

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный  
технический университет»

Н.Н. Кошелева Е.Ю. Плотникова А.А. Винокуров

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ:  
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

Воронеж 2015

УДК 621.382

Кошелева Н.Н. Информационные технологии: лабораторный практикум: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (8,4 Мб) / Н.Н. Кошелева, Е.Ю. Плотникова, А.А. Винокуров. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2015. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв. – Систем. требования : ПК 500 МГц и выше ; 256 Мб ОЗУ ; Windows XP ; SVGA с разрешением 1024x768; MSWord 2007 или более поздняя версия; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

В учебном пособии представлены материалы по вычислениям с использованием математического пакета Derive, обработке объектов векторной и растровой графики с использованием редакторов CorelDraw и AdobePhotoshop. Приведены справочные материалы по данным программным продуктам, примеры решения наиболее распространённых задач и задания для лабораторных работ.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника» (профили «Микроэлектроника и твердотельная электроника», «Электронное машиностроение»), дисциплине «Информационные технологии».

Табл. 12. Ил. 144. Библиогр.: 6 назв.

Научный редактор д-р физ.-мат. наук, проф. С.И. Рембеза

Рецензенты: кафедра физики полупроводников и микроэлектроники Воронежского государственного университета (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук проф. Е.Н. Бормонтов); канд. техн. наук, доц. А.В. Арсентьев

© Кошелева Н.Н., Плотникова Е.Ю.,  
Винокуров А.А., 2015

© Оформление. ФГБОУ ВО «Воронежский  
государственный технический университет»,  
2015

## **ВВЕДЕНИЕ**

Учебное пособие посвящено вопросам обработки изображений векторной и растровой графики, решению задач вычислительной математики с использованием математического пакета Derive версии 6.0 и выше.

Материалы, представленные в первом блоке пособия, позволяют сформировать у обучающихся знания, необходимые для оптимизации решения инженерных задач. Рассматривается широкий спектр наиболее типичных приемов, применяемых в математических расчётах.

Во второй и третьей главах пособия рассмотрены универсальные редакторы, позволяющие как проводить сложную обработку векторных и растровых изображений, так и создавать объекты для их последующего использования при разработке задач курсового и дипломного проектирования.

Пособие содержит теоретические сведения о рассматриваемых программных пакетах, примеры решения задач и задания для лабораторных работ.

# 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПАКЕТ DERIVE

## 1.1. Структура и возможности системы Derive

Система **Derive** - универсальная математическая прикладная программа для выполнения различных символьных и численных математических преобразований и вычислений, ориентированных на решение широкого круга математических и научно-технических задач из различных предметных областей.

Список некоторых задач, которые решаются в среде Derive:

1. Арифметические и логические операции;
2. Вычисление значений алгебраических, тригонометрических, обратных тригонометрических, гиперболических, обратных гиперболических, статистических и финансово-экономических функций, ряда специальных экономических функций;
3. Операции над числами произвольной разрядности и в различных системах счисления (с основанием от 2 до 36);
4. Символьные преобразования полиномов, дробно-рациональных функций, функций одной и многих переменных, включая разложение полиномов на простые множители, приведение подобных членов и т.д.;
5. Табулирование функций, вычисление пределов, символьное и численное дифференцирование и интегрирование, вычисление сумм и произведений рядов, разложение функций в ряд Тейлора;
6. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений;
7. Решение систем линейных и нелинейных уравнений;
8. Решение дифференциальных уравнений и их систем;
9. Обработка результатов эксперимента (интерполяция и аппроксимация экспериментальных данных);
10. Прямые и обратные преобразования Лапласа;

11. Построение двумерных и трехмерных графиков функций в прямоугольной системе координат;
12. Построение двумерных графиков функций в полярной системе координат.

После запуска Derive доступны (по умолчанию) следующие элементы **Главного окна** (рис. 1).

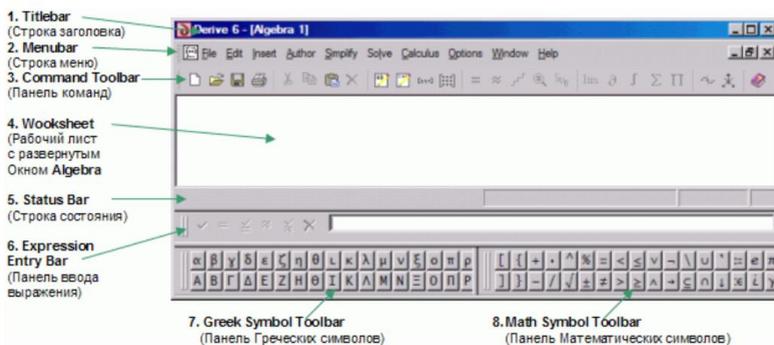


Рис. 1

1. **Titlebar** (Строка Заголовка).

Обычный заголовок окна прикладной программы под Windows.

2. **Menubar** (Строка Меню) Окна **Algebra**.

Содержит пункты меню, которые, в свою очередь, содержат команды Окна **Algebra**.

3. **Command Toolbar** (Панель Команд) Окна **Algebra**.

Содержит значки, щелчок по которым приводит к выполнению наиболее часто используемым командам Окна **Algebra**.

4. **Worksheet** (Рабочий лист) с развернутым Окном **Algebra**.

Часть **Главного окна**, которая может содержать одно или несколько окон типа **Algebra**, **2D-plot** и **3D-plot**. Сейчас **Worksheet** (Рабочий лист) содержит одно Окно **Algebra**.

## 5. **Status Bar** (Строка Состояния).

Отображает информацию о текущем состоянии работы программы и другие сведения. Вид и состав этой информации зависит от того, какое окно на **Worksheet** (Рабочем Листе) является активным.

## 6. **Expressin Entry Line** (Панель ввода выражения).

В её левой части расположены 6 кнопок, назначение которых будет рассмотрено далее. В ее правой части расположено **Entry Field** (Поле ввода), предназначенное для восприятия с клавиатуры или редактирования математических выражений.

## 7. **Greek Symbol Toolbar** (Панель Греческих символов).

Содержит кнопки, щелчок по которым вводит в **Entry Field** (Поле ввода) символы греческого алфавита.

8. **Math Symbol Toolbar** (Панель Математических символов).

Содержит кнопки, щелчок по которым вводит в **Entry Field** (Поле ввода) математические символы.

Для отображения входных данных о решаемой задаче и результатов решения используются три типа окон **Worksheet** (Рабочего листа): Окно **Algebra**, Окно **2D-plot** и Окно **3D-plot**.

## 1.2. Ввод выражений

Важнейшим элементом, обеспечивающим взаимодействие пользователя с системой, является строка Expression Entry (Вход выражения) – строка ЕЕ, имеющая окно записи выражения – окно ЕЕ и кнопки управления содержимым:



Рис. 2

Если указать стрелкой визирьмыши границу строки ЕЕ и щелкнуть ЛКМ, то она выделится рамкой. После этого, не отпуская ЛКМ, ее можно переместить на листовое поле, где она принимает «плавающий» вид:



Рис. 3

Кнопкой  она удаляется. Возвращается или кнопкой  строки инструментов, или командой Expression меню Author:

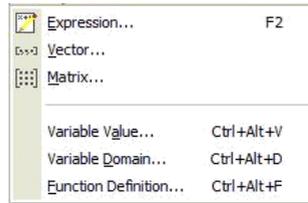


Рис. 4

Курсор ввода переводится в окно ЕЕ обычным образом – устанавливается визир мыши в форме I и делается щелчок ЛКМ. Данные набираются и редактируются в раскладке En, можно пользоваться клавишами <Delete> и <Backspace>, комбинациями <Shift>+<Insert>, <Ctrl>+<v> и т. д. Десятичная запятая заменяется точкой.

Кнопка  удаляет содержимое окна ЕЕ. Остальные кнопки строки ЕЕ возвращают на листовое поле:

1.  – содержимое, с выравниванием по левому краю, как и команда <Enter>;
2.  – результат, с выравниванием по центру;
3.  – и содержимое, и результат, как и команда <Ctrl> + <Enter>;
4.  – приближенную оценку результата, как и команда <Shift>+<Enter>;
5.  – и содержимое, и приближенную оценку результата.

В частности, если набрано  $\sqrt{2} + 3 * \sqrt{2}$ , то поочередное

нажатие слева направо кнопок строки ввода приводит к строкам листового поля, показанным на рис. 1.

Ключевую роль играет оператор присваивания (запоминания), обозначаемый  $:=$ . Его можно как записать клавишами  $\langle := \rangle$ , так и вставить кнопкой  панели математических символов основного окна.

Порядок присваивания переменной конкретного значения. Запись в окне ЕЕ:

**имя переменной := значение**

Нажатие  $\langle \text{Enter} \rangle$  или кнопки  возвращает на листовое поле соответствующую запись.

Так получен следующий фрагмент листового поля:

#1:  $x := 1$

#2:  $y := 2$

Продолжение вычислений:

#3:  $x + y$

#4: 3

Порядок задания функции пользователя аналогичен.

Например, так введена функция  $f(x) = x^2$ :

#1:  $f(x) := x^2$

Пользователь может вычислять значения введенных функций и ссылаться на них. Например, ввод  $f(2)$  кнопкой  дает:

#2:  $f(2)$

#3: 

## Встроенные константы и функции

Кнопка  вызывает панель справочной системы:

Раскрытие списка Build-in Functions and Constants приводит к каталогу типов встроенных функций и констант.

Кнопка  Indices открывается полный список встроенных функций, а кнопка  Index всех объектов.

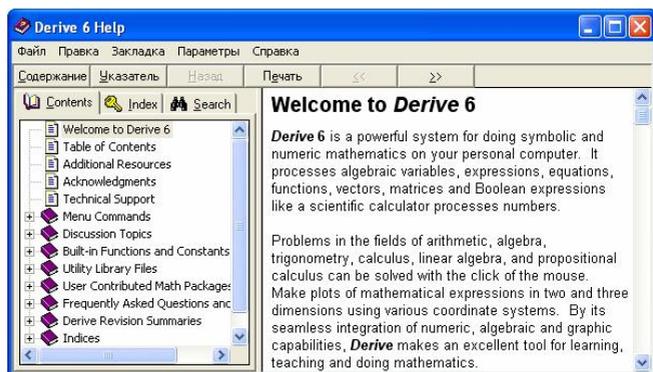


Рис. 5

Согласно справочной системе, тригонометрические функции  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $tg x$ ,  $ctg x$  представлены встроенными функциями  $SIN(x)$ ,  $COS(x)$ ,  $TAN(x)$ ,  $COT(x)$ , соответственно.

Обратные тригонометрические функции  $arcsin x$ ,  $arccos x$ ,  $arctg x$ ,  $arcctg x$  –  $ASIN(x)$ ,  $ACOS(x)$ ,  $ATAN(x)$ ,  $ACOT(x)$  соответственно. Логарифмы  $\log_a b$  обозначены  $LOG(b,a)$ .

Имена встроенных функций можно набирать строчными буквами, на листовое поле они автоматически вставляются прописными.

### Пример

Вычислить

$$\log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 .$$

### Технология решения.

Запись в окно ЕЕ вычисляемого выражения:

$$\log(4,5)\log(5,6)\log(6,7)\log(7,8)$$

Нажатие кнопки  $\frac{\square}{\square}$  дает:

#1:

$$\frac{2}{3}$$

Ответ:  $2/3$ .

## Пример

Вычислить:

$$\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ.$$

### Технология решения.

Командами **Options / Mode Settings / Simplification** открывается диалоговое окно (рис. 6.) и устанавливается значение Degree параметра Angular unit. В окне EE, используя кнопку , записывается заданное выражение:

$$\cos(10^\circ)\cos(50^\circ)\cos(70^\circ)$$

Нажатие кнопки  дает:

#1: Angle := Degree

#2:


$$\frac{\sqrt{3}}{8}$$

Ответ:  $\sqrt{3} / 8$ .

## Пример

Вычислить:

$$\operatorname{tg}\left(2 \arccos \frac{12}{13}\right).$$

### Строки решения:

#1:  $\operatorname{TAN}\left(2 \cdot \operatorname{ACOS}\left(\frac{12}{13}\right)\right)$

#2:


$$\frac{120}{119}$$

Ответ: 120/119

## 1.3. Арифметические операторы

$$\frac{\left(\frac{5}{8} + 2\frac{17}{24}\right) : 2,5}{\left(1,3 + \frac{23}{30} + \frac{4}{11}\right) \cdot \frac{110}{401}} \cdot 0,5$$

### Технология решения.

1. В окне EE записывается заданное выражение:

$$\left(\frac{5}{8} + 2 + \frac{17}{24}\right) / 2.5 / \left(\left(1.3 + \frac{23}{30} + \frac{4}{11}\right) \cdot \frac{110}{401}\right) \cdot 0.5$$

2. Нажимается кнопка , возвращающая на листовое поле и вычисляемое выражение, чтобы можно было проверить правильность записи выражения, и результат:

$$\frac{\frac{5}{8} + 2 + \frac{17}{24}}{2.5}$$

$$\#1: \frac{2.5 \cdot \left(1.3 + \frac{23}{30} + \frac{4}{11}\right) \cdot 110}{401} \cdot 0.5$$

#2:

1

**Ответ: 1.**

Ввод – вывод (основные параметры)

Командами Options/Mode Settings вызывается 3-страничное диалоговое окно установки режимов ввода-вывода:

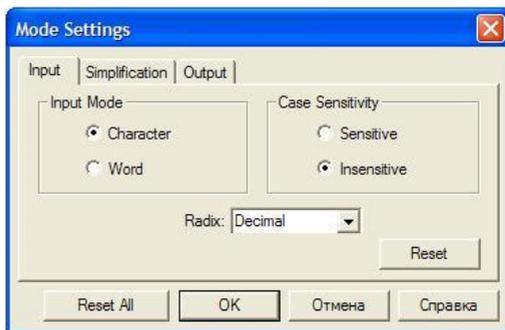


Рис. 6

На вкладке Input (Ввод) устанавливаются значения трех параметров:

- Input Mode – режим ввода,
- Case Sensitivity – существенность установки,
- Radix – система исчисления.

Значения параметра Input Mode:

- Character – символ,

- Word – слово.

Если выбран первый режим, то рядом стоящие символы считаются как разделенные знаком умножения. Как следствие, отпадает необходимость вводить знак умножения. Установив переключатель Input Mode в положение Word, пользователь от такого сервиса отказывается.

Значения параметра Case Sensitivity:

- Sensitivity – существенно,
- Insensitive – несущественно.

Если выбрано значение Insensitive и режим ввода Character, то, несмотря на данный режим, поддерживаются имена встроенных функций, то есть они не разбиваются на множители. В случае Sensitivity режим Character выполняется неукоснительно.

Изменения установок, заданных по умолчанию, автоматически фиксируются на листовом поле.

Страница Simplification (Упрощение):

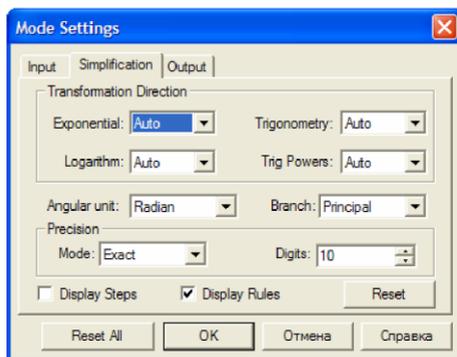


Рис. 7

Параметры страницы:

- Transformation Direction – вид преобразований,
- Angular unit – единицы измерения углов,
- Branch – ветви многозначных функций,
- Precision – точность вычислений.

Значения параметра Mode:

- Exact – точно,
- Approximate – приближенно,
- Mixed – смешанно.

Значения параметра Digits – число значащих цифр, по умолчанию 10. Последняя страница Output (Вывод):

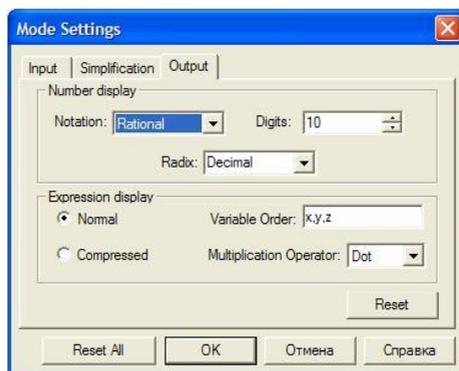


Рис. 8

На ней две группы параметров:

- Number display – изображение числа;
- Expression display – изображение выражения.

Параметром Variable Order определяется порядок следования переменных, параметром Multiplication Operator – символ умножения.

#### 1.4. Выполнение алгебраических преобразований

Команда Simplify (Упростить) занимает в Derive особое положение, она представлена целой группой кнопок, в том числе:

-  – в строке Expression Entry;
-  – в строке Expression Entry;
-  – в строке инструментов Derive.

Первые две из них обрабатывают содержимое окна выражений, последняя – выделенное выражение листового поля.

#### Пример

Упростить

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$$

### Технология решения.

Запись в окне ЕЕ заданного выражения:

$$(\sqrt{x+1}) / (x\sqrt{x+x+\sqrt{x}}) * (x^2 - \sqrt{x})$$

Нажатие кнопки  возвращает на листовое поле результат преобразований:

#1:

$$x - 1$$

**Ответ:**  $x-1$ .

Кнопка Simplify панели меню, когда на листовом поле выделено выражение, открывает список инструментов группы Simplify:



Рис. 9

Назначения инструментов первой группы:

- Basic – выполнить и вернуть точный результат,
- Display Step – представить пошаговое решение,
- Expand – разложить в сумму;
- Factor – разложить в произведение,
- Approximate – оценить результат.

По команде Approximate появляется инструмент:



Рис. 10

Следующий пример показывает, что команда Approximate может вернуть более компактный результат, чем остальные команды группы Simplify.

### Пример

Упростить

$$((\sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{q})^{-2} + (\sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{q})^{-2}) : \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{p - q}$$

**Технология решения.** Ввод в окно выражений:

$$((p^{(1/4)} - q^{(1/4)})^{-2} + (p^{(1/4)} + q^{(1/4)})^{-2}) * (p - q) / (\sqrt{p} + \sqrt{q})$$

Нажатие кнопки  дает:

#1:

$$\frac{2 \cdot (p^{3/4} + \sqrt{p} \cdot q^{1/4} + \sqrt{q} \cdot p^{1/4} + q^{3/4})}{(p^{1/4} - q^{1/4}) \cdot (p^{1/4} + q^{1/4})^2}$$

Однако если нажать не кнопку , а кнопку , то результат будет более компактным:

#1:

$$\frac{2 \cdot (\sqrt{p} + \sqrt{q})}{(p^{0.25} + q^{0.25}) \cdot (p^{0.25} - q^{0.25})}$$

Продолжение решения. Выделение знаменателя, полученной дроби, а для этого он указывается стрелкой визира мыши, и проводятся щелчки ЛКМ, пока выражение не примет вид:

#1:

$$\frac{2 \cdot (\sqrt{p} + \sqrt{q})}{(p^{0.25} + q^{0.25}) \cdot (p^{0.25} - q^{0.25})}$$

Командами Simplify/Expand вызывается инструмент

Expand, нажатие кнопки Expand приводит к окончательному результату:

#2:

$$\frac{2 \cdot (\sqrt{p} + \sqrt{q})}{\sqrt{p} - \sqrt{q}}$$

Достаточно высокий уровень математической строгости системы Derive по выполнению действий со степенями подтверждает, в частности, следующий пример.

### Пример

Упростить выражение

$$\frac{a^2 + 4}{a \sqrt{\left(\frac{a^2 - 4}{2a}\right)^2 + 4}}$$

### Технология решения.

Запись в окно ЕЕ заданного выражения:

$$(a^2 + 4) / a / \sqrt{((a^2 - 4) / (2/a))^2 + 4}$$

Нажатие кнопки  $\frac{\square}{\square}$  дает:

#1:

$$2 \cdot \text{SIGN}(a)$$

Остается учесть, что

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

**Ответ:** 2, если  $a > 0$ , -2, если  $a < 0$ .

В следующих примерах упрощаются **числовые выражения с корнями**.

### Пример

Проверить справедливость равенства

$$(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2$$

### Строки решения:

$$\#1: (4 + 15^{1/2}) \cdot (10^{1/2} - 6^{1/2}) \cdot (4 - 15^{1/2})$$

#2: 

**Ответ:** равенство верно.

### Пример

Проверить справедливость равенства

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3$$

### Строки решения:

$$\#3: (9 + 80^{1/2})^{1/3} + (9 - 80^{1/2})^{1/3}$$

#4: 

**Ответ:** равенство верно.

### Пример.

Вычислить

$$\frac{\sqrt{30 - 12\sqrt{6}}}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} (5 + 2\sqrt{6})$$

### Строки решения:

$$\#1: \frac{\sqrt{(30 - 12 \cdot \sqrt{6})}}{2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2}} \cdot (5 + 2 \cdot \sqrt{6})$$

#2: 

**Ответ:** 1

Команды второй группы меню Simplify (рис. 1.9) вызывают инструменты подстановок:

- Variable Substitution – замены переменной,
- Subexpression Substitution – замены части выражения.

В случае, когда выделенное на листовом поле выражение содержит переменные  $a, b$ , щелчок ЛКМ по строке Variable Substitution меню Simplify, или кнопке  панели инструментов,

открывает диалоговое окно:

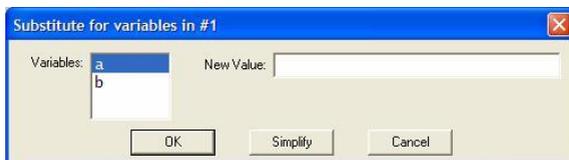


Рис. 11

В поле Variables выделяется нужная переменная, а в поле New Value вводится выражение, которым она заменяется. Кнопка ОК возвращает на листовое поле встроенную функцию заданной подстановки, а кнопка Simplify – результат подстановки.

На рисунке 12 диалоговое окно подстановок второго вида. Заменяемая часть выражения выделяется, в поле New Value вводится обозначение. Если переключатель Occurrences находится в положении One, то проводится замена только выделенного выражения, а если в положении All, то всех таких выражений.

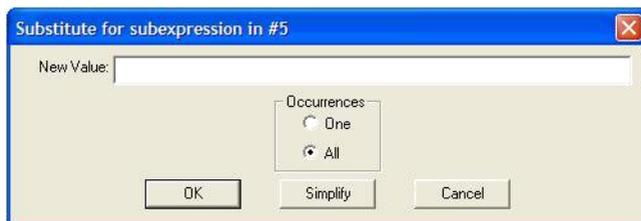


Рис. 12

Оба вида подстановок проводятся встроенной функцией SUBST. Примеры:

#1:  $\text{SUBST}(1 + x^2, x, t)$

#2:  $t^4 + 1$

#3:  $\text{SUBST}(1 + x^2, x, t)$

#4:  $t + 1$

## Пример

Упростить выражение

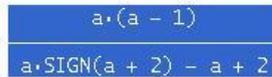
$$\frac{a^3 + a^2 - 2a}{a | a + 2 | - a^2 + 4}$$

**Технология решения.** Выражение записывается в окне  
ЕЕ:

$$(a^3+a^2-2a)/(a*abs(a+2)-a^2+4)$$

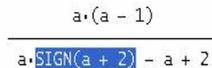
Нажатие кнопки  дает:

#1:


$$\frac{a \cdot (a - 1)}{a \cdot \text{SIGN}(a + 2) - a + 2}$$

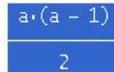
Выделяется функция SIGN(a+2):

#1:


$$\frac{a \cdot (a - 1)}{a \cdot \text{SIGN}(a + 2) - a + 2}$$

Вызывается диалоговое окно 1.12 и в поле New Value задается значение 1. Тогда кнопка Simplify возвращает:

#2:


$$\frac{a \cdot (a - 1)}{2}$$

Снова в строке #1 выделяется функция SIGN(a+2) и открывается диалоговое окно 1.12, но задается значение -1. В этом случае кнопка Simplify возвращает:

#3:


$$\frac{a}{2}$$

Ответ:  $-\frac{a}{2}$ , если  $a + 2 < 0$ ;  $\frac{a(a-1)}{2}$ , если  $a + 2 > 0$ .

## 1.5. Выполнение тригонометрических преобразований

Командами `Options/ModeSettings/Simplification/Trigonometry` открывается список:

- Auto – автоматически;
- Collect – сгруппировать;
- Expand – раскрыть.

Пусть установлено:

```
#2: Trigonometry := Expand
```

Тогда поддерживаются следующие тригонометрические формулы:

```
#3: COS(x + y)
```

```
#4: COS(x)·COS(y) - SIN(x)·SIN(y)
```

```
#5: SIN(x + y)
```

```
#6: COS(x)·SIN(y) + SIN(x)·COS(y)
```

```
#7: TAN(x + y)
```

```
#8: 
$$\frac{\cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y)}{\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)}$$

```

```
#9: COS(2·x)
```

```
#10: 
$$2 \cdot \cos^2(x) - 1$$

```

```
#11: SIN(2·x)
```

```
#12: 
$$2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

```

```
#13: TAN(2·x)
```

```
#14: 
$$\frac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{2 \cdot \cos^2(x) - 1}$$

```

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму поддерживаются, если установлено направление `Collect`:

#15: Trigonometry := Collect

#16:  $\text{COS}(x) \cdot \text{COS}(y)$

#17: 
$$\frac{\text{COS}(x - y)}{2} + \frac{\text{COS}(x + y)}{2}$$

#18:  $\text{SIN}(x) \cdot \text{SIN}(y)$

#19: 
$$\frac{\text{COS}(x - y)}{2} - \frac{\text{COS}(x + y)}{2}$$

#20:  $\text{COS}(x) \cdot \text{SIN}(y)$

#21: 
$$\frac{\text{SIN}(x + y)}{2} - \frac{\text{SIN}(x - y)}{2}$$

Можно воспользоваться формулами понижения степени, в частности:

#22:  $\text{COS}(x)^2$

#23: 
$$\frac{\text{COS}(2 \cdot x)}{2} + \frac{1}{2}$$

#24:  $\text{SIN}(x)^2$

#25: 
$$\frac{1}{2} - \frac{\text{COS}(2 \cdot x)}{2}$$

Есть даже такая полезная формула:

#26:  $a \cdot \text{COS}(x) + b \cdot \text{SIN}(x)$

#27: 
$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \text{SIGN}(a) \cdot \text{COS}\left(\text{ATAN}\left(\frac{b}{a}\right) - x\right)$$

Минус один – нет формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

### Пример

Доказать тождество

$$(\sin x)^{-1} + (\operatorname{tg} x)^{-1} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

### Строки решения:

#28:  $\operatorname{SIN}(x)^{-1} + \operatorname{TAN}(x)^{-1}$

#29:



$$\operatorname{COT}\left(\frac{x}{2}\right)$$

**Ответ:** тождество верно.

### Пример

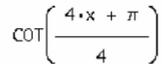
Доказать тождество

$$\frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

**Технология решения.** Упрощение левой части:

#30:  $\frac{1 - 2 \cdot \operatorname{SIN}(x)^2}{1 + \operatorname{SIN}(2 \cdot x)}$

#31:



$$\operatorname{COT}\left(\frac{4 \cdot x + \pi}{4}\right)$$

Упрощение правой части:

#32: `Trigonometry := Expand`

#33:  $\frac{1 - \operatorname{TAN}(x)}{1 + \operatorname{TAN}(x)}$

#34:  $\frac{\operatorname{COS}(x) - \operatorname{SIN}(x)}{\operatorname{COS}(x) + \operatorname{SIN}(x)}$

#35: `Trigonometry := Collect`

#36:



$$\operatorname{COT}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

**Ответ:** тождество верно.

## 1.6. Построение графиков функций

### 1. Геометрическое окно 2D-plot

Вызывается командами `Window/New 2D-plot Window`,

или кнопкой , или клавишами  $\langle \text{Ctrl} \rangle + \langle 2 \rangle$ . Оно имеет (рис. 13) свою основную панель, строку состояний и т. д. Большую часть окна занимает область построений, снабженная системой координат.

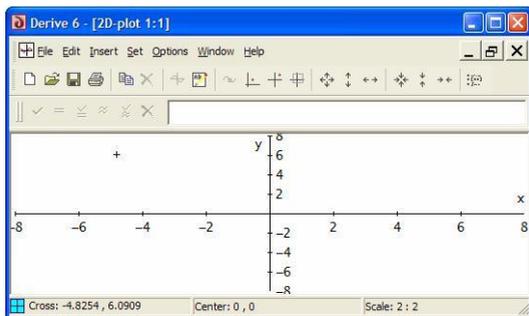


Рис. 13

Кнопка  инструментов 2D-plot позволяет мгновенно вернуться в алгебраическое окно. Визир + области построения называется графическим курсором, координаты точки, отмеченной им, автоматически указываются в строке состояний – параметр Cross.

Указав стрелкой визира мыши точку области построения и нажав ЛКМ, его можно перенести в нее. Графический курсор также перемещается клавишами управления курсором. В последнем случае, удерживание клавиши  $\langle \text{Ctrl} \rangle$ , увеличивает шаг перемещения.

Обозначения кнопок  соответствуют их назначениям, с их помощью задаются нужные диапазоны изменения переменных. Правые шесть кнопок – кнопки группы Zoom.

Важнейшей кнопкой панели инструментов окна 2D-plot является кнопка , щелчок ЛКМ по ней – команда «Вставить график в область построения». Данная команда отдается также:

- клавишей  $\langle \text{F4} \rangle$ , когда курсор ввода находится в об-

ласти построения, что далее предполагается всегда выполненным, если она используется;

- командами Insert/Plot;
- командой Insert Plot контекстного меню, открываемого щелчком ПКМ в области построения:



Рис. 14

Порядок построения графика функции  $y = f(x)$ .

1. Открывается диалоговое окно 2D-plot.
2. В окно выражений вводится  $f(x)$ .
3. Нажимается <Enter> или кнопка .
4. Кнопкой  график функции вставляется в область построения.

Так построен график функции  $y = \sin(x)$ , показанный на рис.15.

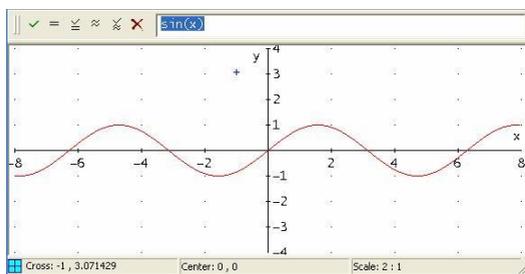


Рис. 15

Если в одной системе координат требуется построить графики двух функций, то, после построения первого графика, в авторское окно вводится аналитическое выражение второй

функции и шаги 3, 4 повторяются. Кстати, очень удобная технология.

Кнопкой  инструментов 2D-plot включается режим Trace Plots, в котором графический курсор принимает форму квадрата и автоматически помещается на построенную линию. В данном режиме он перемещается только по линии, что позволяет в поле Cross строки состояний считывать координаты ее точек.

Кнопкой  инструментов 2D-plot включается режим Set Range развертывания выделенной прямоугольной области во все окно.

Командой Display Options контекстного меню (рис. 14) вызывается диалоговое окно установки параметров изображения (приводится частично):

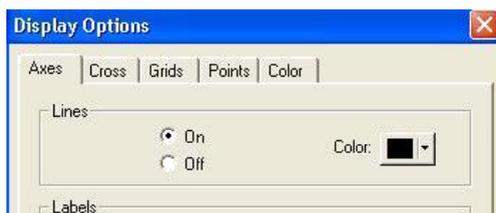


Рис. 16

Страницы диалогового окна:

- Axes – оси,
- Cross – графический курсор,
- Grids – линии сетки,
- Points – точки,
- Color – цвет.

Положения переключателя:

- On – изобразить,
- Off – скрыть.

1. Пусть требуется построить точки  $A(-2,3)$ ,  $B(-1, 2)$ ,  $C(1, 4)$ .

2. Открывается диалоговое окно 2D-plot.
3. В окно выражений вводится:  $[[-2,3],[-1,2],[1,4]]$ , что эквивалентно  $([-2,3;-1,2;1,4])$ .
4. Нажимается кнопка  или <Enter>.
5. Нажатие кнопки  приводит к построению точек:

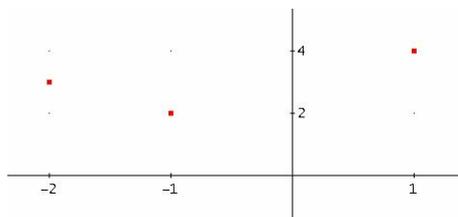


Рис. 17

С помощью кнопки  можно ввести обозначения точек. Допустим, что надо построить еще и отрезки  $[A,B]$ ,  $[B,C]$ . Тогда решение продолжается.

6. Открывается диалоговое окно (рис. 18) на вкладке Points и устанавливается:

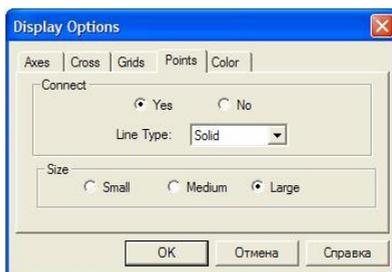


Рис. 18

Поддерживаемые типы линий:

- Solid – сплошная,
- Dash – штриховая,
- Dot – точечная,
- DashDot – штрихи разделяются точкой,
- DashDotDot – штрихи разделяются двумя точками.

7. Нажимается ОК.
8. Кнопка  возвращает:

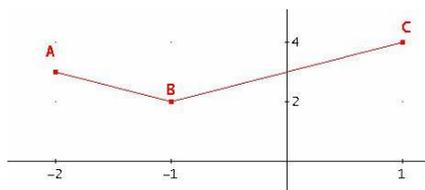


Рис. 19

**2. Построение параметрически заданных линий** рассматривается на примерепостроения эллипса  $x = 2 \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $-\pi \leq t < \pi$ .

1. Открывается диалоговое окно 2D-plot.
2. В окно выражений вводится  $[2\cos(t),\sin(t)]$ .
3. Нажимается кнопка .
4. Кнопкой  вызывается диалоговое окно, задания параметров параметрически заданной функции, и устанавливается в нем:

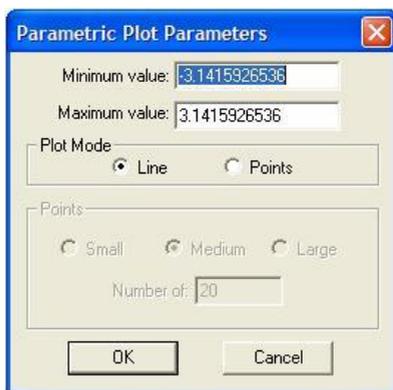


Рис. 20

5. Нажатие ОК дает:

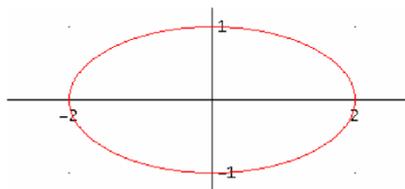


Рис. 21

### 3. Заливка фигур

Стандартная схема построения графика, когда вводится  $[f(x), 0 \leq y \leq f(x) \wedge a \leq x \leq b]$ , приводит к построению и заливке заданного множества точек. Пример, когда введено  $[3/x, 0 \leq y \leq 3/x \wedge 1 \leq x \leq 3]$ , на рисунке 22.

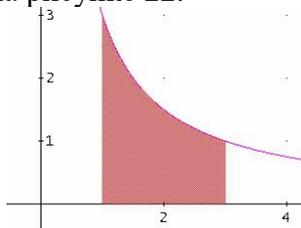


Рис. 22

Аналогично действует ввод  $[f(x), g(x), f(x) \leq y \leq g(x) \wedge a \leq x \leq b]$ . Пример, когда введено  $[5/x, 6-x, 5/x \leq y \leq 6-x \wedge x \geq 0]$ , на рисунке 23.

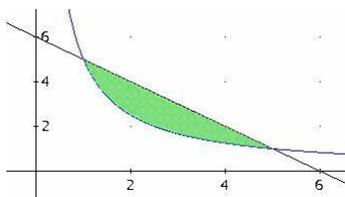


Рис. 23

## 1.7. Ввод векторов и матриц

### Инструмент Author matrix

Кнопка  вызывает диалоговое окно Matrix Setup, за-

дания размеров матрицы. По команде ОК появляется окно ввода элементов матрицы.

### Инструмент Author vector

Кнопка  вызывает диалоговое окно Vector Setup, в котором задается число элементов вектора. После задания этого числа, по команде ОК, появляется диалоговое окно для ввода элементов вектора. Остается заполнить его поля и нажать ОК.

Ввести вектор можно и без инструментов, непосредственным вводом в окно EE его элементов, разделенных запятыми, заключая их в общие квадратные скобки.

В векторах-столбцах элементы задаются (возвращаются), разделенные точкой с запятой « ; ».

Заключение вектора в прямые скобки, как и встроенная функция ABS, возвращает его модуль:

#1:  $\| [x, y, z] \|$

#2:  $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

Произведение векторов (одной размерности) понимается как скалярное произведение векторов:

#3:  $[x, y, z] \cdot [u, v, t]$

#4:  $u \cdot x + v \cdot y + t \cdot z$

## 1.8. Решение уравнений и неравенств

### Инструмент Solve Expression

Командами Solve/Expression, как и кнопкой  основной панели, когда на листовом поле выделено выражение, вызывается диалоговое окно:

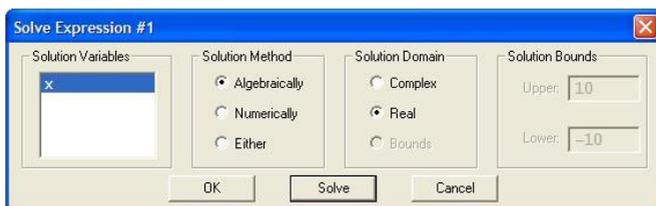


Рис. 24

Входящие параметры:

- Solution Variables – выражаемые переменные;
- Solution Method – метод решения;
- Solution Domain – область решения;
- Solution Bounds – границы решения.

Значения параметра Solution Method:

- Algebraically – алгебраически (символьно),
- Numerically – численно (для уравнений),
- Either – по умолчанию.

Значения параметра Solution Domain:

- Complex – множество комплексных чисел,
- Real – множество действительных чисел,
- Bounds – на заданном отрезке (если уравнение решается численно). Поля Upper (Верхняя) и Lower (Нижняя) становятся активными, когда переключатель Solution Domain находится в положении Bounds.

Кнопкой OK на листовое поле вставляется встроенная функция SOLVE, с заданными значениями параметров, возвращающая после нажатия кнопки  $\equiv$  панели инструментов результат. Кнопка Solve вставляет одновременно и то, и другое.

Следует учитывать, что инструмент Solve Expression может возвращать посторонние корни уравнений, с точки зрения школьной программы по математике. Поэтому, применяя его к уравнению, определенному не на всем множестве действительных чисел, надо или делать проверку корней, или, что более рационально, решать его совместно с неравенствами,

определяющими ОДЗ (область допустимых значений). То же самое относится к системам уравнений.

### Технология решения уравнений

Пусть надо решить некоторое уравнение  $f(x) = 0$ .

1. Оно записывается в окно EE.
2. Нажимается <Enter> или кнопка .
3. Кнопкой  вызывается инструмент Solve Expression.
4. Задаются значения параметров, как на рисунке 24.
5. Нажатие кнопки Solve инструмента Solve Expression

возвращает встроенную функцию SOLVE и результат – корни уравнения, соединенных, если их несколько, символом логического сложения V.

### Пример

Решить алгебраическое уравнение:

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} + \frac{x^2 + 2}{x - 2} = -2$$

Строки решения:

#2: SOLVE  $\left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} + \frac{x^2 + 2}{x - 2} = -2, x, \text{Real} \right)$

#3:

$x = 1$

Ответ: 1.

### Пример

Решить иррациональное уравнение

$$\sqrt{3x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2\sqrt{x}$$

**Технология решения.** Вводится вектор, состоящий из уравнения и условий неотрицательности подкоренных выражений. Применение инструмента Solve Expression дает:

#2: SOLVE  $([\sqrt{3 \cdot x + 4}] + \sqrt{(x - 4)} = 2 \cdot \sqrt{x}, 3 \cdot x + 4 \geq 0, x - 4 \geq 0, x \geq 0], x, \text{Real})$

#3:

$x = 4$

Ответ: 4.

Если не вводить ОДЗ уравнения, то появится посторонний корень:

#5: `SOLVE(√(3·x + 4) + √(x - 4) = 2·√x, x, Real)`

#6:

$$x = -\frac{4}{3} \vee x = 4$$

### Пример

Решить логарифмическое уравнение:

$$\lg x = \lg \frac{3}{x + 2}$$

### Строки решения:

#2: `SOLVE([LOG(x, 10) = LOG(3/(x + 2), 10), x > 0, x + 2 > 0], x, Real)`

#3:

$$x = 1$$

**Ответ: 1.**

Если не вводить ОДЗ уравнения, то появится посторонний корень:

#5: `SOLVE(LOG(x, 10) = LOG(3/(x + 2), 10), x, Real)`

#6:

$$x = -3 \vee x = 1$$

### Пример

Решить показательное уравнение

$$5^{x+1} - 2 \cdot 9^{x-1} = 4 \cdot 5^x + 3^{2x-1}$$

### Строки решения:

#2: `SOLVE(5x + 1 - 2·9x - 1 = 4·5x + 32·x - 1, x, Real)`

#3:

$$x = 1$$

**Ответ: 1**

### Пример

Решить уравнение, содержащее модуль:

$$5x^2 + |x + 7| - 13 = 0$$

### Строки решения:

#2:  $\text{SOLVE}(5 \cdot x^2 + |x + 7| - 13 = 0, x, \text{Real})$

#3:

$$x = -\frac{6}{5} \vee x = 1$$

**Ответ:**  $-6/5, 1$ .

### Технология решения неравенств.

Когда решается неравенство, то неравенства, определяющие ОДЗ, присоединяются автоматически. Здесь вопрос только в том, сможет инструмент SOLVE вернуть результат или нет, и если нет, то как заменить неравенство равносильной совокупностью, чтобы получить результат.

#### Пример

Решить дробно-рациональное неравенство

$$\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$$

**Строки решения:**

#2:  $\text{SOLVE}\left(\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1, x, \text{Real}\right)$

#3:

$$x < -2 \vee x > 2$$

**Ответ:**  $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

#### Пример

Решить дробно-рациональное неравенство с модулем:

$$\left| \frac{3x+1}{x-3} \right| < 3$$

**Строки решения:**

#2:  $\text{SOLVE}\left(\left| \frac{3 \cdot x + 1}{x - 3} \right| < 3, x, \text{Real}\right)$

#3:

$$x < \frac{4}{3}$$

Так же прекрасно решаются все виды иррациональных неравенств.

### Пример

Решить неравенство:

$$\sqrt{24 - 10x + x^2} > x - 4$$

**Строки решения:**

#2: SOLVE( $\sqrt{(24 - 10 \cdot x + x^2)} > x - 4$ , x, Real)

#3:  $x < 4$

**Ответ:**  $(-\infty, 4)$

Возможности инструмента Solve Expression, по решению логарифмических неравенств, к сожалению, ограничиваются простейшими неравенствами.

## 1.9. Решение систем уравнений и неравенств

### Пример

Решить систему уравнений:

$$2x + y + z = 7,$$

$$x + 2y + z = 8,$$

$$x + y + 2z = 9.$$

**Технология решения.**

Ввод уравнений одним вектором, и применение инструмента SolveExpression, после выделения в поле Solution Variables всех переменных, дает:

#2: SOLVE([ $2 \cdot x + y + z = 7$ ,  $x + 2 \cdot y + z = 8$ ,  $x + y + 2 \cdot z = 9$ ], [x, y, z], Real)

#3:  $[x = 1 \wedge y = 2 \wedge z = 3]$

**Ответ:** (1, 2, 3)

### Пример

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4 \end{cases}$$

### Строки решения:

#2: SOLVE([ $\sqrt{4 \cdot x - 7} < x$ ,  $\sqrt{(x + 5)} + \sqrt{(5 - x)} > 4$ ], x, Real)

#3:

$$\frac{7}{4} \leq x < 4$$

Системы можно решать и непосредственным вводом встроенной функции Solve, заключая уравнения (неравенства), как и неизвестные, в общие квадратные скобки.

### Пример

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} |x^2 - 4x| < 5, \\ |x + 1| < 3. \end{cases}$$

**Технология решения.** В окно EE записывается задание:  
solve([abs(x^2-4x)<5, abs(x+1)<3], [x])

Нажатие кнопки  $\Rightarrow$  возвращает:

#1:

$$[-1 < x < 2]$$

**Ответ:** (-1, 2)

Встроенная функция SOLUTIONS отличается от SOLVE тем, что возвращает корни уравнений в векторном виде, а решения систем уравнений в матричном.

Ниже приведена задача, в которой она оказывается полезной.

**Задача.** Найти все значения параметра  $q$ , при которых корни уравнения  $x^2 - 2qx + 3q = 0$  принадлежат промежутку  $(-1, 1)$ .

### Технология решения.

Функцией SOLUTIONS находятся корни уравнения:

#1: SOLUTIONS( $x^2 - 2 \cdot q \cdot x + 3 \cdot q = 0$ , x)

#2:

$$[\sqrt{(q \cdot (q - 3))} + q, q - \sqrt{(q \cdot (q - 3))}]$$

Из выделенной области видно, что больший корень первый, а меньший второй. Поэтому в окно ЕЕ записывается задание:

$\text{solve}([\#2 \downarrow 1 < 1, \#2 \downarrow 2 > -1], q)$

Нажатие кнопки  возвращает:

#3:  $\text{SOLVE}([\sqrt{(q \cdot (q - 3))} + q, q - \sqrt{(q \cdot (q - 3))}]_1 < 1, [\sqrt{(q \cdot (q - 3))} + q, q - \sqrt{(q \cdot (q - 3))}]_2 > -1], q)$

#4:



$$-\frac{1}{5} < q \leq 0$$

**Отвѣт:**  $(-1/5, 0]$

## Инструмент Solve System

Команды Solve/System вызывают диалоговое окно Solve System Setup, в котором задается число компонент системы. После задания этого числа и нажатия ОК появляется диалоговое окно с полями для их ввода и указания неизвестных, которые надо выразить:

### Пример

Решить систему уравнений

$$xy = a,$$

$$yz = b, \quad abc > 0.$$

$$zx = c,$$

**Технология решения.** Вызывается, и заполняется, диалоговое окно Solve 3 equation(s):

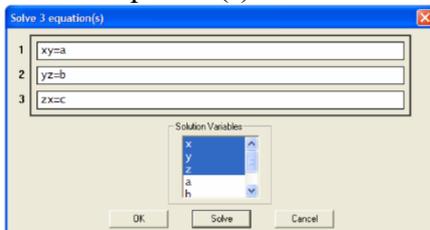


Рис. 25

Нажатие кнопки Solve вставляет на листовое поле:

#1: SOLVE([x·y = a, y·z = b, z·x = c], [x, y, z])

#2: 
$$x = \frac{\sqrt{a \cdot \sqrt{(b \cdot c)}}}{b} \wedge y = \frac{\sqrt{a \cdot \sqrt{(b \cdot c)}}}{c} \wedge z = \frac{\sqrt{(b \cdot c)}}{\sqrt{a}}, x = -\frac{\sqrt{a \cdot \sqrt{(b \cdot c)}}}{b}$$

$$\wedge y = -\frac{\sqrt{a \cdot \sqrt{(b \cdot c)}}}{c} \wedge z = -\frac{\sqrt{(b \cdot c)}}{\sqrt{a}}$$

**Ответ:**  $x = \pm \sqrt{\frac{ac}{b}}, y = \pm \sqrt{\frac{ab}{c}}, z = \pm \sqrt{\frac{bc}{a}}.$

### Пример

Решить систему неравенств:

$$\sqrt{(x^2 - 9x + 20)} \leq \sqrt{(x - 1)} \leq \sqrt{(x^2 - 13)}.$$

### Технология решения.

Заполняется диалоговое окно Solve 2 equation(s):

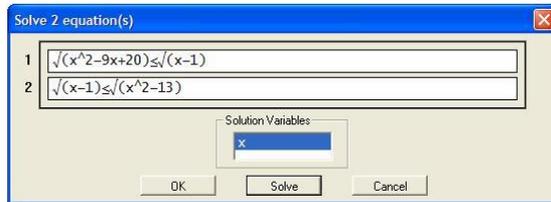


Рис. 26

Нажимается кнопка Solve, что дает:

#1: SOLVE([sqrt(x<sup>2</sup> - 9·x + 20) ≤ sqrt(x - 1), sqrt(x - 1) ≤ sqrt(x<sup>2</sup> - 13)], [x])

#2: [x = 4, 5 ≤ x ≤ 7]

**Ответ:** 4U[5, 7].

Следует заметить, что найдено и изолированное решение x=4.

## 1.10. Вычисление пределов, интегралов, дифференциалов

### Инструменты Calculus

1. Кнопка основной панели, когда на листовом поле выделена функция или ее идентификатор, вызывает инструмент Calculus Limit (рис. 27), предназначенный для вычисления предела функции в заданной точке.

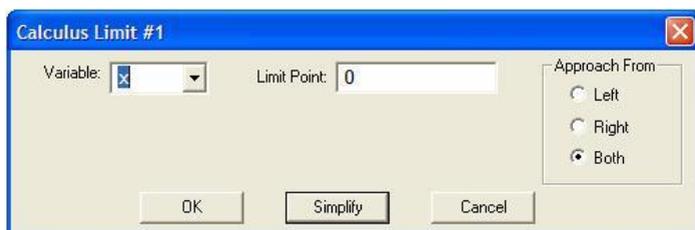


Рис. 27

Входящие параметры:

- Variable – переменная;
- Limit Point – предельная точка;
- Approach From – характер приближения. Значения

параметра Approach From:

- Left – слева;
- Right – справа;
- Both – двустороннее.

Кнопка ОК вставляет на листовое поле встроенную функцию LIM, с заданными значениями параметров, возвращающую, после нажатия кнопки  $\frac{=}{=}$ , результат, а кнопка Simplify – и ее, и результат.

### Пример

Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^4} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2 + 2x^3}.$$

## Технология решения.

1. Вводится выражение, стоящее под знаком предела.
2. Вызывается инструмент Calculus Limit, и задаются значения параметров, как на рисунке 27.
3. Нажатие кнопки Simplify возвращает:

$$\#2: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{(1 + 3 \cdot x^2)} - \sqrt{(1 - 2 \cdot x^3)}}{x^2 + x^3 + 2 \cdot x^3}$$

#3:

1

**Ответ:** 1.

Конструкция ввода встроенной функции, возвращающей значение предела: LIM(функция, переменная, точка,  $\sigma$ ).

Параметр  $\sigma$  принимает одно из значений: -1, 1, 0. Значению -1 соответствует левосторонний предел, 1 – правосторонний предел, 0 – двусторонний предел. В последнем случае, параметр  $\sigma$  можно не вводить.

Кнопка  $\partial$  основной панели, когда на листовом поле выделена функция или ее идентификатор, вызывает инструмент Calculus Differentiate вычисления производных:



Рис. 28

Входящие параметры:

- Variable – переменная дифференцирования;
- Order – порядок производной.

Кнопка ОК вставляет на листовое поле встроенную функцию DIF, с заданными значениями параметров, возвращающую, после нажатия кнопки  $\frac{d}{dx}$ , производную, а кнопка Simplify – и ее, и производную.

## Пример

Найти производную функции

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$$

### Технология решения.

1. Вводится заданная функция:

#1: 
$$\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$$

2. Вызывается инструмент Calculus Differentiate, и задаются значения параметров, как на рисунке 1.28.

3. Нажатие кнопки Simplify возвращает:

#2: 
$$\frac{d}{dx} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$$

#3: 
$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2}$$

Встроенная функция TANGENT (y,x, x<sub>0</sub>) возвращает правую часть уравнения касательной  $y = kx + b$  к графику функции  $y = y(x)$ , проходящей через точку с абсциссой  $x_0$ .

## Пример

Составить уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$  в точке  $x = -2$ .

### Технология решения.

1. В окне EE записывается задание:  
TANGENT(2-4x-3x^2,x,-2).

2. Нажатие кнопки  дает:

#1: TANGENT(2 - 4x - 3x<sup>2</sup>, x, -2)

#2:  $8x + 14$

**Ответ:**  $y = 8x + 14$

## Вычисление интегралов

Кнопка  основной панели вызывает инструмент

## Calculus Integrate:

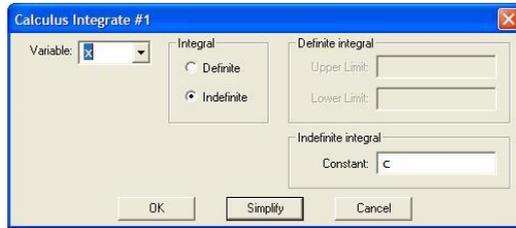


Рис. 29

Им вычисляются как неопределенные интегралы (Indefinite) - первообразные, так и определенные интегралы (Definite). В последнем случае открываются поля Definite integral, в которые вводятся нижний и верхний пределы интегрирования.

### Пример

Вычислить площадь фигуры,ограниченной линиями:

$$y=x^3, y = \sqrt{x}.$$

### Технология решения.

1. Ввод на листовое поле:

#1:  $x^3, \sqrt{x}, x^3 \leq y \leq \sqrt{x} \wedge 0 \leq x \leq 1$

2. Кнопкой  вызывается геометрическое окно 2D-plot и, нажатием кнопки , строится заданная фигура:

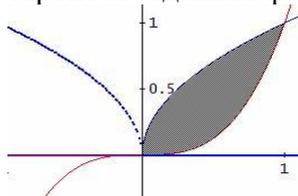


Рис. 30

3. Кнопкой  делается переход в алгебраическое окно, где вводится #2:

4. Инструментом Calculus Integrate вычисляется площадь фигуры:

#2:  $\sqrt{x-x^3}$

#3:  $\int_0^1 (\sqrt{x-x^3}) dx$

#4:  $\frac{5}{12}$

Встроенные функции интегрирования INT(f(x), x) и INT(f(x), x, a, b), первой вычисляются неопределенные интегралы, второй – определенные.

### 1.11. Вычисление суммы и произведения бесконечного ряда

#### Инструменты Calculus Sum/Product

Кнопка  $\Sigma$  основной панели (рис. 1) вызывает инструмент Calculus Sum:

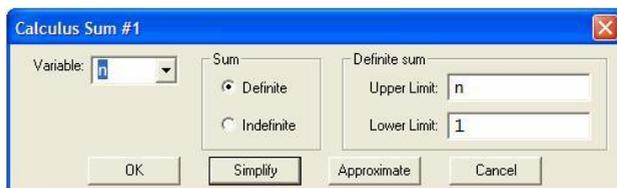


Рис. 31

Технология вычисления им суммы первых пятидесяти четных натуральных чисел.

1. Ввод суммируемого выражения  $2n$ .
2. Вызов инструмента Calculus Sum и установка нижнего предела суммирования Lower Limit: 1, верхний предел суммирования Upper Limit: 50.
3. Нажатие кнопки Simplify возвращает искомое значение:

#1:  $2 \cdot n$

#2:  $\sum_{n=1}^{50} 2 \cdot n$

#3:  $2550$

Суммировать можно не только числовые, но и символьные данные. Конструкция ввода встроенной функции суммирования:

$$\text{SUM}(f, k, \text{kmin}, \text{kmax}).$$

Вместо SUM можно вставить символ  $\sum$ .

Функция SUM прекрасно встраивается в функцию Solve.

**Задача.** Найти целое положительное решение уравнения

$$(3 + 6 + 9 + \dots + 3(n-1)) + (4 + 5,5 + 7 + \dots + \frac{8+3n}{2}) = 137$$

**Строки решения:**

#1:  $\text{SOLVE}\left(\left[\left[\sum_{k=2}^n 3 \cdot (k-1)\right] + \sum_{k=0}^n \frac{8+3 \cdot k}{2} = 137, n\right]\right)$

#2:

$$n = -\frac{76}{9} \vee n = 7$$

**Ответ:** 7.

**Задача**

Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 3$$

**Строки решения:**

#1:  $\text{SOLVE}\left(\left[\sum_{k=1}^{x-1} \frac{x-k}{x} = 3, x\right]\right)$

#2:

$$x = 7$$

**Ответ:** 7.

Кнопка  $\Pi$  основной панели (рис. 1) вызывает инструмент Calculus Product:

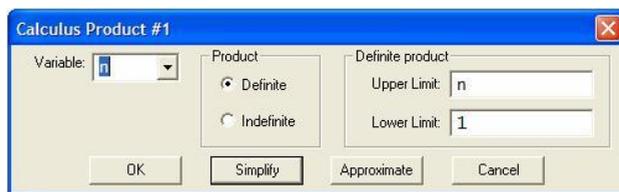


Рис. 32

Пусть надо найти произведение первых десяти четных натуральных чисел.

1. Вводится  $2n$ .
2. Вызывается инструмент Calculus Product и устанавливаются следующие пределы Lower Limit: 1, Upper Limit: 10.
3. Нажатие кнопки Simplify возвращает результат:

#1:  $2 \cdot n$

#2:  $\prod_{n=1}^{10} 2 \cdot n$

#3: 3715891200

## 1.12. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Найдите значение X по заданной формуле

Таблица 1

	№1 $X = \frac{\cos(\alpha\beta)}{3\sqrt{\chi}}$			№2 $X = \frac{\sqrt{\alpha}\sin(\beta)}{\chi}$			№3 $X = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{tg(\chi)}$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$\alpha$	3.85	4.16	7.27	228.6	315.6	186.7	3.845	4.632	7.312
$\beta$	2.043	12.16	5.205	86.4	72.5	66.4	16.2	23.3	18.4
$\chi$	962.6	55.18	87.32	68.7	53.8	72.3	12.48	11.3	20.02
	№4 $X = \frac{\sin(\alpha^2)\beta}{\chi}$			№5 $X = \frac{\alpha\cos(\beta^3)}{\chi}$			№6 $X = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\chi^2}$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$\alpha$	3.456	1.245	0.327	0.643	0.142	0.258	0.357	0.175	0.213
$\beta$	0.642	0.121	3.147	2.17	1.71	3.45	2.63	3.71	5.12
$\chi$	7.12	2.34	1.78	5.843	3.721	7.221	0.854	0.285	0.374
	№7 $X = \frac{ab}{\log(c^2)}\pi^2$			№8 $X = \frac{\alpha^2\sin^2\beta}{\chi^2}$			№9 $X = \cos\left(\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\chi}}\right)$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
a	3.456	1.245	0.327	1.653	2.348	3.804	0.756	0.834	0.638
b	0.642	0.121	3.147	3.78	4.37	4.05	21.7	17.8	32.7
c	7.12	2.34	1.78	0.158	0.235	0.318	2.65	1.84	4.88
	№10 $X = \frac{\sin(\alpha\beta^3)}{48\cos(\chi)}$			№11 $X = \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sqrt[3]{\chi^2}}$			№12 $X = \frac{\cos(\sqrt{\alpha})\sin(\beta)}{\chi}$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$\alpha$	54.8	38.5	17.3	3.878	5.16	7.299	227.6	325.6	176.7
$\beta$	2.45	3.35	5.73	2.041	11.16	5.115	85.4	73.5	67.4
$\chi$	0.863	0.734	0.956	962	56.18	88.32	67.7	55.8	77.3
	№13 $X = \frac{\sqrt{\alpha}\sin(\beta)}{tg(\chi)}$			№14 $X = \frac{\sin(\alpha^2)\beta}{\cos^2(\chi)}$			№15 $X = \frac{\sin(\alpha)\cos^2(\beta)}{\chi}$		

Продолжение табл. 1

	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$\alpha$	4.845	5.632	6.312	3.556	1.345	0.427	0.643	0.142	0.258
$\beta$	16.4	23.5	16.4	0.652	0.131	3.144	2.17	1.71	3.45
$\chi$	12.44	11.5	20.06	7.15	2.33	1.74	5.843	3.721	7.221
	№16 $X = \frac{\sin^2(\alpha)\cos^2(\beta)}{\chi^3}$			№17 $X = \frac{\ln^2(\alpha\beta)\pi^2}{\chi^3 \cdot 2}$			№18 $X = \frac{\operatorname{tg}(\alpha^2)\sin^3(\beta)}{\sqrt{\chi}}$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$\alpha$	0.357	0.175	0.213	32.45	1.245	0.327	1.652	2.348	3.804
$\beta$	2.63	3.71	5.12	0.642	0.121	3.147	3.78	4.37	4.05
$\chi$	0.854	0.285	0.374	7.12	2.34	1.78	0.158	0.235	0.318
	№19 $X = \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha\beta^3}{\chi}}\right)$			№20 $X = \frac{\sin(\sqrt{\alpha\beta})}{48\cos^3(\chi)}$			№21 $X = \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{\alpha\beta})}{\sqrt[3]{\chi^5}}$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$\alpha$	0.756	0.834	0.638	54.8	38.5	17.3	3.85	4.16	7.27
$\beta$	21.7	14.8	32.7	2.45	3.35	5.73	2.043	12.16	5.205
$\chi$	2.65	1.84	4.88	0.863	0.734	0.956	962.6	55.18	87.32
	№22 $X = \frac{\cos(\sqrt{\alpha})\sin^3(\beta)}{\sqrt[3]{\chi}}$			№23 $X = \frac{\sqrt{\alpha^5}\sin^3(\beta)}{\operatorname{tg}(\chi^2)}$			№24 $X = \frac{\sqrt{\sin(\alpha^2)\beta}}{\cos(\sqrt{\lambda})}$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$\alpha$	228.6	315.6	186.7	3.845	4.632	7.312	3.456	1.245	0.327
$\beta$	86.4	72.5	66.4	16.2	23.3	18.4	0.642	0.121	3.147
$\chi$	68.7	53.8	72.3	12.48	11.3	20.02	7.12	2.34	1.78
	№25 $X = \sin(\alpha) \frac{\operatorname{tg}^2(\beta)}{\sqrt{\chi}}$			№26 $X = \frac{\sqrt{\sin(\alpha)\cos^2(\beta)}}{\sqrt{\chi^3}}$			№27 $X = \sqrt{\frac{\ln(\alpha\beta)\pi^2}{\chi^3}}$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$\alpha$	0.643	0.142	0.258	0.357	0.175	0.213	3.456	1.245	0.327
$\beta$	2.17	1.71	3.45	2.63	3.71	5.12	0.642	0.121	3.147
$\chi$	5.843	3.721	7.221	0.854	0.285	0.374	7.12	2.34	1.78

Продолжение табл. 1

	№28 $X = \frac{\sqrt{tg(\alpha)\sin(\beta^2)}}{\sqrt{\chi^3}}$			№29 $X = \sqrt{tg\left(\frac{\alpha\beta^3}{\sqrt{\chi}}\right)}$			№30 $X = \sqrt[3]{\frac{\sin\sqrt{\alpha}\beta}{4\cos(\chi)}}$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$\alpha$	1.653	2.348	3.804	0.756	0.834	0.638	54.8	38.5	17.3
$\beta$	3.78	4.37	4.05	21.7	14.8	32.7	2.45	3.35	5.73
$\chi$	0.158	0.235	0.318	2.65	1.84	4.88	0.863	0.734	0.956

Задание 2. Найдите значение  $Y$  по заданной формуле (значение  $X$  определено в задании 1)

Таблица 2

	№1 $X^2 + \left[\frac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$			№2 $X + \left[\frac{(a+b)m^3}{c-n}\right]$			№3 $X^3 + \left[\frac{(a+b)m!}{(c-n)^2}\right]$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
a	4.3	5.2	2.13	13.5	18.5	11.8	2.754	3.236	4.523
b	17.21	15.32	22.16	3.7	5.6	7.4	11.7	15.8	10.8
c	8.2	7.5	6.3	4.22	3.42	5.82	0.65	0.65	0.85
m	12.417	21.823	16.825	34.5	26.3	26.7	2	3	5
n	8.37	7.56	8.13	23.725	14.782	11.234	6.32	7.18	4.17
	№4 $\sqrt[3]{X} \left[\frac{(a+b)\log(m)}{\sqrt{c-n}}\right]$			№5 $X - \left[\frac{(a+b)\sqrt[4]{c}}{\sqrt{m-n^2}}\right]$			№6 $3X \left[\frac{(a+b)^2}{\sqrt{m-n}c!}\right]$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
a	23.16	17.41	32.37	22.16	15.71	12.31	16.342	12.751	3.456
b	8.32	1.27	2.35	5.03	3.28	1.73	2.5	3.7	7.3
c	145.5	342.3	128.7	3.6	7.2	3.7	1	2	3
m	28.6	11.7	27.3	12.37	13.752	17.428	9.14	8.12	6.71
n	0.28	0.71	0.93	86.2	33.7	41.7	3.6	1.7	5.8
	№7 $\frac{X}{64c} \sqrt{na^2 + mb^2}$			№8 $X^2 \left[\frac{m!(\sqrt{a-b})}{c+n}\right]^2$			№9 $3X \left[\frac{\ln(m)(\sqrt[3]{a-b})}{\sqrt{m(n-a)}}\right]$		

Продолжение табл. 2

	a	b	c	a	b	c	a	b	c
a	23.16	17.41	32.37	16.342	12.751	31.456	10.82	9.37	11.45
b	8.32	1.27	2.35	2.5	3.7	7.3	2.786	3.108	4.431
c	145.25	342.3	128.7	38.17	23.76	33.28	-	-	-
m	28.6	11.7	27.3	2	3	4	0.28	0.46	0.75
n	0.28	0.71	0.93	3.6	1.7	5.8	14.7	15.2	16.7
	№10 $\frac{X}{2} + \frac{(2n-1)!(a+b)}{(a-b)^2}$			№11 $\sqrt{X^2} \left[ \frac{(a+b)c!}{m-n} \right]^2$			№12 $X + \left[ \frac{(a+b)m!}{c-n} \right]$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
a	2.0435	1.1752	4.5681	5.3	6.2	2313	12.5	19.5	12.8
b	4.2	3.8	6.3	18.21	16.32	23.16	3.2	5.9	7.2
c	-	-	-	1	2	3	4.22	3.49	5.82
m	-	-	-	13.417	20.863	17.925	1	3	5
n	1	2	3	8.371	7.562	8.134	23.722	14.782	11.232
	№13 $\left[ \frac{(a+b)\sqrt{m!}}{(c-n)^4} \right] + X$			№14 $\left[ \frac{(a+b)(m)^{n+1}}{X\sqrt{c-n!}} \right]$			№15 $\ln(X^2) \left[ \frac{(a+b)\sqrt[4]{c}}{\sqrt{(m-n)!}} \right]$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
a	3.754	4.236	5.523	25.16	16.41	12.37	22.16	15.71	12.31
b	11.3	14.8	10.5	8.52	1.67	2.25	5.03	3.28	1.73
c	0.63	0.64	0.85	143.5	356.3	124.7	3.6	7.2	3.7
m	2	3	1	28.7	14.6	26.3	5	6	7
n	6.32	7.15	4.15	1	2	3	1	3	5
	№16 $\left[ \frac{(a+b)^2+X}{\sqrt{m-n} c!} \right]$			№17 $\frac{n!}{4c} \sqrt{ba^2 + (m-n)! X^2}$			№18 $X + \sqrt{\frac{(2m-1)!(\sqrt{a-b})}{c+\log(n^2)}}$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
a	16.342	12.751	31.456	23.16	17.41	32.37	16.342	12.751	31.456
b	2.5	3.7	7.3	8.32	1.27	2.35	2.5	3.7	7.3
c	1	2	3	145.5	342.3	128.7	38.17	23.76	33.28
m	9.14	8.12	6.71	2	4	6	2	3	4
n	3.6	1.7	5.8	3	6	9	3.6	1.7	5.8

Продолжение табл. 2

№19 $\left[ \frac{\ln(m)(\sqrt[3]{a-b})}{\sqrt{m(n-a^3)}} \right] + X$			№20 $X - \frac{(2n)!\sqrt{a+\sqrt{b}}}{(a-b)^2}$			№21 $X^2 + \left[ \frac{(a+\sqrt{b})c!}{(m-n)^2} \right]^2$			
a	б	с	a	б	с	a	б	с	
a	10.82	9.37	11.45	2.0435	1.1752	4.5681	4.3	5.2	2.13
b	2.786	3.108	4.431	4.2	3.8	6.3	17.21	15.32	22.16
c	-	-	-	-	-	-	1	2	3
m	0.28	0.46	0.75	-	-	-	12.417	21.823	16.825
n	14.7	15.2	16.7	1	2	3	8.37	7.56	8.13
№22 $2X + \left[ \frac{(a+b)(2m+1)!}{c-n} \right]$			№23 $\left[ \frac{(\sqrt{a+b})(\sqrt{2m!})}{(c-n)^4} \right] + 3X$			№24 $X \left[ \frac{\sqrt{a+b}(2m)^{2n-1}}{\sqrt{c-n!}} \right]$			
a	б	с	a	б	с	a	б	с	
a	16.5	18.5	11.8	2.754	3.236	4.523	23.16	17.41	32.37
b	3.7	5.6	7.4	11.7	15.8	10,8	8,32	1,27	2,35
c	4.22	3.42	5.82	0.65	0.65	0.85	145.5	342.3	128.7
m	1	3	5	2	3	1	28.6	11.7	27.3
n	23.725	14.782	11.234	6.32	7.18	4.17	1	2	3
№25 $\left[ \frac{(a^2+\sqrt{b})^4\sqrt[3]{c+X^2}}{\sqrt{(m-n)!}} \right]$			№26 $\sqrt{\left[ \frac{(\sqrt{a+\sqrt{b}})^2+X}{\sqrt{m-n} c!} \right]}$			№27 $\sqrt{\frac{n!}{3c}} \sqrt{X^2 a^2 + (m-n)! \sqrt{b}}$			
a	б	с	a	б	с	a	б	с	
a	22.16	15.71	12.31	16.342	12.751	31.456	23.16	17.41	32.37
b	5.03	3.28	1.73	2.5	3.7	7.3	8.32	1.27	2.35
c	3.6	7.2	3.7	1	2	3	145.5	342.3	128.7
m	5	6	7	9.14	8.12	6.71	2	4	6
n	1	3	5	3.6	1.7	5.8	3	6	9
№28 $\sqrt{\frac{(2m+1)!(\sqrt{a-\sqrt{b}})}{X^2 c^3 + \ln(n^2)}}$			№29 $\left[ \frac{\log(m)(\sqrt[3]{a-\sqrt{b}})}{\sqrt{m(n-a^3)}} \right] X^2$			№30 $\frac{(2n+1)!\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\ln((X-b)^2)}$			

Продолжение табл. 2

	a	б	с	a	б	с	a	б	с
a	16.342	12.751	31.456	10.82	9.37	11.45	2.0435	1.1752	4.5681
b	2.5	3.7	7.3	2.786	3.108	4.431	4.2	3.8	6.3
c	38.17	23.76	33.28	-	-	-	-	-	-
m	2	3	4	0.28	0.46	0.75	-	-	-
n	3.6	1.7	5.8	14.7	15.2	16.7	1	2	3

Задание 3. Вычислите предел

Таблица 3

1 вариант	$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{5x}{tg(x)} \right] \lim_{n \rightarrow -\infty} (e^{ax} \ln(x^2 - a^2))$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\exp(x)}{x^2} \right)^2 \lim_{n \rightarrow \pi} \left( \frac{\cos(\frac{x}{2})^2}{\cos(2x)^2} \right)$ $\lim_{t \rightarrow 5} \frac{t^3 - 81}{\sin(t - 3)^3 \cos(2t)}$
2 вариант	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ \frac{x - \frac{\pi}{2}}{ctg(3x)} \right] \lim_{n \rightarrow 0} ((8x\pi)ctg(2x))$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \lim_{t \rightarrow 6} \sqrt{\frac{(t^3 - 125)}{\cos(\pi t/2)}}$ $\lim_{b \rightarrow 5} \left[ \frac{\sin(b + 1)^2}{(b^2 + 2)(b^2 - 1)} \right]$
3 вариант	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{\ln x}{1+x}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^3 - 12x + 2)}{\sin(x) \sin(2x) \sin(3x)}$

$\lim_{t \rightarrow -1} \frac{\sin(3t^2 \cos 5t)}{\pi \cos\left(\frac{t}{2}\right)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(32 \sin(x) \cos(x))}{\operatorname{tg}(7x)}$ $\lim_{a \rightarrow 2} \frac{[(a-2)(a^2+4a+5)]}{\cos\left(\frac{\pi}{a}\right)}$
<p>4 вариант</p> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\operatorname{tg}(5x)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t^3 - 13)}{\cos(t-3)^3 \cos(2t)} \lim_{a \rightarrow \pi} \frac{\sin(a/2)^2}{\sin(2a)^2}$ $\lim_{a \rightarrow -\infty} (e^{a8} \log(\pi^2 - a^2))$
<p>5 вариант</p> $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{Ln}(x)}{x^2 - 1} \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{t - \pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}$ $\lim_{a \rightarrow \pi} \frac{a^2 + a + 1}{\operatorname{tg}(a) \operatorname{tg}(3a)} \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{\frac{\sin(2xy)}{y}}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sin(\pi x)}$
<p>6 вариант</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi x)}{x} \lim_{m \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{ctg}(m)}{m - \pi}$ $\lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{a-13}{a}\right]^2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi x - 1)}{x^2 - 1}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\tan(x))^2 \cot(3\pi x)$

7 вариант

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x^2 + x - 2} \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{t - \pi \cos(13)}{t^2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\lim_{a \rightarrow 5} \frac{a^2 - a - 1}{\tan(a) \sin(3a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(x)}{\sin(9x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sin(\pi x)}$$

8 вариант

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \lim_{a \rightarrow 1} \left[ \frac{a - 13}{a^2} \right]^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 12x + 2}{\sin(5x) \sin(2x) \sin(3x)}$$

$$\lim_{a \rightarrow 2} \frac{[(a - 4)(a^2 + 6a + 5)]}{\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)}$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} \log(\pi^2 - a^2)$$

9 вариант

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x}{\cos(x)} \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{\left(t - \pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{t^2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 12x + 2}{tg(2x)ctg(3x)} \lim_{a \rightarrow 2} \frac{a^2 + 6a + 5}{\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)}$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} \left[ \frac{a - 13}{a^2 + 5a + 1} \right]^2$$

10 вариант

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} [(8 - \pi)tg(2x)]$$

$$\lim_{a \rightarrow 2} \frac{a^2 + 6a + 5}{\cos(\pi - a)} \lim_{b \rightarrow 5} \left[ \frac{\sin(b + 1)^2}{(b^2 - 1)} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg}(3x)}$$

11 вариант

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{Ln}(x)}{x^2 - 1} \lim_{a \rightarrow 1} \sin(\pi^2 - a^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sin(\pi x)}$$

$$\lim_{a \rightarrow 2} \frac{a^2 + 6a + 5}{\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)}$$

12 вариант

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \frac{a - 13}{a} \right]^a$$

$$\lim_{a \rightarrow 2} \frac{a^2 + 6a + 5}{\cos(\pi x)} \lim_{b \rightarrow 5} \left[ \frac{\sin(b + 1)^2}{b^2 - 1} \right]$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} (e^{a8} \log(\pi^2 - a^2))$$

13 вариант

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{\ln(x)}{1+x}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 12x + 2}{\sin(x) \sin(2x) \sin(3x)}$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} \frac{\sin(3t^2 \cos 5t)}{\pi \cos\left(\frac{t}{2}\right)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{32 \sin(x) \cos(x)}{\operatorname{tg}(7x)}$$

$$\lim_{a \rightarrow 2} \frac{[(a - 2)(a^2 + 4a + 5)]}{\cos\left(\frac{\pi}{a}\right)}$$

14 вариант

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\operatorname{tg}(5x)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^3 - 13}{\cos(t-3)^3 \sin(2t)} \lim_{a \rightarrow \pi} \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\sin(2a)^2}$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} (e^{a^8} \log(\pi^2 - a^2))$$

15 вариант

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{Ln}(x)}{x^2 - 1} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^3 - 12x + 2)}{\sin(x) \sin(2x) \sin(3x)}$$

$$\lim_{a \rightarrow \pi} \frac{(a^2 + a + 1)}{\operatorname{tg}(a) \operatorname{tg}(3a)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\cos(x/2))^2}{\cos(2x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sin(\pi x)}$$

16 вариант

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi x)}{x} \lim_{x \rightarrow \infty} [(8\pi x) \operatorname{ctg}(2x)]$$

$$\lim_{a \rightarrow 2} \frac{[(a-4)(a^2 + 6a + 5)]}{\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi x - 1)}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} (\tan(x)^2 \cot(3\pi x))$$

Задание 4. Продифференцируйте выражение

Таблица 4

1 вариант	$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(1 + x^2) \frac{d^2}{dx^2} (\sin(x) \cos(3x))$ $\frac{d^{11}}{dx^{11}} \sin(2x) \frac{d^2}{dx^2} (e^x \sin(5x))$ $\frac{d}{dx} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}$
2 вариант	$\frac{d}{dx} \ln(x + \operatorname{arct}(1 + x^2)) \frac{d}{dx} \operatorname{arcses}(\sqrt{x + 1})$ $\frac{d}{dx} (\sin(x) + 5\cos(x)) \quad \frac{d^{10}}{dx^{10}} \sqrt{x + 1}$ $\frac{d^2}{dx^2} (\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(5x))$
3 вариант	$\frac{d}{dx} \frac{x + x^2 + x^3}{1.5 + \cos(x)} \frac{d}{dx} \cos(x^2 - 4)$ $\frac{d}{dx} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ln(x)}}} \frac{d^2}{dx^2} \cos(x^2 - 4)$ $\frac{d^2}{dx^2} (x^2 \ln(2x))$
4 вариант	$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{\log(x)} \frac{d^2}{dx^2} \sqrt{\sin(x) + 1}$

	$\frac{d}{dx}(x^2 + x + 2)$	$\frac{d}{dx} \frac{(1 - \sin(2x))}{1.5 + \cos(x)}$
		$\frac{d}{dx} \frac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)}$
5 вариант	$\frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 + 25)$	$\frac{d}{dx} \frac{\sin(x)}{2 - x}$
	$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{x - \ln(x)}$	$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{1 + x \sin(x)}$
		$\frac{d^2}{dx^2} \left( \log \left( \frac{\sqrt{x}}{3} \right) x^5 \right)$
6 вариант	$\frac{d}{dx}(x^4 + 2x^2 + 25x)$	$\frac{d}{dx} \sqrt{\ln(x + 2)}$
	$\frac{d}{dx} e^{\sqrt{\sin(x)}}$	$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{1 + x + \sin(x)}$
		$\frac{d^2}{dx^2} \left( \log \left( \frac{\sqrt{2+x}}{3} \right) x^6 \right)$
7 вариант	$\frac{d}{dx} e^{\sqrt{\cos(x)}}$	$\frac{d}{dx} (x^3 + 5x^2 + 25x)$
	$\frac{d}{dx} (\cos(x) + 5 \sin(5x))$	$\frac{d^3}{dx^3} \cos(3x)^3$
		$\frac{d^2}{dx^2} \left( \ln \left( \frac{\sqrt{2+x}}{3} \right) x^2 \right)$
8 вариант	$\frac{d}{dx} (x^6 + 2x^3 + 5)$	$\frac{d}{dx} (\cos(x + 2) + \sin(x))$

$\frac{d}{dx} \cos(x) \frac{d}{dx} \frac{(2+x)^2}{1-3x} \frac{d}{dx} \frac{x + \sin(x)}{x^2}$ $\frac{d^2}{dx^2} \left( \log \left( \frac{\sqrt{2+x}}{6} \right) x^2 \right)$
<p>9 вариант</p> $\frac{d}{dx} \cos(x) \operatorname{tg}(x) \frac{d}{dx} \frac{\sin(x)^4}{2+x^2}$ $\frac{d}{dx} [2x^3 + 10x^2 + 45] \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{x^3(1+\cos(x))}$ $\frac{d^3}{dx^3} \left( \ln \left( \frac{\sqrt{2+x}}{3} \right) x^3 \right)$
<p>10 вариант</p> $\frac{d}{dx} (x^2 + 4x^3 + 5) \quad \frac{d}{dx} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}}$ $\frac{d}{dx} \frac{\cos(x)}{5+x} \frac{d^3}{dx^3} \log \left( \frac{\sqrt{x}}{3} \right)$ $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{2 + \sin(1+x)}$
<p>11 вариант</p> $\frac{d}{dx} (\operatorname{arctg}(1+x^2)) \frac{d}{dx} \operatorname{arcses}(\sqrt{x+1})$ $\frac{d^2}{dx^2} \cos(3x) \sin(x) \frac{d^{11}}{dx^{11}} \sin(2x)$ $\frac{d^2}{dx^2} e^x \sin(5x)$

12 вариант

$$\frac{d}{dx}(\sin(x) + 5 \cos(x))$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x + \operatorname{arctg}(1 + x^2))$$

$$\frac{d^{10}}{dx^{10}} \sqrt{x + 1}$$

$$\frac{d^{11}}{dx^{11}} \sin(x) \quad \frac{d^2}{dx^2} (\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(5x))$$

13 вариант

$$\frac{d}{dx} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ln(x)}}} \frac{d}{dx} \frac{x + x^2 + x^3}{1.5 + \cos(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x^2 - 4) \frac{d^2}{dx^2} x^5 \ln(2x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

14 вариант

$$\frac{d}{dx} (x^2 + x + 2) \quad \frac{d}{dx} \frac{(1 - \sin(2x))}{1.5 + \cos(x)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{\log(x)} \frac{d^2}{dx^2} \sqrt{\sin(x)} + 1$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{2 + \sin(1+x)}$$

15 вариант

$$\frac{d}{dx} (x^3 + 2x^2 + 25) \frac{d}{dx} (\sqrt{\ln(x+2)})$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\sin(x)}{2-x} \frac{d}{dx} \frac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \log\left(\frac{\sqrt{x+2}}{3}\right) x^6 \right)$$

16 вариант

$$\frac{d}{dx} e^{\sqrt{\sin(x)}} \frac{d}{dx} (2x^3 + x^4 + 25x)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{x - \ln(x)} \frac{d^2}{dx^2} (\sqrt{1 + x + \sin(x)})$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \log \left( \frac{\sqrt{x}}{3} \right) x^5 \right)$$

Задание 5. Упростить алгебраическое выражение

Таблица 5

№	Алгебраическое выражение
1	$\frac{x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18} \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}$
2	$\frac{2 - x}{x + 1} \frac{3x^4 - 24x^3 - 3x^2 + 204x - 252}{220x - 70x^2 - 168 - 15x^3 + 10x^4 - x^5}$
3	$\frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x^5 + 5x^4 - 16x - 80} \frac{2x^4 + 10x^3 - 16x - 80}{x^2 + 2x + 4}$
4	$\frac{2x^4 + 10x^3 - 2x - 10}{x^2 + x + 1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^5 + 5x^4 - x - 5}$
5	$\frac{4x^4 + x^5 - 81x - 324}{3x^4 + 10x^3 - 81x - 270} \frac{3x^3 + 19x^2 + 57x + 90}{x^4 + 7x^3 + 21x^2 + 63x + 108}$
6	$\frac{4x^5 + 40x^4 + 100x^3 - 80x^2 - 320x + 256}{x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4} \frac{3x^3 - 3x^2}{x^2 + 8x + 16}$
7	$\frac{5x^4 + 10x^3 - 100x^2 - 330x - 225}{x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 3x + 2}$
8	$\frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 27}{x^3 - 5x^2 - 15x - 72} \frac{x^4 - 8x^3 - 27x + 216}{49x^4 - 882x^2 + 3969}$
9	$\frac{7x^4 - 126x^2 + 567}{x^5 - 8x^4 - 27x^2 + 216x} \frac{x^3 - 5x^2 - 15x - 72}{x^3 + 3x^2 - 9x - 27}$

Продолжение табл. 5

10	$\frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^2 + 3x - 4} \cdot \frac{x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4}{9x^5 + 36x^4 + 9x^3 - 90x^2 - 36x + 72}$
11	$\frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 3x + 2} \cdot \frac{3x - 3}{2x - 4}$
12	$\frac{x^4 + 2x^3 - 72x^2 - 416x - 640}{9x^3 - 144x^2 + 180x + 3600} \cdot \frac{x - 10}{x^2 + 8x + 16}$
13	$\frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2}{9x^3 - 351x^2 + 3240x + 3600} \cdot \frac{x^2 - 40x + 400}{x^3 - 3x - 2}$
14	$\frac{2x^4 + 4x^3 - 4x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1} \cdot \frac{x^4 - 7}{2x + 2}$
15	$\frac{4x^4 + 4x^3 - 48x^2 - 112x - 64}{2x^3 + 4x^2 - 32x - 64} \cdot \frac{x + 4}{x^2 + 3x + 2}$
16	$\frac{4x^4 - 45x^2 + 35x^3 - 315x + 81}{8x^4 + 166x^3 + 1038x^2 + 1674x - 486} \cdot \frac{x + 9}{x^2 - 6x + 9}$

Задание 6. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые

Таблица 6

№	Алгебраическое выражение
1	$(x - 1)^4 (x + 2)(x + 4)^2 (3x + 8)$
2	$(3x + 2)^3 (x^2 + 2)^4 (x - 3)^2 (0.5 - x)$
3	$((x^2 - 1)(2x - 3))^2 (3x + 2)^3$
4	$(x^2 + 4x - 6)((x^3 - 1)(2 - 4x))^2 (2x + 4)^2$
5	$(7x^3 + 4x)((x^2 - 9)(3 + x)(2x + 4))^2$
6	$x(x^3 - 3x^2 + 4)((x^2 - 9)(3 + x)(2x + 4))^2$
7	$((x^3 - 1)(2x^2 + 2x - 3))^3 (3x + 2)^2$
8	$(6x - 9)^5 (2 - 7x)(x^4 + 4x)^2 (3x + 8)$
9	$(x - 3x^2 + 7)^2 (x^2 + 3x - 1)(9x^4 - 1)^3$
10	$(7x + 5x^2)(7x - 4)(x^4 + 3)(8x + 4)$

Продолжение табл. 6

11	$(x^3 - 3x^2 + 4)((x^4 - 81)(3x^4 + x)(2x + 4))^3 x$
12	$((x^3 - 3)(x^6 - 11))^2 ((3x^4 + 2x + 4)(2x + 4))^3$
13	$(x - 54)^4 (12x + 4)(2x + 4)^2 (x - 8x^6)$
14	$(5x^2 - 2x^3 + 5x)^2 (3 - x^2 + x)(7x^4 - x)^3$
15	$((9x^2 - 3x + 1)(x^2 + x - 2))^2 (1.5 - 4x)^4$
16	$(x^3 - 3x^2 + 4)((x^4 - 81)(3x^4 + 3)(2x + 4))^3 x$

Задание 7. Разложите алгебраическое выражение на множители

Таблица 7

№	Алгебраическое выражение	№	Алгебраическое выражение
1	$x^3 + 2x^2 - 4x + 8$	16	$4x^4 + 14x^3 + 22x^2 + 35x + 30$
2	$6x^3 + 55x^2 + 129x + 90$	17	$x^4 + 2x^3 - 143x^2 - 144x + 5164$
3	$x^4 + 2x^3 - 72x^2 - 416x - 640$	18	$x^6 + 4x^3 + x^5 + 4x^2 - 48x - 12x^4$
4	$2x^4 + 4x^3 - 4x - 2$	19	$2x^5 + 8x^2 + x^4 + 4x - 6x^3 - 24$
5	$9x^5 + 36x^4 + 9x^3 - 90x^2 - 36x + 72$	20	$4x^4 - 31x^3 + 33x^2 - 93x + 63$
6	$x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4$	21	$2x^3 - 25x^2 + 93x - 90$
7	$6x^3 + 62x^2 + 184x - 168$	22	$14x^4 - 82x^2 - 46x^3 + 138x + 120$
8	$x^4 + 7x^3 - 21x^2 + 63x + 108$	23	$3x^4 + x^3 - 22x^2 - 4x + 40$
9	$3x^5 + 10x^4 - 81x^2 - 270x$	24	$6x^4 + 23x^3 - 9x^2 - 92x - 60$
10	$4x^4 + x^5 - 81x - 324$	25	$16x^4 + 76x^3 + 68x^2 - 76x - 84$

Продолжение табл. 7

11	$3x^3 - 4 - 19x^2 + 57x + 90$	26	$-x^4 - 5x + 12x^3 + 60 - x^5 - 5x^2$
12	$2x^4 + 10x^3 - 16x - 80$	27	$-6x^2 + 58x + 120 - 4x^3$
13	$x^5 + 5x^4 - 16x - 80$	28	$x^4 + 7x^2 + 9x^3 + 63x$
14	$x^5 - 4x^4 - 21x^3 - 45x^2$	29	$16x^3 - 67x^2 + 64x - x^4 - 252$
15	$x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x - 45$	30	$5x^3 + 56x^2 + 112x - 128$

Задание 8. Разложите рациональную дробь на простейшие множители

Таблица 8

№	Алгебраическое выражение	№	Алгебраическое выражение
1	$\frac{5x^4 + 7x^3 + 5x - 4}{(x^2 + 4)(x - 2)^2(x^2 - 1)}$	16	$\frac{x^4 + x^3 - 5x - 7}{(x^2 + 4x + 1)(x - 2)^2(x^2 - 1)}$
2	$\frac{3x^5 + 6x^3 + 5x - 1}{(x^2 \pm 4x + 3)(x - 2)^2(x^2 - 16)}$	17	$\frac{x^6 + 2x - 1}{(x^2 - x + 5)(x - 3)^3(x^2 - 1)}$
3	$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{(x^2 - x)(3 - x)^3(x^2 - 81)}$	18	$\frac{x^4 + x^3 - 5x - 7}{(x^2 + 4x + 1)(x - 2)^2(x^2 - 1)}$
4	$\frac{x^5 - 7x^4 + 2x - 8}{(x^3 - 4x^2 + 5x)(x - 3)^2(x^2 - 1)}$	19	$\frac{2x^6 - 3x^4 + 9}{(x^2 - 2x - 15)(4x + 1)^3x}$
5	$\frac{x^5 + 2x^3 + 9x^2 - 7}{(4x^2 - 6x - 10)(5x + 3)^2x}$	20	$\frac{x^5 + 2x^3 + 9x^2 - 7}{(2x^2 - 6x + 1)(4x + 2)x^2}$
6	$\frac{6x^6 + 4x^2 + 9x}{(x^2 - 4)(2 - 3x)^3(x^2 - 4)}$	21	$\frac{3x^5 + x^2 + 4x}{(3x^2 - 6x)(x + 2)^4x^2}$
7	$\frac{2x^7 + 4x^2 + 1}{(25x^2 - 30x - 5)(3x^2 + x)^2}$	22	$\frac{5x^6 + 9x^3 + 10x + 15}{(5x^2 - 125)(6x^2 + 2x)^2}$

Продолжение табл. 8

8	$\frac{x^6 + 3x^3 + 4x + 12}{(x^2 - 25)(3x^2 + 9x)^3}$	23	$\frac{7x^5 - 5x^6 + 1}{(x^2 + 8x)x^3(x^2 - 9)^2}$
9	$\frac{x^7 + 2x^5 + 15x + 14}{(x^2 + 5x + 13)(3x - 6)^4}$	24	$\frac{x^7 + 2x^6 + 5x + 51}{(x^2 + 3x + 1)x^2(x^2 - 4)^3}$
10	$\frac{3x^4 + 3x + 4}{(x^2 - 1)(2 - x)^3(x^2 - 9)}$	25	$\frac{4x^4 + 5x^3 + 2x - 1}{(x^2 - 4x + 5)(x - 1)^2(x^2 - 9)}$
11	$\frac{3x^5 + x^2 + 4x}{(5x^2 + 6x - 1)(x + 2)^3(x - 3)}$	26	$\frac{6x^5 + 3x^3 + 4x + 1}{(5x^2 + 6x - 1)(x + 4)^3(x^2 - 4)}$
12	$\frac{7x^5 - 3x^3 + 7x + 77}{(x^2 + 10x + 25)(x^2 - 9)^2}$	27	$\frac{4x^7 + 9x^6 + x + 5}{(x^2 + 3x)x^2(x^2 - 25)^3}$
13	$\frac{8x^5 - 14x^3 + 34}{x(x^2 - x)(7 - x)^3}$	28	$\frac{5x^6 + x^5 - 4x + 21}{(2x^2 + x + 14)(3 - 6x)^4}$
14	$\frac{x^6 + 4x^3 - 14x^2 + 35}{x(2x^2 + x)(5 - 2x)^4}$	29	$\frac{x^6 + 3x^3 + 6x + 11}{(x^2 - 10x + 25)(3x^2 + 9)^3}$
15	$\frac{4x^2 - 3x^3 - x}{(x^2 - 2x + 1)(4x + 1)^2(x^2 - 64)}$	30	$\frac{x^5 - 2x^3 + 9x^2 + 4}{(x^2 - 6x + 1)(x + 2)x^4}$

Задание 9. Изобразите график заданной функции

Таблица 9

№	f(x)	№	f(x)	№	f(x)
1	$\frac{4x^2 + 5}{4x + 8}$	11	$\frac{2 - x^2}{\sqrt{9x^2 - 4}}$	21	$\frac{4x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1}$
2	$\frac{17 - x^2}{4x - 5}$	12	$\frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}$	22	$\frac{1 - x^2}{\sqrt{16x^2 - 9}}$

Продолжение табл. 9

3	$\frac{x^3 - 3}{\sqrt{4x^2 - 3}}$	13	$\frac{3x^2 - 7}{2x + 1}$	23	$\frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - 2x}$
4	$\frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}$	14	$\frac{x^2 - 5}{\sqrt{9x^2 - 8}}$	24	$\frac{4x^3 + x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 1}$
5	$\frac{4x^3 + 3x^2 - 8x - 2}{2 - 3x^2}$	15	$\frac{x^2 - 6x + 4}{2 - 2x}$	25	$\frac{5x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 - 1}}$
6	$\frac{x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 - 2}}$	16	$\frac{21 - x^2}{7x - 9}$	26	$\frac{4x^3 - x}{x^2 - 1}$
7	$\frac{2x^2 - 6}{x - 2}$	17	$\frac{2x^2 - 7}{\sqrt{3x^2 - 2}}$	27	$\frac{2x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$
8	$\frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}$	18	$\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 1}$	28	$\frac{x^2 - 5}{\sqrt{x^2 - 2}}$
9	$\frac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}$	19	$\frac{x^2 - 11}{4x - 3}$	29	$\frac{2x^2 - 5}{\sqrt{3x^2 - 4}}$
10	$\frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$	20	$\frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$	30	$\frac{15 - x^3}{2x - 1}$

Задание 10. Изобразите график заданной функции

Таблица 10

№	f(x)	№	f(x)
1	$\sqrt[3]{(1+x)(x^2+2x-2)}$	16	$\sqrt[3]{x(x+3)^2}$
2	$\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$	17	$\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2}$
3	$\sqrt[3]{(3+x)x^2}$	18	$\sqrt[3]{x^2(x-6)}$

Продолжение табл. 10

4	$\sqrt[3]{(2+x)^2(x^2-4)}$	19	$\sqrt[3]{x^2(x+4)^2}$
5	$\sqrt[3]{(1+x)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$	20	$\sqrt[3]{(2+x)(x^2+4x+1)}$
6	$\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$	21	$\sqrt[3]{x(x^2+2)^2}$
7	$\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$	22	$\sqrt[3]{(3+x)(2x^2+x-1)}$
8	$\sqrt[3]{(x-4)^2(x+2)}$	23	$\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$
9	$\sqrt[3]{x^2-2x-3}^2$	24	$\sqrt[3]{(4+x)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}$
10	$\sqrt[3]{(3+x)(x^2+6x+6)}$	25	$\sqrt[3]{(6+x)x^2}$
11	$\sqrt[3]{(1-x)(x^2-2x-2)}$	26	$\sqrt[3]{(x^2-3x+2)^2}$
12	$\sqrt[3]{x^2(x^2+2)^2}$	27	$\sqrt[3]{(x-4)^2(x^2+2)}$
13	$\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)}$	28	$\sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}$
14	$\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}$	29	$\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x}$
15	$\sqrt[3]{(2+x)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}$	30	$\sqrt[3]{(x^2-x-3)^2}$

Задание 11. Изобразите линии, заданные неявно в декартовых координатах

Таблица 11

№	f(x)	№	f(x)	№	f(x)
1	$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - 1$	11	$\frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{4} - 1$	21	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$

Продолжение табл. 11

2	$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - 1$	12	$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{3} - 1$	22	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1$
3	$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - 1$	13	$\frac{y^2}{3} + \frac{x^2}{5} - 1$	23	$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} - 1$
4	$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - 1$	14	$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{5} - 1$	24	$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} - 1$
5	$y^2 - 2x^2 - 4$	15	$y^2 + 24x^2 - 4$	25	$2y^2 - 9x^2 - 18$
6	$\frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{4} - 1$	16	$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} - 1$	26	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1$
7	$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - 1$	17	$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} - 1$	27	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1$
8	$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - 1$	18	$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{5} - 1$	28	$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} - 1$
9	$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} - 1$	19	$4y^2 - 5x^2 - 20$	29	$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} - 1$
10	$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{4} - 1$	20	$4y^2 + 5x^2 - 20$	30	$2y^2 + 9x^2 - 18$

Задание 12. Изобразите кривую, заданную в полярных координатах

Таблица 12

№	$\rho(\varphi)$	№	$\rho(\varphi)$	№	$\rho(\varphi)$
1	$\varphi$	11	$3\varphi^2$	21	$2\cos \varphi + 2$
2	$2\varphi + 1$	12	$2(1 - \cos \varphi)$	22	$2\operatorname{ctg} \varphi$
3	$2/\sin \varphi + 2$	13	$5\sin(4\varphi/5)$	23	$3/\varphi + 3$
4	$2\sin 3\varphi$	14	$2^\varphi$	24	$2\sqrt{\sin 2\varphi}$
5	$2\cos 3\varphi + 3$	15	$2\cos \varphi + 1$	25	$-2\operatorname{tg} \varphi$
6	$-2\operatorname{ctg} \varphi$	16	$2\cos 6\varphi$	26	$2^\varphi + 1$
7	$2\sqrt{\cos 2\varphi}$	17	$3\varphi + 2$	27	$3\varphi^2 + \varphi$
8	$2\sin 6\varphi$	18	$3^\varphi$	28	$2\operatorname{tg} 3\varphi$
9	$1/\cos(\varphi/3)$	19	$2/\sin \varphi + 3$	29	$5\sin^2(\varphi/3)$
10	$2/\sin \varphi + 1$	20	$5\sin(\varphi/3)$	30	$3/\varphi^2 + 1$

Задание 13. Даны матрицы А и В. Найти произведение матриц АВ и ВА (если они существуют)

$$1. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -6 & -7 & 8 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -6 \\ 5 & 2 & 9 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \\ 5 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$7. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ -3 & -1 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$9. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 5 \\ -9 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$10. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{ b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -6 \\ 5 & 7 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 7 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$11. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 11 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$12. \text{ A) } A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{ b) } A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -7 \\ 6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 9 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$13. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ b) } A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 8 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$$

$$14. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ b) } A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$15. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -6 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 15 \\ -1 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{ b) } A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 5 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 8 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$16. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ b) } A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$17. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -10 \\ 11 & 5 & -9 \\ 13 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{ b) } A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ 12 & -1 & 0 \\ -9 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$18. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$19. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ b) } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$20. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -1 \\ 4 & 0 & 11 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание 14. Вычислить определитель, разложив его по элементам: а)  $i$ -й строки, б)  $j$ -го столбца

$$1. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \\ -9 & 0 & 2 \end{vmatrix}, i = 2 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}, j = 3$$

$$2. \text{ a) } \begin{vmatrix} -7 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}, i = 1 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}, j = 2$$

$$3. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & -8 \end{vmatrix}, i = 1 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, j = 1$$

$$4. \text{ a) } \begin{vmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 1 & -7 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}, i = 1 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -12 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, j = 3$$

$$5. \text{ a) } \begin{vmatrix} 6 & 0 & -7 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix}, i = 3 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 9 \end{vmatrix}, j = 2$$

$$6. \text{ a) } \begin{vmatrix} 15 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & 6 \end{vmatrix}, i = 2 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 9 & -9 & 20 \end{vmatrix}, j = 1$$

$$7. \text{ a) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & 15 \\ 4 & 6 & -1 \\ -8 & 9 & 10 \end{vmatrix}, i = 3 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -13 & -5 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, j = 1$$

$$8. \text{ a) } \begin{vmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 12 \\ 6 & 14 & 3 \end{vmatrix}, i = 1$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & -10 & 0 \end{vmatrix}, j = 3$$

$$9. \text{ a) } \begin{vmatrix} -5 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, i = 3$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 11 & 8 \\ -2 & -2 & 12 \end{vmatrix}, j = 3$$

$$10. \text{ a) } \begin{vmatrix} -14 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}, i = 2$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 6 & -7 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}, j = 3$$

$$11. \text{ a) } \begin{vmatrix} 20 & -3 & 6 \\ 11 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, i = 2$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -9 & -3 & 14 \\ 8 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}, j = 1$$

$$12. \text{ a) } \begin{vmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 9 & -9 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}, i = 2$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 9 & -8 & 7 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}, j = 3$$

$$13. \text{ a) } \begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 6 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}, i = 1$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 9 & -8 & 7 \\ 2 & 9 & -12 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix}, j = 3$$

$$14. \text{ a) } \begin{vmatrix} -16 & -2 & 0 \\ 4 & 9 & 12 \\ 6 & 7 & 7 \end{vmatrix}, i = 1$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 7 & -1 & 9 \\ 2 & 0 & -7 \end{vmatrix}, j = 2$$

$$15. \text{ a) } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & -9 & 0 \end{vmatrix}, i = 3$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 12 & 7 & 8 \end{vmatrix}, j = 1$$

$$16. \text{ a) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix}, i = 1$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 2 & -20 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 11 & 5 & -6 \end{vmatrix}, j = 2$$

$$17. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 9 & -8 & -7 \\ 3 & 12 & 4 \end{vmatrix}, i = 2$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 8 & -8 & 5 \\ 9 & -4 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \end{vmatrix}, j = 3$$

$$18. \text{ a) } \begin{vmatrix} 19 & -4 & 5 \\ -10 & 8 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}, i = 1$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 9 & 5 & -3 \\ -3 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}, j = 3$$

$$19. \text{ a) } \begin{vmatrix} 20 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 9 \\ 3 & -9 & 4 \end{vmatrix}, i = 2$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 0 & -5 & 20 \\ 9 & 2 & 6 \\ 4 & -9 & 3 \end{vmatrix}, j = 1$$

$$20. \text{ a) } \begin{vmatrix} -16 & -4 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 12 \end{vmatrix}, i = 2$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 8 & -8 & 1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}, j = 3$$

Задание 15. Вычислить ранг матрицы

$$1. \begin{pmatrix} 1 & -11 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & -11 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -8 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 3 & 1 & -13 \\ 2 & 4 & -60 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 3 & -3 & -31 \\ 9 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -22 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -23 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -19 \end{pmatrix}$$

$$8. \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$9. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -8 & -5 & -10 & -10 \\ -5 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10. \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 10 & 1 & -7 \\ 3 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$11. \begin{pmatrix} 2 & -60 & -4 \\ 3 & -90 & -6 \\ -1 & 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$12. \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 7 \\ 5 & 10 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$13. \begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & 27 \\ 2 & 8 & -4 & 18 \\ -1 & -8 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$14. \begin{pmatrix} -9 & 9 & -6 & -12 \\ -6 & 6 & -4 & -8 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$15. \begin{pmatrix} -8 & -20 & -12 \\ -12 & -30 & -18 \\ 4 & 110 & 6 \end{pmatrix}$$

$$16. \begin{pmatrix} 8 & -12 & 12 & 4 \\ -6 & 9 & -9 & -3 \\ -4 & 16 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$17. \begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 & 2 & 4 \\ 5 & -5 & 10 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$18. \begin{pmatrix} 12 & -12 & 4 & -8 \\ 9 & -9 & 8 & -6 \\ -15 & 15 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$19. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -9 & 2 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$20. \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

Задание 16. Найти обратную матрицу

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$14. A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 5 & 14 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -1 \\ -1 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 \\ 14 & 8 & -3 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Задание 17. Найти решение линейной системы уравнений, используя формулы Крамера, с помощью обратной матрицы

$$1. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ 7x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -12 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 18 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 26 \\ x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 19 \\ 7x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} ax_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + abx_2 + x_3 = b \\ x_1 + bx_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 17 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11 \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -2 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 3 \\ 4x_1 + 10x_2 + 6x_3 = 6 \\ 4x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \\ 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -1 \\ 4x_1 + 10x_2 + 6x_3 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 3 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3.21x_1 + 0.71x_2 + 0.34x_3 = 6.12 \\ 0.43x_1 + 4.11x_2 + 0.22x_3 = 5.71 \\ 0.17x_1 + 0.16x_2 + 4.73x_3 = 7.06 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 12x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Задание 18. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решение, если система неопределенна

$$1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 20 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 = 11 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 14 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2\sqrt{5}x_1 - x_2 + \sqrt{5}x_3 = 1 \\ 10x_1 - \sqrt{5}x_2 + 5x_3 = \sqrt{5} \\ -2x_1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)x_2 - x_3 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31 \\ 4x_1 + 11x_2 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 3x_1 - x_2 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ -x_1 + \frac{1}{3}x_2 = -\frac{5}{2} \\ x_1 + 1.5x_2 = 2 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 = 1 \\ \sqrt{3}x_1 - 3x_2 = \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Задание 19. Решить матричное уравнение

$$1. X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3. X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$4. X \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5. X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6. X \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$7. X \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$8. X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$9. X \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$10. X \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 9 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$11. X \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$12. X \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 9 & -8 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$13. X \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 9 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$14. X \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$15. X \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -7 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$16. X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 9 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$17. X \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$18. X \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 9 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$19. X \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$20. X \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Задание 20. Исследовать систему линейных уравнений и в случае совместности решить ее:

$$1. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 12 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 22 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 19 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \\ 5x_1 - 10x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \\ 5x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 10x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ 3x_2 + 4x_3 - 13x_4 = -25 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 11 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 24x_4 = 1 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = -13 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 + 6x_4 = 6 \end{cases}$$

## 2. РЕДАКТОР ВЕКТОРНОЙ ГРАФИКИ COREL-DRAW

### 2.1. Интерфейс и возможности

CorelDraw является одним из наиболее популярных графических редакторов с помощью которого, можно легко построить кривую, геометрическую фигуру или букву текста, быстро и с высокой точностью откорректировать их форму и цвет, изогнуть текст по заданной кривой и многое другое.

Совместное применение различных инструментов позволяет получать различные эффекты: перспективные изометрические изображения, изгибание, вращение текста или объекта, пошаговый переход одного объекта в другой, зеркальные отображение и другие эффекты.

#### *Типы объектов используемых в CorelDraw:*

- прямые и кривые линии и их отрезки;
- прямоугольники и квадраты;
- эллипсы и окружности;
- многоугольники;
- текст;
- растровые изображения.

После запуска CorelDraw появляется окно, представленное на рис. 33. Окно включает следующие элементы:

– **Набор инструментов** содержит инструменты для создания, заливки и изменения объектов в документе.

– **Стандартная панель** инструментов содержит клавиши быстрого вызова основных меню и команд, таких как открытие, сохранение и печать документов. Дополнительные панели инструментов содержат клавиши быстрого доступа для специальных задач.

– **Строка меню** содержит раскрывающиеся меню связанных команд.

– В строке заголовка отображается заголовок текущего документа.

– **Панель свойств** содержит элементы управления, набор которых зависит от активного инструмента. Например, при использовании инструмента Текст панель свойств отображает элементы управления для создания и редактирования текста.

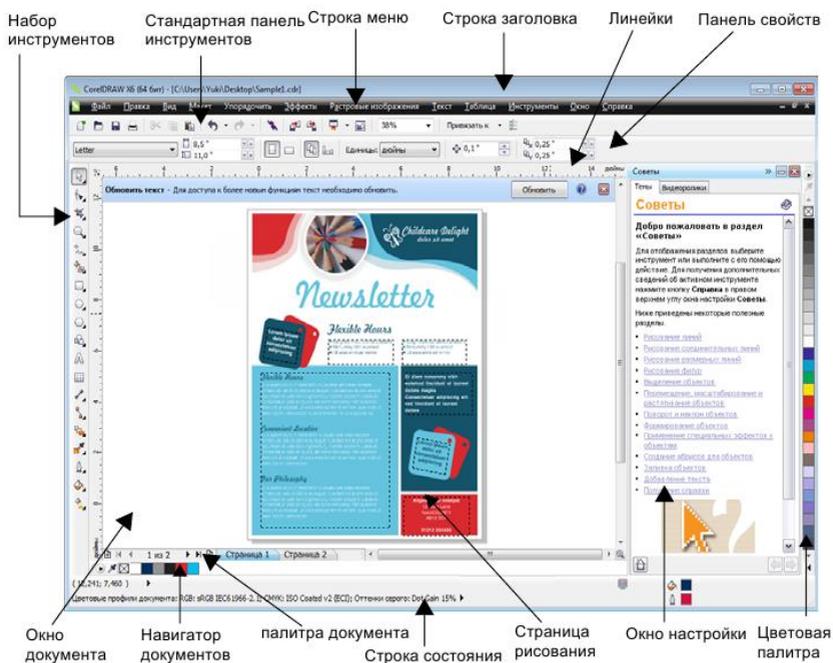


Рис. 33

– **Окно настройки** обеспечивает доступ к командам и параметрам, связанным с конкретным инструментом или задачей.

– **Горизонтальная и вертикальная линейки** позволяют определить размер и расположение объектов в документе.

– **Навигатор документов** позволяет добавлять страницы в документ и перемещаться между страницами в документе.

– **Окно документа** – это рабочая область, ограниченная полосами прокрутки и другими элементами управления. Она включает страницу рисования и окружающую область.

– **Страница рисования** – это прямоугольник, ограничивающий печатаемую область окна документа.

– **Палитра документа** позволяет отслеживать цвета, используемые в документе.

– **Цветовая палитра** – это закрепляемая панель, содержащая образцы цвета.

– **Строка состояния** содержит сведения о свойствах объекта, таких как тип, размер, цвет и заливка. Здесь также отображаются состояние цветопробы, цветовые профили и другие сведения о цветах документа.

Средства CorelDraw позволяют выбрать качество отображения документа на экране. Выбор качества зависит от типа выполняемой работы и доступных системных ресурсов. Выбрать подходящее качество позволяют можно с помощью одного из режимов из меню **Вид**:

– **Простой каркас** – отображаются исходные контуры объектов

– **Каркас** – отображаются контуры исходных и промежуточных объектов

– Каркасные режимы полезны при работе со сложными перетеканиями, заливками и контурами.

– **Черновой** – рисунок отображается в цвете. Заливки отображаются в виде штриховки или как одноцветные комбинации начального и конечного цветов (для градиентных заливок). Растровые изображения отображаются с низким разрешением.

– **Нормальный** – рекомендован для использования в повседневной работе, т.к. позволяет быстро отобразить доку-

мент. В некоторых случаях кривые, текст и градиентные заливки выглядят несколько ступенчато.

– **Чистовой** – установлен по умолчанию. контуры объектов сглаживаются. Цвета на экране лучше соответствуют печатаемым цветам.

Важно при создании нового файла правильно указать параметры и макет страницы, хотя средства CorelDraw позволяют это сделать и позже.

Некоторые параметры страницы доступны на панели свойств инструмента Указатель. Для вызова диалогового окна. В меню *Макет – Параметры страницы* или в меню *Инструменты(Сервис) – Параметры*, выберите категорию *Документ – Страница* откроются пункты этого раздела:

– **Размер** – позволяет выбрать: **тип документа** обычная бумага или метки (наклейки); **ориентацию страницы** портретная (книжная) или ландшафт (альбомная); выбрать **размер бумаги**; установить **поля перекрытия** печатаемой области.

– **Макет** – содержит список определенных макетов. при выборе макета рекомендуется проверить получившиеся высоту и ширину страницы и количество страниц на листе. Если результат не удовлетворяет требованиям проекта необходимо изменить общий размер страницы.

– **Метка** – позволяет настроить параметры наклейки.

– **Фон** – предоставляет выбрать один из вариантов фона листа.

Рисунки, выполненные в CorelDraw приходится вставлять в другие файлы, например, создаваемые в Word или PowerPoint. Рисунки в формате .cdr отображаются в этих программах некорректно. В CorelDraw присутствует инструмент, позволяющий переводить рисунки в растровые форматы, такие как .jpeg и .pdf. Перевод в другие форматы осуществляется через меню Файл/Экспорт.

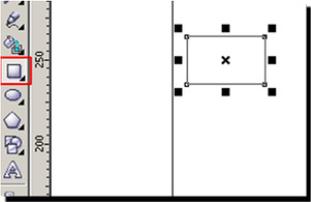
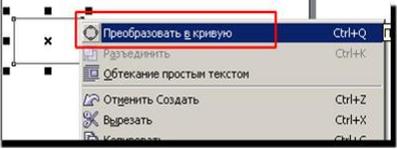
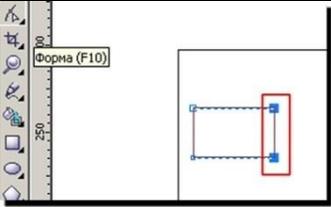
Далее на конкретных примерах рассматриваются различные инструменты CorelDraw.

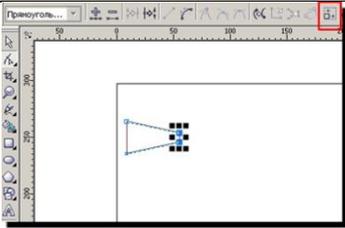
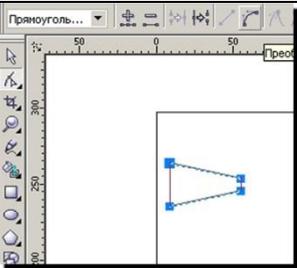
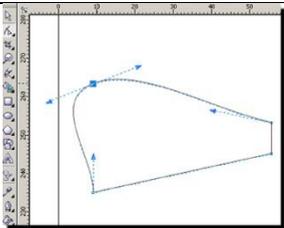
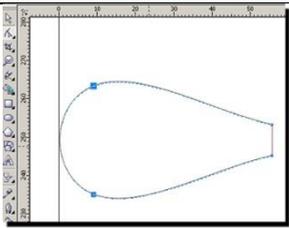
## 2.2. Задания для лабораторной работы

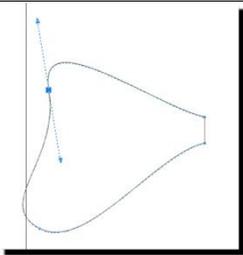
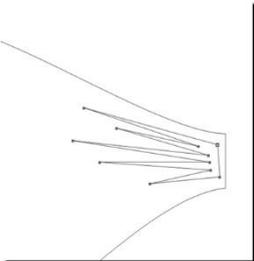
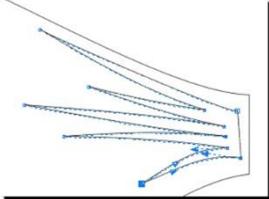
**Задание 1.** Создание объектов. Преобразование объектов

**Цель:** Научиться создавать и преобразовывать объекты на примере создания «Бантика»

### Указания к выполнению задания

ВЫПОЛНЯЕМОЕ ДЕЙСТВИЕ	РЕЗУЛЬТАТ
<p>1. Рисуем прямоугольник произвольного размера с помощью инструмента  <b>Rectangle (Прямоугольник (F6))</b>, (но все таки нарисуйте его такого размера, чтобы он приближался к квадрату).</p>	
<p>2. Щелкните правой кнопкой мыши на прямоугольнике, преобразуем его в кривую.</p>	
<p>3. С помощью инструмента  <b>Shape (Форма(F10))</b> выделяем два крайних правых узла.</p>	

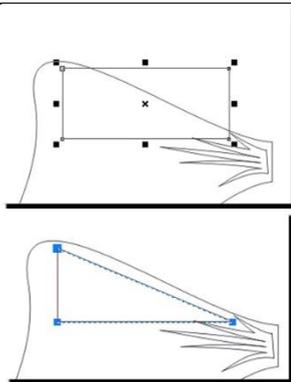
<p>4. В верхней панели инструментов нажимаем кнопочку  Scale and Stretch (Масштаб и растяжение) и, зажав клавишу <b>Shift</b>, тянем за средний верхний указатель вниз.</p>	
<p>5. Щелкните указателем мыши где-нибудь на свободном пространстве, а потом двойной щелчок на инструменте <b>Shape (Форма)</b> , чтобы выделить все узлы кривой и преобразуем все линии в кривые, нажав сверху кнопку  <b>Convert To Curve (Преобразовать линию в кривые)</b></p>	
<p>6. Нажимаем мышкой на левом верхнем узле, нажимаем в верхней панельке кнопку  <b>Made Node Symmetrical (Сделать узел симметричным)</b> и получим скругленный угол.</p>	
<p>7. Так же поступаем со вторым узлом.</p>	

<p>8. Теперь тянем эти узлы в разные стороны и направления, придавая им форму, похожую на бантик</p>	
<p>9. Далее выбираем инструмент <b>Перо (Pen Tool)</b>  и рисуем кривую (типа, складки на бантике)</p>	
<p>10. Придаем лучикам небольшое искривление. Двойной щелчок на инструменте <b>Shape (Форма)</b> , в верхней панели нажимаем кнопку , переводим прямые линии в кривые, затем необходимо нажать кнопку  <b>Make Node A Cusp (Создать узел с острым углом)</b>, снимаем выделение с фигуры и потом двигаем линии в нужном направлении, чтобы они чуть искривились</p>	

11. Опять рисуем прямоугольник, преобразуем его в кривую, инструментом **Shape (Форма)**



удаляем верхний правый узел, получаем треугольную кривую



12. Опять выделяем все узлы двойным щелчком на инструменте

**Shape (Форма)**



, жмем

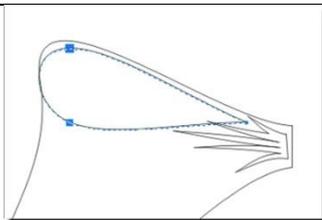


кнопку, переводим прямые линии в кривые, выделяем слева



два узла и жмем кнопку

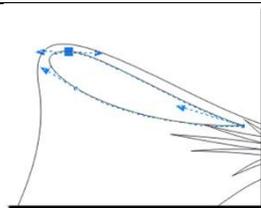
**Make Node Symmetrical (Сделать узел симметричным)**. Получаем такую фигуру



13. Передвигаем узлы по своему усмотрению, чтобы получить такую фигуру. Кстати, если Вас не устроит симметричность узлов вы всегда можете их преобразовать в узлы с острым углом,



нажав кнопочку **Make Node A Cusp (Создать узел с острым углом)**



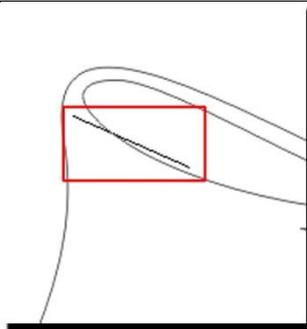
14. Выбираем инструмент



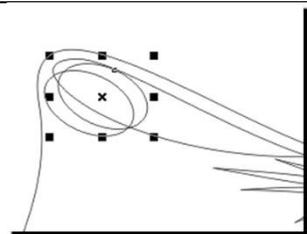
**Ellipse Tool (Эллипс)**, в нем выбираем построение эллип-



са по 3 точкам, строим эллипс так, чтобы его центральная линия шла параллельно боковой грани банта (это, в общем-то, не принципиально, но так удобнее, не надо потом поворачивать фигуру)



15. Нарисовали эллипс, продублировали его, немного сместили, если захочется, чуть увеличили масштаб



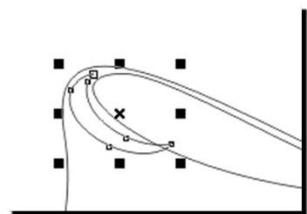
16. Выделяем оба эллипса с помощью инструмента **Pick (Указатель)**



и в верхней панели инструментов нажимаем кнопку **Back minus Front (Зад-**



**ние минус передние)**. Получаем такую фигуру, будущий блик



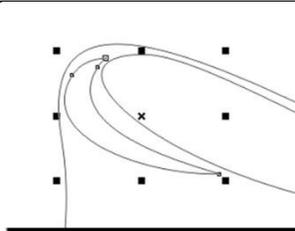
17. Если блик залезает на внутреннюю часть бантика, двигаем его, поворачиваем, меняем направление узлов, применяя инструмент **Pick (Указатель)**



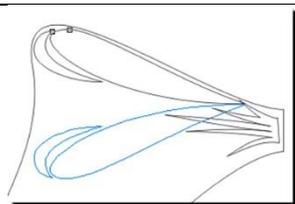
и **Shape (Форма)**



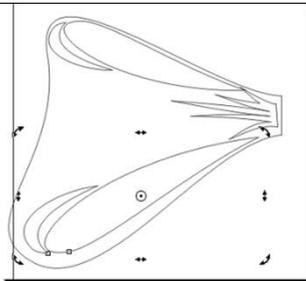
Примерно так



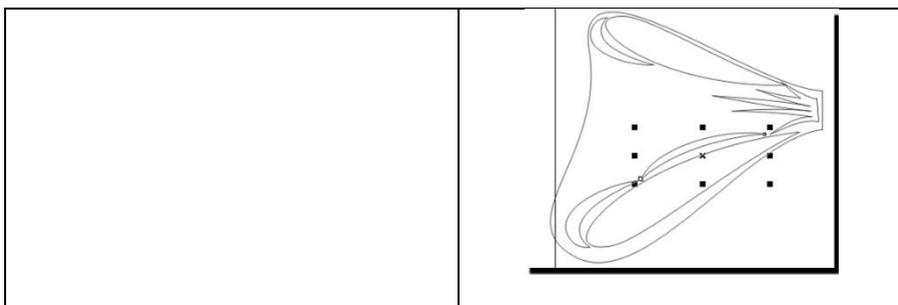
18. Инструментом **Pick (Указатель)** выделяем внутреннюю часть банта и блик, зажимаем на клавиатуре **Ctrl** и тянем мышью вниз за средний верхний указатель левой кнопкой мыши. Не отпуская левую кнопку мыши, нажимаем правую. Таким образом мы получаем вертикально отраженную копию наших объектов.



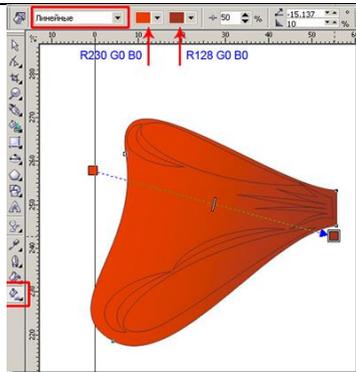
19. Смещаем эти две фигуры к нижнему краю банта, поворачиваем фигуру, если надо, увеличиваем масштаб.



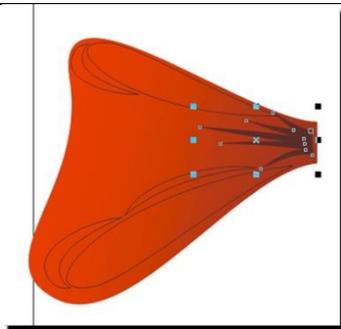
20. Таким же образом, как мы создавали первый блик, создаем второй, внизу, побольше, такой, например



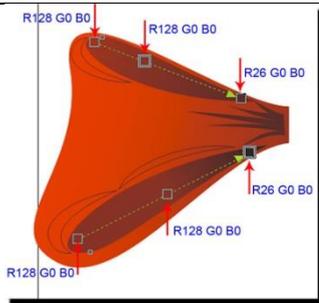
21. Ну вот, теперь все готово для дальнейшего творчества! Выделяем основную фигуру банта, применяем к ней линейную заливку. Цвета – на Ваш выбор – только вначале банта цвет светлее, в конце – темнее



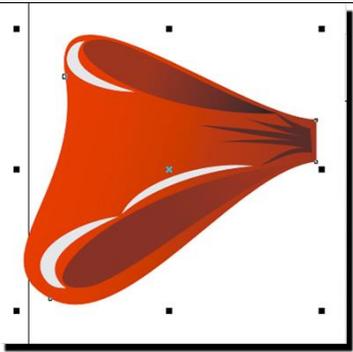
22. Убираем обводку, щелкнув правой кнопкой мыши на пустом перечеркнутом квадратике. Выделяем складку, заливаем темной однородной заливкой, убираем обводку



23. Выделяем внутренние части банта, заливаем линейным градиентом, только он должен быть темнее, чем градиент у банта. Обводку убираем

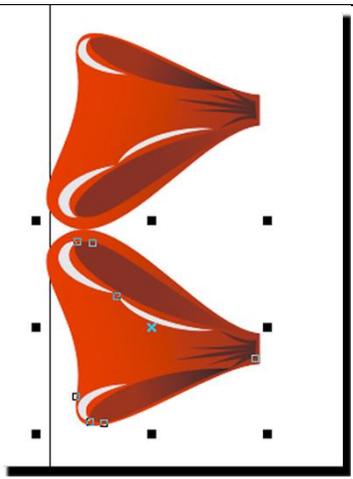


24. Осталось залить блики белым цветом и убрать обводку

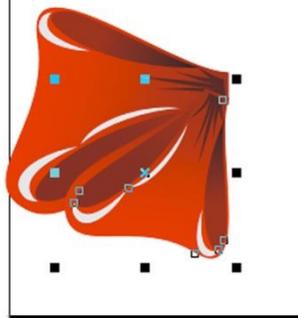


25. Выделяем все объекты двойным щелчком по **Указателю**

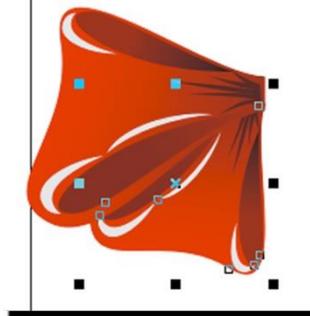
(**Pick**) , группируем фигуру, нажав кнопку в верхней панели инструментов , жажимаем **Ctrl**, тянем левой кнопкой мыши за верхний средний указатель, не отпуская левую кнопку, ждем правую, получаем вертикально отраженную копию бантика.



26. Теперь немного уменьшаем масштаб нижней части бантика (тянем с зажатой клавишей **Shift** за диагональные указатели), поворачиваем нижнюю фигуру и подвигаем ее к верхней.

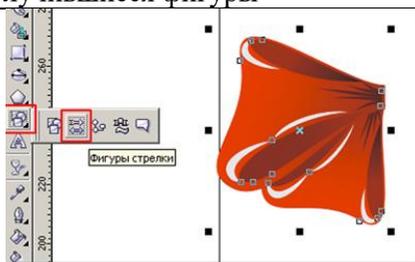


27. Теперь на клавиатуре нажимаем сочетание клавиш **Ctrl+PageDown** – перемещаем группу вниз (можно просто в диспетчере объектов перетащить эту фигуру вниз).

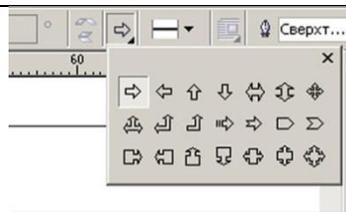


### 28. Группируем обе получившиеся фигуры

29. Рисуем либо с помощью инструмента **Основные фигуры (Basic Form)** либо инструментом **Free Hand** ленточку.



Я рисовала через Основные фигуры. В верхней панели выбираете нужную форму стрелки.



Рисуем стрелку произвольного размера, потом переведите получившуюся стрелку в кривую, поработайте с направлениями кривых, чтобы получилось искривление ленты.  
В общем, должно получиться что-нибудь такое



30. Заливаем линейным градиентом (на Ваш вкус)

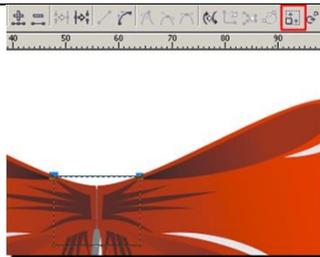


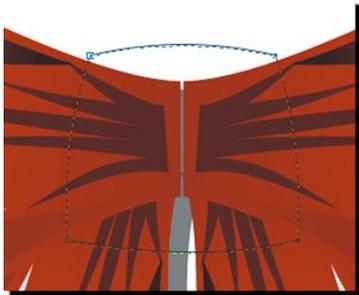
31. Перемещаем ленточку под бант, группируем все объекты, делаем горизонтальное отображение, группируем, делаем копию, заливаем серым цветом, смещаем под бант и чуть в сторону (делаем тень). Почти готово, но чего-то не хватает, Вам не кажется? Правильно, узла!

32. Делаем узел. Рисуем прямоугольник, переводим в кривые. С помощью инструмента **Shape**



**Tool** выделяем два верхних узла прямоугольника и в верхней панели инструментов



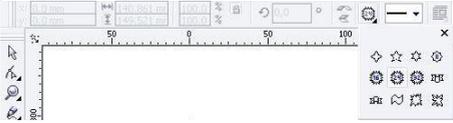
<p>нажимаем кнопку  <b>Scale and Stretch (Масштаб и растяжение)</b> и, зажав клавишу <b>Shift</b>, тянем указатели внутрь, но не очень сильно.</p>	
<p>33. Теперь делаем прямые линии кривыми, нажав  <b>Convert To Curve (Преобразовать линию в кривые)</b>. Теперь тянем каждую из сторон вверх, но не сильно, только, чтобы она чуть выпуклой стала.</p>	 <p>The diagram shows a red ribbon with a central vertical crease. Dashed lines indicate the original straight edges of the ribbon's loops. A blue dashed line above the top loop shows it being pulled upwards to create a slight curve. The ribbon has a gradient from dark red to light red.</p>
<p>34. Заливаем градиентом, удаляем обводку, делаем блик.</p>	 <p>The final image shows a 3D-rendered red ribbon with a gradient from yellow to blue. The ribbon has a central knot and two long tails. The knot and tails are shaded to create a sense of depth and volume, with white highlights on the edges to simulate light reflection.</p>

**Задание 2.** Отражение, копирование и удаление объектов. Создание и редактирование контуров в CorelDraw.

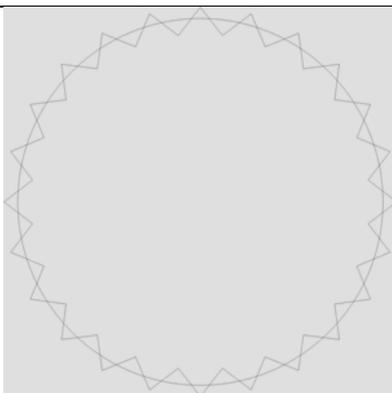
**Цель:** Научиться отражению, копированию и удалению объектов, созданию и редактированию контуров в CorelDraw.

### Указания к выполнению задания

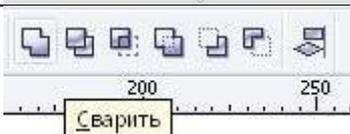
Разберем работу на примере создания металлической крышки.

<b>ВЫПОЛНЯЕМОЕ ДЕЙСТВИЕ</b>	<b>РЕЗУЛЬТАТ</b>
1. Рисуем окружность.	
2. В панели инструментов выбираем инструмент Формы звезд.	
В настройках выбираем 24-рехконечную звезду.	

Рисуем. Располагаем ее так, чтобы вершины немного выступали за границы окружности.



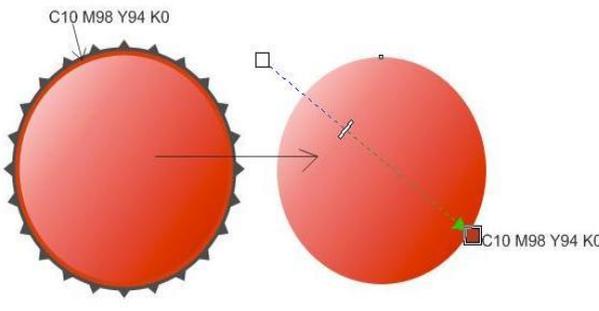
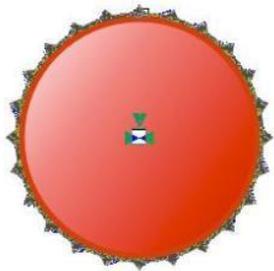
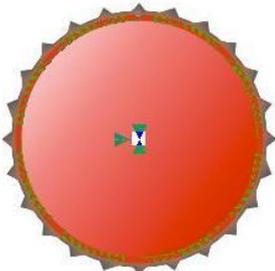
3. Выбираем оба объекта и нажимаем Сварить.



4. Далее рисуем еще две окружности.



5. Убираем контур у всех фигур. Самый дальний объект окрашиваем в 70% Black.

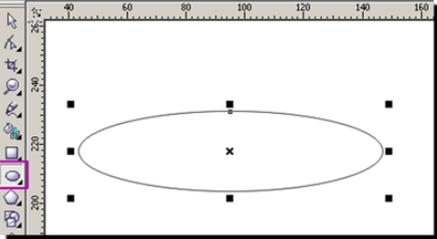
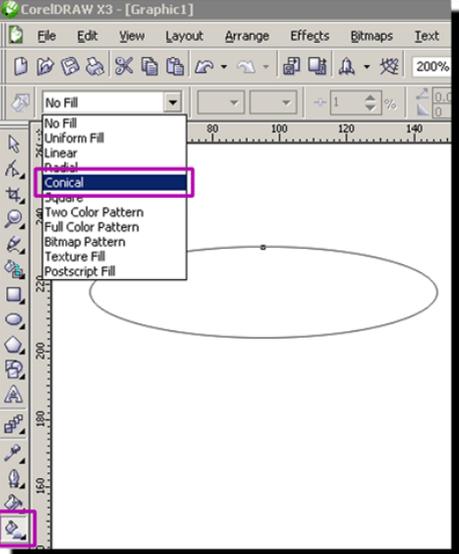
<p>Остальные два объекта в цвета, которые вам хочется или необходимо. Например так:</p>		
<p>6. В панели инструментов выбираем Интерактивное перетекание.</p>		
<p>Делаем плавный переход сначала между дальним и средним объектом.</p>		
<p>Затем между средним и ближним объектом.</p>		

<p>7. Теперь создаем блики. Рисуем два объекта произвольной формы, один внизу, другой выше. Раскрашиваем их в белый цвет.</p>	
<p>8. Затем применяем инструмент Интерактивная прозрачность.</p>	
<p>9. Если хотите, добавьте что-нибудь еще.</p>	
<p>результат:</p>	

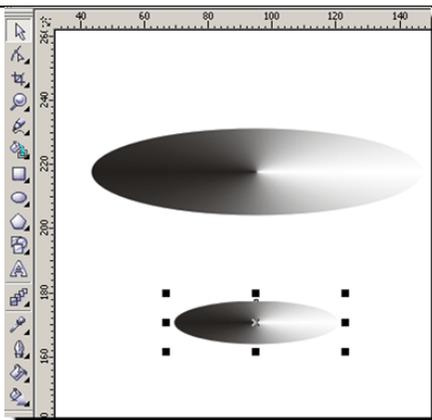
### Задание 3. Создание и редактирование контуров в CorelDraw.

**Цель:** Научиться создавать и корректировать контуры в CorelDraw на примере объемных изображений чаши, бокала.

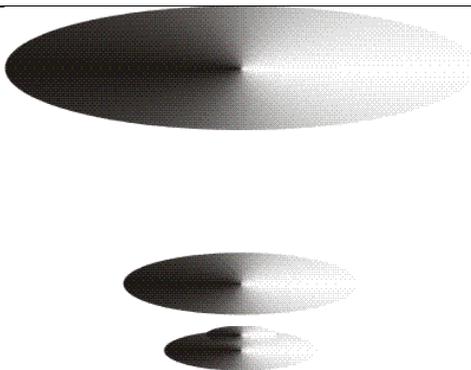
#### Указания к выполнению задания

ВЫПОЛНЯЕМОЕ ДЕЙСТВИЕ	РЕЗУЛЬТАТ
В новом документе рисуем эллипс	
Заливаем его коническим градиентом	

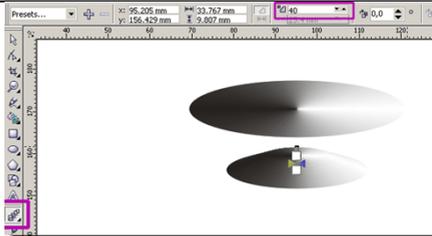
Настройки оставляем пока без изменения. Убираем обводку (щелкаем правой кнопкой мыши на перевернутом квадратике) Теперь подумаем, что мы хотим получить в итоге. Давайте начнем с чего попроще, с вазы под фрукты. Делаем копию эллипса, сдвигаем ее вниз, немного уменьшаем размер



Делаем еще одну копию овала, размещаем ее еще ниже, и размер будет самый маленький из всех, потом еще одна копия, но размером больше, чем предпоследняя. Вот так



Теперь делаем интерактивное перетекание между овалами. Количество шагов перетекания ставим 30-40



<p>Получаем</p>	
<p>Делаем копию верхнего эллипса, чуть уменьшаем размер, заливаем линейным градиентом</p>	
<p>Поработаем с заливками и получим чашу, представленную на примере:</p>	

**Задания для самостоятельной работы:**

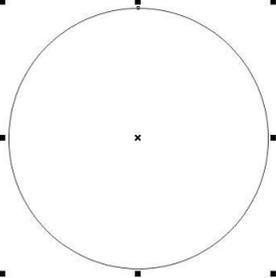
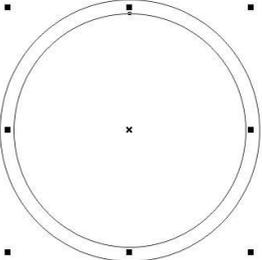
Создайте следующие  
объекты по образцу:

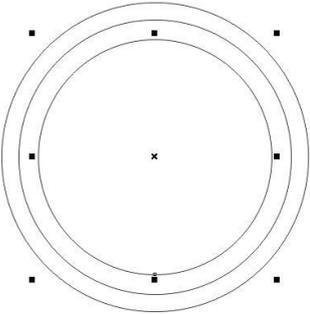
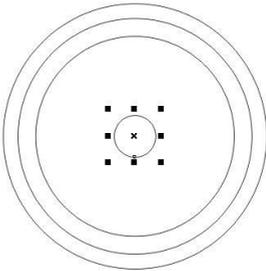
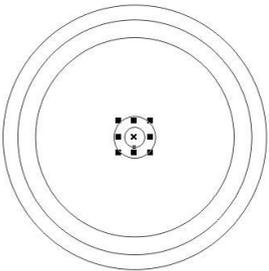
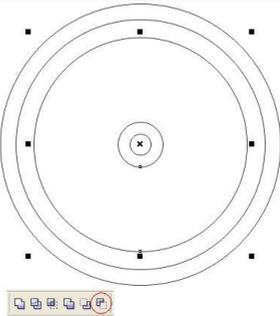


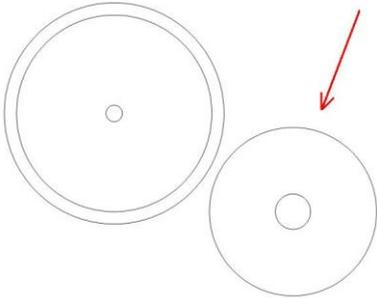
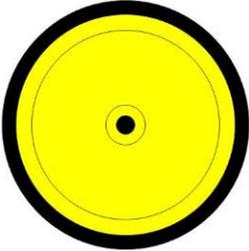
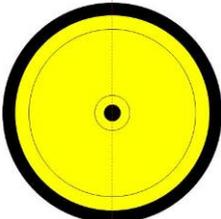
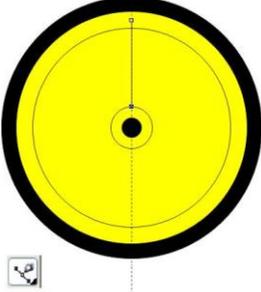
#### Задание 4. Создание рисунков и кривых в CorelDraw.

**Цель:** Научиться создавать и корректировать рисунки в CorelDraw с использованием кривых на примере создания значка радиоактивности.

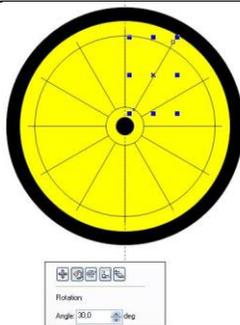
##### Указания к выполнению задания

ВЫПОЛНЯЕМОЕ ДЕЙСТВИЕ	РЕЗУЛЬТАТ
1. Создаём пять равных окружностей с помощью инструмента Ellipse Tool.	
Первая	
Вторая	

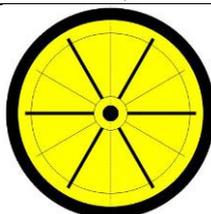
<p>Третья</p>	
<p>Четвертая</p>	
<p>Пятая</p>	
<p>2. Далее выделяем Зью и 4ую окружности и с помощью кнопочки Back Minus Front "обрезаем".</p>	

<p>Должно получиться вот что:</p>	
<p>3. Закрашиваем окружности по схеме: 1ая - чёрный, 2ая - жёлтый, То, что у нас получилось в результате шага №2 не закрашиваем, оставляем без заливки, 5ая - чёрный.</p>	
<p>4. Выставляем направляющую линию (она нам пригодится)</p>	
<p>5. С помощью инструмента Bezier Tool рисуем линию, как показано на рисунке:</p>	

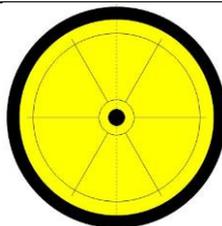
6. Переносим центр вращения этой линии в центр (простите за повторение) самой маленькой окружности (5ой) и с помощью вращения (Rotate) дублируем эту линию под углом 30 градусов, как показано на рисунке ниже:



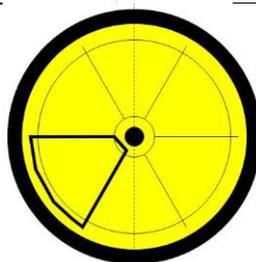
7. На этом рисунке толстыми линиями выделены линии, которые нам понадобятся, остальные - нужно удалить.



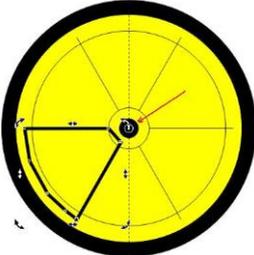
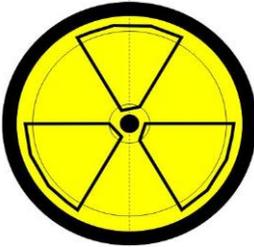
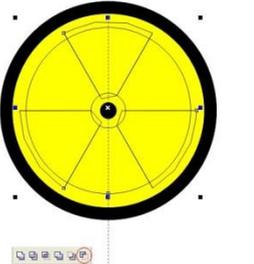
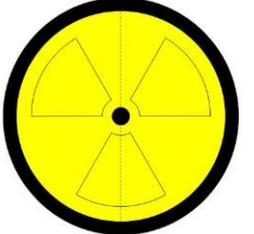
Вот, что должно получиться:



8. Рисуем с помощью инструмента Bezier Tool такую вот фигуру по контурам линий, что мы оставили, как на рисунке:



Толщину линий указывать не обязательно.

<p>Далее перемещаем центр вращения (как в шаге №6) этой фигуры в центр (простите ещё раз за повторение) самой маленькой окружности (5ой). Вот, что должно быть:</p>	
<p>С помощью ручного вращения (вращения вручную, мышкой, а не инструментом Rotate) дублируем эту фигуру по контурам линий следующим образом:</p>	
<p>9. Теперь выделяем эти фигуры и пончик, который получился в результате шага №2.</p>	
<p>"Обрезаем" пончик, у вас должно получиться вот что:</p>	

10. Закрашиваем и получаем значок:



Также его можно приукрасить бликом и жёлтой тенью и добавить надпись:



## 3. ГРАФИЧЕСКИЙ РЕДАКТОР ADOBE PHOTOSHOP

### 3.1. Интерфейс и возможности

Photoshop CSx открывает файлы в 28-ми форматах и сохраняет в 16. Собственный формат Photoshop - PSD – формат, оптимизированный для возможностей и функций Photoshop. Открываются и сохраняются файлы такого формата быстрее, чем в любом другом. Наиболее распространены также форматы JPEG, BMP, GIF, TIFF.

На рис. 34 представлен интерфейс Adobe Photoshop.

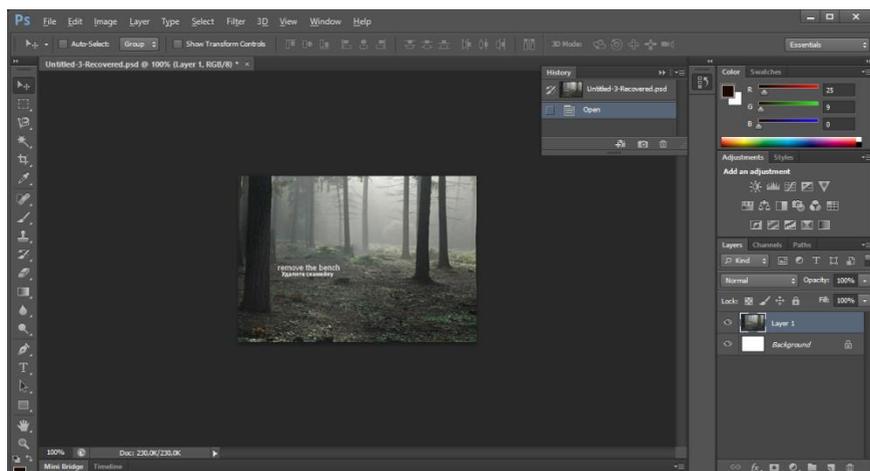


Рис. 34

На рис. 34 показаны следующие элементы интерфейса:

- **Строка меню**, в котором содержится большинство выполняемых операций.
- **Панель инструментов Photoshop**, включающая значки 22 инструментов. Если рядом со значком инструмента име-

ется маленькая черная стрелка, щелкните на ней и не отпускайте кнопку мыши в течение одной секунды – раскроется дополнительная панель со списком инструментов, входящих в ту же группу.

– **Панель параметров.** По умолчанию выводится в верхней части экрана непосредственно под строкой меню. Здесь отображаются параметры выбранного инструмента.

– **Палитры.** Многие инструменты и операции Photoshop представлены на так называемых *палитрах* - вкладках в небольших окнах, расположенных обычно вдоль правого края главного окна Photoshop. Эти палитры позволяют быстро и эффективно выполнять операции над изображением, экономя время, которое занимает выбор команд из меню и установка параметров в диалоговых окнах. Вывести или скрыть определенную палитру можно щелчком на ее имени в меню Window (Окно). Отобразить или скрыть все палитры вместе с панелью инструментов и панелью параметров поможет клавиша Tab. А если необходимо скрыть палитры, но оставить при этом на экране панель инструментов, следует воспользоваться клавишами Shift+Tab.

– **Окно изображения.** Окно можно как перетаскивать в пределах рабочего пространства Photoshop, так и менять его размер. Чтобы переместить окно, следует захватить его мышью за полосу заголовка, а для изменения размера — потянуть за любую из четырех границ окна. В окне изображения содержится информация о документе

В Photoshop ведется история работы над изображением, в которую записывается каждая выполняемая операция и соответствующее ей состояние изображения. Эта история хранится на палитре History (История) (рис. 34), открываемая командой

Window – History (Окно – История), в виде элементов списка (см. рис). Каждый элемент списка называется состоянием. Для того чтобы отменить одно или несколько действий:

1. Перетащите строку состояния, поместив ее на кнопку с изображением корзины в правом нижнем углу палитры History (История).

2. Щелкнув на строке состояния, выберете из меню палитры History (История) команду Delete (Удалить) или можете щелкнуть на кнопке с изображением корзины.

3. Выделите строку состояния. Все строки, расположенные под ней, станут недоступными. Теперь, после выполнения в документе любой операции редактирования, недоступные строки будут удалены.

4. Выполните из меню палитры History (Протокол) команду Clear History (Очистить историю), которая удалит все автоматически сохраненные состояния; снимки же при этом останутся нетронутыми.

5. Активизируйте команду Edit – Purge – Histories (Правка – Очистить – История). Программа удалит все состояния, кроме последнего в списке; снимки в этом случае тоже сохранятся. Данное действие отменить нельзя.

Далее на примерах показаны возможности различных инструментов AdobePhotoshop.

## **3.2. Задания для лабораторной работы**

**Задание 1.** Редактирование изображения в Adobe Photoshop.

1. Откройте файл flower.jpg (рис. 35).



Рис. 35

2. Включите щелчком мыши на панели инструментов инструмент  Rectangular Marquee Tool (Прямоугольная выделенная область). Поместите указатель мыши в нижний угол изображения, нажмите левую кнопку мыши и, не отпуская ее, переместите указатель до противоположного угла выделяемого фрагмента (рис. 1).

3. Откройте меню Select (Выделение) и выполните команду Deselect (Отменить выделение) или на клавиатуре нажмите **Ctrl+D**. Данная команда снимает выделение. (Если активен инструмент прямоугольного или эллиптического выделения, это действие можно выполнить и более простым способом – щелкнуть в любом месте изображения вне выделенной области).

4. Попробуйте выделить фрагмент рисунка инструментом  Elliptical Marquee Tool (Эллиптическая выделенная область). Для этого укажите мышью один угол условного прямоугольника, в котором впишется эллипс, и, не отпуская левую кнопку мыши, переместите указатель до противоположного угла (рис. 36).

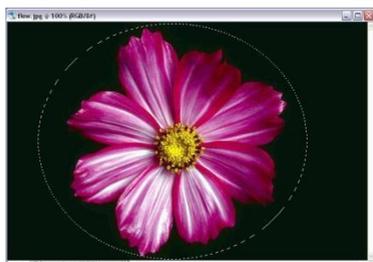


Рис. 36

5. Снимите выделение. Откройте меню Select (Выделение) и выполните команду Reselect (Возобновить выделение). Вы увидите, что эта команда восстановила последнее отмененное выделение.



Рис. 37

6. Выделите фрагмент рисунка произвольной формы при помощи инструмента  **Lasso Tool** (Лассо). В любой точке на границе области, которую нужно выделить, нажмите кнопку мыши и, не отпуская ее, ведите указателем по границе – за ним потянется линия выделения (рис. 3.). Чтобы замкнуть выделение, либо отпустите кнопку мыши, доведя эту линию до исходной точки, либо отпустите кнопку в любом месте, и тогда конечная и начальная точки соединятся прямой линией.

7. Снимите выделение. Воспользуйтесь инструментом

 Polygonal Lasso (Многоугольное лассо). Этот инструмент применяется для выделения области, граница которой состоит из прямолинейных отрезков (рис. 38), образующих многоугольник. Щелкните в одном из углов многоугольника, затем во втором, третьем углах и т. д. Чтобы замкнуть границу выделения, щелкните на исходной точке или двойным щелчком отметьте последний угол, и он автоматически соединится с первым прямым отрезком. Клавиша Shift помогает при необходимости расположить отрезки строго горизонтально, вертикально или под углом 45°.

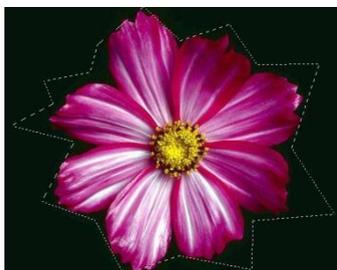


Рис. 38

8. Снимите выделение. Изучите инструменты  Magnetic Lasso Tool (Магнитное лассо) и  MagicWand (Волшебная палочка). Выделите фрагменты изображения на свое усмотрение.

9. Попробуйте воспользоваться дополнительными возможностями кнопок  на панели параметров.

### Операции с выделенной областью

- **Перемещение выделенной области.** Выделите область изображения любым инструментом выделения, нажмите внутри нее кнопку мыши и, удерживая ее нажатой, перетащите

область в нужное место, отпустив после этого кнопку.

- **Сдвиг выделенной области.** Выбрав инструмент выделения, нажмите одну из клавиш со стрелками, чтобы переместить выделенную область на 1 пиксель в направлении, соответствующем направлению стрелки. Если же клавиши со стрелками использовать вместе с клавишей Shift, область будет перемещаться на 10 пикселей.

- **Перемещение выделенного фрагмента.** Активизируйте инструмент Move (Перемещение). Нажав внутри выделенного фрагмента кнопку мыши и удерживая ее, перетащите фрагмент. Если выбран один из инструментов выделения, для перемещения выделенного фрагмента нужно поместить внутрь него указатель мыши, нажать клавишу **Ctrl** (указатель примет форму ножниц) и, удерживая ее нажатой, переместить выделенный фрагмент в нужное место.

#### **ПРИМЕЧАНИЕ**

В режиме перемещения выделенный фрагмент становится «плавающим» – его можно перетаскивать сколько угодно раз с помощью мыши, не нажимая никаких дополнительных клавиш. Когда вы щелкнете вне выделенного фрагмента, он зафиксируется на новом месте, а выделение снимется.

- **Сдвиг выделенного фрагмента.** Так же как выделенную область, выделенный фрагмент можно сдвигать по горизонтали и вертикали на фиксированное расстояние. Активизировав инструмент Move (Перемещение), с помощью стрелок переместите область в нужное место: при каждой нажатии клавиши со стрелкой она сдвигается в соответствующем направлении на 1 пиксель. Если одновременно удерживать клавишу Shift, сдвиг будет выполняться каждый раз на 10 пикселей.

- **Копирование выделенного фрагмента.** Выберите

инструмент **Move** (Перемещение). Затем, нажав и удерживая клавиши Alt+Ctrl, перетащите выделенный фрагмент мышью. Указатель мыши при этом принимает форму двух стрелок. Если вы повторите данную операцию, на том месте, откуда выполняется очередное перетаскивание, останется «отпечаток» выделенного фрагмента.

- **Вырезание выделенного фрагмента.** Откройте меню **Edit** (Редактирование) и выполните команду Cut (Вырезать). Выделенная область не пропала, она находится в буфере обмена.

- **Вклеивание выделенного фрагмента.** Откройте меню **Edit** (Редактирование) и выполните команду Paste (Вклеить). На экране появится тот самый фотокадр.

- **Трансформация выделенного фрагмента**

1. Выделите цветок с помощью инструмента выделения.

2. Скопируйте выделенный объект, не снимая выделения, зайдите в меню Edit (Редактирование) и выполните команду Free Transform (Свободное трансформирование). Вокруг цветка появилась рамка. Подведите курсор к уголкам этой рамки, и увидите, как он примет вид двухконечной стрелки. Поменяйте размер изображения. Чтобы трансформация была пропорциональной, достаточно нажать клавишу <Shift>. Чтобы повернуть выделенную область, поместите указатель мыши вне габаритной рамки. Он примет форму полукруглой двунаправленной стрелки поворота. Теперь, удерживая левую кнопку мыши нажатой, перемещайте указатель в направлении, необходимом для поворота рамки. Если одновременно удерживать клавишу <Shift>, выделенная область повернется на угол, кратный 15°.

3. Если Вы довольны новым размером выделенно-

гофрагмента, то нажмите <Enter>.

4. Переместите фрагмент в любое место изображения.

5. Не снимая выделения, повторите пункт 2, а затем 3,4.

Несколько раз проделайте то же самое.

6. Снимите выделение. У вас должно получиться примерно так: см. рис. 39

7. Закройте рисунок, сохранив внесенные изображения.



Рис. 39

### **Изменение размера изображений**

1. Откройте файл p1prru.jpg (рис. 40).

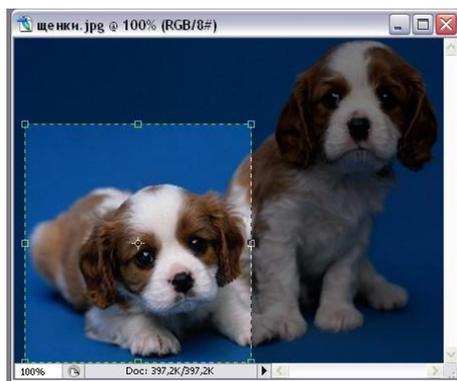


Рис. 40

2. Откройте меню Image (Изображение) и выполните команду **Image size (Размер изображения...)**.

На экране появится одноименное диалоговое окно, в котором можно изменить размер всего изображения, но при этом сохранить неизменным его разрешение.

3. Опция **Constrain Proportions (Пропорции)** и **Resample Image** должны быть включены. Это позволит изменить размеры изображения с сохранением пропорций и с сохранением разрешения.

4. В поле **Width (Ширина)** (в меню **Размер документа**) введите значение в 15 см. Сразу же в поле **Height (Высота)** появилось значение 11,26 см. Сработала опция сохранения пропорций.

5. Нажмите кнопку **ОК**. Изображение на экране уменьшилось.

6. Если Вас устраивает полученное изображение, то вы можете его сохранить. Иначе закройте файл без сохранения.

### **Кадрирование изображений**

Для работы нам понадобится то же самое изображение

с щенками (рис. 6).

1. Активируйте инструмент  Crop (Кадрирование), выделите только фотокадр, как показано на рис. 6. При этом область, не попавшая в выделение должна потемнеть.

2. Нажмите Enter – теперь выделенный фотокадр стал самостоятельным изображением. (Если вы решите отменить обрезку (до ее выполнения), нажмите клавишу Esc или кнопку Cancel (Отменить) на панели параметров)

3. Закройте это изображение, сохранив все изменения.

### **Гистограмма**

С помощью гистограммы легко определить темную тень изображения и самые яркие подсветки, которые называются черным поинтом и белым поинтом. Фактически это диапазон между двумя точками, который и определяет тональный (он же динамический) диапазон распределения темных и светлых участков. Корректировку изображения в Photoshop можно проводить с помощью Levels (Уровни) (Image – Adjustments – Levels (Изображение – Настройка – Уровни)). Здесь вам дается возможность регулировать яркость изображения пятью ползунками (рис. 41).

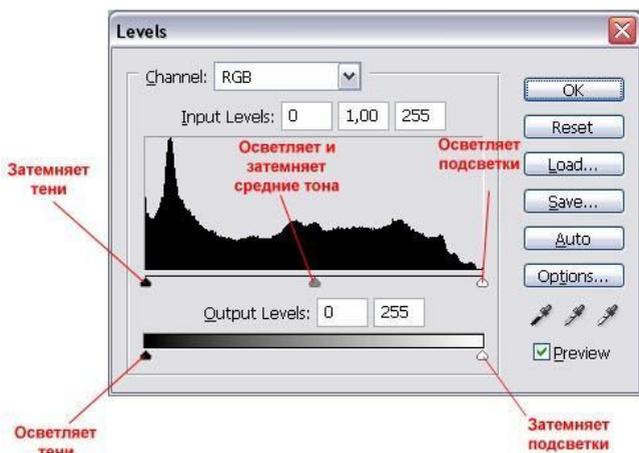


Рис. 41

Рассмотрим корректировку на конкретном примере



Рис. 42

Из гистограммы видно, что на изображении преобладают темные тона. В данном случае картина особенно не меняется в разных каналах, тем не менее, легко определить, что зеленый канал более смещен в сторону ярких оттенков. Итак, нам

необходимо осветлить это изображение и придать ему реалистичные оттенки. Для наглядности, рекомендую оставить гистограмму видимой во всех канал во время осуществления нижеописанных действий.

1. Выполните команду Image – Adjustments – Shadow / Highlights (Изображение – Настройка – Тени/Подсветки) и выставляем:

Shadows (Тени) — 100%

Highlights (Подсветки) — 0%



Рис. 43

На палитре можно наблюдать смещение диаграммы в сторону светлых оттенков (вправо).

2. Цвета на фотографии выглядят неестественно, необходимо добавить зеленых цветов. Для этого выполните команду Image – Adjustments – Levels (Изображение – Настройка – Уровни), сделайте активным синий канал (Blue) и передвиньте правый ползунок, расположенный под гистограммой влево (Input Levels (Входные уровни): 229), легко заметить, что, затемняя таким способом данный канал, увеличивается содержание зеленых оттенков на изображении.

3. Остается только добавить содержание красного, путем ослабления яркости Зеленого канала (Green). И так, сделайте активным канал Green (Зеленый) и передвиньте правый нижний ползунок влево (Output levels (Выходные уровни): 247).

4. Сохраните файл.

Цвета приведены в норму, изображение откорректировано. Безусловно, абсолютно ярким это изображение не сделаешь, да и в принципе не надо, потому что цветовое распределение оттенков должно соответствовать реальному положению вещей. Так, в данном случае это лес, деревья, маленький кусок неба, фотография в таких условиях не может быть яркой, поэтому в данном случае необходима была корректировка в сторону среднетоновых значений.

Для сравнения посмотрите гистограммы на рис. 44

Откройте свою собственную фотографию и поэкспериментируйте с помощью Levels (Уровни) (Image – Adjustments – Levels (Изображение – Настройка – Уровни)). Сохраните наиболее удачное новое изображение.

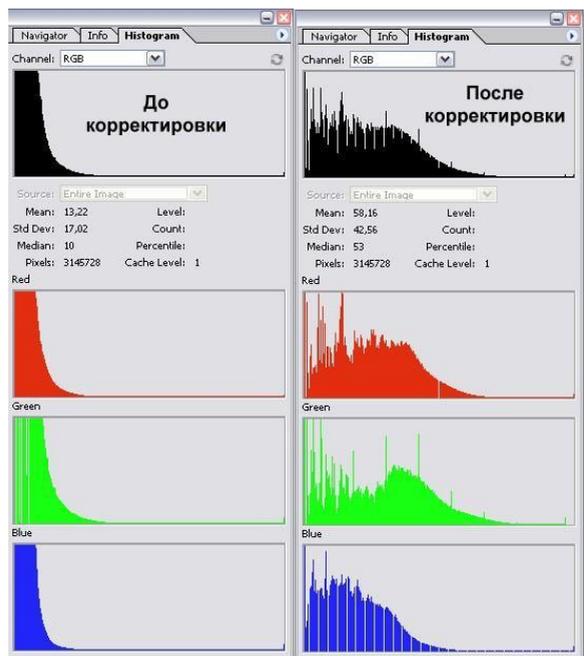


Рис. 44

## Задание 2. Меняем время суток на фото в PhotoShop

В этой работе вы узнаете, как изменить атмосферу обычного пейзажа в двух противоположных направлениях. Вы узнаете, как изменить цвет, добавить свет и создать мрачную атмосферу.

### Итоговый результат:

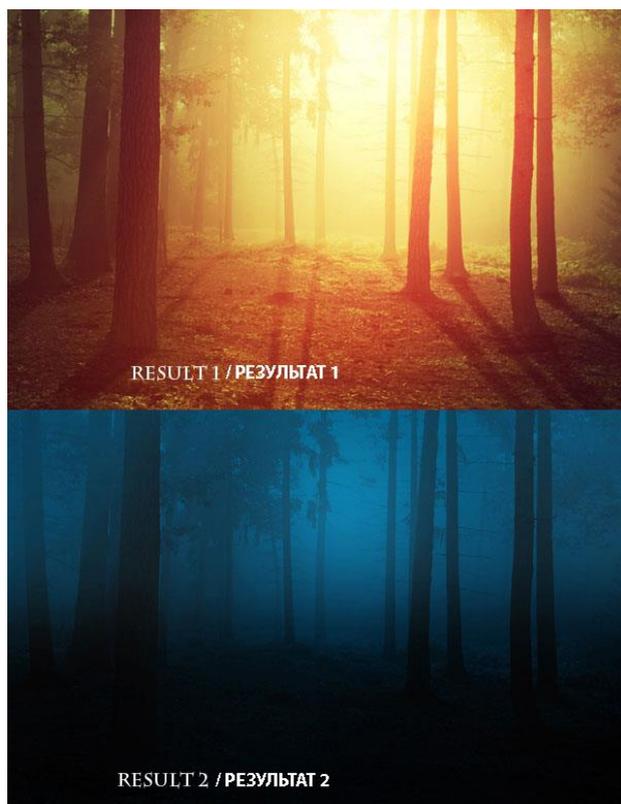


Рис. 45

## I. Как добавить свет к изображению с лесом

1. В первом шаге мы проведём базовую ретушь, удалив лишние детали. Откройте изображение с лесом. Нажмите клавиши (Ctrl+J), чтобы продублировать исходное изображение. На изображении с лесом нам необходимо удалить скамейку:



Рис. 46

С помощью инструмента **Лассо** (Lasso Tool), выделите часть изображения скамейки, а затем выполняем Edit – Fill – Content-Aware (Редактирование – Заливка – Заливка с учётом Содержимого). Результат представлен на рис. 47.

Проделайте то же самое с оставшейся частью скамейки. Результат должен соответствовать рис 48.

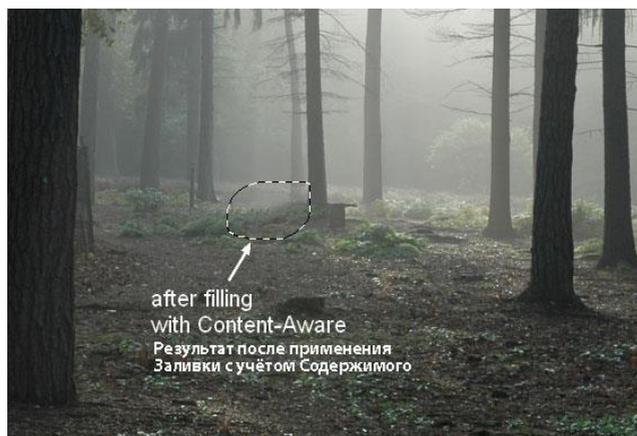


Рис. 47



Рис. 48

2. Далее мы изменим цвет леса с помощью нескольких корректирующих слоёв. Для этого нужно выполнить команду Layer – New Adjustment Layer – Gradient Map (Слой – Новый корректирующий слой – Карта Градиента). Откроется окно, в котором будет предложено задать имя новой карты. Для свой-

ства Opacity(Прозрачность) задаём значение 20 %. При нажатии ОК откроется окно, представленное на рис. 48

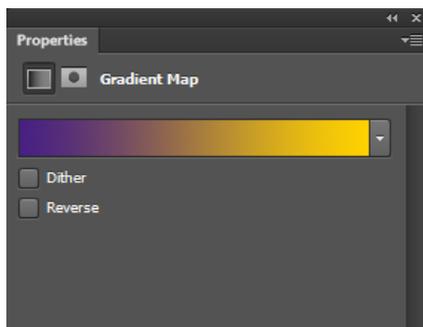


Рис. 49

При щелчке на полоске откроется окно GradientEditor (рис. 49), в котором можно задать цвета градиента. Выбираем левый нижний маркер, щёлкаем по области с цветом в свойстве Color, откроется окно выбора цвета (рис. 50). Цвет можно выбрать разными способами – подобрать нужный цвет на глаз и выбрать его курсором мыши, задать значения RGB или CMYK или ввести в поле # число в шестнадцатеричном формате. В этом случае каждые 2 цифры будет отвечать за красный, зелёный и синий цвета соответственно. 00 будет соответствовать отсутствию данного цвета, ff – максимальному значению. Зададим значение 472084.

Аналогично для правого маркера зададим значение ffd200. Результат применения карты градиента представлен на рис. 2.8.

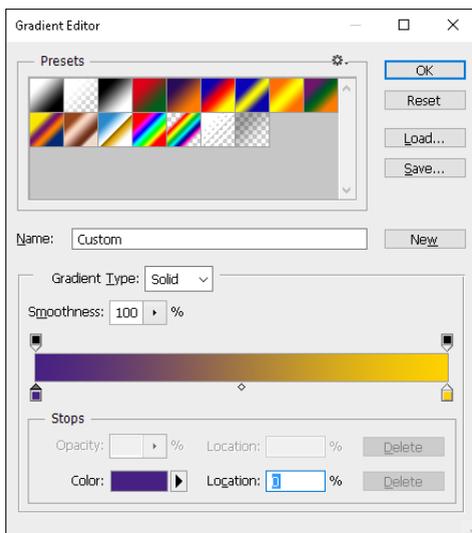


Рис. 50

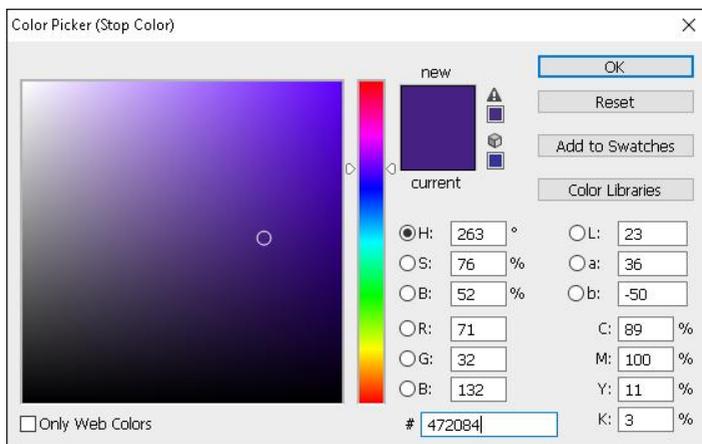


Рис. 51

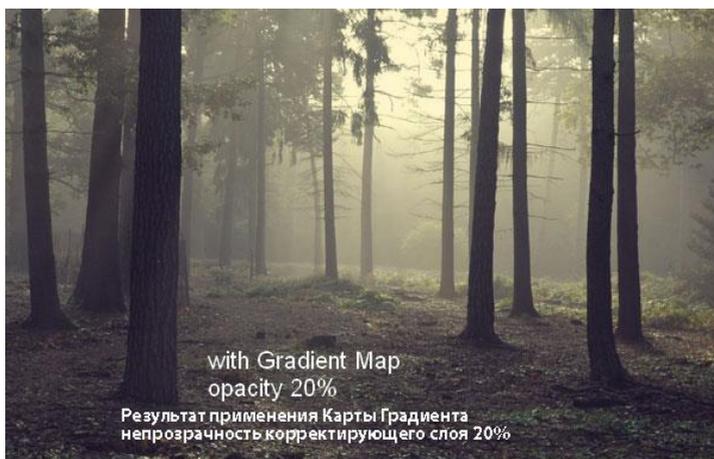


Рис. 52

3. Далее выполняем команду Layer – NewFillLayer – SolidColor (Слой - Новый слой-заливка – Цвет). Поменяйте режим наложения для данного слоя (Mode) на Exclusion (Исключение), 100%. В следующем окне задайте цвет #320227.

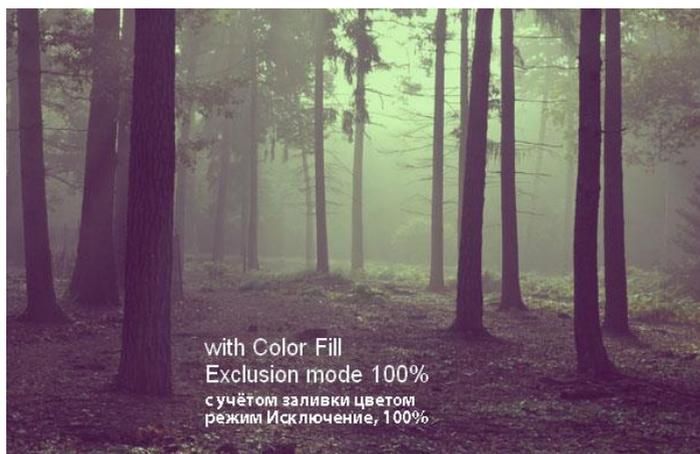


Рис. 53

4. Далее создаем корректирующий слой при помощи команды Layer – New Adjustment Layer – Color Balance(Слой – Новый корректирующий слой – Цветовой Баланс), чтобы добавить немного красных и жёлтых оттенков к изображению (рис. 54).

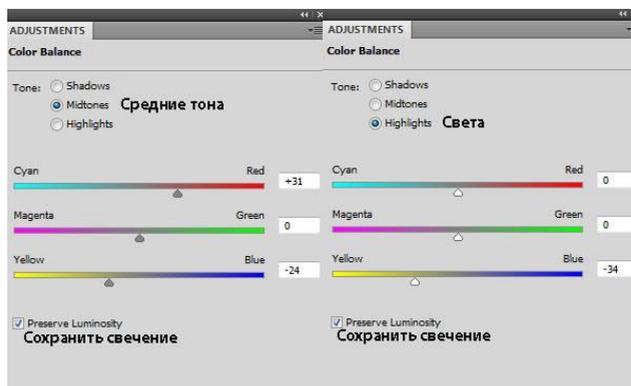


Рис. 54



Рис. 55

5. Создайте новый корректирующий слой Curves (Кривые), чтобы добавить контраста к изображению (рис. 56).

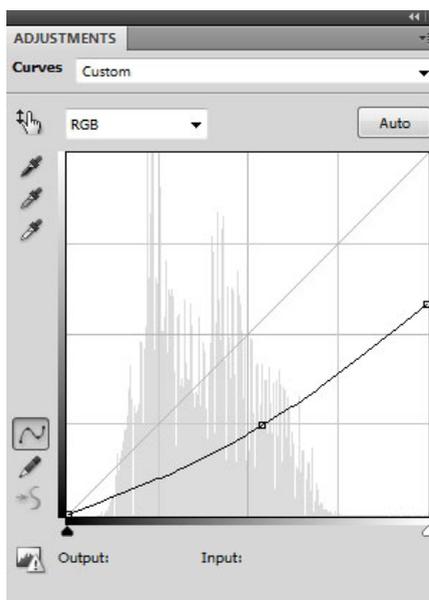


Рис. 56

Перейдите на слой-маску корректирующего слоя Curves (Кривые) и с помощью мягкой чёрной кисти, скройте коррекцию кривых в верхней центральной части изображения, откуда будет поступать основной свет.

Сгруппируйте все корректирующие слои.



Рис. 57

6. В этом шаге мы добавим солнечный свет к нашей сцене. Нажмите клавиши (Ctrl+Shift+N), чтобы создать новый слой поверх всех остальных слоёв. С помощью мягкой кисти, цвет кисти #190900, прокрасьте область, где вы намерены добавить свет. Поменяйте режим наложения для данного слоя на Linear Dodge (Линейный Осветлитель), 100%:



Рис. 58

7. Создайте новый слой. С помощью мягкой кисти, цвет кисти #fbd0b9, прокрасьте верхнюю часть изображения. Поменяйте режим наложения для данного слоя на Overlay(Перекрытие), 100%:

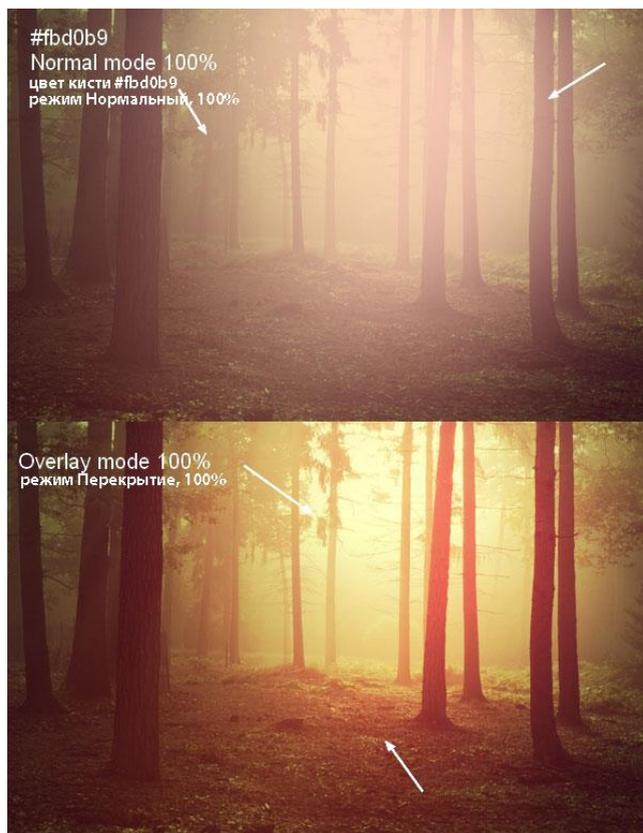


Рис. 59

8. Поменяйте цвет кисти на #f9d382, чтобы сделать свет более насыщенным. Поменяйте режим наложения для данного слоя на Overlay (Перекрытие), 100%:

*Не забудьте создать новый слой.*

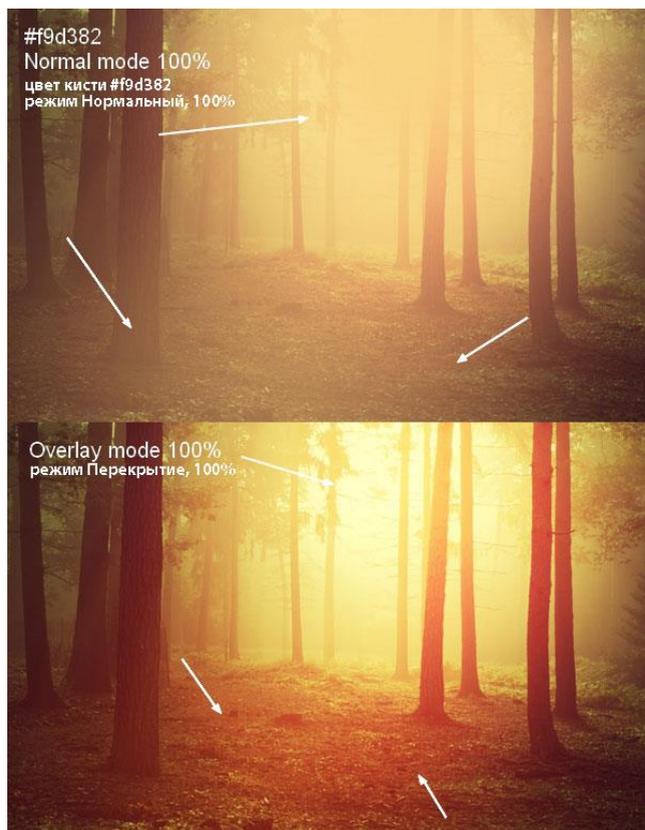


Рис. 60

9. Создайте новый слой. Чтобы создать основной световой блик, используйте более светлый оттенок #feeeca для кисти. Поменяйте режим наложения для данного слоя на Overlay (Перекрывтие), 100% (рис. 61)

Сгруппируйте все слои со световыми эффектами.



Рис. 61

10. Картина выглядит почти завершённой, но не забывайте про очень важную деталь: тени деревьев. На оригинальной фотографии свет мягкий, поэтому, тени деревьев почти не видны. Но т.к. мы усилили свет и контраст нашей сцены с лесом, то тени деревьев должны быть более видимыми.

Для этого, создайте новый слой ниже группы с корректирующими слоями. Выберите инструмент Polygonal Lasso

Tool(Многоугольное Лассо) и с помощью данного инструмента, выделите изображение дерева на переднем плане, а затем выполните команду Edit – Fill (Редактирование – Заливка) или нажмите клавиши (Shift+F5), чтобы залить область активного выделения чёрным цветом:



Рис. 62

Преобразуйте слой с тенью в Смарт-объект. Далее, идём Edit – Transform – Flip Vertical (Редактирование – Трансформация – Отразить по Вертикали). Сместите тень дерева вниз, расположив у основания кроны дерева. Примените трансформацию (Ctrl+T), чтобы трансформировать тень дерева, как показано на скриншоте ниже:

**Примечание:** примените опцию трансформации *Искажение* (Warp).

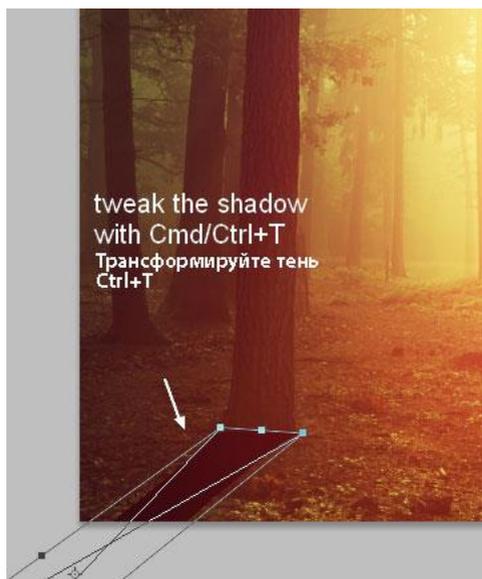


Рис. 63

Уменьшите непрозрачность слоя с тенью до 50%, далее, идём Filter – Blur – Gaussian Blur (Фильтр – Размытие – Размытие по Гауссу):

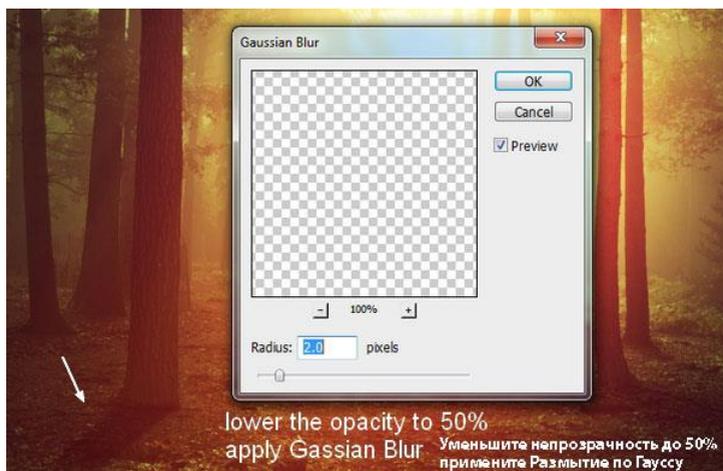


Рис. 64

Добавьте слой-маску к слою с тенью через нижнюю панель инструментов. С помощью мягкой чёрной кисти, скройте лишние детали в области, которая указана на рисунке 65.

**Примечание:** лишние фрагменты тени на дереве удаляются.



Рис. 65

11. Добавьте тени к остальным деревьям. Чтобы добиться реалистичного и правдоподобного результата, придерживайтесь следующих советов:

- Чем дальше от источника света, тем мягче и светлее тень. Можно уменьшить непрозрачность теней на краях изображения до 30%.

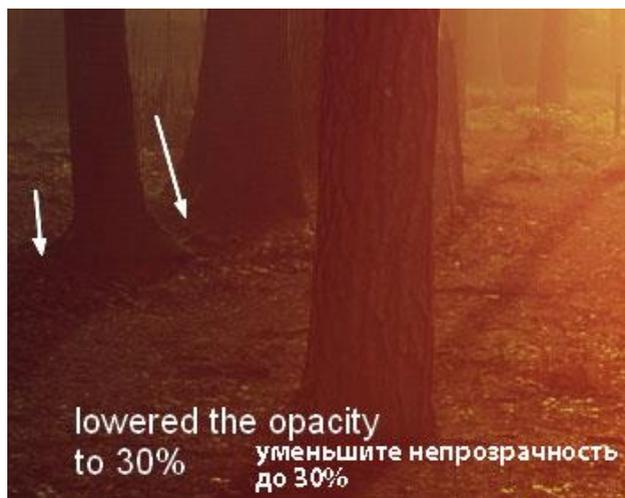


Рис. 66

- Чем больше окружающая атмосфера покрыта туманом, тем менее насыщены тени. По этой причине были размыты тени там, где они ближе к заднему плану (где туман более густой).

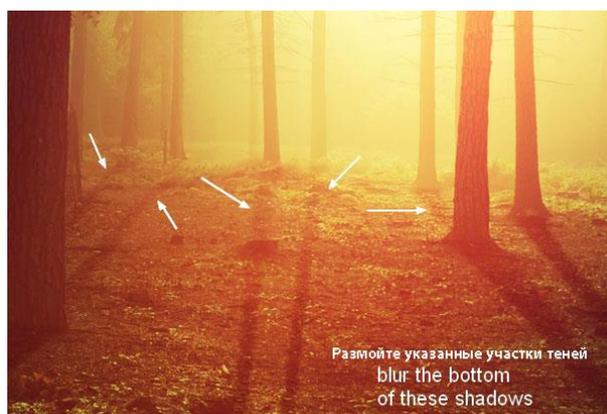


Рис. 67

Мы получили первый итоговый результат, который бу-

дет сохранен для отчета.



Рис. 68

Сгруппируйте все слои с тенями, корректирующими слоями, а также световыми эффектами в одну папку. Отключите видимость данной группы.

## II. Меняем время суток, день на ночь

12. Чтобы изменить время суток для нашей сцены, добавьте новый корректирующий слой Gradient Map adjustment (Карта Градиента) поверх группы «Результат 1»:



Рис. 69

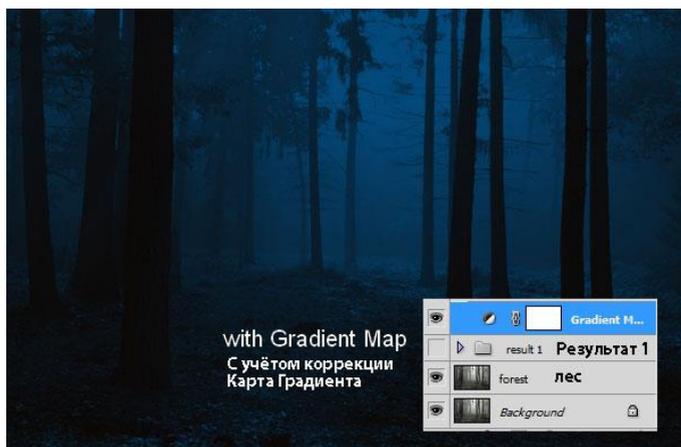


Рис. 70

13. Добавьте корректирующий слой Curves (Кривые), чтобы усилить темноту:

14.

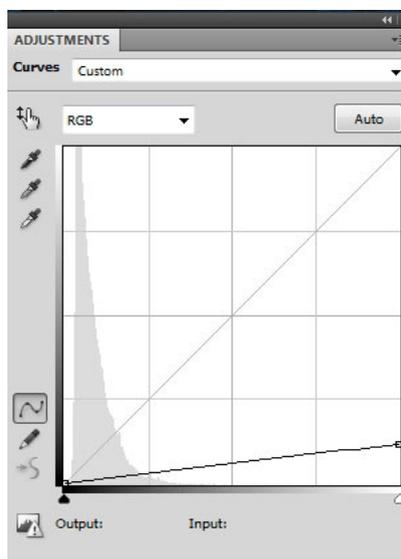


Рис. 71

Перейдите на слой-маску корректирующего слоя Curves(Кривые)и с помощью мягкой чёрной кисти уменьшите эффект коррекции кривых на светлых участках (покрытых туманом):



Рис. 72

15. Добавьте корректирующий слойLevels(Уровни), чтобы осветлить область, покрытую туманом:

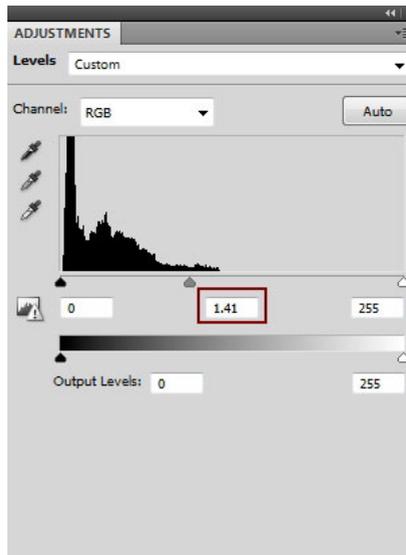


Рис. 73

Перейдите на слой-маску корректирующего слоя Levels(Уровни) и с помощью мягкой чёрной кисти, скройте коррекцию уровней на земле:

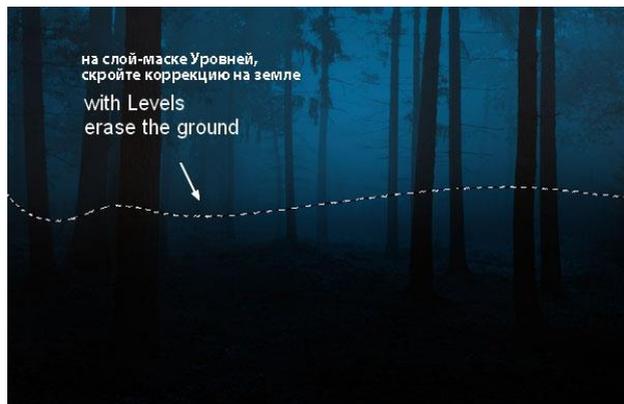


Рис. 74

Добавьте новый слой-заливку, чтобы добавить больше тумана к сцене:

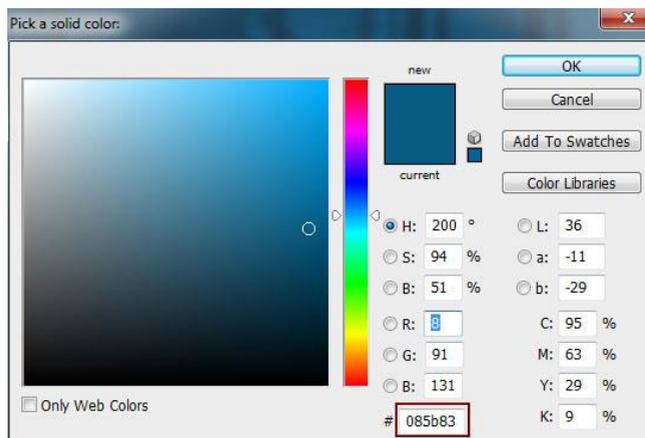


Рис. 75

16. Уменьшите непрозрачность данного слоя до 60%, а затем с помощью мягкой чёрной кисти, скройте / уменьшите эффект тумана на земле и на заднем плане:



Рис. 76

17. Надо добавить немного света, чтобы усилить глубину сцены. Создайте новый слой поверх всех остальных слоёв и с помощью мягкой кисти, цвет кисти #085b83 (отберите образец цветового оттенка с области тумана с помощью пипетки), прокрасьте среднюю область изображения. Поменяйте режим наложения для данного слоя на Screen (Осветление), 100%.

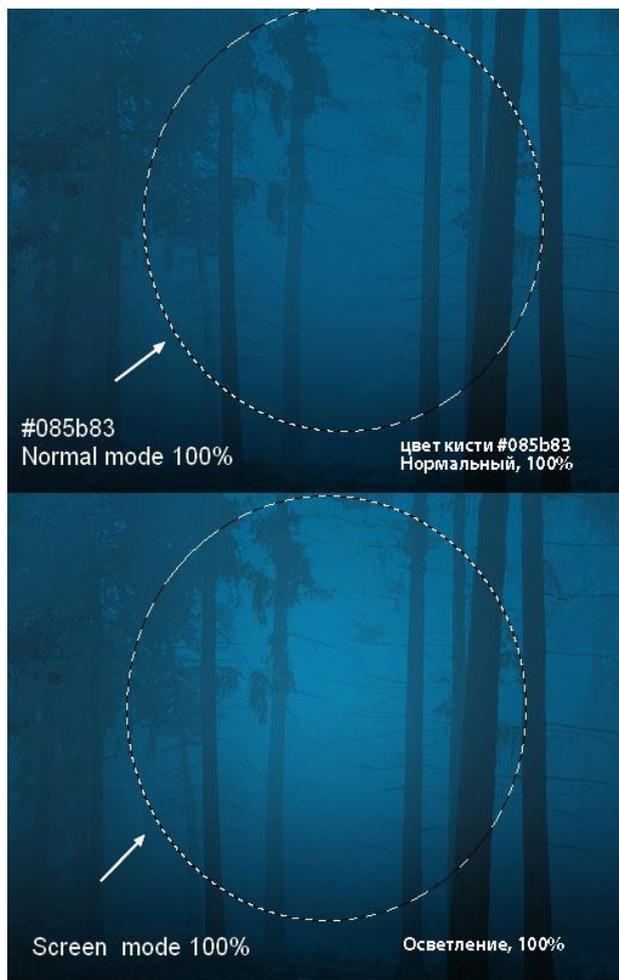


Рис. 77

## Итоговый результат

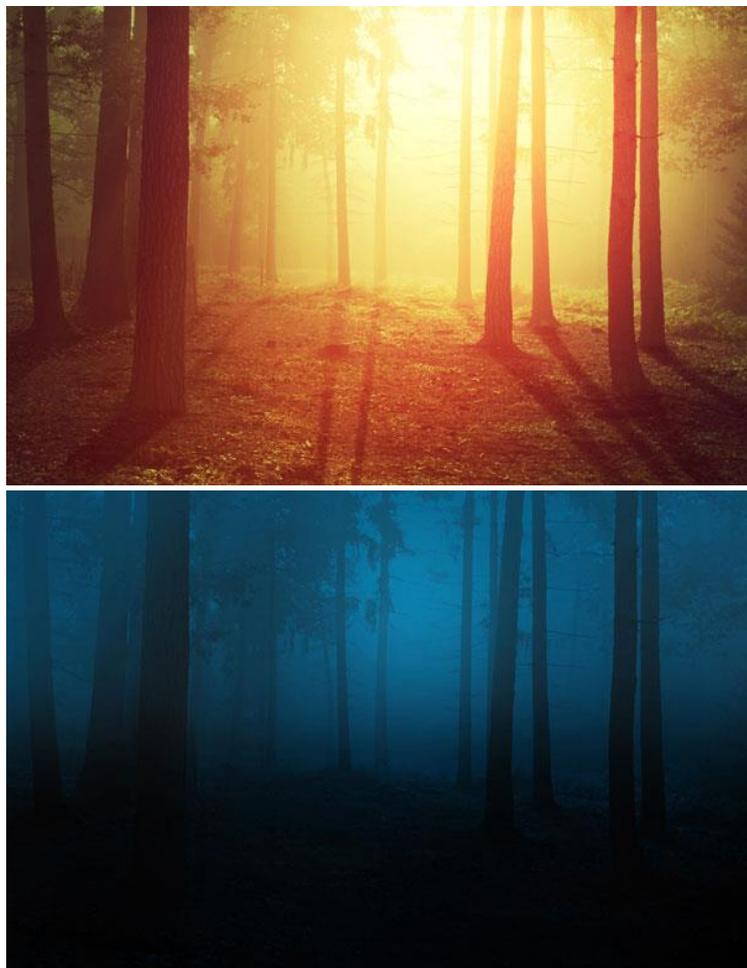


Рис. 78

### Задание 3. Создание пейзажа с птицами в Photoshop

В ходе выполнения задания вы узнаете, как создать нарисованную картину, на которой изображена прекрасная пара птиц. Вы также узнаете, как выделять объекты и как делать так, чтобы они выглядели как нарисованные.

#### Итоговый результат



Рис. 79

**Исходные материалы:**

**ШАГ 1.** Подготавливаем исходное изображение  
Вначале откройте изображение Зонтик.



Рис. 80

Далее, выберите инструмент Pen Tool(Перо) . Вам необходимо выделить изображение зонтика. Всё что вам нужно, это щёлкнуть по краю изображения зонтика, чтобы установить начальную опорную точку.

С помощью инструмента Pen Tool (Перо) , создайте контур вокруг изображения зонтика. После того, как вы закроете контур, щёлкните по созданному контуру правой кнопкой мыши, чтобы появилось контекстное меню. В появившемся меню выберите опцию Make Selection (Образовать выделен-

ную область) для того, чтобы преобразовать контур в активное выделение. Далее, нажмите клавиши Shift+Ctrl+I для инверсии активного выделения, затем нажмите Del, чтобы удалить задний фон.



Рис. 81

**ШАГ 2.** Теперь у нас есть зонтик, с помощью которого, мы создадим цветки необходимой нам формы. В этом шаге, мы создадим цветки. Продублируйте изображение зонтика. Нажмите клавиши Ctrl+T для активации инструмента свободная трансформация, маленькие квадратики в качестве опорных точек по контуру выделенного изображения укажут на то, что инструмент активен.

Далее, щёлкните правой кнопкой мыши по изображению дубликата зонтика, чтобы появилось контекстное меню, в появившемся окне, выберите опцию Warp (Деформация). Давайте, деформируем зонтик и придадим ему форму цветка. Продублируйте изображение зонтика и проделайте то же самое действие с деформацией для создания другой формы цветка. Ещё раз продублируйте изображение зонтика и проделайте то же самое действие с деформацией для создания другой формы цветка. См. скриншот ниже для ссылки как деформировать зонтик, чтобы получить желаемую форму цветка.

После того, как вы придали цветку нужную форму, нам необходимо применить светотени к изображению цветка. Для этого мы используем инструмент Dodge Tool (Осветлитель), настройки инструмента указаны на скриншоте ниже. Примените инструмент Осветлитель как указано на скриншоте ниже.

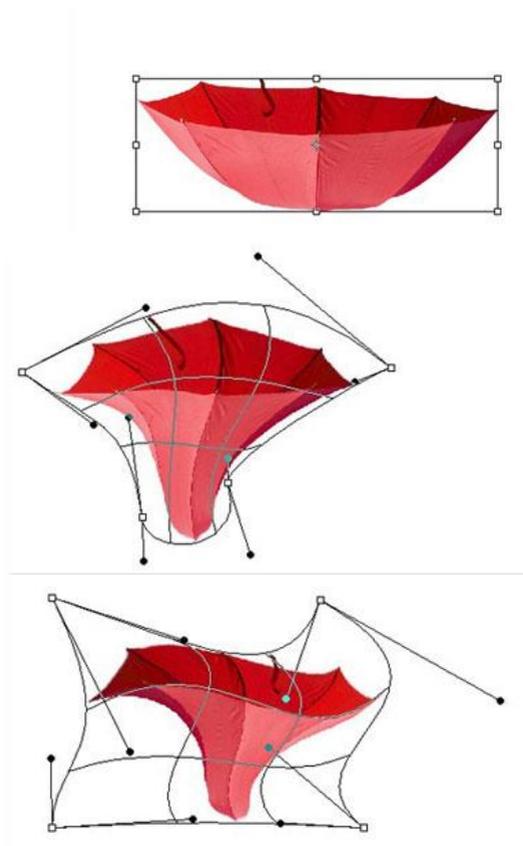


Рис. 82

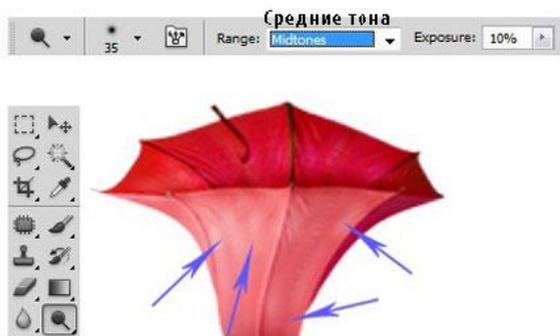


Рис. 83

Далее, выберите инструмент **Burn Tool** (Затемнитель)  для затемнения и создания теней. См. скриншот ниже для ссылки:

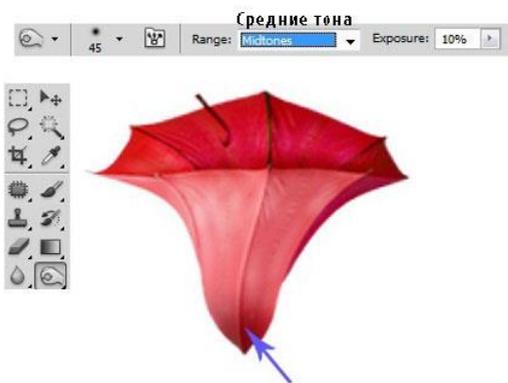


Рис. 84

Проделайте то же самое с другим цветком. Также создайте светотени с помощью инструментов **Осветлитель**  (dodge tool) и **Затемнитель**  (burn tool).

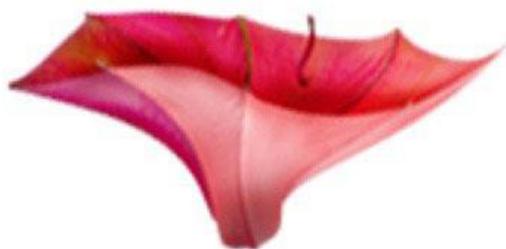


Рис. 85

### **ШАГ 3 - Создаём Стебли**

В этом шаге мы создадим стебли для наших цветков. Чтобы создать стебли, вначале, необходимо вырезать часть ручки зонтика. Продублируйте вырезанную часть ручки два раза, а затем слейте их в один слой. Далее, продублируйте объединённый слой столько раз, сколько будет необходимо.

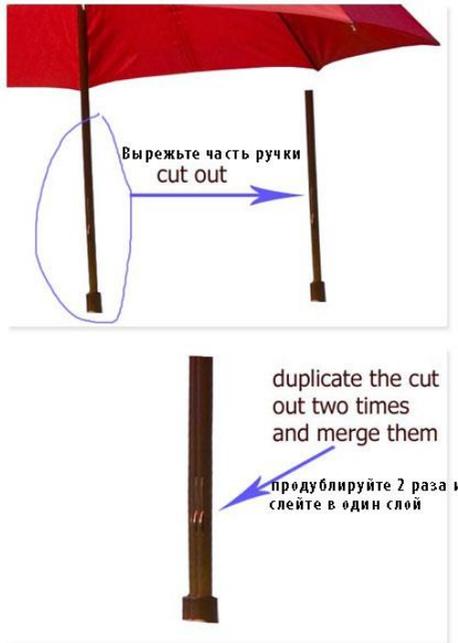


Рис. 86

Выберите один из объединённых слоёв, а затем идём **Фильтр- Пластика** (filter > liquify). Выберите инструмент **Деформация** (forward warp tool) и далее, деформируйте стебель, как показано на скриншоте ниже.

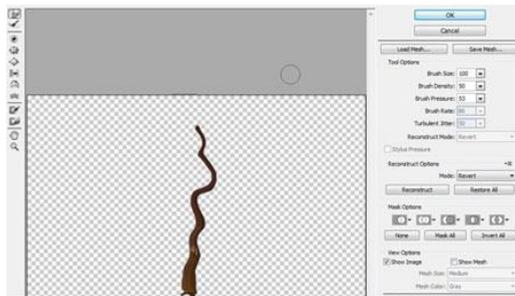


Рис. 87

Далее, сделайте то же самое с другими стеблями. Постарайтесь не повторять форму стеблей, чтобы они не выглядели одинаково. Как только вы создали подходящие стебли, расположите их таким образом, чтобы они вместе напоминали ветви витиеватого дерева. Затем, с помощью корректирующего слоя **Цветовой тон / Насыщенность** (hue/saturation), поменяйте цвет стеблей.

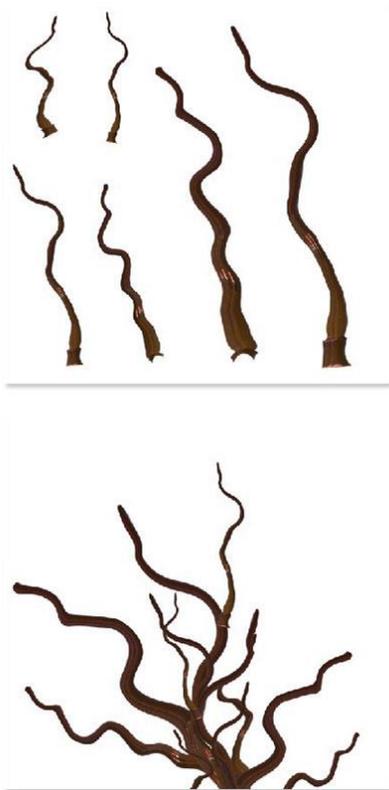


Рис. 88

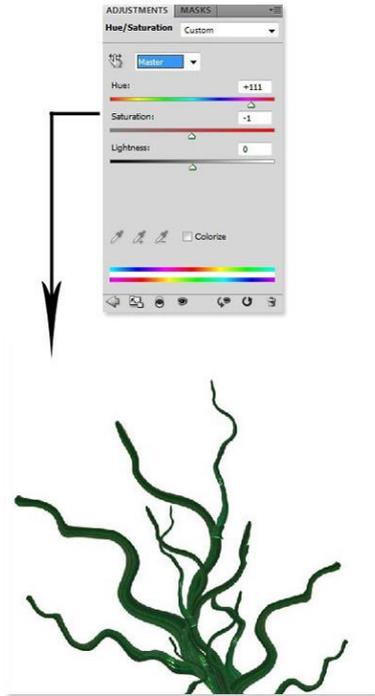


Рис. 89

#### ШАГ 4 – Создаём Птичек

В этом шаге, мы поиграем с деформацией, чтобы создать птичек, используя фрагмент зонтика. Что мы должны сделать- продублируйте ещё раз изображение зонтика. Деформируйте дубликат изображения зонтика. Затем, придайте деформированному изображению размытие в движении. Назовите этот слой просто 'Размытая фигура'.

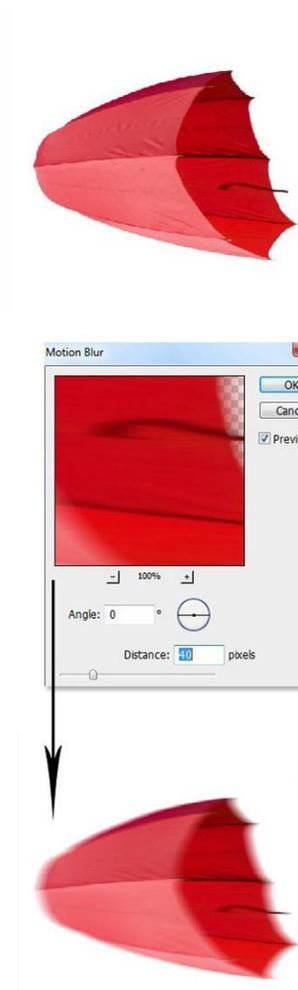


Рис. 90

Продублируйте слой с размытой фигурой. Находясь на дубликате слоя, нажмите ещё раз клавиши **Ctrl+T** для активации инструмента свободная трансформация. С помощью опции **Деформация** (**warp**), придайте нашей фигуре форму крыла птицы.

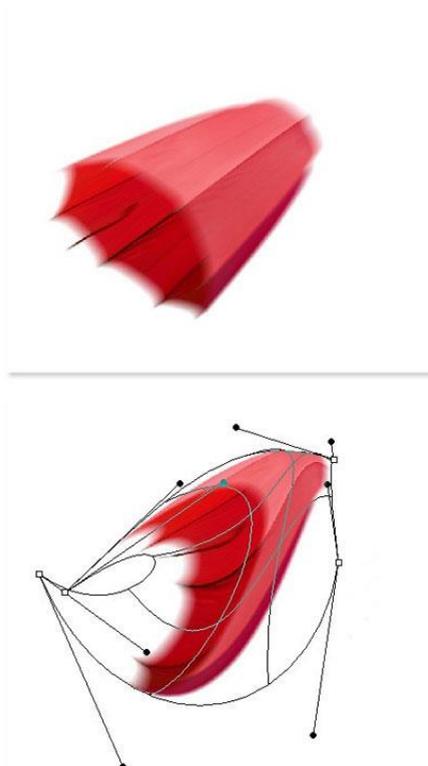


Рис. 91

Продублируйте слой с размытой фигурой столько раз, сколько необходимо. Продолжайте деформировать каждый отдельную фигуру для создания различных форм. На скриншоте ниже, мой результат деформации.

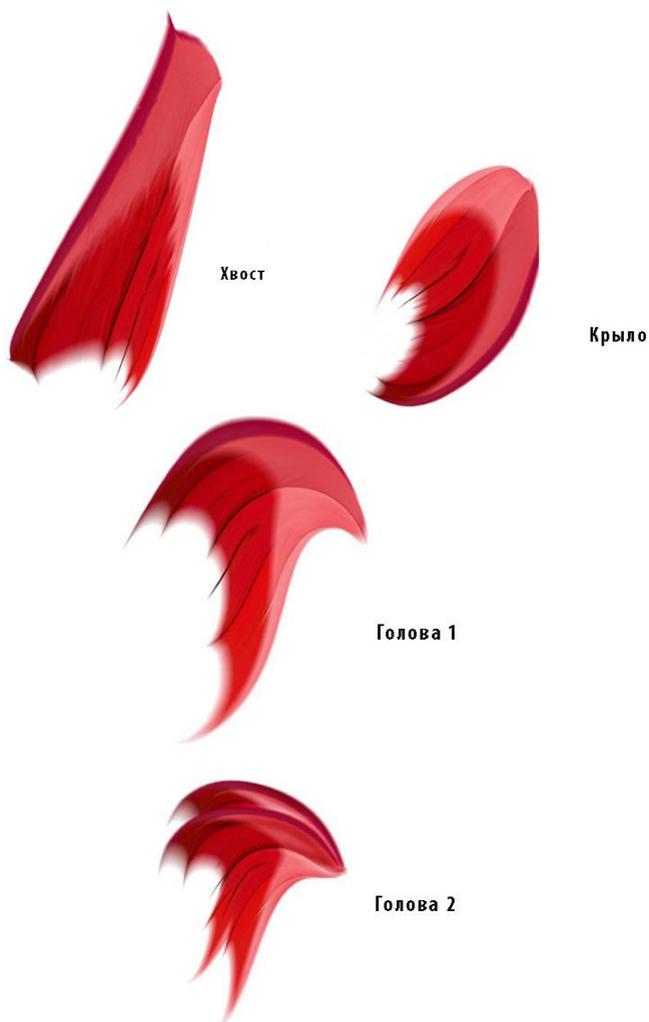


Рис. 92

Вырежьте часть ручки зонтика. Далее, после некоторых манипуляций, форма выделенной части зонтика должна выглядеть, как на скриншоте ниже. Это будет предполагаемое туловище нашей птички.



Рис. 93

Далее, мы создадим птичку. Что мы сделаем сейчас – это соединим все части птички.

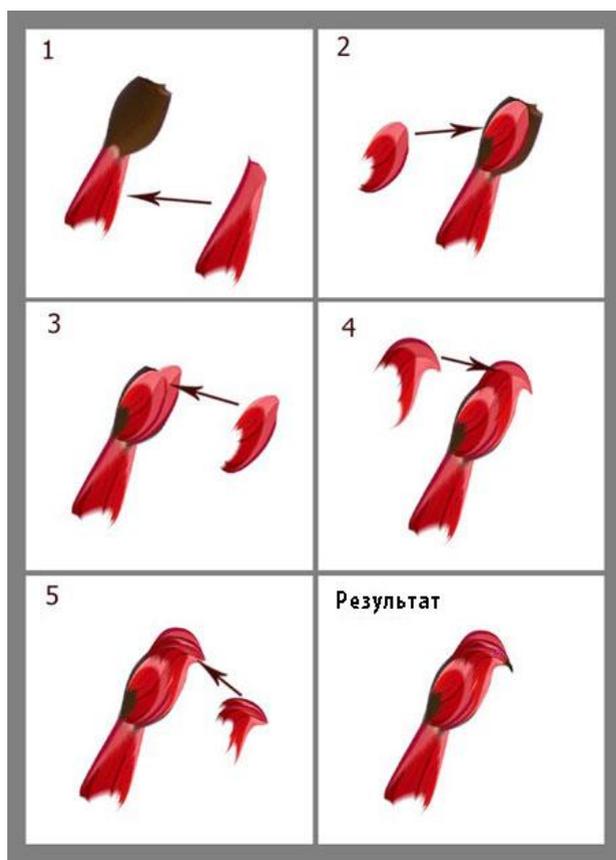


Рис. 94

### ШАГ 5 - Создаём Бабочек

Таким же способом, каким мы создали птичку, мы можем создать другие живые существа, используя тот же фрагмент зонтика. Это крылышко бабочки:



Рис. 95

Нам необходимо создать туловище нашей будущей бабочки. Создайте новый слой (Shift+Ctrl+N). Находясь на новом слое, нарисуйте туловище тёмно-зелёного цвета. Для создания светотеней на туловище бабочки, используйте инструмент **Затемнитель**  и **Осветлитель**  (dodge and burn tool). Настройки инструмента будут те же самые, которые мы использовали при создании цветков.



Рис. 96



Рис. 97

Сейчас мы добавим крылышки к туловищу бабочки:



Рис. 98



Рис. 99

## ШАГ 6 - Создаём Холмы

В этом шаге, мы создадим холмы, которые будут расположены на заднем фоне нашей картины. Ещё раз возвращаемся к выделенному изображению зонтика. Вырежьте стержень ручки зонтика. Далее, продублируйте выделенное изображение стержня несколько раз. Слейте все слои с дубликатами в один слой, чтобы получилась единая фигура.



Рис. 100

Находясь на новом объединённом слое, ещё раз идём **Фильтр- Пластика** (filter > liquefy) для того, чтобы изменить нашу созданную фигуру во что-то, что напоминало бы ХОЛМ.

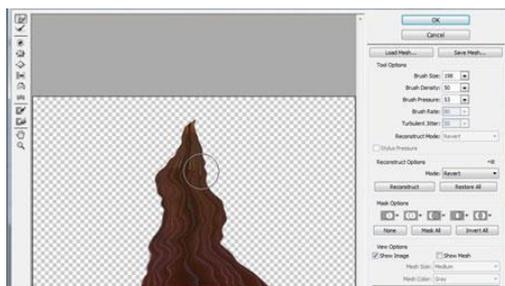


Рис. 101

Давайте придадим нашему изображению холма более волшебный вид с помощью инструмента **Палец** 🖐️ (smudge tool). В настройках инструмента установите мягкую круглую кисть, интенсивностью 70-80%. Размажьте линии нашего холма. Постарайтесь варьировать размер кисти между 8-10 px.

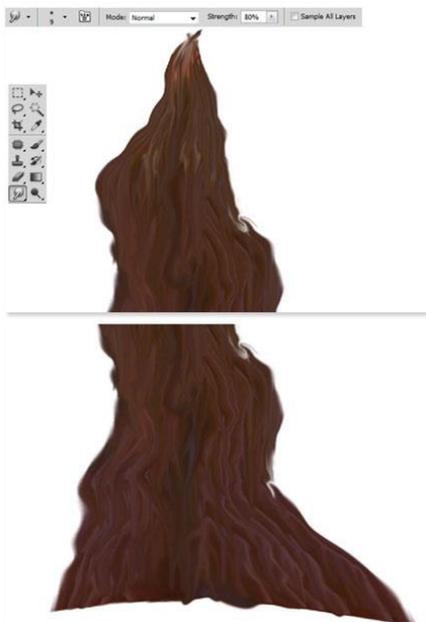


Рис. 102

Продублируйте слой с холмом столько раз, сколько необходимо. Варьируйте масштаб каждого дубликата холма, а затем расположите их таким образом, чтобы получился единый холм.



Рис. 103

### ШАГ 7 - Мёртвое Дерево

Последний объект, который мы создадим для нашей сцены – это дерево. Мы опять же используем выделенное изображение зонтика для создания дерева. После того, как вы продублируете выделенное изображение стержня, объедините слои с дубликатами, а затем к объединённому слою, примените инструмент пластика. Созданы следующие фигуры, которые станут кроной дерева и ветвями.



Рис. 104

Теперь составьте из созданных фигур наше дерево. Вначале продублируйте слой с кроной дерева, а затем расположите слой с дубликатом слоя ниже оригинального слоя, при этом немного сместив. Затем, добавьте ветку к кроне дерева. Далее, продублируйте слой с веткой и немного уменьшите размер дубликата слоя с веткой. Расположите дубликат слоя с веткой в правой части кроны дерева. См. результат на скриншоте ниже.



Рис. 105



Результат



Рис. 106

Необходимо скрыть некоторые части дерева с помощью слой-маски, чтобы получился результат как на скришоте ниже:



Рис. 107

### ШАГ8 – СоздаёмЗаднийфон

Мы создали объекты для нашей композиции, далее, мы создадим композицию, куда мы добавим созданные объекты. Начнём с создания нового документа (Ctrl+N), размеры указаны на скриншоте ниже:

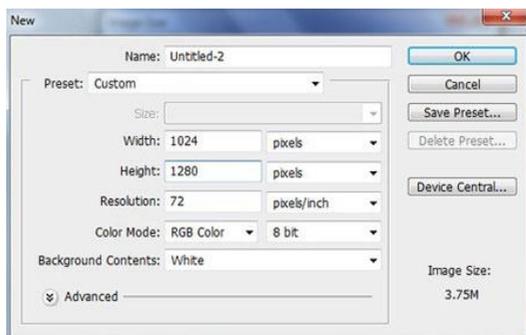


Рис. 108

Выберите инструмент **Градиент** (gradient tool), тип градиента – **Линейный** (linear). Залейте наш новый документ градиентом # 474af9 и # 070b7d, щёлкнув + потянув градиент сверху вниз.

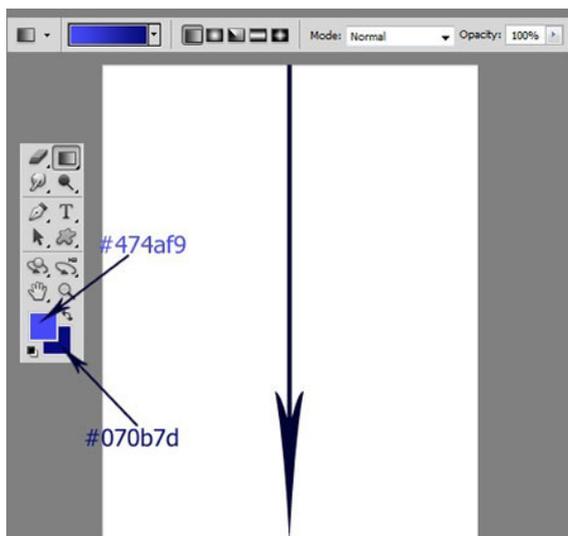


Рис. 109



Рис. 110

Далее, создайте новый слой (Shift+Ctrl+N) поверх слоя с задним фоном. Убедитесь, чтобы цвет переднего плана был установлен на # d3d3d4, а цвет заднего плана на # b0b1f9. Идём **Фильтр- Рендеринг – Облака** (filter > render > cloud). Мы применим фильтр облака к нашему документу. Я назвал этот слой 'Облака'. Установите режим наложения для этого слоя на **Перекрытие** (overlay), непрозрачность слоя 100 %.



Рис. 111

Создайте ещё один новый слой. Залейте этот слой линейным градиентом # faea94 и # fcb406. Этот слой назван 'Градиент'. Установите режим наложения для этого слоя на **Умножение** (multiply), непрозрачность слоя 100 %.



Рис. 112

Создайте ещё один новый слой. Выберите инструмент **Кисть**  (brush tool). В настройках кисти установите режим **Нормальный** (normal), непрозрачность 100%. Установите мягкую круглую кисть, цвет кисти белый. Щёлкните кистью по новому слою, чтобы на нём создать белый мягкий круг. Этот слой назван «Белый». Режим наложения для этого слоя **Нормальный** (normal), непрозрачность слоя 100 %.



Рис. 113

В этом шаге, мы продолжим создавать цветовую палитру заднего фона. Вначале создайте ещё один новый слой, на котором мы применим кисть, цвет кисти # fab730. Для данного действия, используйте мягкую круглую кисть. Этот слой назван оранжевый. Режим наложения для этого слоя установите на **Мягкий свет** (soft light), непрозрачность слоя 100 %.

Далее, создайте ещё один новый слой, на данном слое примените кисть # fcb305. Для данного действия, используйте мягкую круглую кисть, непрозрачностью 40-50 %. Назовём этот слой мягкий оранжевый. Установите режим наложения для слоя мягкий оранжевый на **Умножение** (multiply), непрозрачность слоя 100 %. Создайте дубликат слоя и для дубликата слоя поменяйте режим наложения на **Осветление основы** (color dodge), непрозрачность слоя 100 %.

В заключение, создайте ещё один новый слой, на кото-

ром мы применим кисть светло-жёлтого оттенка (#fae603). Этот слой назван «жёлтый». Установите режим наложения для данного слоя на **Цветность**(color), непрозрачность слоя 100%.

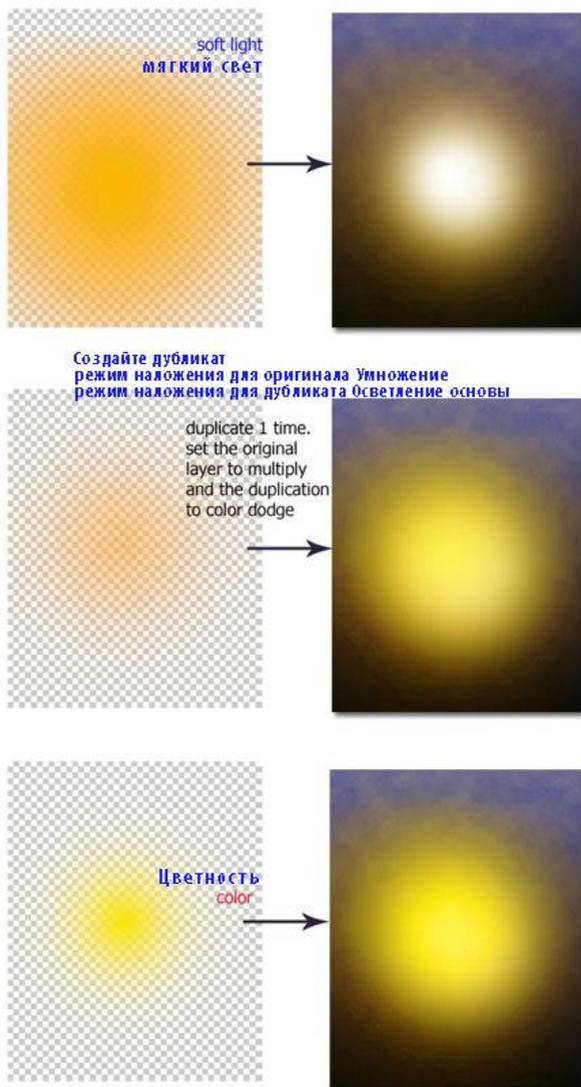


Рис. 114

### ШАГ 9 - Добавляем Луну

Мы добавим Луну к нашей сцене, для этого, мы создадим Луну. Ещё раз создайте новый слой. Используя белый оттенок, нарисуйте круг почти в середине сцены. Режим наложения для этого слоя **Нормальный** (normal), непрозрачность слоя 25 %. Этот слой назван «Луна».



Рис. 115

Продублируйте слой с Луной. Далее, идём **Слой- Стили слоя** (layer > layer style). См. настройки, которые указаны на скриншоте ниже. Затем установите режим наложения для данного слоя на **Нормальный** (normal). Уменьшите непрозрачность слоя до 52 %.



**Outer Glow** Внешнее Свечение  
**Осветление**

Blend Mode: Screen  
Opacity: 75 %  
Noise: 0 %

Elements  
Technique: Softer  
Spread: 63 %  
Size: 0 px

Quality  
Contour:  Anti-aliased  
Range: 50 %  
Jitter: 0 %

**Inner Glow** Внутреннее Свечение  
**Осветление**

Blend Mode: Screen  
Opacity: 75 %  
Noise: 0 %

Elements  
Technique: Softer  
Source:  Center  Edge  
Choke: 0 %  
Size: 10 px

Quality  
Contour:  Anti-aliased  
Range: 50 %  
Jitter: 0 %

Make Default Reset to Default

**Gradient Overlay** Наложение Градиента  
**Жесткий свет**

Blend Mode: Hard Light  
Opacity: 100 %  
Gradient:   
Style: Linear  Align with Layer  
Angle: -117 °  
Scale: 104 %

Make Default Reset to Default



Рис. 116  
190

## ШАГ 10

В заключение, мы применим корректирующий слой к нашей сцене. Идём **Слой- Новый корректирующий слой – Цветовой Баланс** (layer > new adjustment layer > color balance).



Рис. 117

## ШАГ 11

После создания заднего фона, мы добавим объекты, который мы создали в предыдущих шагах. Вначале, мы добавим холмы. Примените масштабирование к изображению с холмами до нужных вам размеров. Расположите холмы в правой части нашей композиции. В заключение, установите режим наложения для слоя с холмами на **Нормальный** (normal), непрозрачность слоя 19 %.

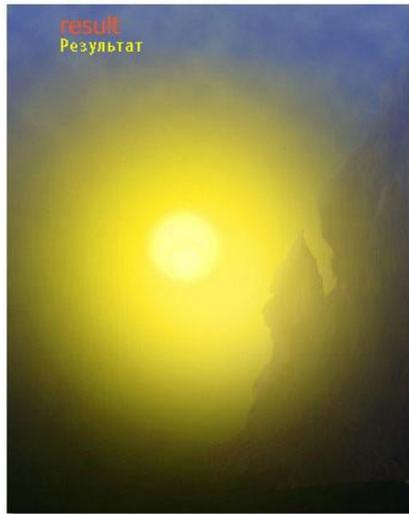
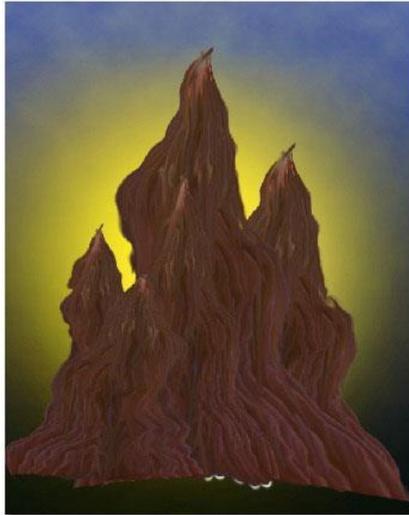


Рис. 118

## ШАГ 12

Продублируйте слой с холмами, расположив дубликат

слоя в левой части нашей композиции



Рис. 119

### ШАГ 13

Далее, добавьте деревья к нашей сцене. Используйте кисти Деревья, чтобы нарисовать их.

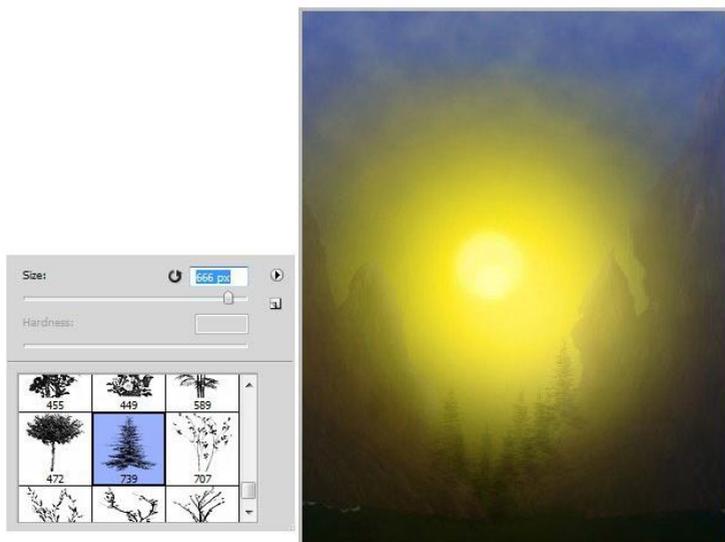


Рис. 120

## ШАГ 14

Далее, добавьте следующий объект к нашей композиции: дерево. Добавьте светотени к дереву. Для создания светотеней, используйте инструмент **Осветлитель** (dodge tool). См. настройки для инструмента **Осветлитель** (dodge tool) в предыдущих шагах.

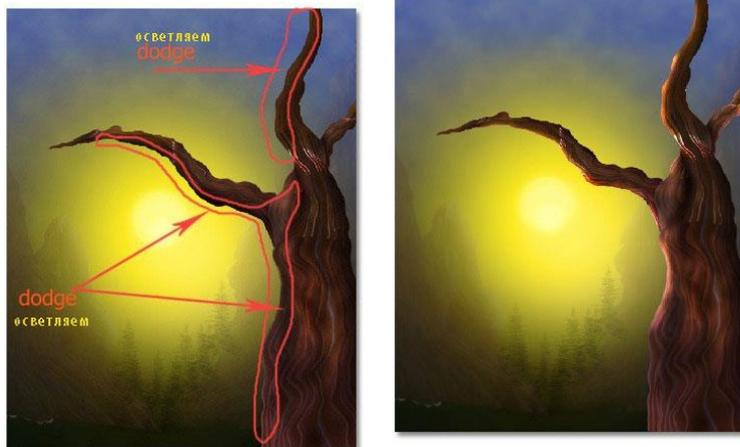


Рис. 121

## ШАГ 15

В заключение, мы изменим цвет дерева с помощью корректирующего слоя **Цветовой тон / Насыщенность** (hue/saturation). Используйте данный корректирующий слой в качестве обтравочной маски.



Рис. 122

## ШАГ 16

Далее, откройте Текстуру. Расположите слой с текстурой поверх слоя с деревом и корректирующим слоем **Цветовой тон / Насыщенность** (hue/saturation). Слой с текстурой также преобразуйте в обтравочную маску. В заключение, установите режим наложения для слоя с текстурой на **Перекрытие** (overlay), непрозрачность слоя 100 %.



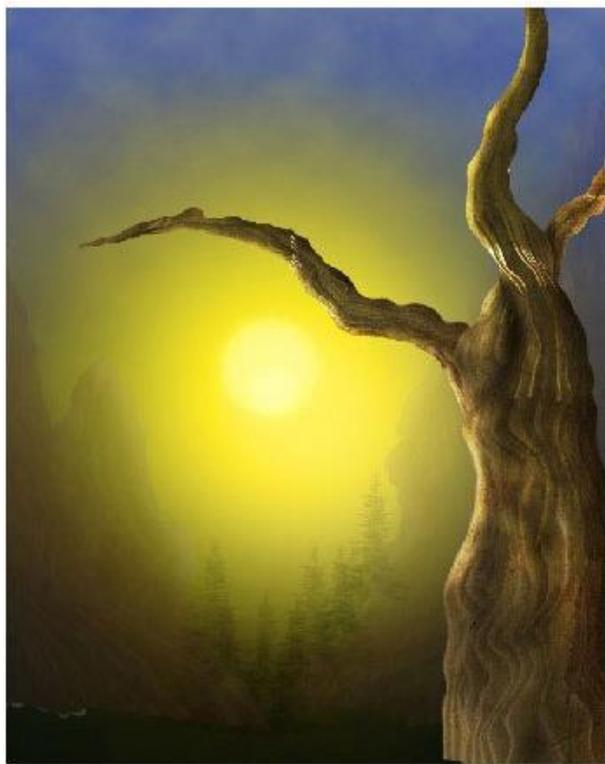


Рис. 123

### ШАГ 17

Создайте новый слой ниже слоя с деревом. Выберите инструмент **Кисть**  (brush tool) и установите стандартную кисть Трава для того, чтобы нарисовать траву на новом слое. См. скриншот ниже:

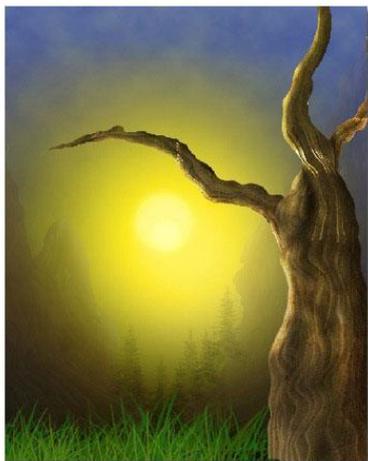


Рис. 124

### ШАГ 18

Добавьте птичку к нашей сцене. Примените масштабирование к изображению птички в соответствии с размерами нашей композиции.



Рис. 125

## ШАГ 19

Продублируйте слой с изображением птички. Слегка деформируйте дубликат птички, чтобы она не была похожа на оригинальное изображение птички. Измените цвет птички с помощью корректирующего слоя **Цветовой тон / Насыщенность** (hue/saturation).

Не забудьте преобразовать корректирующий слой **Цветовой тон / Насыщенность** (hue/saturation) в обратную маску к слою с дубликатом птички.

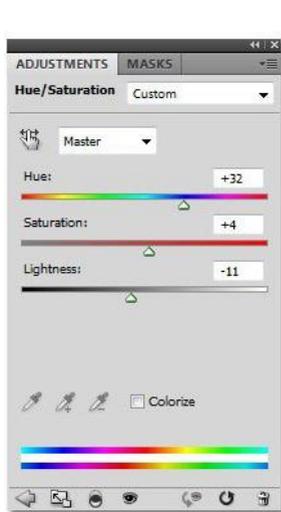




Рис. 126

### ШАГ 20

Далее, мы добавим ветки к нашему изображению. Примените масштабирование к изображению веток в соответствии с размерами нашей композиции. Добавьте светотени к веткам. Для создания светотеней, используйте инструмент **Осветлитель**  (dodge tool).

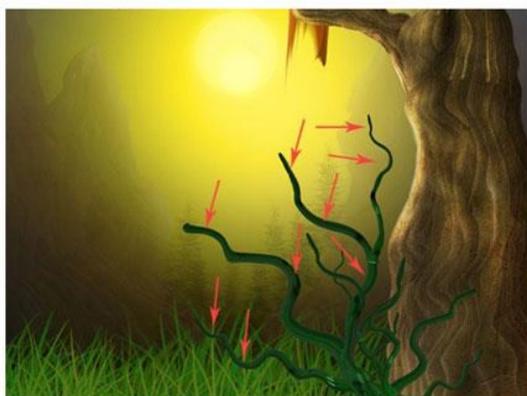




Рис. 127

### ШАГ 21

Добавьте ещё веток. И далее, сделайте то же самое, что и в предыдущем шаге.



Рис. 128

### ШАГ 22

После того, как вы добавили ветки, нарисуйте листья к ним. Выберите инструмент **Произвольная фигура**  (costume shape tool), установите стандартную фигуру Листья.

Используя темно-зелёный оттенок, нарисуйте листья на новом слое. Затем, с помощью инструментов **Осветлитель** (dodge tool) и **Затемнитель** (burn tool), создайте светотени на листьях.

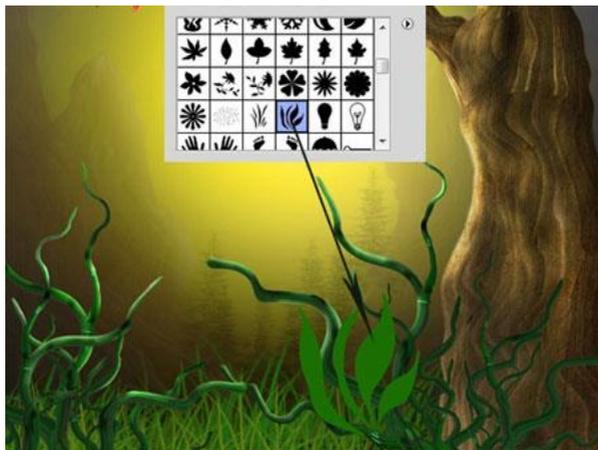


Рис. 129

### ШАГ 23

Добавьте ещё листьев.

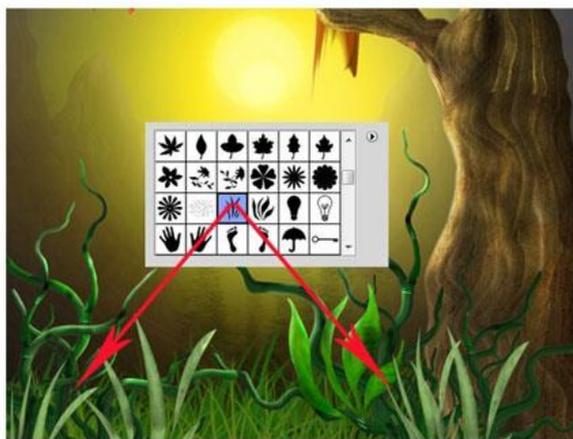


Рис. 130

### ШАГ 24

Далее, добавьте цветочки к нашей сцене.



Рис. 131

### ШАГ 25

Для завершения композиции, добавьте бабочек и маленьких птичек. Попробуйте изменить цвет бабочек и малень-

ких птичек с помощью корректирующего слоя **Цветовой тон / Насыщенность** (hue/saturation). Используйте любой цветовой оттенок на свой вкус. См. скриншот ниже - результат, который получился.



Рис. 132

### **ШАГ 26 (Цветовая Коррекция)**

Далее необходимо добавить корректирующих слоёв к нашей сцене: 2 корректирующих слоя **Цветовой тон / Насыщенность** (hue/saturation). См. скриншот ниже:



Рис. 133

Добавьте ещё корректирующих слоёв, вначале, мы добавим корректирующий слой **Уровни** (level). На слой-маске корректирующего слоя **Уровни** (level), обработайте кистью в центре изображения. Режим наложения для данного корректирующего слоя **Нормальный** (normal), непрозрачность 100 %.

Продублируйте корректирующий слой **Уровни** (level), режим наложения для дубликата корректирующего слоя **Нормальный** (normal), непрозрачность 50 %. В заключе-

ние применен корректирующий слой **Фото Фильтр** (photo filter), режим наложения для данного корректирующего слоя **Нормальный** (normal), непрозрачность 100 %.



Рис. 134

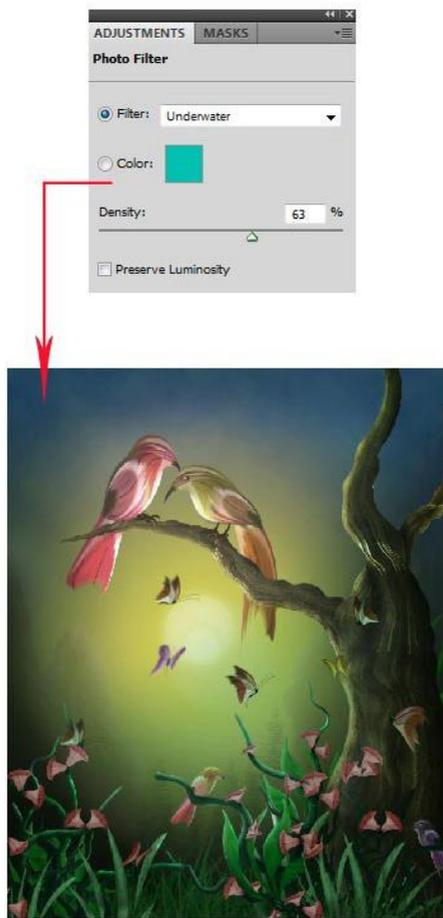
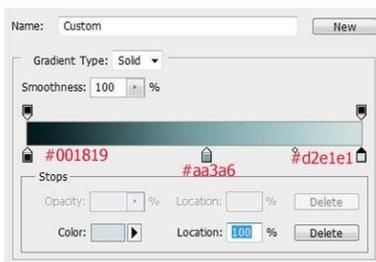
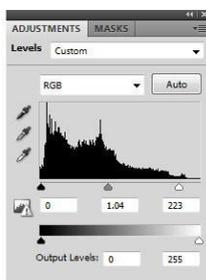


Рис. 135

Далее, мы ещё добавим корректирующих слоёв. См. скриншот ниже:



Режим наложения Мягкий Свет, непрозрачность 30%



Режим наложения Нормальный, непрозрачность 100%



Рис. 136

## ШАГ 27 Добавляем Облака

Нажмите клавиши Shift+Ctrl+Alt+E для того, чтобы объединить все видимые слои в один слой. Далее, идём **Фильтр – Другие – Цветовой контраст** (filter > other > high pass). Установите значение радиуса 2 %. Этот слой назван Цветовой контраст. Выберите инструмент **Кисть** (brush tool), уменьшите непрозрачность кисти до 10-12%, цвет кисти белый. Нарисуйте небольшие облака и линии на холмах. В заключение, установите режим для этого слоя на **Перекрытие** (overlay), непрозрачность 100 %.

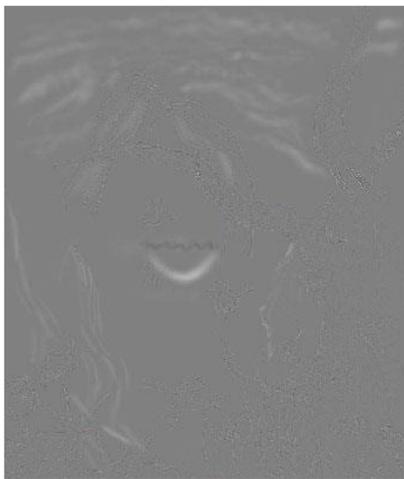


Рис. 137

Режим наложения Перекрытие  
Непрозрачность 100 %



Рис. 138

На скриншоте ниже представлена заключительная композиция, которую создали после добавления облаков на наше изображение, а также перед изображением Луны:

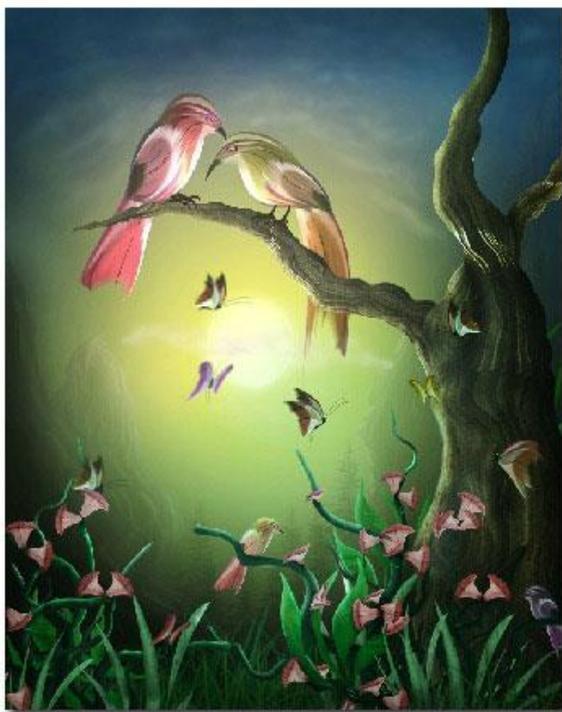


Рис. 139

### ШАГ 28

Создайте новый слой. Прорисуйте мягкой чёрной кистью по краям нашего изображения. С помощью ластика, скройте чёрный переход на ветках, траве и на маленькой птичке справа. Установите режим наложения для этого слоя на **Нормальный** (normal) и уменьшите непрозрачность до 40%.



Рис. 140

## ШАГ 29

Ещё раз создайте новый слой. Прорисуйте цветовым оттенком, как показано на скриншоте ниже. Поменяйте режим наложения для этого слоя на **Перекрытие** (overlay), непрозрачность слоя 100 %.



Рис. 141

Создайте новый слой. Залейте этот слой синим оттенком (Shift + F5). На слой-маске слоя, скройте синий оттенок на основных птичках и на стволе дерева. Поменяйте режим наложения для этого слоя на **Перекрытие** (overlay), непрозрачность слоя 40 %.

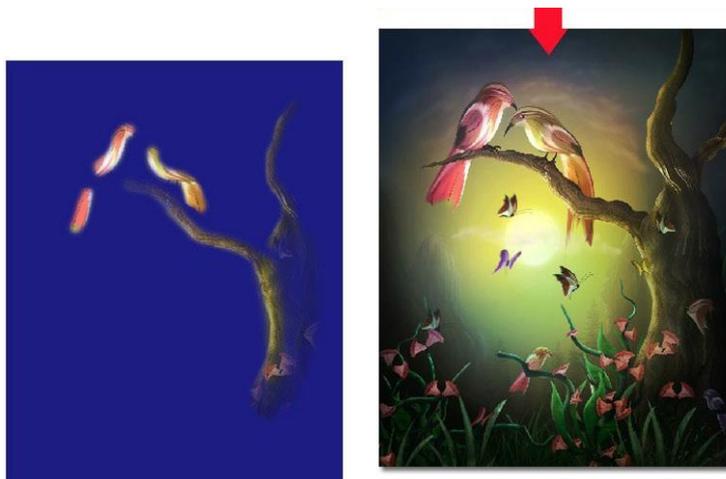


Рис. 142

Далее, создайте ещё один новый слой, на котором мы прорисуем переход цветовым оттенком # f87e02. Установите режим наложения для этого слоя на **Перекрытие** (overlay), уменьшите непрозрачность слоя до 13 %. В заключение, чтобы завершить нашу работу, идём **Слой- Новый корректирующий слой – Уровни** (layer > new adjustment layer > levels). Просто в настройках нажмите кнопку **Авто**(Auto).

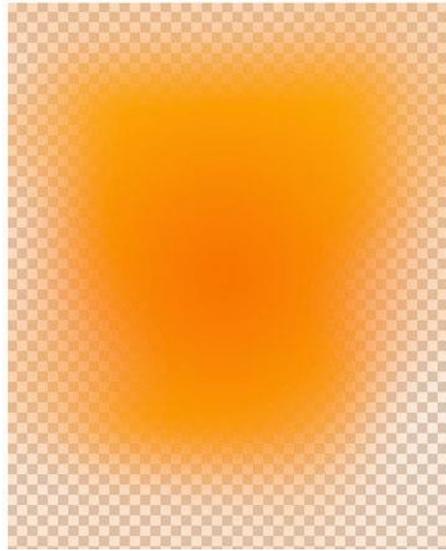


Рис. 143

## Итоговый результат



Рис. 144

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части учебного пособия освещаются основные технологии работы с одним из наиболее простых и нетребовательных к материально-технической базе математических пакетов Derive. Версия программы 6.0 и выше позволяет студенту решать большинство вопросов технического характера, связанных с преобразованиями математических выражений, решением уравнений, неравенств и их систем, нахождением графическим способом корней уравнений, расчетом интегралов и дифференциалов, работой с векторами и матрицами.

Во второй и третьей частях учебного пособия представлены методики работы с объектами векторной и растровой графики. На простых примерах рассматриваются технологии создания и преобразования объектов сложной формы, которые в дальнейшем могут быть использованы при разработке и оформлении курсовых работ и проектов по всем дисциплинам, а также на дипломном проектировании.

Учебный материал пособия должен помочь студенту студентов направления 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника» профиля «Микроэлектроника и твердотельная электроника» в выполнении расчетных и графических заданий по большинству дисциплин выбранного направления.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Половко, А. Математическая система Derive для студента [Текст]: учеб. пособие / А. Половко – СПб: БХВ-Петербург, 2005.
2. Диаз, Д. Руководство по CorelDRAW Graphics Suite X6 [Текст]: учеб. пособие / Д. Диаз. – Изд.: CorelDraw, 2013. – 346 с.
3. Баутон, Г.Д. CorelDRAW X5. Официальное руководство [Текст] / Г.Д. Баутон – СПб: БХВ-Петербург, 2012. – 812 с.
4. Adobe Photoshop CS6. Официальный учебный курс [Текст] / пер. с англ. под ред. В. Обручева. – 2014. – 384 с.
5. Топорков, С. Основы Photoshop CS2. Учебный курс / [Текст] / С. Топорков. – СПб.: Издательский дом "Питер", 2006. – 398 с.
6. Дедков, В. Настольная книга мастера Adobe Photoshop [Текст] / В. Дедков. – М.: Компьютер пресс, 2008. – 342 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Математический пакет Derive	4
1.1. Структура и возможности системы Derive	4
1.2. Ввод выражений	6
1.3. Арифметические операторы	10
1.4. Выполнение алгебраических преобразований	13
1.5. Выполнение тригонометрических преобразований	20
1.6. Построение графиков функций	22
1.7. Ввод векторов и матриц	28
1.8. Решение уравнений и неравенств	29
1.9. Решение систем уравнений и неравенств	34
1.10. Вычисление пределов, интегралов, дифференциалов	39
1.11. Вычисление суммы и произведения бесконечного ряда	42
1.12. Задания для лабораторной работы	45
2. Редактор векторной графики CorelDraw	89
2.1. Интерфейс и возможности	89
2.2. Задания для лабораторной работы	93
3. Графический редактор AdobePhotoshop	118
3.1. Интерфейс и возможности	118
3.2. Задания для лабораторной работы	120
Заключение	216
Библиографический список	217

Учебное издание

Кошелева Наталья Николаевна  
Плотникова Екатерина Юрьевна  
Винокуров Александр Александрович

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ:  
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

В авторской редакции

Компьютерная верстка А.А. Винокурова

Подписано к изданию 07.12.2015.  
Объем данных 8,4 Мб.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический  
университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14