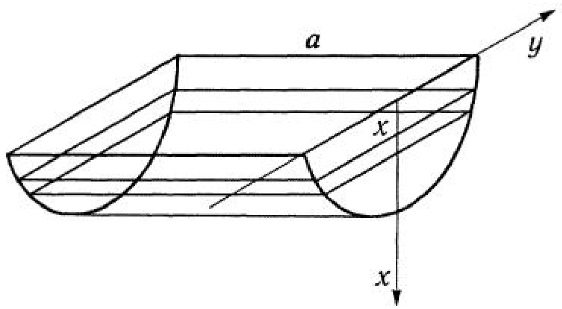


Рис. 3.59

Работа, необходимая для выкачивания этого элементарного слоя масла на высоту *x*, равна $dA=2\gamma ax\sqrt{R^2-x^2}dx$, где γ - удельный вес масла.

Искомую работу *A* находим интегрированием

$$A=\int_0^R 2\gamma ax\sqrt{R^2-x^2}dx=-\gamma a\frac{2}{3}\left(R^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^R=\frac{2}{3}\gamma aR^3.$$

8.8. Высота пирамиды с квадратным основанием *H*, сторона основания *a*, удельный вес материала γ. **Вычислить** работу, затраченную при ее постройке на преодоление силы тяжести.

Решение. Выделим двумя плоскостями параллельными основанию элементарный объем пирамиды (рис. 3.60), находящийся на высоте x. Из подобия треугольников ΔABC и ΔMNB находим, что ширина выделенного сечения равна

$$\frac{MN}{AC} = \frac{H - x}{H},\ 2y = a.$$

Элементарный объем будет

$$dV = a^2\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 dx.$$

Работа, затраченная на поднятие элементарного объема на высоту x, будет $dA = \gamma a^2\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 x dx$.

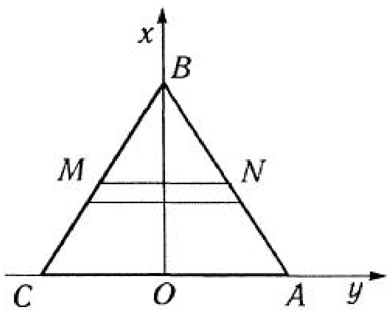


Рис. 3.60

Интегрируя последнее выражение в пределах от O до H, вычисляем работу, затраченную на преодоление силы тяжести при подъеме пирамиды

$$A = \gamma a^2 \int_0^H \left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 x dx = \gamma a^2 \int_0^H \left(x - 2\frac{x^2}{H} + \frac{x^3}{H^2}\right) dx =$$

$$= \gamma a^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{H} + \frac{x^4}{H^2}\right)\Bigg|_0^H = \frac{1}{12}\gamma a^2 H^2.$$

8.9. Шар радиуса R с удельным весом y лежит на дне бассейна глубиной $H > R$. **Какую** работу необходимо затратить, чтобы извлечь шар из воды?

Решение. Поскольку сила подъема шара до поверхности постоянна и равна разности между силой веса шара и силой, выталкивающей шар из воды $P_1 = \frac{4}{3}\gamma\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$, то работа на этом участке определяется произведением силы P_1 на высоту подъема $H-2R$

$$A = \frac{4}{3}\gamma\pi R^3(\gamma - 1)(H - 2R).$$

При извлечении шара из воды сила, совершающая работу, будет изменяться в зависимости от величины надводной части шара, которая представляет шаровой сегмент (рис. 3.61) объема $V = \frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)$, здесь x — высота сегмента. Определяя силу подъема как разность между силой веса шара и силой, выталкивающей шар из воды $P_2 = \frac{4}{3}\gamma\pi R^3 - \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)\right)$ и интегрируя по формуле (2) в пределах от 0 до 2R, находим работу

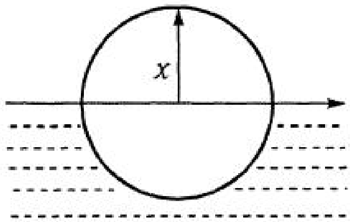


Рис. 3.61

$$A = \frac{\pi}{3}\int_0^{2R}\left(4R^3(\gamma - 1) + 3Rx^2 - x^3\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(4R^3(\gamma - 1)x + Rx^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi R^4(2\gamma - 1).$$

Таким образом, вся работа по подъему шара равна

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3}\pi R^3\left(R + (\gamma - 1)H\right).$$

8.10. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого S = 4000 см^2, а высота H = 50 см, плавает на поверхности воды. **Какую** работу надо затратить, чтобы вытащить: а) поплавок из воды? б) погрузить поплавок в воду целиком, если удельный вес дерева γ = 0,8 г/см^2?

Решение. а) Вес поплавка равен $P_n = \gamma SH$. Из условия равенства силы веса поплавка и силы $P_0 = Sh$, выталкивающей поплавок из воды, находим высоту погруженной части поплавка: 0,8·4000·50 = 4000h; h = 40 см.

Сила, совершающая работу при подъеме поплавка, изменяется от высоты его подводной части и равна разности между его весом и силой, выталкивающей поплавок из воды $P = P_n - P_v = \gamma SH - S(h - x)$. Отсюда, работа при извлечении поплавка из воды равна

$$A = \int_0^{40} S\left(\gamma H - h + x\right)dx = S\left(\gamma Hx - hx + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{40} =$$

$$= 4000\left(0.8\cdot 50\cdot 40 - 40^2 + \frac{40^2}{2}\right) = 32\,кГм$$

б) Надводная высота поплавка равна 10 см. Сила, которую необходимо приложить для погружения поплавка, равна разности между силой выталкивания его из воды $P_v = (h + x)S$ и силой веса поплавка $P_n = \gamma SH$. Следовательно, работа равна

$$A = \int_0^{10}\left((40 + x)S - \gamma SH\right)dx = S\left(40x + \frac{x^2}{2} - \gamma Hx\right)\Bigg|_0^{10} = 4000\frac{100}{2} = 2\,кГм.$$

8.11. Вычислить работу при растяжении на 2 мм медного стержня длиной 0,5 м с радиусом сечения 4 мм.

Решение. Если совместить ось Ox со срединным волокном стержня, то растягивающая сила по закону Гука равна $F = E\frac{S_x}{l}$, где S — площадь поперечного сечения стержня, l

—длина стержня, E — модуль упругости (для меди $E=12\cdot10^4$ н/мм^2), x - удлинение в направлении оси Ox.

Подставляя растягивающую силу F в формулу (3), находим работу

$$A=\int_0^a E\frac{S}{l}xdx=\frac{12\cdot10^4}{500}\pi16\int_0^2 xdx=7{,}68\pi \text{ нм.}$$

8.12. Два электрических заряда e_0 *и* e находятся на оси Ox, соответственно, в точках $x_0=0$ *и* $x_1=a$. **Найти** работу при перемещении второго заряда в точку $x_2=b$ $(b>a)$.

Решение. По закону Кулона заряд e_0 отталкивает заряд e силой, равной $F=\frac{e_0e}{x^2}$, где x—расстояние между зарядами. Используя формулу (3), работа при перемещении заряда из точки x_1 в точку x_2 будет

$$A=e_0e\int_0^a\frac{dx}{x}=e_0e\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

8.13. Сжатие винтовой пружины пропорционально приложенной силе. **Вычислить** работу при сжатии пружины на 10 см, если для сжатия на 1см нужна сила в 1кг.

Решение. По условию $F = ks$. Определим коэффициент пропорциональности $к$. При $s = 0{,}01м$, $F = 1$кг, откуда

$$k=\frac{F}{s}=100.$$

Согласно формуле (2) имеем

$$A=\int_0^{0.1}100sds=100\frac{s^2}{2}\Big|_0^{0,1}=0{,}5\text{ кгм.}$$

8.14. Скорость движения тела определяется по формуле $v=3t^2-2t$ м/с. **Какой** путь пройдет тело за 5 сек ?

Решение. Путь, пройденный телом, определяется по формуле (5)

$$s=\int_0^5\left(3t^2-2t\right)dt=\left(t^3-t^2\right)\Big|_0^5=100\text{ м.}$$

8.15. Скорость падения парашютиста определяется по формуле $v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kl}{m}}\right)$, где g — ускорение свободного падения, m - масса парашютиста, κ — коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров парашюта. Определить, с какой высоты прыгал парашютист, если падение продолжалось три минуты.

Решение. Поскольку закон изменения скорости известен, то, пользуясь формулой (5), получим

$$S = \int_0^{180} \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)dt = \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}\right)\Bigg|_0^{180} = \frac{mg}{k}\left(180 + \left(\frac{m}{k}e^{\frac{180k}{m}} - 1\right)\right).$$

8.16. Скорость движения точки $v = 0{,}1te^{-0{,}01t}$ м/с. **Найти** путь, пройденный точкой от начала координат до полной остановки.

Решение. Пройденный путь определяем по формуле (5), учитывая, что полная остановка точки произойдет при $t \to \infty$

$$S = \int_0^{\infty} 0{,}1te^{-0{,}01t}dt \cdot$$

Интегрируя по частям:

$t = u$, $e^{-0.01t}dt = dv$; $dv = du$, $v = -\frac{e^{-0.01t}}{0.01}$ получим

$$S = 0.1\lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{te^{-0.01t}}{0.01} - \frac{e^{-0.01t}}{0.01^2}\right)\Bigg|_0^{\beta} = 10\lim_{\beta\to\infty}\frac{t}{e^{0.01t}} + 0{,}1\frac{1}{0{,}01^2} = 10^3\,\text{м}.$$

8.17. Скорость точки изменяется по закону $v = 2(6-t)$ м/с. Найти наибольшее удаление точки от начала движения.

Решение. Путь пройденный точкой определяем по формуле (5) с переменным верхним пределом

$$S = \int_0^{t} 2(6-t)dt = 12t - t^2.$$

Наибольшее удаление точки находим, рассматривая путь как функцию времени: $S' = 12 - 2t$, $S = 0$ при $t = 6$, следовательно, $S_{\max} = 12 \cdot 6 - 6^2 = 36$ м.

8.18. Коническая воронка имеет размеры: высота H = 40см, радиус нижнего основания г = 0,3см и верхнего R = 6см. **За какое** время вода вытечет из воронки: а) полностью; б) если бы убыль воды постоянно возмещалась.

Решение. а) За время t уровень воды в воронке будет H-x. Найдем площадь поверхности воды при этом уровне. С целью упрощения вычислений считаем, что осевое сечение воронки представляет треугольник, вследствие малости r в сравнении с другими размерами воронки, а не трапецию (рис. 3.62).

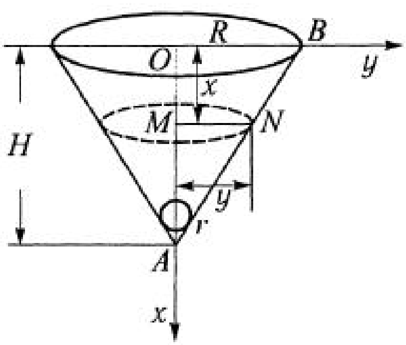


Рис. 3.62

Из подобия треугольников ABO и MNO имеем:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{MA}{MN}, \quad \frac{H}{R} = \frac{H-x}{y}, \quad y = R\left(1 - \frac{x}{H}\right).$$

Площадь поверхности $S(x) = \pi R^2 \left(1 - \frac{x}{H}\right)^2$.

Учитывая, что $\mu=0,6$, $s=\pi r^2$, по формуле (6) находим время полного опорожнения воронки

$$T=\frac{1}{0,6\pi r^2\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{\pi R^2\left(1-\frac{x}{H}\right)^2dx}{\sqrt{H-x}}=\frac{R^2}{0,6r^2H^2\sqrt{2g}}\int_H^0(H-x)^{\frac{3}{2}}d\,(H-x)=$$

$$=\frac{2R^2H^{\frac{5}{2}}}{3r^2H^2\sqrt{2g}}=\frac{2\cdot 36}{2\cdot 0.3^2}\sqrt{\frac{40}{2\cdot 9.81}}\cong 3.8c.$$

б) В случае, если убыль воды постоянно возмещается, то есть при X = 0, время истечения будет равно отношению объема воды, вмещающейся в воронке, к объему воды, вытекающей через отверстие за одну секунду $0.6\pi r^2\sqrt{2gH}$, т.е.

$$T=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2H}{0.6\pi r^2\sqrt{2gH}}=\frac{36}{3\cdot 0.6\cdot 0.3^2}\sqrt{\frac{40}{2\cdot 9.81}}=32c\ .$$

8.19. Определить расход жидкости через водослив прямоугольного сечения. Высота водослива *h*, ширина *b*.

Решение. Пусть водослив находится на расстоянии h_0 от поверхности воды (рис. 3.63). Выделим на глубине *x* элементарную полоску ширины *dx*. Поскольку площадь элементарной полоски равна *bdx*, а скорость истечения воды через нее $v=\mu\sqrt{2gx}$, то расход воды будет $dQ=\mu\sqrt{2gx}bdx$. Интегрируя дифференциал расхода воды по высоте водослива, получим

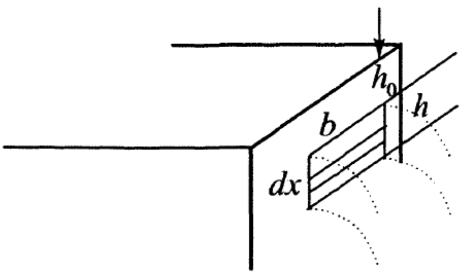


Рис. 3.63

$$Q = \mu\beta \int\limits_{h_0}^{h+h_0} \sqrt{2gx}dx = \frac{2}{3}\mu\beta\sqrt{2g}\, x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{h}^{h+h_0} = \frac{2}{3}\mu\beta\sqrt{2g}\left(\left(h+h_0\right)^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}\right).$$

Если верхняя кромка водослива совпадает со свободной поверхностью воды, т. е. $h_0 = 0$, то расход воды через прямоугольный водослив определяется по формуле

$$Q = \frac{2}{3}\mu\beta\sqrt{2g}\, h^{\frac{3}{2}}.$$

8.20. При установившемся ламинарном течении **определить** расход жидкости через трубу круглого сечения радиуса *a*.

Решение. Скорость течения в точке, находящейся на расстоянии r от оси трубы, определяется по формуле $v = \dfrac{P}{4\mu l}(a^2 - r^2)$ где P — разность давлений жидкости на концах трубы длиной l, μ —коэффициент вязкости.

Разобьем трубу цилиндрическими поверхностями, оси которых совпадают с осью трубы, на элементарные цилиндрические части толщиной Δr.

Тогда через сечение, заключенное между цилиндрическими поверхностями площадью $2\pi r\Delta r$, элементарный расход жидкости, т. е. количество жидкости, протекающей через поперечное сечение в единицу времени, будет равно $dQ = v\cdot\pi r dr$. Отсюда расход жидкости через всю трубу

$$Q = \int\limits_0^a v\cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi P}{4\mu l}\int\limits_0^a \left(a^2 - x^2\right) r dr = \frac{\pi P}{2\mu l}\left(a^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{\pi P a^4}{8\mu l}.$$

8.21. В цилиндре под поршнем находится воздух объемом V_0 = 0,1 м^3 при атмосферном давлении P_0 = 10330 кг/м^2. **Какую работу** надо затратить, чтобы при неизменной температуре объем воздуха уменьшить в два раза?

Решение. Поскольку температура постоянна, то процесс изотермический и следует воспользоваться формулой (8). Из условия $c = V_0 P_0 = 1033$ кгм, V_1 = 0,05 м^3.

Таким образом, учитывая, что по условию задачи у нас сжатие, работа будет равна

$$A = c\int_{V_1}^{V_0} \frac{dV}{V} = 1033 \ln V \Big|_{0,05}^{0,1} = 1033 \ln 2 \text{ кгм.}$$

8.22. Цилиндр с подвижным поршнем диаметра D = 20см и длины L = 1м заполнен паром при давлении P_0 = 10 кг/см^3. **Найти** работу при адиабатическом сжатии, если поршень перемещается на l = 80см внутрь цилиндра.

Решение. Работа при движении поршня в цилиндре при адиабатическом сжатии определяется по формуле (11). Из условия задачи имеем: $c = P_0 V_0^k = P_0\left(\pi R^2 L\right)^k, \quad k = 1{,}4$. Таким образом,

$$A = \frac{c}{S^{k-1}}\int_0^l \frac{dx}{\left(L-x\right)^k} = \frac{P_0 V_0^k}{S^{k-1}(k-1)}\left(\frac{1}{(L-l)^{k-1}} - \frac{1}{L^{k-1}}\right) =$$

$$= \frac{P_0 V_0}{k-1}\left(\left(\frac{L}{L-l}\right)^{k-1} - 1\right) = \frac{10\pi R^2 L}{k-1}\left(\left(\frac{L}{L-l}\right)^{k-1} - 1\right) = \frac{\pi 10^5}{0{,}4}\left(5^{0,4} - 1\right).$$

8.23. Найти кинетическую энергию однородного шара радиуса R и плотности γ, вращающегося с угловой скоростью w вокруг своего диаметра.

Решение. Разбиваем шар на элементарные цилиндрические трубки, осью которых является данный диаметр (рис. 3.64). Элементарный объем трубки равен dV — $2\pi rhdr$, где r — радиус трубки. Высота трубки по теореме Пифагора равна $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$.

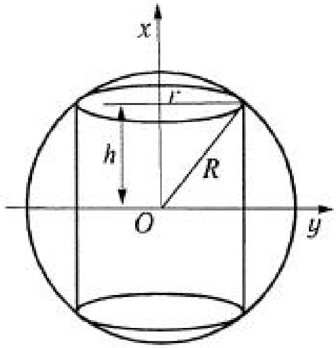


Рис. 3.64

Учитывая, что плотность шара равна γ, находим $dm = 4\pi\gamma r\sqrt{R^2 - r^2}\,dr$ и элементарный момент инерции $dI = r^2 dm$.

Таким образом, кинетическая энергия шара, вращающегося вокруг своего диаметра, равна

$$K = \frac{1}{2}\int_0^R w^2 dI = \frac{w^2}{2}\int_0^R r^2 dm = 2\pi w^2\gamma\int_0^R r^3\sqrt{R^2 - r^2}\,dr.$$

Делаем замену $R^2 - r^2 = t^2, \quad rdr = tdt,$ тогда

$$K = 2\pi w^2\gamma\int_0^R \left(R^2 - t^2\right)t^2 dt. = \frac{4}{15}\pi w^2\gamma\, R^5.$$

8.24. Пластинка в форме параболического сегмента вращается вокруг оси параболы с постоянной угловой скоростью *w*. Основание сегмента *a*, высота *h*, толщина пластинки *d*, плотность материала γ. **Найти** кинетическую энергию пластинки.

Решение. Расположим координатные оси, как показано на рис. 3.65, тогда уравнение параболы будет $y = 2px^2$. Зная координаты точки $M\left(\frac{a}{2}, h\right)$ из уравнения параболы:

$h = 2p\frac{a^2}{4}, \;\; p = \frac{2h}{a^2}$

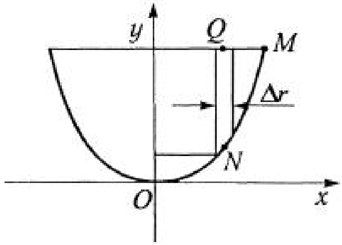


Рис. 3.65

Разобьем параболический сегмент на элементарные части плоскостями, параллельными оси *Oy*, перпендикулярными плоскости сегмента и отстоящими друг от друга на расстоянии *Δr*. Объем элементарной части будет $\Delta V = |QN| d\Delta r$. Переходя к дифференциалу, масса элементарной части равна $dm = \gamma |QN| ddr$. Подставляя сюда высоту элементарной части $|QN| = h - y = h - \dfrac{4hx^2}{a^2} = h\left(1 - \dfrac{4r^2}{a^2}\right)$ получим

$$dm = \gamma hd\left(1 - \frac{4r^2}{a^2}\right)dr \cdot$$

Элементарный момент инерции равен $dl = r^2 dm$. Таким образом, кинетическая энергия сегмента будет

$$K = \frac{\omega^2}{2}\int_{-a/2}^{a/2} r^2 dm = \frac{\omega^2}{2}\gamma hd\int_{-a/2}^{a/2} r^2\left(1 - \frac{4r^2}{a^2}\right)dr =$$

$$= \frac{\omega^2}{2}\gamma hd\left(\frac{r^3}{3} - \frac{4}{5}\frac{r^5}{a^2}\right)\Bigg|_{-a/2}^{a/2} = \frac{\omega^2}{60}\gamma\, h\, d\, a^3 .$$

8.25. Определить количество тепла, выделяемое переменным синусоидальным током $I = I_0 \sin \omega t$. В течение периода Т в проводнике с сопротивлением *R*.

Решение. По закону Джоуля-Ленца количество тепла, выделяемого постоянным током за время *t*, определяется по формуле $Q = 0{,}24IRt$. Учитывая, что у нас ток переменный, количество тепла за промежуток времени $\Delta Q = 0{,}24 I_0^2 \sin^2 \omega t R \Delta t$ или

$$\Delta Q = 0,24RI_0^2 \sin^2 \omega t dt \, .$$

Таким образом, количество тепла за период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ равно

$$Q = \int_0^T dQ = 0,24RI_0^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t dt =$$

$$= 0,12RI_0^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (1 - \cos 2\omega t) dt = 0,24 \frac{\pi R I_0^2}{\omega}.$$

8.26. Вертикальный вращающийся вал веса P и радиуса a опирается на подпятник. **Найти** работу силы трения между основанием вала и прилегающей к ней поверхностью опоры при одном обороте вала.

Решение. Сила трения между основанием вала (пятой) и прилегающей к ней поверхностью опоры (подпятником) равна $F = \mu p s$, где p — давление вала на поверхность опоры в рассматриваемой точке, отнесенное к единице площади опоры, μ - коэффициент трения. Поскольку вес вала Р, то давление на единицу площади опоры равно

$$p = \frac{P}{\pi a^2}.$$

Рассматривая p как функцию радиуса-вектора r при вычислении полного давления, воспользуемся методом суммирования бесконечно малых элементов.

Разобьем поверхность трения на элементарные концентрические кольца, так что все давление сложится из элементарных давлений, соответствующих отдельным кольцам. Рассмотрим кольцо, ограниченное окружностями r и $r+dr$. Площадь этого кольца приближенно равна $2\pi r dr$. Сила трения от кольца шириной dr, удаленного от центра вала на r, равна $\dfrac{2\mu P}{a^2} r dr$.

Работа силы трения на элементарном кольце при одном обороте $2\pi r$ равна $dA = \frac{4\pi\mu P}{a^2} r^2 dr$. Таким образом, полная работа силы трения будет

$$A = \int_0^a \frac{4\pi\mu P}{a^2} r^2 dr = \frac{4\pi\mu P}{a^2} \frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi\mu P a .$$

8.27. Найти силу притяжения, с которой действует материальный стержень длины l и массы M на материальную точку массы m , находящуюся на одной прямой со стержнем на расстоянии a от одного из его концов.

Решение. Сила F взаимодействия двух точечных масс определяется законом Ньютона $F = \frac{kmM}{r^2}$, где r - расстояние между точками, m *и* M — массы точек, k - коэффициент пропорциональности.

Масса единицы длины стержня (линейная плотность) $M / l = const$ — величина постоянная. Выделим элемент стержня длиной dx, отстоящий от его конца на расстоянии x. Сила взаимодействия выделенного элемента с точечной массой m равна $dF = \frac{kmM}{(a+x)^2 l} dx$. Отсюда вся сила притяжения будет

$$F = \int_0^l \frac{kmM}{l(a+x)^2} dx = -\frac{kmM}{l} \frac{1}{a+x}\Big|_0^l = \frac{kmM}{a(a+l)} .$$

3.9. Вычисление определённых интегралов численными методами

Пусть требуется найти приближённое значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Для этого разобьём интервал интегрирования $[a,b]$ точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ на n равных частей $h = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_n = b$ и вычислим значения подынтегральной функции в точках деления

$$y_0 = f(a), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(b).$$

Представляя определённый интеграл в виде площади криволинейной трапеции, используют одну из следующих приближённых формул.

1°. Формула прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = h(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) + R_n = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i + R_n \qquad (1)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = h(y_1 + y_2 + ... + y_n) + R_n = h\sum_{i=1}^{n} y_i + R_n \qquad (2)$$

где $R_n = \frac{h^2}{24}(b-a)f''_{\max}(\xi)$ - предельная абсолютная погрешность формулы прямоугольников; $f''_{\max}(\xi)$ - наибольшее значение производной в интервале $[a,b]$.

Геометрическая площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 3.66), которая соответствует определённому интегралу, записывается суммой площадей заштрихованных прямоугольников. Формула (1) соответствует схеме деления для вычисления приближённого значения интеграла по недостатку. Формула (2) соответствует схеме дающей приближённое значение интеграла по избытку.

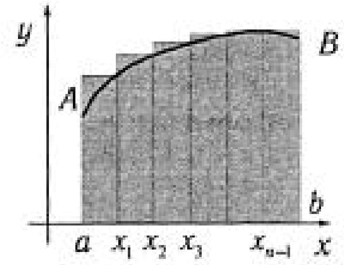


Рис. 3.66

2°. Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right)+R_n = h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)+R_n, \tag{3}$$

где $R_n = h^2\frac{b-a}{12}f''_{\max}(\xi)$ - погрешность формулы трапеций, $\xi \in [a,b]$.

Геометрическая площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 3.67) заменяется площадей заштрихованных трапеций.

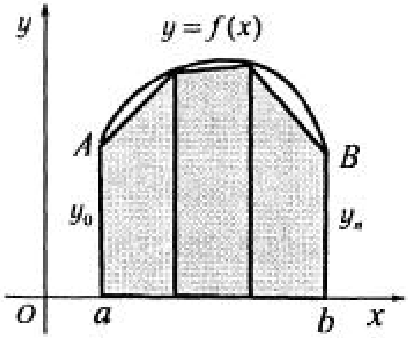


Рис.3.67

2°. Формула Симпсона (параболических трапеций)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4\left(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}\right)\right] +$$

$$+ R_n = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{k=1}^{n} y_{2k-1}\right) + R_n, \qquad (4)$$

где $R_n = h\dfrac{4b-a}{180} f_{\max}^{(IV)}(\xi)$ - погрешность формулы; n - число чётное; $\xi \in [a,b]$.

Геометрическая площадь каждой пары вертикальных криволинейных трапеций является площадью параболической трапеции (рис.3.68), т. е. каждый участок кривой $y = f(x)$ заменяется дугой параболы $y = x^2 + px + q$, проходящей через три точки кривой с абсциссами x_i, x_{i+1}, x_{i+2}.

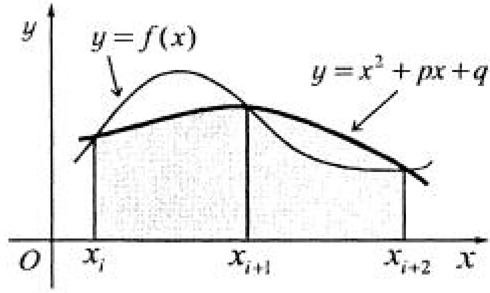


Рис. 3.68

Очевидно, что чем больше n, тем приближенное значение определённого интеграла точнее. При одном и том же n формула трапеции точнее формулы прямоугольников, формула Симпсона точнее формулы трапеции. Если предельная абсолютная погрешность задана $\varepsilon > 0$, то параметр h или число разбиений n могут быть найдены из неравенства $|R_n| < \varepsilon$.

При вычислении значений определённых интегралов на ЭВМ погрешность целесообразно оценивать методом удвоения шага вычислений. Полагая $n = k$ и $h_1 = \dfrac{b-a}{k}$, вычисляем значения искомого интеграла J_1, k - чётное. Затем удваиваем число разбиений $n = 2k$ и $h_2 = \dfrac{b-a}{2k}$, находим значение интеграла J_2. Если $|J_2 - J_1| < \varepsilon$, то расчёт заканчивается, иначе снова удваиваем разбиение.

9.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{5+x^3}\,dx$, разбивая интервал интегрирования на 10 равных частей, по формулам:

а) прямоугольников; б) трапеций; в) Симпсона. Оценить погрешности результатов.

Решение. а) Делим интервал интегрирования $[0,1]$ на 10 равных частей, находим точки деления x_i и значения подынтегральной функции в этих точках $y = \sqrt{5 + x^3}$.

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = \sqrt{5} = 2{,}2361,$$
$$x_1 = 0{,}1, \qquad y_1 = \sqrt{5{,}001} = 2{,}2363,$$
$$x_2 = 0{,}2, \qquad y_2 = \sqrt{5{,}008} = 2{,}2378,$$
$$x_3 = 0{,}3, \qquad y_3 = \sqrt{5{,}027} = 2{,}2421,$$
$$x_4 = 0{,}4, \qquad y_4 = \sqrt{5{,}064} = 2{,}2503,$$
$$x_5 = 0{,}5, \qquad y_5 = \sqrt{5{,}125} = 2{,}2638,$$
$$x_6 = 0{,}6, \qquad y_6 = \sqrt{5{,}216} = 2{,}2839,$$
$$x_7 = 0{,}7, \qquad y_7 = \sqrt{5{,}343} = 2{,}3115,$$
$$x_8 = 0{,}8, \qquad y_8 = \sqrt{5{,}512} = 2{,}3478,$$
$$x_9 = 0{,}9, \qquad y_9 = \sqrt{5{,}729} = 2{,}3935,$$
$$x_{10} = 1, \qquad y_{10} = \sqrt{6} = 2{,}4494.$$

Длина одной части $h = \dfrac{b-a}{n} = 0{,}1$. По формуле прямоугольников (1) имеем $J_1 = 0{,}1\sum\limits_{i=0}^{9} y_i = 2{,}2803$.

Для нахождения абсолютной погрешности формулы прямоугольников вычислим наибольшее значение производной в интервале $[0,1]$ $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{5+x^3}}$, $f'(1) = 0{,}6124$.

Абсолютная ошибка приближённого значения по недостатку равна $R_n = \dfrac{0{,}1}{24} 1{,}0716 = 0{,}0004$.

По формуле прямоугольников (2) находим приближённое значение по избытку $J_2 = 0{,}1\sum\limits_{1}^{10} y_i = 2{,}3016$.

Абсолютная ошибка этого приближения равна $R_n = 0,0004$.

б) По формуле трапеций (3) имеем

$$J = 0,1\left(\frac{4,6855}{2} + \sum_{i=1}^{0} y_i\right) = 2,291.$$

Абсолютная ошибка результата равна

$$R_n = \frac{0,01}{12}1,0716 = 0,0009\,.$$

в) По формуле Симпсона получим

$$J = \frac{0,1}{3}\left(2,2361 + 2,4494 + 4\cdot 11,4472 + 2\cdot 9,1198\right) = 2,2905.$$

Для нахождения абсолютной погрешности вычисляем $f_{(1)}^{IV} = 1,6244$. Абсолютная ошибка равна всего лишь

$$R_n = \frac{0,0001}{180}\cdot 1,6244 = 0,0000009.$$

9.2. По формуле Симпсона **вычислить** приближённое значение интеграла $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin xdx}{x+1}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Сначала определим, на какое число частей n следует разбить интервал интегрирования $[0,\pi]$. Поскольку требуется точность 10^{-4}, то имеем

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4}\,f_{\max}^{IV} < 10^{-4}\,.$$

Так как $f_{\max}^{IV} = 0,039$; $a = 0$, $b = \pi = 3,14159$, то окончательно получим $n^4 > \dfrac{\pi^5\cdot 0,039\cdot 10^4}{18}$ или $n > 5,1$.

Ближайшее четное число $n = 6$. Находим точки деления x_i и соответствующие значения функции $y = \dfrac{\sin x}{x+1}$

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \qquad y_1 = 0{,}3283$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3}, \qquad y_2 = 0{,}4235$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2}, \qquad y_3 = 0{,}3891$$

$$x_4 = \frac{2}{3}\pi, \qquad y_4 = 0{,}2803$$

$$x_5 = \frac{5}{6}\pi, \qquad y_5 = 0{,}1382$$

$$x_6 = \pi, \qquad y_6 = 0.$$

Подставляя в формулу Симпсона (4), находим значения интеграла с точностью 10^{-4}

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin xdx}{x+1} = 0.1744\left(4 \cdot 0{,}8556 + 2 \cdot 0{,}7038\right) = 0{,}84235\,.$$

Современная вычислительная техника позволяет вычислять интегралы с любой точностью, необходимой для практического использования результатов расчёта.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Задача 1. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \sqrt[6]{(x+4)^5}\,dx$
2. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x^2}}$
4. $\int \frac{dx}{3x^2-9}$
5. $\int \frac{dx}{7x^2+7}$
6. $\int \frac{(arctgx)^3}{1+x}dx$
7. $\int \frac{x^3}{4-x^2}dx$
8. $\int (3x-7)^{17}dx$
9. $\int (x-1)x^{\frac{2}{3}}dx$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3-2x}}$
11. $\int \frac{dx}{4x^2-4}$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x^2}}$
13. $\int \sin(2-4x)dx$
14. $\int \cos(1-2x)dx$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5x-1)^2+1}}$
16. $\int 2^{1-4x}dx.$
17. $\int 4^{2-3x}dx$
18. $\int \frac{dx}{5+3x}$
19. $\int \frac{dx}{\sin^2(2-3x)}$
20. $\int 2^{1-x}dx$
21. $\int \frac{dx}{\sin^2(1-2x)}$
22. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$
24. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-3x)}$

25. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-3x)}$ 26. $\int \sqrt{3-5x}dx$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ 28. $\int 4^{1-3x}dx$

29. $\int \cos(3-5x)dx$ 30. $\int \sqrt[4]{2x+7}dx$

Задача 2. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int x \cdot \sqrt[5]{5-x^2}dx$ 2. $\int \frac{x^3}{x^8+5}dx$

3. $\int (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx$ 4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

5. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ 6. $\int ctg^2 x dx$

7. $\int tg\frac{x}{3}dx$ 8. $\int tg^2 x dx$

9. $\int \cos^2 2x dx$ 10. $\int ctg\frac{x}{2}dx$

11. $\int \frac{2-3ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$ 12. $\int \sin 3x \cdot \cos x dx$

13. $\int tgx dx$ 14. $\int \frac{\sin x - 4}{\cos^2 x}$

15. $\int \sin 2x \cdot \cos 2x dx$ 16. $\int \sin 2x dx$

17. $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\cos 2x}$ 18. $\int ctgx dx$

19. $\int \frac{\cos 3x dx}{5+3\sin 3x}$ 20. $\int \frac{\cos x + 1}{\sin^2 x}dx$

21. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$

22. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$

23. $\int \frac{\sin 2xdx}{3\sin^2 x+4}$

24. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos^2 x+2}}$

25. $\int \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$

26. $\int e^{4-x^2}xdx$

27. $\int e^{ctgx}\frac{dx}{\sin^2 x}$

28. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

29. $\int x\cdot 3^{4-x^2}dx$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}$

Задача 3. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$

2. $\int e^{\sin x+1}\cos xdx$

3. $\int x^2e^{-x^3}dx$

4. $\int 3^{\sin x}\cos xdx$

5. $\int \frac{1+tgx}{\cos^{2x}}dx$

6. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$

7. $\int x\cdot e^{x^2}dx$

8. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

9. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$

10. $\int \frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}dx$

11. $\int e^x\cdot\sin\left(e^x\right)dx$

12. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+x)}}dx$

13. $\int \left(e^x+e^{-x}\right)^2dx$

14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^8}}dx$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\arcsin x}}$

16. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}dx}$

17. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^8}}$

18. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

19. $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{9^x+1}}$

20. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2+x^6}}$

21. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+5}}$

22. $\int \frac{x^5+x^2}{\sqrt{5+x^6}}dx$

23. $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$

24. $\int \frac{x^5dx}{x^{12}-1}$

25. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^4+7}}$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

27. $\int \sqrt[3]{3-x^3}\,x^2dx$

28. $\int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x}dx$

29. $\int \frac{x+\frac{\ln x}{x}}{x^2+\ln^2 x}dx$

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+4\ln x+5}}$

Задача 4. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{(arctg)^3}{1+x^2}dx$

2. $\int \frac{\arccos^3 x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

3. $\int tgx\cdot(\ln\cos x)dx$

4. $\int \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$

5. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$

6. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$

7. $\int \frac{2arctgx+x}{1+x^2}dx$

8. $\int \frac{x-\cos x}{x^2-2\sin 2x}dx$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4-tg^2x}}$

10. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

11. $\int \frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$

12. $\int \frac{1}{\cos^2(1+\ln x)}\frac{dx}{x}$

13. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

14. $\int \frac{dx}{x(\ln x+5)}$

15. $\int \frac{2x^2-x^5}{1+x^6}dx$

16. $\int \frac{\ln 3x+2}{x\ln x}dx$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+\ln^2 x}}$

18. $\int \frac{2^{arctg\,2x}}{1+4x^2}dx$

19. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+4)}$

20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

21. $\int \frac{dx}{\arccos^5 x\sqrt{1-x^2}}$

22. $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$

23. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

24. $\int \frac{2+\ln x}{x}dx$

25. $\int \frac{dx}{\arccos^4 x\sqrt{1-x^2}}$

26. $\int \frac{x^3+2x}{x^4-4}dx$

27. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2+2e^x+e^{2x}}}$

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$

29. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}dx$

30. $\int \frac{2^x dx}{4^x+2^{x+1}+1}$

Задача 5. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-4x}}$

3. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x-1}$

4. $\int \cos^3 x\cdot\sin 2x dx$

5. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$

7. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$

8. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\frac{dx}{x}$

9. $\int \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}dx$

10. $\int \frac{dx}{3e^x+1}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}$

13. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3+x^4}}$

14. $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}dx$

15. $\int \frac{e^x-1}{3e^x+1}dx$

16. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

17. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}-1}$

18. $\int \frac{dx}{e^x+1}$

19. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$

20. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x-1}}$

21. $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}dx$

22. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

23. $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$

24. $\int \frac{dx}{e^x-1}$

25. $\int \frac{e^{2x}-3^x}{e^{2x}+1}dx$

26. $\int \frac{1}{x+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

27. $\int \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln\ln x}$

28. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(4+tg^2x\right)}$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$

30. $\int \frac{x+arctg\,2x}{1+4x^2}dx$

Задача 6. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int (6-5x)e^{-3x}dx$

2. $\int arctg\sqrt{8x-1}dx$

3. $\int (6x-3)\cos 2xdx$

4. $\int \ln(x^2+9)dx$

5. $\int x\ln^2 xdx$

6. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

7. $\int x\cos^2 xdx$

8. $\int x^2 \ln xdx$

9. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

10. $\int x\cdot arctgxdx$

11. $\int x\arcsin xdx$

12. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx.$

13. $\int x\cdot 3^{\frac{x}{2}}dx$

14. $\int xtg^2 xdx$

15. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

16. $\int \sqrt{x}\ln xdx$

17. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

18. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

19. $\int \arccos 2xdx$

20. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

21. $\int \arcsin xdx$

22. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx$

23. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

24. $\int arctg\frac{1}{x}dx$

25. $\int \arccos xdx$

26. $\int x^3\ln(x+1)dx$

27. $\int (x^3-4x+5)\cos 3xdx$

28. $\int e^{2x}\cos xdx$

29. $\int \ln(x+2)x^2dx$

30. $\int \arccos x\cdot xdx$

Задача 7. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int x^2 \cos 3x dx$
2. $\int \ln^2 2x dx$
3. $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} dx$
4. $\int (x+1)^2 \cos x dx$
5. $\int x^3 \sin \frac{x}{3} dx$
6. $\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x dx$
7. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$
8. $\int \frac{x^2 + 2}{e^{3x}} dx$
9. $\int (x^2 - 2) \cos x dx$
10. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$
11. $\int (x^2 + 3x - 7) e^{-2x} dx$
12. $\int (\arcsin x)^2 dx$
13. $\int x arctg^2 x dx$
14. $\int x^2 e^x dx$
15. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln^2 (x^2 + 1) dx$
16. $\int x^2 \cos 2x dx$
17. $\int x^2 \sin x dx$
18. $\int x^2 \sin 2x dx$
19. $\int x \ln^2 x dx$
20. $\int (x^2 + 1) e^{-2x} dx$
21. $\int (x^2 + 1) \cdot 3^x dx$
22. $\int \arcsin^2 x dx$
23. $\int x \ln^2 x dx$
24. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$
25. $\int (x^2 + 15) \cdot 5^x dx$
26. $\int (x^3 + 3x + 2) \sin 2x dx$
27. $\int \arccos^2 x \cdot x dx$
28. $\int (4 - 3x^2 + 2x^3) \sin 2x dx$
29. $\int (x^3 - 3x^2) e^{-3x} dx$
30. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$

Задача 8. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx$
2. $\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx$

3. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)(x-1)^2}$

4. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}$

5. $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$

6. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

7. $\int \frac{2x-5}{(x-2)^2(x+1)}dx$

8. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$

9. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 dx$

10. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$

11. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

12. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$

13. $\int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x^2+3x+2)(x+2)}dx$

14. $\int \frac{x^5-x^4+3x-2}{x^4-x^3}dx$

15. $\int \frac{x^4-3x^3+9x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$

16. $\int \frac{x^4-3x^2+3x-1}{x^3-3x-2}dx$

17. $\int \frac{x^3+x^2-x+2}{x^2(x-1)}dx$

18. $\int \frac{x^3-4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

19. $\int \frac{2x^4+8x^3+x^2+x-20}{x^3(x-1)}dx$

20. $\int \frac{x^4+2x^3-2x+x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$

21. $\int \frac{x^3-2x^2-12x-7}{x^3-3x-2}dx$

22. $\int \frac{2x^3-2x^2-16x+32}{(x-2)(x^2-4)}dx$

23. $\int \frac{x^4+2x^3+9x^2+5x+2}{x^2(x+1)}dx$

24. $\int \frac{x^3+3x^2+8x+12}{(x+1)(x^2+1)}dx$

25. $\int \frac{x^3-3x^2+7x-1}{2x^3-x^2+3}dx$

26. $\int \frac{x^3+x^2+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$

27. $\int \frac{x^3-1}{x^3+1}dx$

28. $\int \frac{(x+1)dx}{x^3-6x^2+9x}$

29. $\int \frac{x^4+1}{(x^2+1)(x^2-1)}dx$

30. $\int \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$

Задача 9. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

2. $\int \frac{x}{x^3+1}dx$

3. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$

4. $\int \frac{(x+1)^3dx}{x^3-1}$

5. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$

6. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)(x-1)}dx$

7. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x^2+1)}dx$

8. $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx$

9. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$

10. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

11. $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)}dx$

12. $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$

13. $\int \frac{2x-1}{x^3-1}dx$

14. $\int \frac{3xdx}{x^3+x^2+2x+2}$

15. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$

16. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$

17. $\int \frac{x-2}{x^3+4x}dx$

18. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx$

19. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$

20. $\int \frac{3x^2+11x+8}{(x+2)(x^2+2x+2)}dx$

21. $\int \frac{dx}{x^3-8}$

22. $\int \frac{x^3-2x+5}{x^4-1}dx$

23. $\int \frac{dx}{x^4-1}$

24. $\int \frac{dx}{x^3+8}$

25. $\int \frac{dx}{x^3-64}$

26. $\int \frac{x^3-3x^2+x-4}{(x^2+4)(x^2+9)}dx$

27. $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2(x^2+4)}dx$

28. $\int \frac{x^4 dx}{x^4-2x^2+1}$

29. $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}$

30. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-x+1)}$

Задача 10. Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$

2. $\int x\cdot\sqrt{x+4}dx$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$

5. $\int x\cdot\sqrt{x-2}dx$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

7. $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

8. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$

10. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

11. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

12. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$

13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$

14. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$

15. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

16. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^4 x}$

17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+tg^2 x}$

18. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

19. $\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\cos^2 x}$

20. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x}dx$

21. $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x + 1}$

22. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

23. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 1}$

24. $\int \frac{dx}{1 + 3\sin^2 x}$

25. $\int \frac{dx}{\sin x - 3\cos x}$

26. $\int tg^4 x dx$

27. $\int tg^5 x dx$

28. $\int \sin^4 2x dx$

29. $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

30. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} dx$

Задача 11. Вычислите определенные интегралы.

1. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin^2 x dx}{3\cos^2 x - 5\sin^2 x} dx$

2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - 2\cos x + 3\sin x} dx$

3. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\cos^2 x - 5\sin^2 x} dx$

4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1 + \sin x)^2} dx$

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx$

6. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x} dx$

7. $\int\limits_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 + 7\cos x}$

8. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 2x}$

9. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 + \sin x} dx$

10. $\int\limits_{0}^{arctg 2} \frac{dx}{2\cos^2 x + 3}$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 xdx}{(1+tg^{2x})\sin 2x}$

12. $\int \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{4+5\sin 2x}$

14. $\int_0^{arctg\,2} \frac{(3tgx-1)dx}{4\cos^2 x+\sin^2 x}$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^4 x}{\cos^4 x}dx$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx$

17. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2arctg\,2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2+\sin x}{2-\cos x}dx$

19. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2arctg\,2} \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x+9\cos^2 x}$

21. $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^4 3x}$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\sin^4 x}$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$

25. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$

26. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{arctg\,2} \frac{dx}{\sin^2 2x(2+\cos 2x)}$

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\cos x+\sin x)^2}dx$

28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{5+3\sin x}dx$

29. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x+2\sin^2 x}dx$

30. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin xdx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$

Задача 12. Вычислите определенные интегралы.

1. $\int_0^{\sqrt{5}} x^5\sqrt{x^2+4}\,dx$

2. $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx$

3. $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^4}\,dx$

4. $\int_0^3 \frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}$

5. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}$

6. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

7. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}\,dx}{x}$

8. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$

9. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2+4}\,dx}{x}$

10. $\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

11. $\int_0^9 \frac{dx}{\left(81+x^2\right)\sqrt{81+x^2}}$

12. $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

13. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$

14. $\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(64-x^2\right)^3}}$

15. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

16. $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2\,dx}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}$

17. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} \frac{dx}{x\sqrt{2+x^2}}$

18. $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{4+x^2}\,dx}{x^3}$

19. $\int_0^2 \frac{x^4\,dx}{\sqrt{\left(8-x^2\right)^3}}$

20. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$

21. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$

22. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

23. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx$

24. $\int\limits_{-4}^{4}x^2\sqrt{16-x^2}dx$

25. $\int\limits_{0}^{2}\frac{-3dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$

26. $\int\limits_{2}^{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}dx$

27. $\int\limits_{0}^{\frac{3}{2}}x^2\sqrt{9-x^2}dx$

28. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x^4}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$

29. $\int\limits_{0}^{1}x^4\sqrt{4-x^2}dx$

30. $\int\limits_{0}^{1,5}\sqrt{9-x^2}dx$

Задача 13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовых или полярных координатах.

1. $y=2x-x^2, y=-2x^2+4x$

2. $p=4\cos 2\varphi, p=2, \varphi\geq 2$

3. $y=\sin^2 x, y=0, x=\frac{\pi}{2}$

4. $p^2=3\cos 3\varphi$

5. $y=e^{1-x}, y=0, x=0, x=1$

6. $p=2\sin^2 2\varphi$

7. $y=x^2, x=y^2$

8. $p=\sin\varphi-\cos\varphi$

9. $y=\sin^2 x\cdot\cos x, y=0, x=\frac{\pi}{2}$

10. $p=4\sin\frac{3\varphi}{2}, p=2, \varphi\geq 2$

11. $y=x^2\sqrt{4-x^2}, y=0, x=1$

12. $p=2\cos\varphi, p=\cos\varphi$

13. $y=\sqrt{e^x-1}, y=0, x=\ln 5$

14. $p=2-\cos\varphi$

15. $y=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}, y=0, x=e, x=e^4$

16. $p=2\sin 3\varphi$

17. $y=\ln x, y=\ln^2 x$

18. $p=\sin\varphi, p=\cos\varphi, \varphi\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

19. $y=e^x, y=e^{-x}, x=1$

20. $p=3-\sin\varphi$

21. $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3$

22. $p^2 = 3\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)$

23. $y = x^2 tgx, y = 0, x = \dfrac{\pi}{4}$

24. $p = 1 + \sin 2\varphi$

25. $y = 2^x - 1, y = \dfrac{3}{4} \cdot x(4 - x)$

26. $p = 3 - \sin\varphi$

27. $y = \sin\dfrac{x}{2}, y = \cos\dfrac{x}{2}, x = 0$

28. $p = 4\cos^2\left(2\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right)$

29. $y = x^2, x + y = 2, x = 0$

30. $p = 3\sin 4\varphi$

Задача 14. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = 3 + \sin t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 6\cos t; \\ y = \sqrt{3}\sin t, \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3}$ при $x \geq 3\sqrt{3}$.

3. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 1$ при $y \geq 1, 0 \leq x \leq 4\pi$.

4. $\begin{cases} x = 2 + 16\cos^3 t; \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4$ при $x \geq 4$.

5. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t; \\ y = 4\sqrt{2\sin^3 t}, \end{cases}$ $y = 2$ при $y \geq 2$.

6. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t); \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = 6\cos t; \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y = \sqrt{3}$ при $y \leq \sqrt{3}$.

8. $\begin{cases} x = 16\cos^2 t; \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3$ при $y \le 3, 0 \le x \le 4\pi$.

10. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t; \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ $x = 4$ при $x \ge 4$.

11. $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 3 + 6\sin t, \end{cases}$ $y = 6$ при $y \ge 6$.

12. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t; \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 3$ при $y \ge 3$.

13. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t); \\ y = 6(t - \cos t), \end{cases}$ $y = 0$ при $0 \le x \le 12\pi$.

14. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t; \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3}$ при $x \ge 3\sqrt{3}$.

15. $\begin{cases} x = 6\cos t; \\ y = 10\sin t, \end{cases}$ $y = 5\sqrt{3}$ при $y \ge 5\sqrt{3}$.

16. $\begin{cases} x = t; \\ y = t^2 + 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x = t; \\ y = 7 - t^2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t; \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2$ при $x \ge 2$.

18. $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ при $x \ge \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

19. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t; \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1$ при $x \ge 1$.

20. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t); \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 4$ при $y \ge 4, 0 \le x \le 8\pi$.

21. $\begin{cases} x = 4\cos t; \\ y = 9\sin t, \end{cases}$ $y = 3$ при $y \geq 3$.

22. $\begin{cases} x = 5\cos^3 t; \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4\sqrt{3}$ при $y \geq 4\sqrt{3}$.

24. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t; \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $y = 3$ при $y \geq 3$.

26. $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y = 1$ при $y \geq 1$.

27. $\begin{cases} x = t; \\ y = t^2, \end{cases}$ $\begin{cases} x = t; \\ y = 3 - t^3. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ $x = 1$ при $x \geq 1$.

29. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t; \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $y = 1$ при $y \geq 1$.

30. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 1$ при $y \geq 1, 0 \leq x \leq 4\pi$

.

Задача 15. Вычислите длину дуги кривой.

1. $y^2 = 4x$ от ее вершины до точки $M(1;2)$.
2. $y = 2\sqrt{x}$ при $0 \leq x \leq 1$.
3. $\begin{cases} x = 2(t\sin t + \cos t); \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ при $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

4. $p = 1 + \sin\varphi$ при $\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

5. $x = \dfrac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}$ при $0 \le y \le 3$.

6. $y = 4 - x^2$ между точками ее пересечения с осью Ox.

7. $y = \ln\left(x^3 - 1\right)$ при $2 \le x \le 3$.

8. $y = e^x$ при $\dfrac{1}{2}\ln \le x \le \dfrac{1}{2}\ln 8$.

9. $p = 3(1 - \sin\varphi)$ при $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

10. $y = 2 + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ при $0 \le x \le 2$.

11. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x$ при $0 \le x \le \dfrac{8}{9}$.

12. $y = e^x + 3$ при $\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}$.

13. $\begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ при $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

14. $y = \ln\sin x$ при $\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

15. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$ при $0 \le x \le \dfrac{15}{16}$.

16. $p = 2\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$ при $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

17. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t; \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$ при $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

18. $y = \ln\cos x$ при $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

19. $p = \sqrt{3} e^{\varphi}$ при $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$.

20. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ при $1 \le x \le 2$.

21. $\begin{cases} x = e^{2t}\sin t; \\ y = e^{2t}\cos t \end{cases}$ при $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

22. $p = 3(1 - \cos\varphi)$ при $\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le 2\pi$.

23. $y = e^{2x}$ при $0 \le x \le 1$.

24. $y = \ln x$ при $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

25. $y = 3 - \ln\sin x$ при $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

26. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t; \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}$ при $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

27. $y^2 = (x-1)^3$ от точки $M(1;0)$ до точки $N(2;-1)$.

28. $y = e^x$ при $0 \le x \le 1$.

29. $p = 6\cos^3\frac{\varphi}{3}$ при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

30. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t; \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$ при $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

Задача 16. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг указанной оси координат фигуры, ограниченной заданными линиями.

1. $y = 2\sin x, y = 0$ при $0 \le x \le \pi$, вокруг оси Ox.
2. $y^3 = 4x^2, y = 2$, вокруг оси Oy.
3. $2y^2 = x^3, x = 4$, вокруг оси Ox.
4. $y = x^2, y = 4,$ вокруг оси Oy.
5. $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 5\sin t, \end{cases}$ вокруг оси Ox.

6. $y = x^2, x = y^2,$ вокруг оси Oy.

7. $y = 1 - \cos 2x, y = 0, x = \dfrac{\pi}{2},$ вокруг оси Ox.

8. $y = 1 - \dfrac{x^2}{2}, x + y = 1,$ вокруг оси Oy.

9. $y = x^2 + 1, x = \pm 2, y = 0,$ вокруг оси Ox.

10. $xy = 4, y = 1, y = 2, x = 0,$ вокруг оси Oy.

11. $y = 2^x, y = \dfrac{5 + 3x}{4},$ вокруг оси Ox.

12. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1, y = \pm 6,$ вокруг оси Oy.

13. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t; \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$ вокруг оси Ox.

14. $y^2 = 4 - x, x = 0,$ вокруг оси Oy.

15. $y = e^x, x = 0, x = \ln 2,$ вокруг оси Ox.

16. $y = x^3, x = 0, y = 8,$ вокруг оси Oy.

17. $(y - 1)^2 = x, x = 1,$ вокруг оси Ox.

18. $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = 3\sin t, \end{cases}$ вокруг оси Oy.

19. $y = x^2, x = y^2,$ вокруг оси Ox.

20. $y^2 = (x + 5)^3, x = 0,$ вокруг оси Oy.

21. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t); \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 0,\ 0 \le x \le 6\pi,$ вокруг оси Ox.

22. $\begin{cases} x = \cos^3 t; \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ вокруг оси Oy.

23. $xy = 4, y = 0, x = 1, x = 4,$ вокруг оси Ox.

24. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, y = 0, x = 0,$ вокруг оси Oy.

25. $y = e^x, y = 1, x = 1,$ вокруг оси Ox.

26. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1,$ вокруг оси Оу.

27. $y=\sin x, x=0, y=\dfrac{2}{\pi}x,$ вокруг оси Ох.

28. $\begin{cases} x=t; \\ y=2t^2, \end{cases}$ $y=4,$ вокруг оси Оу.

29. $x^2-y^2=9, x=\pm 6,$ вокруг оси Ох.

30. $\begin{cases} x=2\cos^3 t; \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ вокруг оси Оу.

Задача 17. Вычислите несобственные интегралы 1 рода или исследуйте их на сходимость.

1. $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\cos 3x}{x^3+2x-1}dx$

2. $\int\limits_e^{\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2-3x+7}}dx$

3. $\int\limits_2^{\infty}\dfrac{2+\arcsin\frac{1}{x}}{3+x\sqrt[3]{x}}dx$

4. $\int\limits_2^{\infty}\dfrac{x}{x^2-1}dx$

5. $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{arctgx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}dx$

6. $\int\limits_2^{\infty}\dfrac{\sin x}{x\sqrt{x^2-1}}$

7. $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{x}{9x^4+1}dx$

8. $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{1}{(3+x)\ln^2(3+x)}dx$

9. $\int\limits_0^{\infty}xe^{-x}dx$

10. $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+\sqrt{x^2+x}}}dx$

11. $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{x}{x^2-4x+7}dx$

12. $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{x}{\sqrt{8+x^2}}dx$

13. $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\sin x}{x^2+1}dx$

14. $\int\limits_e^{\infty}\dfrac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$

15. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\left(3+x^2\right)^5}} dx$

16. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} x\cos 2x dx$

17. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} dx$

18. $\int_0^{\infty} \frac{arctg 4x}{16x^2+1} dx$

19. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(3+\ln x)} dx$

20. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+5} dx$

21. $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x dx$

22. $\int_1^{\infty} \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx$

23. $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2-3x+7} dx$

24. $\int_0^{\infty} \frac{x^4}{\sqrt{\left(8+x^2\right)^3}} dx$

25. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt[4]{\ln x-1}} dx$

26. $\int_1^{\infty} \frac{arctg\frac{1}{x}}{x^2\sqrt[3]{x+7}} dx$

27. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

28. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{5+3\sin x} dx$

29. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x^4+\sqrt{x^2+2x+1}}} dx$

30. $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

Задача 18. Вычислите несобственные интегралы 2 рода или исследуйте их на сходимость.

1. $\int_{-1}^{1} \frac{3x}{x^2-1} dx$

2. $\int_0^{1} \ln x dx$

3. $\int_{1,5}^{2} \frac{1}{(2-x)\ln^2(2-x)} dx$

4. $\int_0^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)-1}} dx$

5. $\int_0^e \frac{\ln(x+1)}{(1+x^4)^{3/2}-1}dx$

6. $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}dx$

7. $\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{x}{81x^4-18x^2+1}dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$

9. $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

10. $\int_1^2 \frac{1}{x^2-4x+4}dx$

11. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt[3]{8-x^3}}$

12. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x^2+x\sqrt[3]{x}}dx$

13. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(2x^3+\sqrt{x^2+x}\right)}}dx$

14. $\int_1^3 \frac{1}{x\ln x}dx$

15. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{arctgx}}dx$

16. $\int_0^1 \frac{1}{x^3-1}dx$

17. $\int_0^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}dx$

18. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}\arcsin x}dx$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg3x}{x\sqrt{x}}dx$

20. $\int_2^5 \frac{x+5}{\sqrt{x^2-x-2}}dx$

21. $\int_{1,5}^2 \frac{1}{(3-x)\sqrt[3]{\ln^2(3-x)}}dx$

22. $\int_1^3 \frac{x^2-x+1}{x^2\sqrt{x^4-1}}dx$

23. $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt[4]{\ln x}}dx$

24. $\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x^2)^5}}$

25. $\int_2^3 \frac{2x+3}{x^2+x-12}dx$

26. $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x^4+\sqrt{x^2+2x}}}dx$

27. $\int\limits_{1}^{5}\frac{1}{\sqrt[4]{10x-25-x^2}}dx$

28. $\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt[5]{\cos^3 2x}}dx$

29. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\arccos x}{x^2\sqrt[3]{2x+7}}dx$

30. $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{e^{x^2}-1}}dx$

Задача 19. Вычислить силу или работу.

Варианты 1–10

Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции (рис.4.1). Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения g положить равным 10 м/с^2.

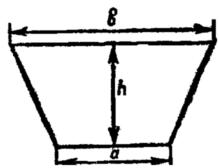


Рис.4.1

1. $a = 4{,}5$ м, $b = 6{,}6$ м, $h = 3{,}0$ м.
2. $a = 4{,}8$ м, $b = 7{,}2$ м, $h = 3{,}0$ м.
3. $a = 5{,}1$ м, $b = 7{,}8$ м, $h = 3{,}0$ м.
4. $a = 5{,}4$ м, $b = 8{,}4$ м, $h = 3{,}0$ м.
5. $a = 5{,}7$ м, $b = 9{,}0$ м, $h = 4{,}0$ м.
6. $a = 6{,}0$ м, $b = 9{,}6$ м, $h = 4{,}0$ м.
7. $a = 6{,}3$ м, $b = 10{,}2$ м, $h = 4{,}0$ м.
8. $a = 6{,}6$ м, $b = 10{,}8$ м, $h = 4{,}0$ м.
9. $a = 6{,}9$ м, $b = 11{,}4$ м, $h = 5{,}0$ м.
10. $a = 7{,}2$ м, $b = 12{,}0$ м, $h = 5{,}0$ м.

Варианты 11–20

Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли $R_з = 6380$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли положить равным 10 м/с^2.

11. $m = 7,0$ т, $H = 200$ км.
12. $m = 7,0$ т, $H = 250$ км.
13. $m = 6,0$ т, $H = 300$ км.
14. $m = 6,0$ т, $H = 350$ км.
15. $m = 5,0$ т, $H = 400$ км.
16. $m = 5,0$ т, $H = 450$ км.
17. $m = 4,0$ т, $H = 500$ км.
18. $m = 4,0$ т, $H = 550$ км.
19. $m = 3,0$ т, $H = 600$ км.
20. $m = 3,0$ т, $H = 650$ км.

Варианты 21–30

Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением (103,3 кПа). Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h м (рис. 4.2).

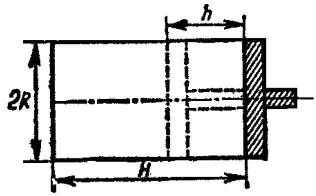


Рис.4.2

У к а з а н и е. Уравнение состояния газа $pV = \text{const}$, где p – давление, V– объем.

21. $H = 0,4$ м, $h = 0,35$ м, $R = 0,1$ м.
22. $H = 0,4$ м, $h = 0,3$ м, $R = 0,1$ м.
23. $H = 0,4$ м, $h = 0,2$ м, $R = 0,1$ м.
24. $H = 0,8$ м, $h = 0,7$ м, $R = 0,2$ м.
25. $H = 0,8$ м, $h = 0,6$ м, $R = 0,2$ м.

26. $H = 0{,}8$ м, $h = 0{,}4$ м, $R = 0{,}2$ м.
27. $H = 1{,}6$ м, $h = 1{,}4$ м, $R = 0{,}3$ м.
28. $H = 1{,}6$ м, $h = 1{,}2$ м, $R = 0{,}3$ м.
29. $H = 1{,}6$ м, $h = 0{,}8$ м, $R = 0{,}3$ м.
30. $H = 2{,}0$ м, $h = 1{,}5$ м, $R = 0{,}4$ м.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приступая к изучению высшей математики, необходимо знать, что математику нельзя изучать пассивно, нужно стараться глубоко вникать в смысл математических понятий и теорем, пытаться самостоятельно решать математические задачи. Результатами изучения курса высшей математики должны быть развитие аналитического мышления, овладение навыками решения математических задач, выработка умения самостоятельно ставить задачи и выбирать или разрабатывать методы их решения.

Материал практикума предоставляет возможность студентам самостоятельно освоить основные положения одного из важнейших разделов в курсе высшей математики - интегрального исчисления. Позволяет приобрести и закрепить практические навыки решения простых типовых задач, а также познакомиться с методикой построения приложений определенного интеграла к задачам механики и физики. Наиболее эффективный результат может быть достигнут, если использовать пособие как для аудиторных занятий, так и для самостоятельной работы.

Несколько слов о том, как работать с этой книгой. Прежде, чем приступать к изучению методов решения задач, необходимо повторить основные определения и теоремы, относящиеся к данному разделу, постараться понять и запомнить наиболее часто используемые формулы. После этого можно переходить к изучению разобранных примеров. Некоторые типовые задачи и методы рассмотрены в пособии как в общем виде, так и на примерах. Весьма полезно изучить и то и другое. Это поможет вам не только отработать навыки решения задач, но и лучше понять и усвоить теоретический материал.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука, 1984.
2. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – Альфа, 1998. Т. 1 - 687с., 1998. Т. 2 – 584с.
3. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М.: Высш. шк., 1999. - 695с.
4. Пискунов П.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / П.С. Пискунов. – М.: Наука, 2001. Т. 1 — 415с., 2001. Т.2 — 544с.
5. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1986.
6. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для втузов / В.П. Минорский. — М.: Наука, 1987. — 350с.
7. Щипачев В.С. Высшая математика / В.С. Щипачев. — М.: Высш.школа, 2003. - 479 с.
8. Баврин И.И. Высшая математика / И.И. Баврин. — М.: Высш. школа, 2001.- 616 с.
9. Гусак А.А. Высшая математика / А.А.Гусак. — Мн.: «ТетраСистемс», 2003. Т. 1. - 543 с.
10. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — М.: ОНИКС 21 век, Мир и образование, 2003. Ч. 1, 2.
11. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. — М.: Наука, 1985.
12. Тихонов А.Н. Вводные лекции по прикладной математике / А.Н. Тихонов, Д.П. Костромаров. М.: Наука, 1984.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Пантелеев Игорь Николаевич

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ: ПРАКТИКУМ

В авторской редакции

Подписано к изданию 21.11.2016.

Объем данных 1920 Кб.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14