ВВЕДЕНИЕ

Математические методы играют важную роль в современной науке, технике и экономике. Возможность успешного применения математики при решении конкретных задач особенно усилилась благодаря всеобщей компьютеризации.

Курс математики является основой естественнонаучного образования бакалавра. Поэтому для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин необходимо владеть навыками применения современного математического инструментария для решения задач.

Изучение математики позволит будущему специалисту приобрести базовые навыки, расширить кругозор, повысить уровень мышления и общую культуру, что необходимо для успешной профессиональной деятельности.

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

В предлагаемом издании изложена программа 1-й части курса математики, который изучается студентами-заочниками в первом семестре. Здесь приведены задачи для выполнения контрольных работ № 1, 2 по математике. Первая контрольная работа посвящена линейной алгебре, векторному анализу, аналитической геометрии на плоскости и в пространстве и введению в математический анализ. Вторая контрольная работа – дифференциальному исчислению функции одной и нескольких переменных, интегрированию.

Материал следует изучать по вопросам, указанным в программе, там же можно найти указания на страницы учебников и номера задач, которые мы рекомендуем рассмотреть.

К экзамену необходимо выполнить контрольные работы №1, 2 и получить по ним зачет. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради. Оформление должно быть аккуратным, записи четкими, решение должно сопровождаться подробными пояснениями с необходимыми ссылками на теорию.

Приступать к выполнению контрольной работы следует после изучения необходимого теоретического материала и разбора решения нескольких аналогичных задач с помощью приведенных ниже учебников и методических указаний.

Список рекомендуемой литературы

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - 12-е изд. /Д.В. Беклемишев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 312 с.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление [текст]: учеб. пособие; Т.1 /Н.С. Пискунов.– М.: Интеграл–Пресс, 2008. – 416 с.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 7-е изд., испр. –

М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО Издательство «Мир и образование», 2009. – 368 с.
4. Кущев, А.Б. Лекции по аналитической геометрии / А.Б. Кущев. – Учебное пособие, из-во ВГАСУ, 2007. – 126 с.
5. Седаев, А.А. Некрасова Н.Н. Элементы линейной алгебры, аналитическая геометрия и введение в математический анализ/ А.А. Седаев , Н.Н. Некрасова - Учебное пособие, из-во ВГАСУ, 2007. – 184 с.
6. Интегральное исчисление: методические указания и задания по высшей математике для студентов 2-го курса строительных специальностей заочного факультета ВГАСУ/ Воронежский гос. арх.-строит. ун.-т; сост.: С.М. Алейников, Л.В. Акчурина, В.С. Муштенко, С.А. Шабров.
– Воронеж, 2008. – 82 с.

Указания по обращению к рекомендуемой литературе даны в тексте рабочей программы. Номера источников из приведенного выше списка пишутся в квадратных скобках. Например [I, гл. 2, §2] означает: учебник Беклемишева Д.В., гл. II, §2.

Вопросы программы к контрольной работе № 1

Раздел I. Векторная и линейная алгебры

1. Система m линейных уравнений с n неизвестными. Понятие решения системы, совместные и несовместные системы.
2. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса, условие их несовместности.
3. Матрица, ее строки, столбцы и размеры. Основная и расширенная матрицы системы линейных уравнений.
4. Определители 2-го и 3-го порядка. Свойства определителей. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Вычисление определителя любого порядка разложением по строке или столбцу.
5. Формулы Крамера. Условие несовместности системы.
6. Векторы. Алгебраические операции над ними.
7. Понятие базиса, координаты разложения вектора по базису. Действия над векторами в координатой форме.
8. Радиус - вектор точки. Координаты радиуса - вектора в ортонормирован- ном базисе из единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, направленных по осям координат. Вычисление координат вектора через координаты его начала и конца.
9. Вычисление длины вектора и расстояния между точками в декартовой системе координат. Формулы для координат точки, делящей отрезок в данном отношении.

10. Скалярное произведение векторов, его физический смысл и свойства.
11. Вычисление скалярного произведения через координаты сомножителей в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Нахождение угла между векторами.
12. Векторное произведение, его механический смысл и свойства.
13. Вычисление векторного произведения через координаты сомножителей в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Нахождение площади параллелограмма и треугольника через координаты их вершин.
14. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл и свойства.
15. Вычисление смешанного произведения через координаты сомножителей. Вычисление объема пирамиды.

Литература: [I, гл. I, §1, §2, гл.V, §5]; [3, гл. II, §1-3, гл. IV, §1, §2]; [4, гл. I, II]; [5, гл I, §1, §3, гл. II].

Раздел II. Аналитическая геометрия

1. Понятие об уравнении линии на координатной плоскости. Геометрическое изображение множества решений уравнений $F(x,y)=0$ на координатной плоскости.
2. Уравнение прямой в общем виде. Построение прямой и нахождение вектора, перпендикулярного к прямой, по ее уравнению.
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, геометрический смысл его коэффициентов.
4. Вычисление угла между прямыми через их угловые коэффициенты. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
5. Уравнение прямой с данным угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$.
6. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.
7. Вычисление расстояния от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$.
8. Полярная система координат на плоскости. Связь между полярными и декартовыми координатами точки. Примеры задания кривых уравнением в полярной системе координат.
9. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$.
10. Эллипс, его фокусы, каноническое уравнение эллипса. Эксцентриситет эллипса и окружности.
11. Гипербола, её фокусы, каноническое уравнение. Эксцентриситет гиперболы.
    Асимптоты и построение гиперболы.
12. Парабола, её фокус и директриса. Каноническое уравнение параболы.

13. Преобразование координат точки при параллельном переносе системы координат.
14. Кривые второго порядка, приведение уравнений этих кривых к каноническому виду.
15. Параметрическое задание кривой.
16. Уравнение поверхности. Цилиндрические поверхности.
17. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно данному вектору нормали $\bar{n} = \{A, B, C\}$. Уравнение плоскости в общем виде.
18. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.
19. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.
20. Задание прямой в пространстве в общем виде. Нахождение координат пересечения прямой и плоскости через их уравнения.
21. Каноническое и параметрическое уравнения прямой.
22. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.
23. Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
24. Эллипсоид, его каноническое уравнение.
25. Однополостный и двуполостный гиперболоиды, их канонические уравнения.
26. Параболоиды, их канонические уравнения.

Литература: [I, гл. II, §1-3]; [3, гл. III, §1, §2]; [4, гл. III, IV, V, IV]; [5, гл III, IV].

Раздел III. Введение в математический анализ

1. Понятие функции, её область определения и область значений. График функции. Способы задания функции: а) аналитический (явный, неявный, параметрический); б) табличный; в) графический; г) программирование для ЭВМ. Возрастание и убывание функции, четные, нечетные, периодические функции.
2. Сложная функция. Понятие обратной функции.
3. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
4. Предел переменной величины. Понятие о пределе функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.
5. Основные свойства пределов: предел суммы, произведения и частного переменных величин, имеющих пределы.

6. Понятие неопределенности. Раскрытие неопределенности типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ для рациональной дроби.
7. Первый замечательный предел и его следствия.
8. Второй замечательный предел и его следствия.
9. Определение непрерывности функции в точке, свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной функции, составленной из непрерывных функций.
10. Определение непрерывности на языке односторонних пределов. Точки разрыва и их классификация.
11. Определение непрерывности функции на промежутке. Свойства непрерывных на отрезке функций.

Литература: [2, гл I, II]; [3, гл. IV]; [5, гл. V].

Вопросы программы к контрольной №2

Раздел IV. Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его применение

1. Определение производной функции в точке, ее геометрический и физический смысл.
2. Правила дифференцирования: производная суммы и разности функций; производная произведения функций; производная частного функций; производная произведения функции на число; правило нахождения производной сложной функции.
3. Таблица производных основных элементарных функций.
4. Вторая производная и ее механический смысл. Производные высших порядков.
5. Дифференциал функции в точке, его геометрический смысл и связь с приращением функции. Формула вычисления дифференциала функции через ее производную и дифференциал (приращение) аргумента. Символическая запись производной в виде отношения дифференциалов. Применение дифференциала для приближенного вычисления значений функции.
6. Формула Лагранжа (формула конечных приращений).
7. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
8. Возрастание и убывание функции на интервале и их связь со знаком первой производной.

9. Точки максимума и минимума (точки экстремума). Необходимое и достаточное условия экстремума функции. Критические точки функции.
10. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной и кусочно-дифференцируемой функции на отрезке.
11. Выпуклость и вогнутость графика функции, их связь со знаком второй производной. Точки перегиба, их необходимое и достаточное условия.
12. Понятие асимптоты графика функции. Вертикальные асимптоты, наклонные асимптоты и их отыскание.
13. Общая схема полного исследования функции, заданной в явном виде.

Литература: [2, гл. V]; [3, гл. VII].

Раздел V. Функции нескольких переменных

1. Определение функции нескольких переменных, её область определения, геометрическое представление области определения функции 2-х и 3-х переменных.
2. График функции 2-х переменных, линии уровня.
3. Частные приращения и частные производные.
4. Частные производные высших порядков, смешанные производные.
5. Полное приращение и полный дифференциал функции в точке.
6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
7. Градиент функции в точке. Производная функции по направлению, формула ее вычисления через градиент и направляющий вектор.
8. Экстремум функции двух переменных, его необходимое и достаточное условия в стационарной точке.
9. Нахождение наибольших и наименьших значений функции, заданной в замкнутой области.

Литература: [2, гл.VIII]; [3, гл. VIII].

Раздел VI. Неопределенные интегралы

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.
2. Табличные интегралы.
3. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
4. Формула интегрирования по частям.
5. Интегрирование простейших рациональных дробей.
6. Метод неопределенных коэффициентов разложения правильной рациональной дроби на простейшие.

7. Интегрирование тригонометрических выражений: $\cos\alpha x\cos\beta x$; $\cos\alpha x\sin\beta x$; $\sin\alpha x\sin\beta x$; $\cos^m x\sin^n x$. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Литература: [2, гл. X]; [6, стр. 5-16].

Определение своего варианта

Для определения номера своего варианта возьмите двузначное число, на которое оканчивается номер вашего шифра (номер вашей зачетной книжки). Если оно не превосходит 20, то это *номер вашего варианта.* В противном случае разделите это число на 20, полученный остаток *и есть номер вашего варианта,* в случае деления нацело *номер вашего варианта 20.*

Условие задачи состоит из общей для всех вариантов формулировки и двадцати вариантов конкретных данных. Именно для этих данных вам надлежит выполнить решение своего варианта.

При оформлении контрольной работы условия задач следует переписывать полностью, вставив свои данные. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради с полями и сдается (отсылается) для проверки в установленное деканатом время. В случае незачета, надо сделать работу над ошибками (в этой же тетради) и повторно сдать тетрадь на проверку.

Контрольная работа №1

Задача 1. Решить неоднородную систему линейных уравнений методом Гаусса и методом Крамера.

1. $\begin{cases} 2x+\ y-3z=\ 7 \\ x-\ y+2z=-3. \\ x+2y-\ z=\ 6 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+2y+\ z=4 \\ 3x-5y+3z=4. \\ 2x+7y-\ z=6 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x-4y+9z=\ 7 \\ 7x+3y-6z=\ 4. \\ -x+2y-5z=-4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+\ y+3z=3. \\ 3x+2y+\ z=2 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 3x-\ y+\ z=8 \\ 2x+\ y-2z=1. \\ x-2y+3z=7 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x+3y+2z=7 \\ 2x+2y-\ z=3. \\ 2x-\ y+3z=4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x-3y+\ z=\ 0 \\ x+\ y-\ z=-1. \\ 4x+3y-4z=-3 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x+\ y-3z=6 \\ x-3y+\ z=4. \\ x+2y-\ z=1 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x+\ y+\ z=\ 1 \\ 2x-\ y+\ z=\ 2. \\ x-2y-\ z=-2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ x+2y+2z=5. \\ 3x+4y-5z=2 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ 2x-4y-3z=-1. \\ 3x+4y+2z=8 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x-2y-z=-2. \\ y+z=-2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x+3y-4z=21. \\ 7x-y-3z=6 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 4x-y-3z=1 \\ 3x+6y+2z=4. \\ 2x+4y+z=4 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x-y-3z=13 \\ 2x+y-z=0. \\ 3x-2y+4z=-15 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ x+5y+2z=5. \\ 2x+3y+4z=3 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 4x+2y-z=12 \\ x+2y+z=7. \\ y-z=-1 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 8x+3y-6z=2. \\ -4x-y+3z=-3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x-y+5z=4 \\ 5x+2y+13z=2. \\ 3x-y+5z=0 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2. \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$

Задача 2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. ***Требуется найти: а) скалярное произведение*** $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$; ***б) длины сторон*** $\overline{AB}$ ***и*** $\overline{AC}$;
в) угол между этими сторонами; г) площадь грани ABC;
д) объем пирамиды $ABCD$.

1. A (1, 1, 1), B (6, 3, 1), C (3, 6, 1), D (2, 3, 5).
2. A (2, -1, 1), B (0, 2, 1), C (0, -1, 5), D (2, 2, 9).
3. A (1, 2, -2), B (2, 1, 1), C (-1, 4, -1), D (4, 0, 3).
4. A (1, 3, 2), B (3, 2, 2), C (1, 4, 2), D (1, 3, 5).
5. A (2, 2, 1), B (3, 5, 4), C (1, 6, 0), D (1, 4, 7).
6. A (4, 1, 1), B (3, 4, 2), C (4, 6, 1), D (3, 3, 7).
7. A (0, 2, 1), B (3, 4, 2), C (3, 5, 1), D (1, 2, 6).
8. A (2, 1, 0), B (1, 3, 2), C (3, 4, 1), D (2, 3, 7).

9. A (2, -2, 0), B (3, 3, 1), C (0, 4, 2), D (1, 3, 6).

10. A (-1, 3, 2), B (1, 2, 2), C (1, 9, 1), D (1, 5, 10).

11. A (1, 5, 10), B (-1, 3, -6), C (2, 3, 7), D (1, 2, 6).

12. A (1, 1, 1), B (2, -1,1), C (1, 2, -2), D (2, 7, 5).

13. A (1, 3, 2), B (2, 2, 1), C (4, 1, 1), D (2, 2, 9).

14. A (2, 1, 0), B (2, -2, 0), C (-1, 3, 2), D (4, 0, 3).

15. A (6, 7, 1), B (0, 2, 1), C (2, 1, 1), D (1, 3, 5).

16. A (3, 2, 2), B (3, 5, 4), C (3, 4, 2), D (1, 4, 7).

17. A (1, 3, 2), B (3, 3, 1), C (1, 8, 2), D (7, 3, 7).

18. A (3, 6, 1), B (0, -1, 5), C (1, 4, 2), D (1, 3, 6).

19. A (1, 6, 0), B (3, 5, 1), C (3, 6, 1), D (2, 3, 7).

20. A (3, 4, 1), B (0, 4, 2), C (1, 9, 1), D (1, 5, 10).

Задача 3. Даны координаты вершин треугольника ABC. Построить на плоскости XOY точки A, B, C по их координатам. Затем а) написать уравнения прямых AB и AC; б) вычислить угол между этими прямыми через их угловые коэффициенты; в) написать уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC; г) найти длину высоты треугольника, опущенный из вершины B .

1. A (11, -15),	B (6, -3),	C (-2, -9).
2. A (9, -9),	B (4, 3),	C (-2, -5).
3. A (19, -2),	B (7, 3),	C (-1, -3).
4. A (7, -8),	B (2, 4),	C (-6, -2).
5. A (11, -7),	B (-1, -2),	C (5, 6).
6. A (14, -1),	B (2, 4),	C (-4, -4).
7. A (11, -10),	B (6, 2),	C (0, -6).
8. A (13, -11),	B (1, -6),	C (-7, -12).
9. A (8, -7),	B (3, 5),	C (-5, -1).
10. A (10, -15),	B (6, -3),	C (-2, -9).
11. A (11, -3),	B (-1, 2),	C (-7, -6).
12. A (13, -11),	B (8, 1),	C (2, -7).

13. A (14, -10),	B (2, -5),	C (-6, -11).
14. A (9, -9),	B (4, 3),	C (-4, -3).
15. A (9, -11),	B (-3, -6),	C (3, 2).
16. A (8, -5),	B (-4, 0),	C (-10, -8).
17. A (15, 12),	B (10, 0),	C (4, -8).
18. A (15, -9),	B (3, -4),	C (-5, -10).
19. A (6, -11),	B (1, 1),	C (-7, -5).
20. A (12, -13),	B (0, -8),	C (6, 0).

Задача 4. *Дано уравнение кривой в полярной системе координат. Требуется: а) построить в полярной системе координат точки этой кривой, давая* φ *значения* $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$ *в № 1 – 10 и* $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ *в № 11 – 20;*

б) перейдя к уравнению той же кривой в декартовой системе координат, показать, что это уравнение кривой второго порядка;

в) приводя это уравнение к каноническому виду, назвать кривую и нарисовать ее на координатной плоскости XOY.

1. $\rho = \frac{10}{5 - 2\cos\varphi}$.
2. $\rho = \frac{3}{1 - \cos\varphi}$.
3. $\rho = \frac{4}{2 - \cos\varphi}$.
4. $\rho = \frac{8}{3 + \cos\varphi}$.
5. $\rho = \frac{1}{2 + 2\cos\varphi}$.
6. $\rho = \frac{5}{3 - 2\cos\varphi}$.
7. $\rho = \frac{10}{2 - \cos\varphi}$.
8. $\rho = \frac{3}{1 - \cos\varphi}$.
9. $\rho = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi}$.
10. $\rho = \frac{5}{6 + 3\cos\varphi}$.
11. $\rho = \frac{6}{5 - 2\sin\varphi}$.
12. $\rho = \frac{3}{1 - \sin\varphi}$.
13. $\rho = \frac{4}{1 - \sin\varphi}$.
14. $\rho = \frac{8}{3 + \sin\varphi}$.
15. $\rho = \frac{1}{2 + 2\sin\varphi}$.
16. $\rho = \frac{5}{4 - 3\sin\varphi}$.
17. $\rho = \frac{8}{2 - \sin\varphi}$.
18. $\rho = \frac{1}{1 - \sin\varphi}$.
19. $\rho = \frac{5}{1 + \sin\varphi}$.
20. $\rho = \frac{6}{6 - 3\sin\varphi}$.

Задача 5. Используя данные своего варианта из задачи 2:

а) написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно стороне BC;

б) написать уравнение грани ABC;

в) написать уравнения прямой, проходящей через точки C и D , перейти от канонического задания этой прямой к её параметрическому заданию;

г) найти точку пересечения этой прямой с плоскостью $x+y+z=1$.

Задача 6. Вычислить следующие пределы:

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2-11}{x^4+5x^3-6}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sin 2x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2}{2x^3+8x+5}$, б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-6x-7}{x^2-9x+14}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+3x^2-5}{2x^3+x-2}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{2x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$, б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{2\sin x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x-5x^4}{x^4-12x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+5x+2}{x^2-1}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x+x^4}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6-5x+x^2}{x^3-8}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\cos x+1}{\sin 2x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{x^2}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$, б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-4x-5}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\operatorname{tg}2x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$, б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+x-2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5}{x^3+8x-1}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 3x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+2x^3-1}{x^4-2x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-25}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{arctg} 2x}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-8}{2x^3-x+6}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\cdot\sin x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-3x+2}{x^4+3x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+x}{4x^3+x-5}$, б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} 2x}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x}{x^3+15}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-6}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{5x}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+6x+1}{x^3-8}$, б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x^2}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+x}{4x^3+x-7}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{x^2}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+18x-1}{4x^4-3x}$, б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 4x}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+8x-11}{2x^3+16x}$, б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} x}$.

Контрольная работа №2

Задача 1. Найдите производные функций.

1. а) $y=\dfrac{\sin(3x+5)}{x}$; б) $y=x\cdot\arcsin x^3$; в) $y=\sqrt{\lg x}$; г) $y=\ln\left(\dfrac{1-e^x}{e^x}\right)$.

2. а) $y=(\lg x)^3$; б) $y=x\sqrt{4-x}$; в) $y=\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x^2+1}$; г) $y=5^{\frac{x}{\sin x}}$.

3. а) $y=\dfrac{x}{4^x}$; б) $y=\cos(\arcsin x)$; в) $y=\dfrac{3x^2+1}{\sin x}$; г) $y=e^x\operatorname{tg}x$.

4. а) $y=2^{x^2}$; б) $y=\log_5(x+1)$; в) $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$; г) $y=x\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}}$.

5. а) $y=10^{\operatorname{tg}x}$; б) $y=x^2\cdot\log_3 x$; в) $y=\dfrac{\sin(e^x)}{x+1}$; г) $y=(\arcsin x)^2$.

6. а) $y=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\cdot\left(\sqrt[5]{x}-1\right)$; б) $y=\operatorname{tg}(x^2-5)$; в) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$; г) $y=x\cdot\cos^2(x-1)$.

7. а) $y=\log_3(\operatorname{tg}x)$; б) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$; в) $y=\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$; г) $y=x\cdot\operatorname{arctg}x$.

8. а) $y=(\cos 2x)^3$; б) $y=\lg(x-\sin x)$; в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; г) $y=\dfrac{x^5}{x^3-2}$.

9. а) $y=x^2\cdot\cos 4x$; б) $y=\dfrac{\arccos x}{x}$; в) $y=\dfrac{\log_2(x+5)}{5}$; г) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

10. а) $y=\lg(x^2+1)$; б) $y=x\cdot\sin x^3$; в) $y=5^{\operatorname{tg}x}$; г) $y=\dfrac{2x}{\operatorname{arctg}x}$.

11. а) $y=tg(x\cdot\sin x)$; б) $y=\lg x-x\arccos x$; в) $y=\cos 2^x$; г) $y=\dfrac{1-x^3}{\sqrt{\pi}\cdot x}$.

12. а) $y=\operatorname{arctg}(\sqrt[4]{x})$; б) $y=\sqrt{\log_3 x}$; в) $y=x\cdot 5^x$; г) $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$.

13. а) $y=10^{\sqrt{x}}$; б) $y=\sin\dfrac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}2x$; в) $y=\lg(\cos 3x)$; г) $y=\dfrac{x}{4^x}$.

14. а) $y=6\cdot e^{-3x^2}$; б) $y=x\cdot\lg x$; в) $y=\dfrac{3^x}{x^5}$; г) $y=tg\left(\sqrt{3x}\right)$.

15. а) $y=\sqrt{\ln x}$; б) $y=(\lg x)^2\cdot \operatorname{arctg} x$; в) $y=\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{tgx}$; г) $y=\dfrac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$.

16. а) $y=x\cdot(\arcsin x)^2$; б) $y=\sin x\cdot \log_3 x$; в) $y=\dfrac{5x}{3^{x^2}}$; г) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$.

17. а) $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$; б) $y=\dfrac{2\cos x}{\log_5(x+1)}$; в) $y=\dfrac{e^{-x^2}}{3-x}$; г) $y=(\operatorname{arctg} x)^2$.

18. а) $y=(x^2+1)\cos x$; б) $y=\dfrac{1-\ln x}{\lg x}$; в) $y=5^{\arcsin x}-2x$; г) $y=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

19. а) $y=\ln(1+\lg x)$; б) $y=x\cdot \arccos x$; в) $y=x^2\cdot 10^{-x^2}$; г) $y=\dfrac{1+tgx}{\sin x}$.

20. а) $y=\dfrac{8\sin 3x}{5x}$; б) $y=x^2\log_2 2x$; в) $y=\cos 5^x$; г) $y=7^{\sin 4x}$.

Задача 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции $y=f(x)$ ***на отрезке*** $[a,b]$.

1. $f(x)=x^3-12x+7$; $[0;3]$.
2. $f(x)=x^5-(5/3)x^3+2$; $[0;2]$.
3. $f(x)=(\sqrt{3}/2)x+\cos x$; $[0;\pi/2]$.
4. $f(x)=x^4-16x^3+2$; $[-3;1]$.
5. $f(x)=x^3-3x+1$; $[1/2;2]$.
6. $f(x)=x^4+4x$; $[-2;2]$.
7. $f(x)=(\sqrt{3}/2)x-\sin x$; $[0;\pi/2]$.
8. $f(x)=-x^4+4x$; $[-1;4]$.
9. $f(x)=3-2x^2$; $[-1;3]$.
10. $f(x)=x-\sin x$; $[-\pi;\pi]$.
11. $f(x)=x^4/4-6x^3+17$; $[16;20]$.
12. $f(x)=32x-x^4$; $[-1;4]$.
13. $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$; $[-1;2]$.
14. $f(x)=3x^4-16x^3+2$; $[-3;1]$.
15. $f(x)=x+\cos x$; $[-\pi;\pi]$.

16. $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1;\quad [-1;5]$.

17. $f(x)=x^3-3x^2-2;\quad [-1;1]$.

18. $f(x)=x^4-2x^2+5;\quad [-2;2]$.

19. $f(x)=x^2-2x+2;\quad [-3;2]$.

20. $f(x)=\frac{x^6}{6}-8x^2;\quad [-3;-1]$.

Задача 3. Провести полное исследование функции и построить ее график.

1. $y=4x/(4+x^2)$.
2. $y=(x^2+1)/(x^2-1)$.
3. $y=(x^2-1)/(x^2+1)$.
4. $y=x^2/(x-1)$.
5. $y=\ln(x^2-1)$.
6. $y=(4x^2+5)/(x-1)$.
7. $y=(x^2-5)/(x-3)$.
8. $y=x^4/(x^3-1)$.
9. $y=x\cdot e^{-x}$.
10. $y=(2-4x^2)/(1-4x^2)$.
11. $y=9/(x^2-9)$.
12. $y=(4x^3+1)/x$.
13. $y=2x/(2-x^2)$.
14. $y=(x^2-1)/(x^2+2)$.
15. $y=(x^3-4)/4x^2$.
16. $y=(x^3+16)/x$.
17. $y=x\cdot e^x$.
18. $y=\ln(1-x^2)$.
19. $y=(x^2+1)/x$.
20. $y=e^{2x-2x^2}$.

Задача 4. Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; б) $\int\sin(3x+5)dx$; в) $\int\frac{5x-1}{3x^2-2x+1}dx$; г) $\int x\cdot\cos x dx$.

2. а) $\int x\sqrt{2-3x^2}dx$; б) $\int\frac{x^2}{x^3-2}dx$; в) $\int\frac{xdx}{3x^2-2x+4}$; г) $\int x\cdot e^{-x}dx$.

3. а) $\int x^2\sqrt{2+3x^3}dx$; б) $\int\cos(1+4x)dx$; в) $\int\frac{(3x+5)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$; г) $\int x\cdot\ln x dx$.

4. а) $\int\frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int\sin 5x\cdot\cos x dx$; в) $\int\frac{x-3}{5x^2-8x+4}dx$; г) $\int\operatorname{arctg}x dx$.

5. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2}}$; б) $\int \frac{2x+2}{x^2+2x}dx$; в) $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$; г) $\int x \cdot 5^x dx$.

6. а) $\int \frac{xdx}{x^4+1}$; б) $\int 5\sin x \cdot \cos x dx$; в) $\int \frac{2x+1}{1-3x-x^2}dx$; г) $\int \arcsin x dx$.

7. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$; в) $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$; г) $\int (x+4)\cdot \sin 2x dx$.

8. а) $\int \frac{xdx}{1-x^2}$; б) $\int \frac{\ln x}{x}dx$; в) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^5 x}}dx$; г) $\int x \cdot \cos(3x-2)dx$.

9. а) $\int \frac{xdx}{1+2x^2}$; б) $\int \cos^2 x dx$; в) $\int \frac{4x+1}{x^2-2x+2}dx$; г) $\int (x+1)\cdot 2^x dx$..

10. а) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$; б) $\int x \cdot \cos(1-x^2)dx$; в) $\int \frac{x+2}{\sqrt{1+2x^2}}dx$; г) $\int \arccos 2x dx$.

11. а) $\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$; б) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$; г) $\int 4x \cdot \cos 2x dx$.

12. а) $\int x\sqrt{x^2-5}dx$; б) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; в) $\int \frac{x+1}{x^2-6x+13}dx$; г) $\int (x+2)\ln x dx$.

13. а) $\int \frac{xdx}{x^2-1}$; б) $\int \sin^2 x dx$; в) $\int \frac{xdx}{3x^2-2x+4}$ г) $\int (5x+1)\cdot \lg x dx$.

14. а) $\int x\sqrt{4-x^2}dx$; б) $\int \sin 3x \cos 5x dx$; в) $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$; г) $\int x \cdot \sin 3x dx$.

15. а) $\int x(1-4x^2)^7 dx$; б) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$; в) $\int \frac{x-4}{x^2+x+2}dx$ г) $\int x \cdot e^{2x} dx$.

16. а) $\int \frac{12x^2 dx}{4x^3+3}$; б) $\int \cos 4x \cdot \cos 3x dx$; в) $\int \frac{(x+3)dx}{x^2+6x+10}$; г) $\int (2x-1)\cdot 3^{2x} dx$.

17. а) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+5}$; б) $\int \sqrt{\cos^3 x}\cdot \sin x dx$; в) $\int \frac{xdx}{x^2+10x+9}$; г) $\int x \sin(2x-1)dx$.

18. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x^2+3}}$; б) $\int \frac{xdx}{x^4-16}$; в) $\int \frac{xdx}{x^2-6x+5}$; г) $\int (4x+1)\cdot \cos x dx$.

19. а) $\int \frac{xdx}{25-x^2}$; б) $\int e^x \cos(e^x+1)dx$; в) $\int \frac{x+1}{x^2+x-2}dx$; г) $\int x \cdot \sin(2x+1)dx$.

20. а) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$; б) $\int \sin^3 2x \cos^2 2x\,dx$; в) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; г) $\int x \cdot e^{4x}\,dx$.

Задача 5. *Дана функция двух переменных* $z = f(x,y)$ *и точка* $M_0(x_0,y_0)$. *Требуется: 1) нарисовать область определения; 2) найти одну из линий уровня; 3) взять частные производные в точке* $M(x_0,y_0)$; *4) написать уравнение касательной плоскости; 5) выписать градиент и производную по направлению в* $M(x_0,y_0)$ *под углом* $\alpha = (-1)^n \frac{\pi}{4}$, *где* n – *номер варианта.*

1. $z = \sqrt{x-y^2}$, $M_0(5,2)$.
2. $z = \arcsin\frac{y}{x^2}$, $M_0(\sqrt[4]{2},1)$.
3. $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $M_0(1,\sqrt{2})$.
4. $z = \frac{y^2}{x}$, $M_0(-3,1)$.
5. $z = \sqrt{x^2-y^2}$, $M_0(5,4)$.
6. $z = \ln(x-y^2)$, $M_0(5,-2)$.
7. $z = \arcsin\frac{x}{y^2}$, $M_0(-1,\sqrt[4]{2})$.
8. $z = \sqrt{x^2+y^2-4}$, $M_0(3,-2)$.
9. $z = \frac{x^2}{y}$, $M_0(-3,-1)$.
10. $z = \ln(x^2-y^2)$, $M_0(4,\sqrt{3})$.
11. $z = \sqrt{y^2-x}$, $M_0(7,4)$.
12. $z = \arccos\frac{y}{x^2}$, $M_0(\sqrt[4]{2},1)$.
13. $z = \ln(4-x^2-y^2)$, $M_0(\sqrt{2},1)$.
14. $z = \frac{y}{x^2}$, $M_0(1,-2)$.
15. $z = \sqrt{y^2-x^2}$, $M_0(3,5)$.
16. $z = \ln(y^2-x)$, $M_0(8,3)$.
17. $z = \arccos\frac{x}{y^2}$, $M_0(1,\sqrt[4]{2})$.
18. $z = \ln(x^2+y^2-4)$, $M_0(-2,2)$.
19. $z = \frac{x}{y^2}$, $M_0(3,1)$.
20. $z = \ln(y^2-x^2)$, $M_0(2,\sqrt{5})$.