МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»»

Кафедра прикладной математики и механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
для студентов всех направлений
заочной формы обучения
(6 часов)

Воронеж 2021

УДК 531(07)
ББК 22.21я7

Составители:
канд. физ.-мат. наук Н. С. Переславцева,
канд. техн. наук А. А. Воропаев,
д-р техн. наук Д. В. Хван,
канд. техн. наук Л. В. Хливненко

Теоретическая механика: методические указания к проведению практических занятий для студентов всех направлений заочной формы обучения (6 часов) / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: Н. С. Переславцева, А. А. Воропаев, Д. В. Хван, Л. В. Хливненко. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. 41 с.

Методические указания предназначены для направлений, учебные планы которых предусматривают проведение аудиторных практических занятий в объеме шести часов. Они включают программу курса, содержание занятий, задания для самостоятельной работы, вопросы для самопроверки, список рекомендуемой литературы.

Предназначены для студентов 1–2 курсов.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ Практика(6ч).pdf.

Табл. 4. Ил. 20. Библиогр.: 7 назв.

УДК 531(07)
ББК 22.21я7

Рецензент - А. В. Ряжских, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики ВГТУ

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Кинематический анализ многозвенного механизма. Аналитические и графические методы

Механизм (рис. 1) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

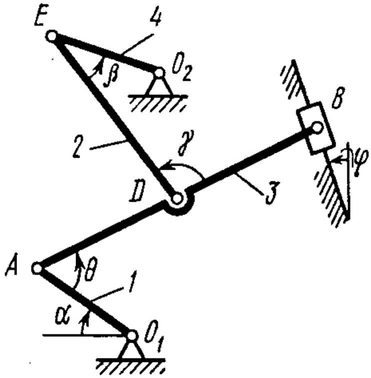


Рис. 1

Д а н о : $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD = DB$, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 – против хода часовой стрелки).

О п р е д е л и т ь : v_B, v_E, a_B, ω_2, ε_3.

Решение:

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами и выбранным масштабом длин (рис. 2; на этом рисунке будем изображать все найденные векторы скоростей).

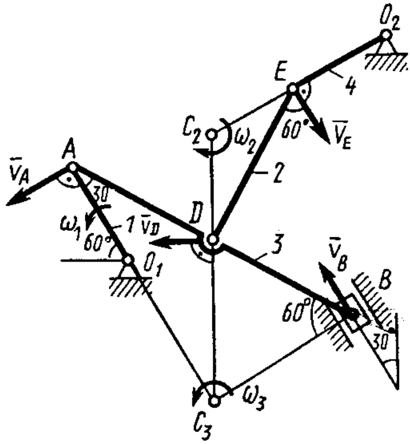


Рис. 2

2. Определяем v_B. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти v_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{v}_B$. По данным

задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\bar{v}_A$. Численно:

$$v_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \ \text{м/с}, \ \bar{v}_A \perp O_1 A.$$

Направление $\bar{v}_B$ найдем, учтя, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{v}_A$ и направление $\bar{v}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{v}_B$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 60^\circ, \qquad v_B = 0{,}46 \ \text{м/с}.$$

3. Определяем $\bar{v}_E$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar{v}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB. Это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, восставленных из точек A и B (к $\bar{v}_A$ перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора $\bar{v}_A$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор $\bar{v}_D$ перпендикулярен отрезку $C_3 D$, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину v_D найдем из пропорции:

$$\frac{v_D}{C_3 D} = \omega_3 = \frac{v_B}{C_3 B}.$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB\sin 30^\circ = 0{,}5AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3D = C_3B$. В результате

$$v_D = v_B = 0{,}46 \text{ м/с}, \qquad \bar{v}_D \perp C_3D.$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\bar{v}_E \perp O_2E$. Тогда, восставляя из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\bar{v}_E$ и $\bar{v}_D$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\bar{v}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\bar{v}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. 2 видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_E}{C_2E} = \omega_2 = \frac{v_D}{C_2D}, \qquad v_E = v_D = 0{,}46 \text{ м/с}.$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и $C_2D = l/(2\cos 30^\circ) = 0{,}69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ с}^{-1}.$$

5. Определяем $\bar{a}_B$ (рис. 3, на котором будем изображать все найденные векторы ускорений). Точка B принадлежит стержню AB.

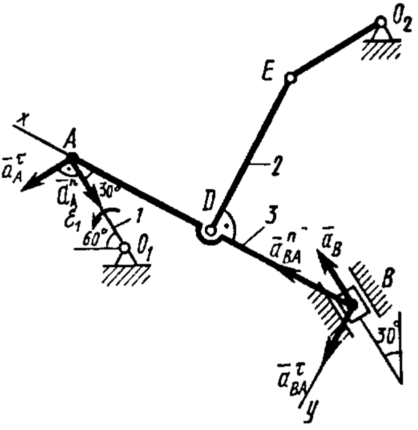


Рис. 3

Чтобы найти $\overline{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B. По данным задачи можем определить

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n,$$

где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2, \; a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\overline{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\overline{a}_A^\tau$ – перпендикулярно AO_1. Изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. 43). Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\overline{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\overline{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\overline{v}_B$.

Для определения $\overline{a}_B$ воспользуемся равенством:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n + \overline{a}_{BA}^\tau + \overline{a}_{BA}^n.$$

Изображаем на чертеже векторы $\overline{a}_{BA}^n$ (вдоль BA от B к A) и $\overline{a}_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно BA). Численно $a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$ Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3 A} = \frac{v_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0{,}66 \text{ с}^{-1}, \; a_{BA}^n = 0{,}61 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство, неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ. Их можно найти, спроектировав обе части равенства на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроектируем обе части равенства на направление BA (ось x). Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n .$$

Подставив числовые значения всех величин, найдем, что

$$a_B = 0{,}72 \text{ м/с}^2.$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\overline{a}_B$ направлен так, как показано на рис. 2.

6. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a_{BA}^τ. Для этого обе части равенства спроектируем на направление, перпендикулярное AB (ось y). Тогда получим:

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^\tau \sin 60^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau .$$

Подставив числовые значения всех величин, найдем, что

$$a_{BA}^\tau = -3{,}58 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус указывает, что направление $\overline{a}_{BA}^\tau$ противоположно показанному на рис. 43.

Теперь из равенства $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$ получим:

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a_{BA}^\tau\right|}{l_3} = 2{,}56 \text{ с}^{-2}.$$

О т в е т : $v_B = 0{,}46$ м/с, $v_E = 0{,}46$ м/с, $\omega_2 = 0{,}67$ с$^{-1}$, $a_B = 0{,}72$ м/с^2, $\varepsilon_3 = 2{,}56$ с$^{-2}$.

Задания для самостоятельной работы

В некоторых вариантах задаются параметры вращательного движения одного из звеньев, а в некоторых – поступательного движения одного из точек механизма. Схемы механизмов приведены на рис. 4–6 , а условия – в табл. 1. Для заданного положения механизма требуется определить скорости и ускорения точек B и M .

Таблица 1

№ варианта	v_A, см/с	a_A, см/с^2	ω_{OA}, с$^{-1}$	ε_{OA}, с$^{-2}$	AB, см	AM, см	AO, см	BM, см
1.	50	20			50	40		
2.			5	4		$10/\sqrt{3}$	10	
3.			4	6		$20/\sqrt{3}$	20	
4.			3	2		10	15	10
5.			8	6		3	5	2
6.	40	20	5	6		10	40	
7.			2	3		20	50	
8.			7	1		15	30	
9.			4	5		30	40	10
10.			3	8		5	25	
11.	30	40				40		10
12.			2	7		25	50	25
13.	25	10				40		40
14.	40	15				25		75
15.			6	3		4	10	1
16.			5	9		20	40	20
17.			4	5		10	20	
18.			7	8		40	50	
19.	30	20			50	10		
20.			3	2		10	60	20
21.			6	7		20	30	
22.			5	3		30	75	
23.			8	5		20	50	30
24.			4	6		20	10	10
25.			6	2	40		20	30

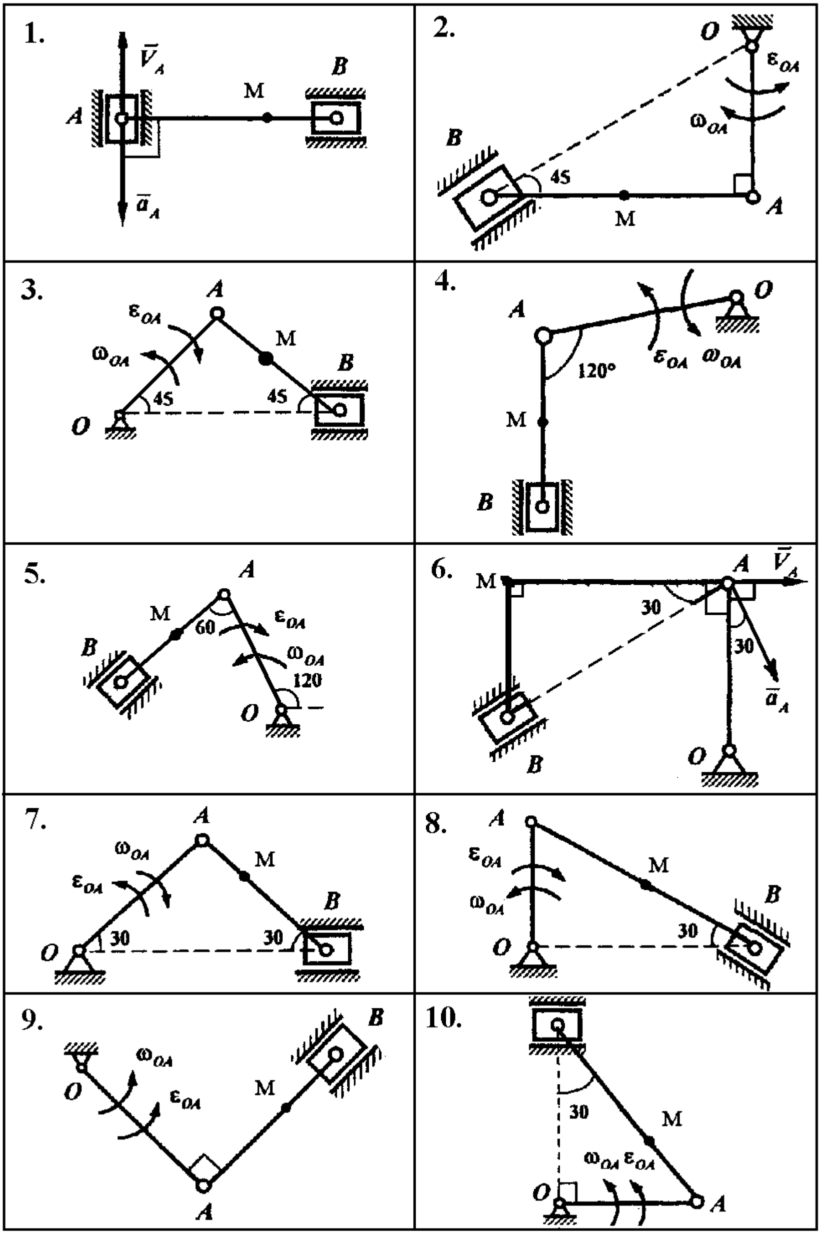

1.
$\bar{V}_A$
A
M
B
$\bar{a}_A$
2.
O
ε_{OA}
ω_{OA}
B
45
M
A
3.
A
ε_{OA}
ω_{OA}
M
B
45
45
O
4.
O
A
120°
ε_{OA} ω_{OA}
M
B
5.
A
M
60
ε_{OA}
B
ω_{OA}
120
O
6.
M
A
$\bar{V}_A$
30
30
$\bar{a}_A$
B
O
7.
A
ω_{OA}
M
ε_{OA}
B
O
30
30
8.
A
ε_{OA}
M
ω_{OA}
B
30
O
9.
B
ω_{OA}
O
ε_{OA}
M
A
10.
30
M
ω_{OA} ε_{OA}
O
A

Рис. 4

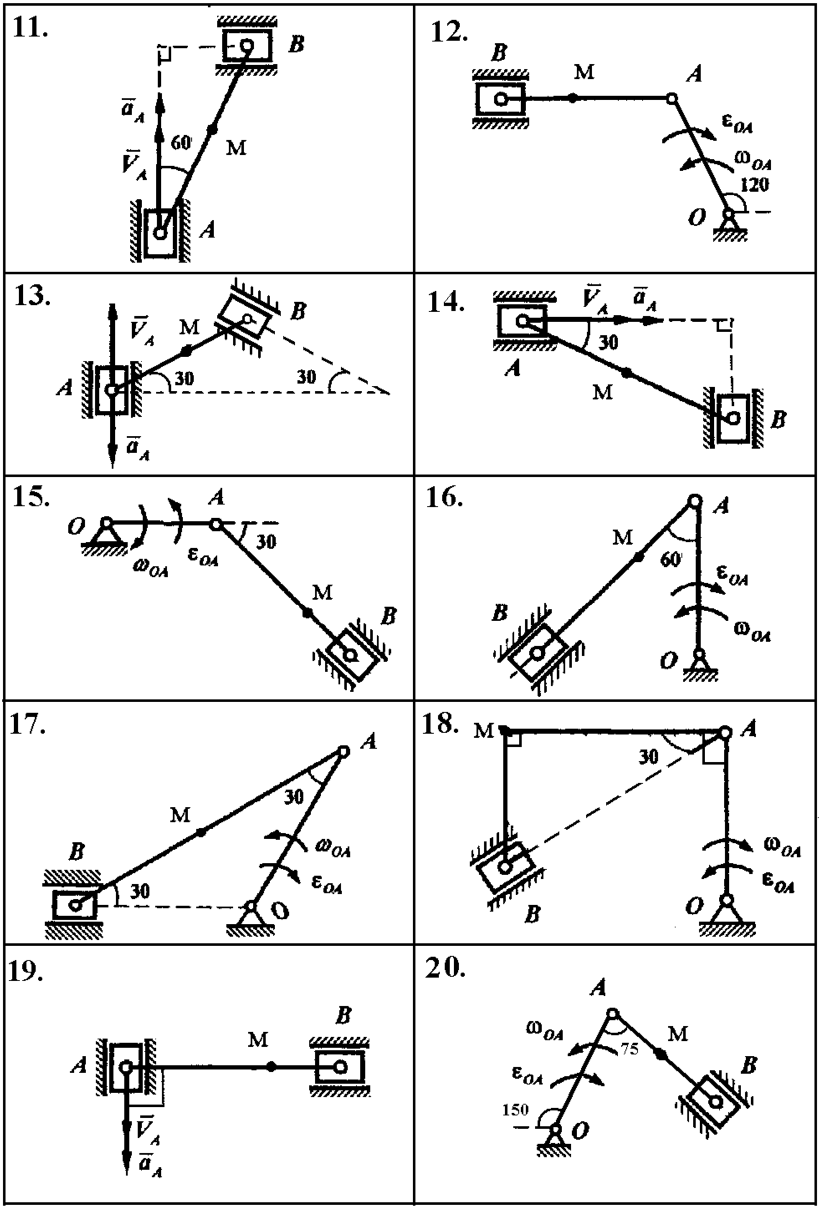

11.
B
$\bar{a}_A$
60
M
$\bar{V}_A$
A
12.
B
M
A
ε_{OA}
ω_{OA}
120
O
13.
B
$\bar{V}_A$
M
A
30
30
$\bar{a}_A$
14.
$\bar{V}_A$
$\bar{a}_A$
30
A
M
B
15.
A
O
30
ω_{OA}
ε_{OA}
M
B
16.
A
M
60
ε_{OA}
B
ω_{OA}
O
17.
A
30
M
ω_{OA}
B
ε_{OA}
30
O
18.
M
A
30
ω_{OA}
ε_{OA}
B
O
19.
B
M
A
$\bar{V}_A$
$\bar{a}_A$
20.
A
ω_{OA}
M
75
B
ε_{OA}
150
O

Рис. 5

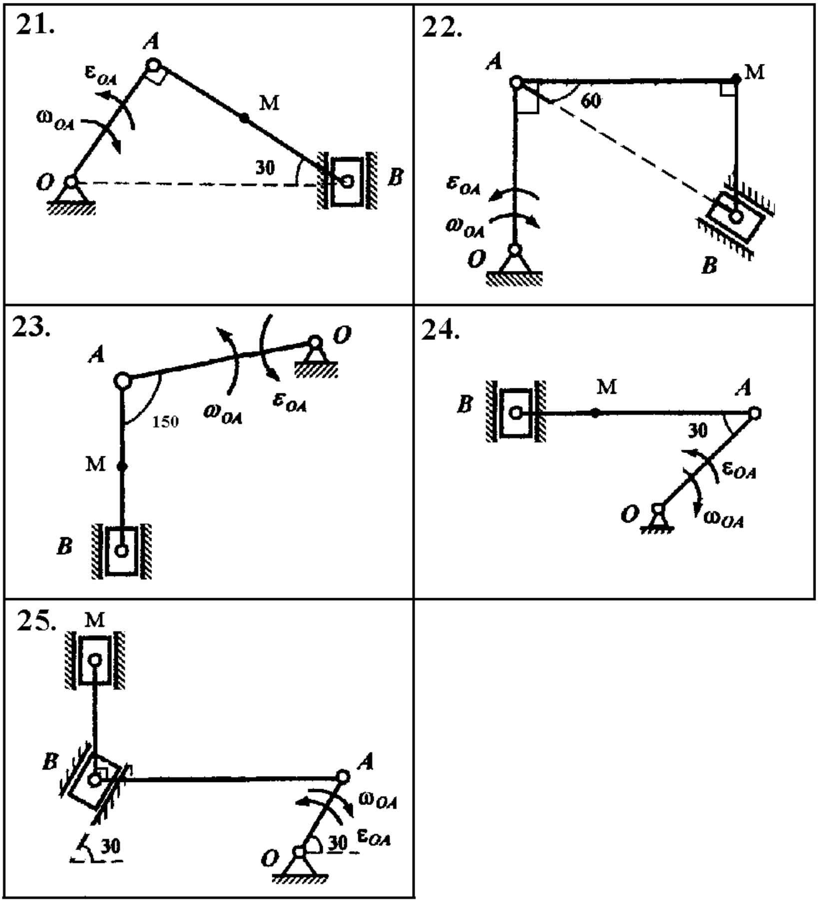


Рис. 6

Вопросы для самопроверки

1) Какое движение тела называют плоским?
2) Дайте две интерпретации плоского движения тела.
3) Запишите уравнения плоского движения. Чему равно число степеней свободы тела в этом случае?

4) Как вычисляются угловые характеристики вращательной части плоского движения тела?

5) Какой вид принимает теорема сложения скоростей в случае плоского движения тела? Как Вы применяли её при решении задач?

6) Что называют мгновенным центром скоростей? Способы определения его положения. Свойства МЦС. Как Вы находили положение МЦС и с его помощью определяли скорости точек тела при решении задач?

7) Какой вид принимает теорема сложения скоростей в случае плоского движения тела? Как Вы применяли её при решении задач?

8) Какой вид принимает теорема сложения ускорений в случае плоского движения тела? Как Вы применяли её при решении задач?

9) Что называют мгновенным центром ускорений? Способы определения его положения. Свойства МЦУ.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. Определение реакций опор

На угольник ABC ($\angle ABC = 90°$), конец A которого жестко заделан, в точке C опирается стержень DE (рис. 7 а). Стержень имеет в точке D неподвижную шарнирную опору и к нему приложена горизонтальная сила $\overline{F}$ в точке E, а к угольнику – равномерно распределенная на участке KB нагрузка интенсивности q и пара сил с моментом M.

Д а н о : $F = 10$ кН, $M = 5$ кН$\cdot$м, $q = 20$ кН/м, $a = 0{,}2$ м.

О п р е д е л и т ь : реакции в точках A, C, D.

Решение:

1. Для определения реакций расчленим систему и

рассмотрим сначала равновесие стержня DE (рис. 7 б). Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на стержень силы: силу $\overline{F}$, реакцию $\overline{N}$, направленную перпендикулярно стержню, и составляющие $\overline{X}_D$ и $\overline{Y}_D$ реакции шарнира D. Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0: \quad X_D + F - N\sin 60° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \quad Y_D + N\cos 60° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_D(\overline{F}_k) = 0: \quad N \cdot 2a - F \cdot 5a\sin 60° = 0.$$

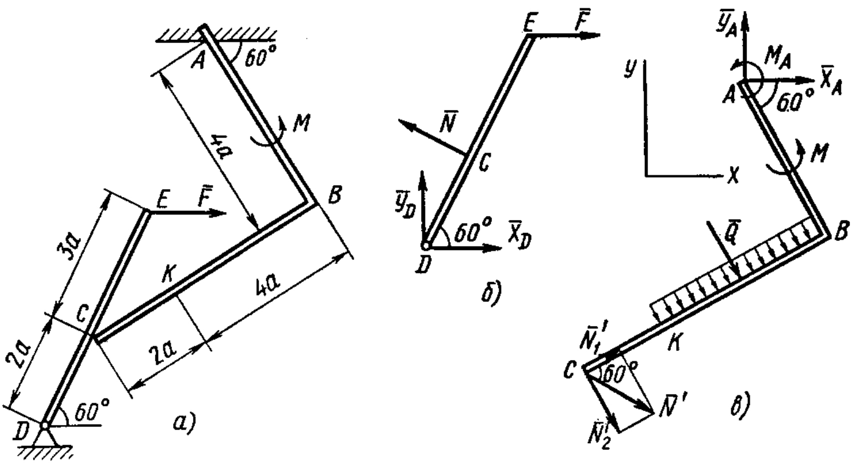


Рис. 7

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. 7 в). На него действуют сила давления стержня $\overline{N}'$, направленная противоположно реакции $\overline{N}$, равномерно распределенная

нагрузка, которую заменяем силой $\overline{Q}$, приложенной в середине участка KB (численно $Q = q \cdot 4a = 16$ кН), пара сил с моментом M и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, и вращающего момента M_A. Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0: \quad X_A + Q\cos 60° + N'\sin 60° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \quad Y_A - Q\sin 60° - N'\cos 60° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overline{F}_k) = 0: \quad M_A + M + Q \cdot 2a + N'\cos 60° \cdot 4a +$$

$$+ N'\sin 60° \cdot 6a = 0.$$

При вычислении момента силы $\overline{N}'$ разлагаем ее на составляющие $\overline{N}_1'$ и $\overline{N}_2'$ и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений, найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно $\left|\overline{N}'\right| = \left|\overline{N}\right|$ согласно равенству сил действия и противодействия.

Для проверки правильности решения составим уравнение на моменты для всей конструкции:

$$\sum_{k=1}^{n} M_C(\overline{F}_k) = 0: \quad M_A + M - Q \cdot 4a + X_D \cdot 2a\sin 60^\circ -$$

$$- Y_D \cdot 2a\cos 60^\circ - F \cdot 3a\sin 60^\circ + Y_A \cdot 6a\sin 60^\circ -$$

$$- Y_A \cdot 4a\cos 60^\circ - X_A \cdot 6a\cos 60^\circ - X_A \cdot 4a\sin 60^\circ =$$

$$= -42{,}6 + 5 - 16 \cdot 4 \cdot 0{,}2 + 8{,}8 \cdot 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}866 +$$

$$+10{,}8\cdot 2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5-10\cdot 3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}866+$$
$$+24{,}7\cdot 6\cdot 0{,}2\cdot 0{,}866-24{,}7\cdot 4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5+$$
$$+26{,}8\cdot 6\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5+26{,}8\cdot 4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}866\equiv 0\,.$$

О т в е т : $N=21{,}7$ кН, $X_D=8{,}8$ кН, $Y_D=-10{,}8$ кН, $X_A=-26{,}8$ кН, $Y_A=24{,}7$ кН, $M_A=-42{,}6$. Знаки минус указывают, что силы $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_D$ и момент M_A направлены противоположно показанным на рис. 7.

Задания для самостоятельной работы

Конструкция состоит из двух тел, соединенных с помощью скользящей заделки. Система находится в равновесии под действием сосредоточенных сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, распределенной нагрузки интенсивностью q и вращающего момента M. В качестве внешних связей, наложенных на систему, могут фигурировать неподвижный и подвижный шарниры, заделка. Определить силы реакции, действующие на конструкцию. Данные приведены в табл. 2 и на рис. 8–10.

Таблица 2

№ варианта	F_1, Н	F_2, Н	q, Н/м	M, Н·м	a, м
1.	6	12	30	11	0,4
2.	7	6	19	12	0,7
3.	12	3	27	9	0,9
4.	3	8	26	12	1,2
5.	9	4	24	8	1,4
6.	8	6	18	7	0,8
7.	5	7	22	6	0,6
8.	11	9	34	15	0,7
9.	6	13	19	14	1,1
10.	3	4	24	10	0,9
11.	7	15	25	20	1,2
12.	5	8	26	9	0,8
13.	6	9	22	13	0,6
14.	4	6	27	10	0,4
15.	9	3	28	11	0,5
16.	11	5	25	9	0,6
17.	5	4	46	8	0,8
18.	8	7	13	6	0,4
19.	6	2	20	12	0,7
20.	2	8	19	11	0,9
21.	9	11	32	7	1,2
22.	3	6	25	14	1,4
23.	8	14	24	7	0,8
24.	9	3	31	6	1,2
25.	1	8	18	13	0,6

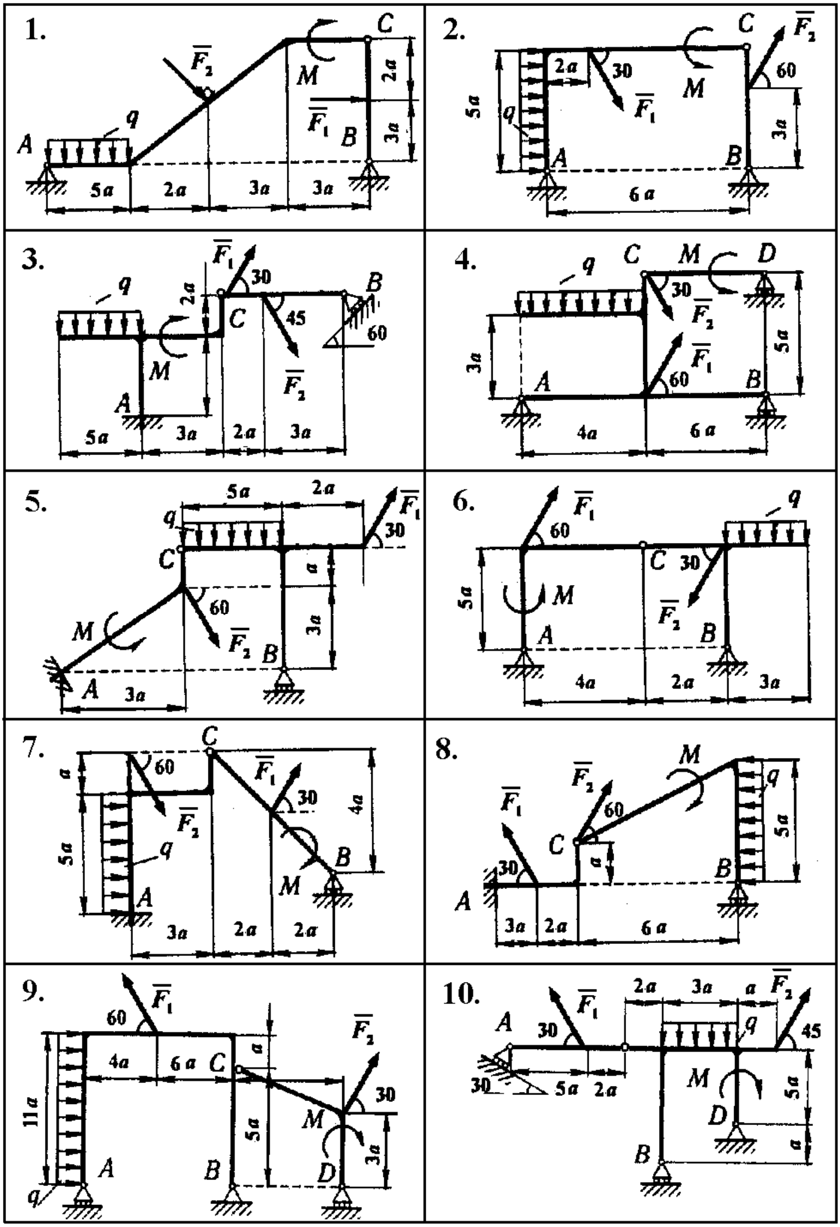

1.
C
$\overline{F}_2$
M
2a
q
$\overline{F}_1$
B
3a
A
5a
2a
3a
3a
2.
C
$\overline{F}_2$
2a
30
60
M
5a
q
$\overline{F}_1$
3a
A
B
6a
3.
$\overline{F}_1$
30
q
2a
C
45
B
60
M
$\overline{F}_2$
A
5a
3a
2a
3a
4.
C
M
D
q
30
$\overline{F}_2$
$\overline{F}_1$
5a
3a
A
60
B
4a
6a
5.
5a
2a
$\overline{F}_1$
q
30
C
a
60
M
3a
$\overline{F}_2$
B
A
3a
6.
$\overline{F}_1$
q
60
C
30
5a
M
$\overline{F}_2$
A
B
4a
2a
3a
7.
C
60
$\overline{F}_1$
a
30
$\overline{F}_2$
4a
5a
q
B
M
A
3a
2a
2a
8.
M
$\overline{F}_2$
q
$\overline{F}_1$
60
5a
C
a
30
B
A
3a
2a
6a
9.
$\overline{F}_1$
60
$\overline{F}_2$
a
4a
6a
C
30
11a
5a
M
3a
A
B
D
q
10.
2a
3a
a
$\overline{F}_2$
A
$\overline{F}_1$
30
q
45
M
5a
30
5a
2a
D
B
a

Рис. 8

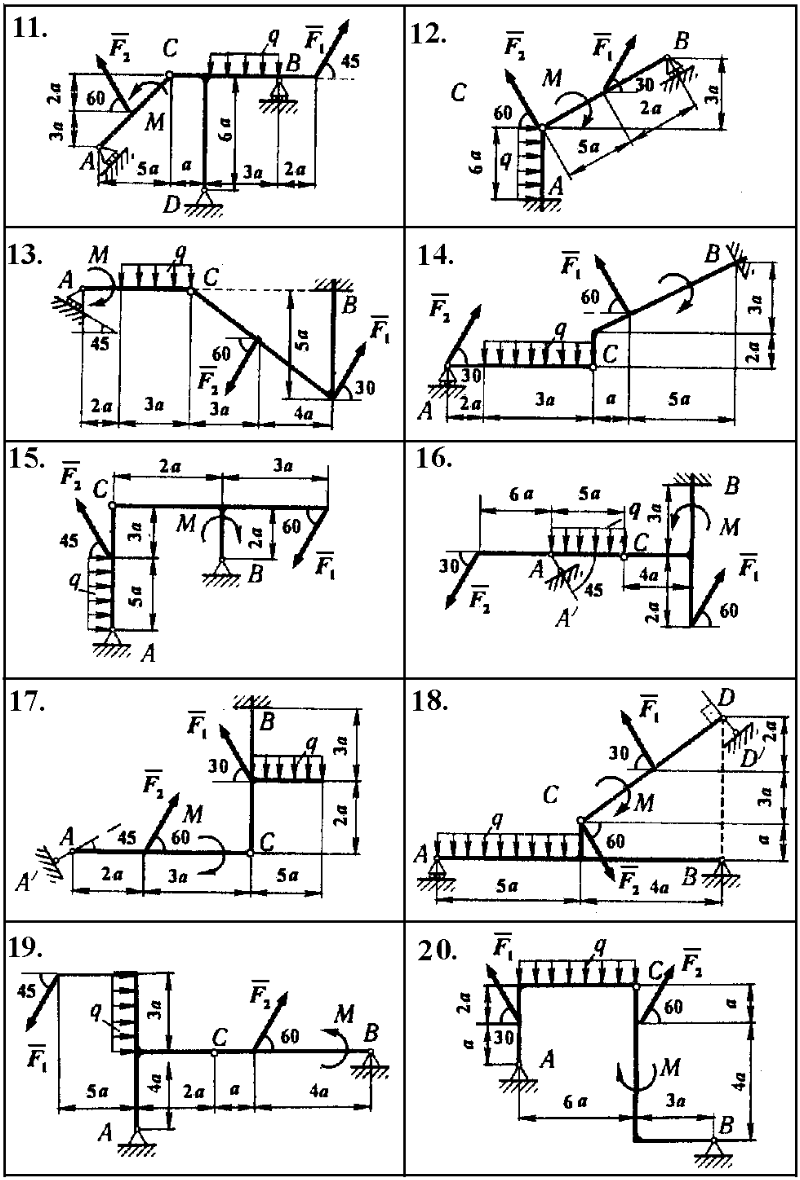


Рис. 9

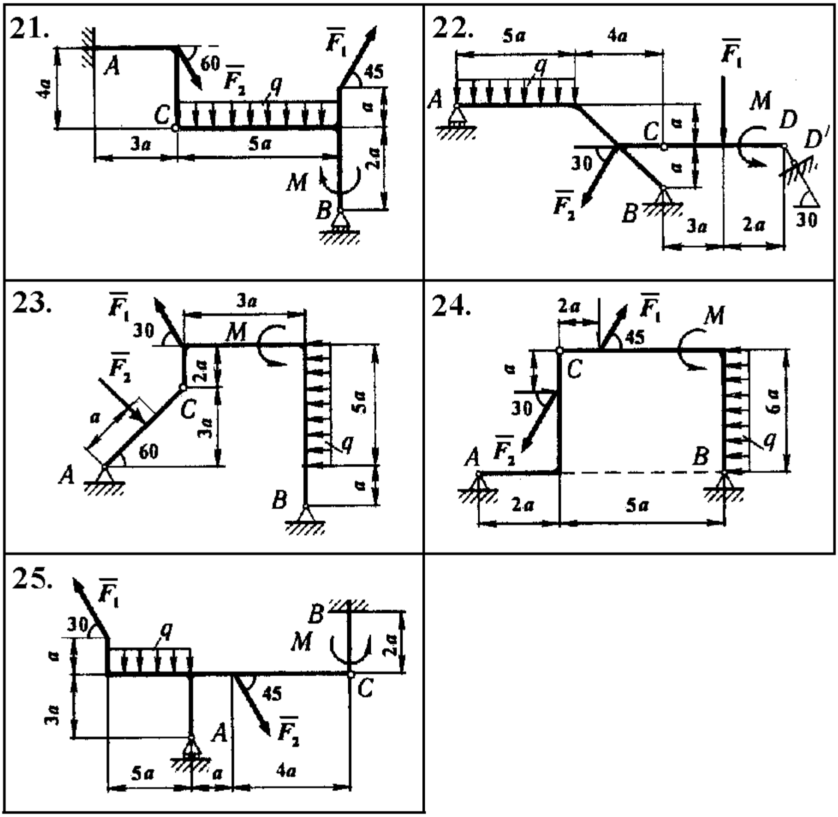


Рис. 10

Вопросы для самопроверки

1) Что называют составной конструкцией или сочлененной системой тел?

2) Дайте определение внешних и внутренних сил системы.

3) В каких случаях внутренние силы системы становятся внешними? Поясните на примере.

4) Опишите алгоритм решения задач на равновесие системы тел. Как Вы его применяли при решении задач?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Исследование движения механизмов с одной степенью свободы с помощью теоремы об изменении кинетической энергии

Механическая система (см. рис. 11) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока 4 и груза 5 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями. К центру E блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c. Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = F(s_1)$, зависящей от перемещения s_1 точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

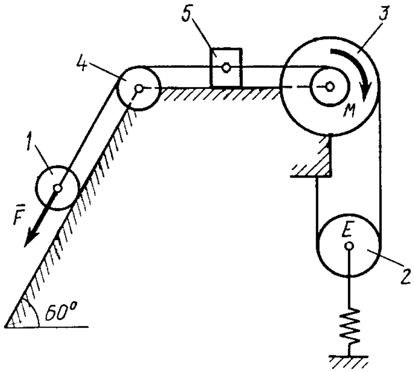


Рис. 11

Д а н о : $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 0$ кг, $m_3 = 4$ кг, $m_4 = 0$ кг, $m_5 = 10$ кг, $R_3 = 0{,}3$ м, $r_3 = 0{,}1$ м, $\rho_3 = 0{,}2$ м, $f = 0{,}1$, $c = 240$ Н/м, $M = 0{,}6$ Н·м, $F = 20(3 + 2s_1)$ Н, $s_1 = 0{,}2$ м.

О п р е д е л и т ь : ω_3 при заданном перемещении s_1.

Решение:

1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел 1, 3, 5 и невесомых тел 2, 4, соединенных нитями (см. рис. 12). Изобразим действующие

на систему внешние силы: силы тяжести $m_1\overline{g}$, $m_3\overline{g}$, $m_5\overline{g}$, реакции $\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, натяжение нити $\overline{S}_2$, силы трения $\overline{F}_{тр1}$, $\overline{F}_{тр5}$, силу упругости $\overline{F}_{упр}$, заданные по условию силу $\overline{F}$ и момент M.

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для системы с идеальными связями:

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} .$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

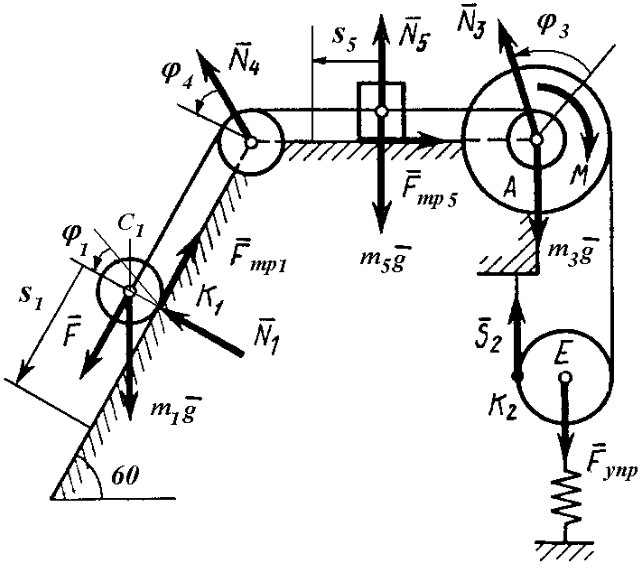


Рис. 12

$$T = T_1 + T_3 + T_5 .$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 5 – поступательно, а тело 3 вращается вокруг неподвижной оси, получим:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2 ,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 ,$$

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_5^2 .$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3. Для этого предварительно заметим, что $v_{C1} = v_5 = v_A$, где A – любая точка обода радиуса r_3 шкива 3 и что точка K_1 – мгновенный центр скоростей катка 1, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$v_{C1} = v_5 = v_A = \omega_3 r_3 , \quad \omega_1 = \frac{v_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{v_{C1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1} .$$

Моменты инерции имеют значения:

$$I_{C1} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 , \qquad I_3 = m_3 \rho_3^2 .$$

Окончательно получим:

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2 .$$

3. Найдем сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда центр катка 1 пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_5 – перемещение груза 5 ($s_5 = s_1$), φ_3 – угол поворота шкива 3, λ_0 и λ_1 – начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 20(3+2s)ds = 20(3s_1 + s_1^2)\,,$$

$$A(m_1\overline{g}) = m_1 g s_1 \sin 60^\circ\,,$$

$$A(\overline{F}_{\text{òð}\,5}) = -F_{\text{òð}\,5} s_5 = -f m_5 g s_1\,,$$

$$A(M) = -M\varphi_3\,,$$

$$A(\overline{F}_{\text{óïð}}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)\,.$$

Работы остальных сил равны нулю, т.к. точки K_1 и K_2, где приложены силы $\overline{N}_1$, $\overline{F}_{mp1}$ и $\overline{S}_2$ – мгновенные центры скоростей; точки, где приложены силы $m_3\overline{g}$, $m_5\overline{g}$ и $\overline{N}_3$ – неподвижны; а сила $\overline{N}_5$ – перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E – перемещение точки E (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1. Для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда, так как $\omega_3 = \dfrac{v_A}{r_3} = \dfrac{v_{C1}}{r_3}$ (равенство $v_{C1} = v_A$ уже отмечалось), то и $\varphi_3 = \dfrac{s_1}{r_3}$.

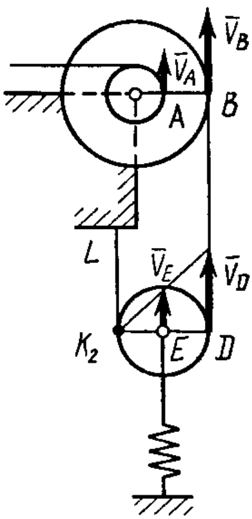


Рис. 13

Из рис. 13 видно, что

$v_D = v_B = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы «катится» по участку нити $K_2 L$), то $v_E = \frac{1}{2} v_D = \frac{1}{2}\omega_3 R_3$; следовательно, и $\lambda_1 = s_E = \frac{1}{2}\varphi_3 R_3 = \frac{s_1 R_3}{2r_3}$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы вычисленных работ получим

$$\sum A_k^{(e)} = 20(3s_1 + s_1^2) + m_1 g_1 s_1 \sin 60^\circ - f m_5 g s_1 -$$

$$- M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2 .$$

4. Подставим полученные выражения в теорему:

$$\left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 = 20(3s_1 + s_1^2) +$$

$$+ m_1 g s_1 \sin 60^\circ - f m_5 g s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2 .$$

Отсюда находим $\omega_3 = 8{,}1\ \text{с}^{-1}$.

О т в е т : $\omega_3 = 8{,}1\ \text{с}^{-1}$.

Задания для самостоятельной работы

Механическая система состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней $R_3 = 0{,}3$ м и $r_3 = 0{,}1$ м, и радиусом инерции относительно оси вращения $\rho_3 = 0{,}2$ м, блока 4 радиуса $R_4 = 0{,}2$ м и катка (или подвижного блока) 5 (рис. 14–16). Тело 5 считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока 4 – равномерно распределенной по ободу. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Коэффициент трения груза о плоскость $f = 0{,}1$. Все катки, включая и катки, обмотанные нитями, катятся по плоскостям без скольжения. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c. Под действием силы $F = F(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления. Численные данные приведены в табл. 3. Определить значение искомой величины (см. столбец 11 табл. 3) в тот момент времени, когда перемещение s станет равным s_1. Искомая величина обозначена: v_1, v_2 и v_{C5} – скорости грузов 1, 2 и центра масс тела 5 соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел 3 и 4. На чертеже можно не изображать груз 2, если $m_2 = 0$; остальные тела надо изображать и тогда, когда их масса равна нулю.

Таблица 3

№ варианта	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	c, Н/м	M, Н·м	$F = f(s)$, Н	s_1, м	Найти
1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***
1	0	6	4	0	5	200	1,2	$80(4+5s)$	0,20	ω_3
2	8	0	0	4	6	320	0,8	$50(8+3s)$	0,15	v_1
3	0	4	6	0	5	240	1,4	$60(6+5s)$	0,10	v_2
4	0	6	0	5	4	300	1,8	$80(5+6s)$	0,18	ω_4

Окончание табл. 3

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***
5	5	0	4	0	6	240	1,2	$40(9+4s)$	0,14	v_1
6	0	5	0	6	4	200	1,6	$50(7+8s)$	0,11	v_{C5}
7	8	0	5	0	6	280	0,8	$40(8+9s)$	0,15	ω_3
8	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8+5s)$	0,20	v_2
9	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9+2s)$	0,17	ω_4
10	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6+7s)$	0,19	v_{C5}
11	8	0	0	4	6	320	0,8	$50(8+3s)$	0,11	v_1
12	0	4	6	0	5	240	1,4	$60(6+5s)$	0,12	v_{C5}
13	0	6	0	5	4	300	1,8	$80(5+6s)$	0,15	ω_3
14	5	0	4	0	6	240	1,2	$40(9+4s)$	0,16	v_2
15	0	5	0	6	4	200	1,6	$50(7+8s)$	0,13	ω_4
16	8	0	5	0	6	280	0,8	$40(8+9s)$	0,18	v_{C5}
17	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8+5s)$	0,14	v_{C5}
18	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9+2s)$	0,11	v_1
19	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6+7s)$	0,15	v_2
20	5	0	4	0	6	240	1,2	$40(9+4s)$	0,20	ω_4
21	0	5	0	6	4	200	1,6	$50(7+8s)$	0,17	v_1
22	8	0	5	0	6	280	0,8	$40(8+9s$	0,19	v_{C5}
23	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8+5s)$	0,15	ω_3
24	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9+2s)$	0,11	v_2
25	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6+7s)$	0,18	ω_4

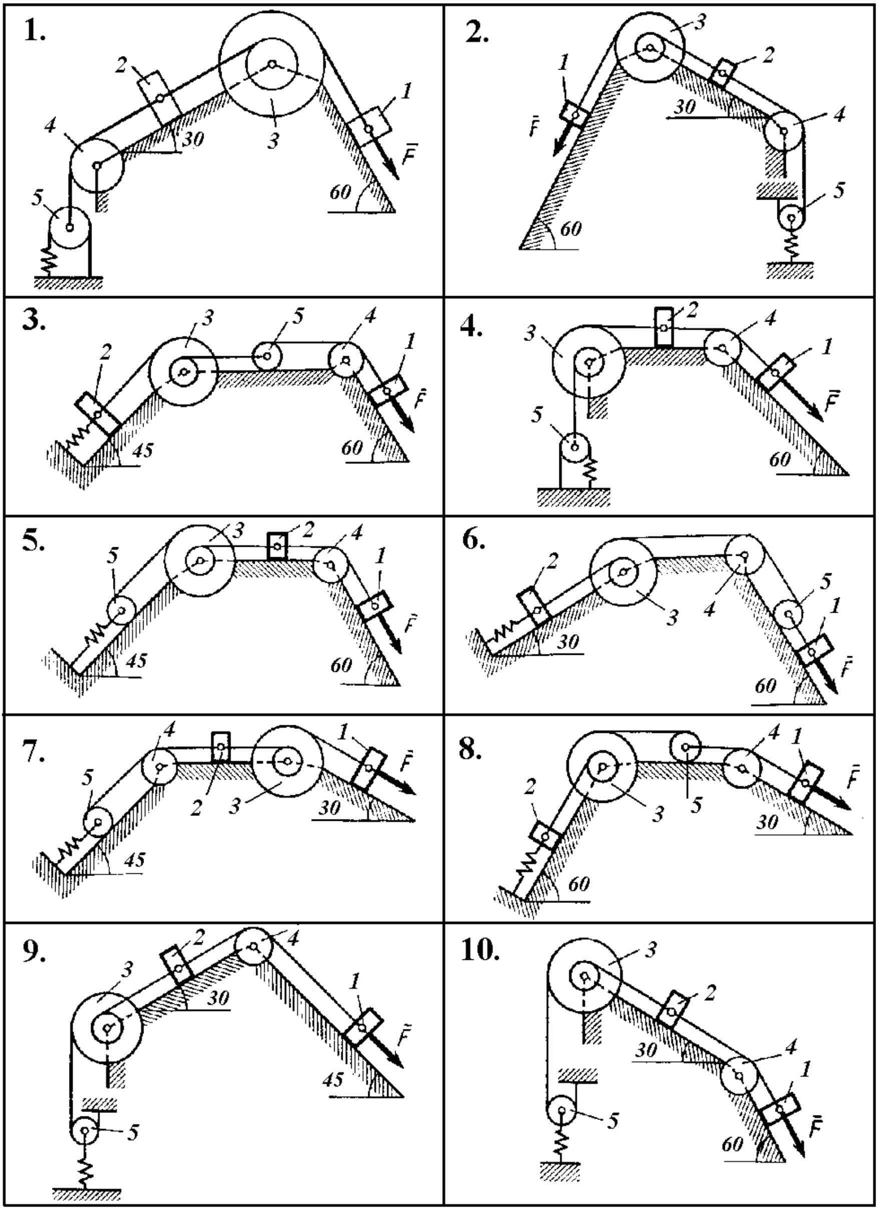
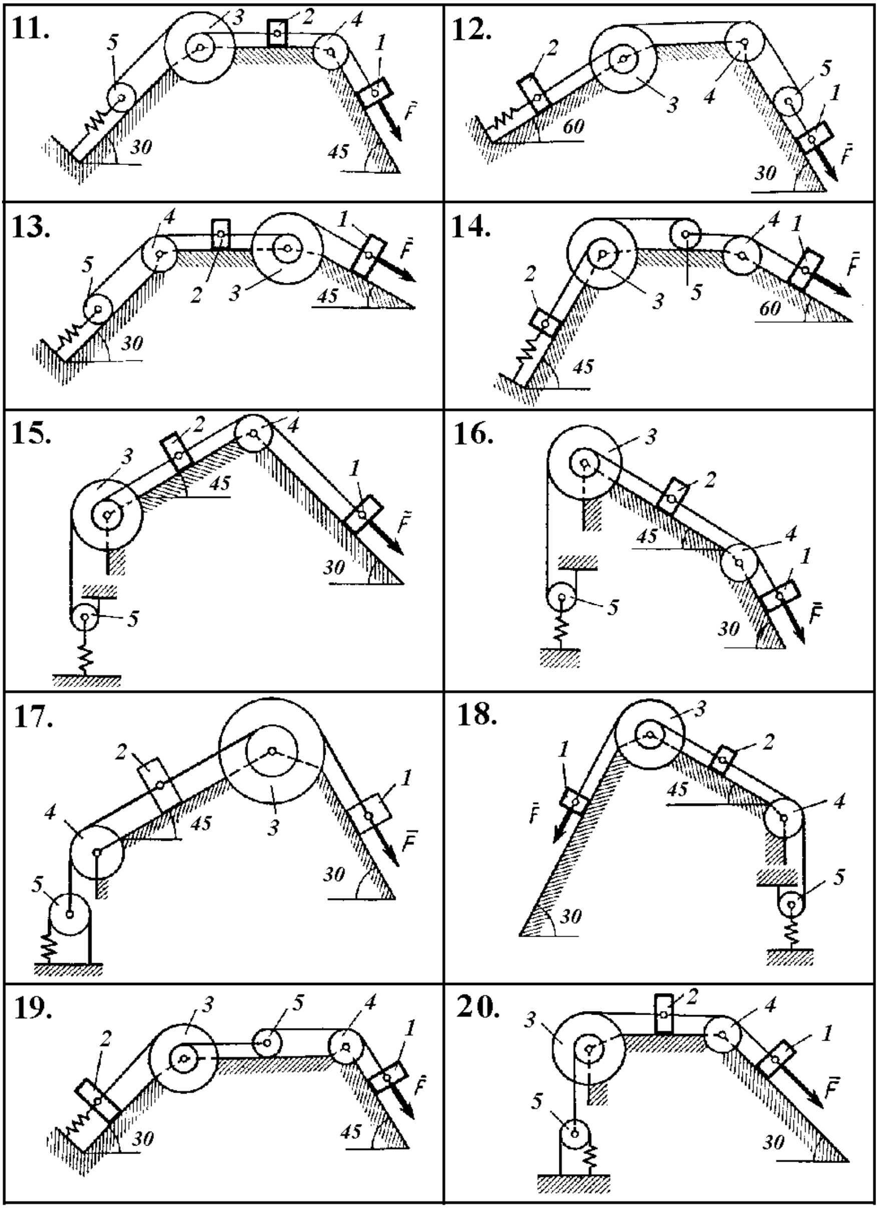


Рис. 14



11.
5
3
2
4
1
$\bar{F}$
30
45
12.
2
3
4
5
1
$\bar{F}$
60
30
13.
4
2
3
1
5
$\bar{F}$
30
45
14.
2
3
5
4
1
$\bar{F}$
45
60
15.
3
2
4
1
$\bar{F}$
45
30
5
16.
3
2
4
1
$\bar{F}$
45
30
5
17.
2
4
3
1
$\bar{F}$
45
30
5
18.
3
2
1
$\bar{F}$
45
4
5
30
19.
3
5
4
2
1
$\bar{F}$
30
45
20.
2
3
4
1
$\bar{F}$
5
30

Рис. 15

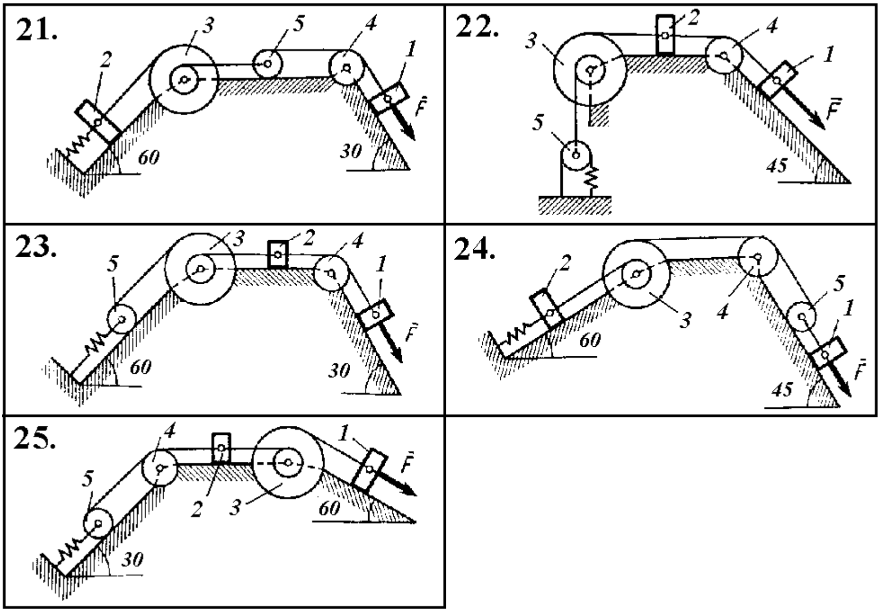


Рис. 16

Вопросы для самопроверки

1) Дайте определение элементарной и полной работы силы.

2) Приведите примеры вычисления работы сил: тяжести, упругости и пр. Как вычисляется работа постоянной силы и сил, зависящих от времени или перемещения?

3) Дайте определение кинетической и потенциальной энергии точки и системы. Как вычисляется кинетическая энергия тела в зависимости от вида его движения?

4) Сформулируйте теоремы об изменении кинетической энергии точки и системы в различных видах.

5) Каковы следствия теоремы об изменении кинетической энергии точки и системы?

6) Как Вы применяли теорему об изменении кинетической энергии при решении задач?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Применение уравнений Лагранжа к исследованию движения механических систем с одной степенью свободы

Механическая система (рис. 17) состоит из обмотанных нитями блока 1 радиуса R_1 и ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней R_2 и r_2, радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), и из грузов 3 и 4, прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M, приложенной к блоку 1.

Д а н о : $P_1 = 0$ Н, $P_2 = 30$ Н, $P_3 = 40$ Н, $P_4 = 20$ Н, $M = 16$ Н·м, $R_1 = 0{,}2$ м, $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м; $\rho_2 = 0{,}2$ м.

О п р е д е л и т ь : ускорение груза 3, пренебрегая трением.

Решение:

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, 4, соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, – идеальные.

Выберем в качестве обобщенной координаты перемещение x груза 3, полагая, что он движется вниз и отсчитывая x в сторону движения (рис. 17). Составим уравнение Лагранжа:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q.$$

2. Определим кинетическую энергию всей системы, равную сумме кинетических энергий всех тел:

$$T = T_2 + T_3 + T_4.$$

Грузы 3 и 4 движутся поступательно, поэтому шкив 2 вращается вокруг неподвижной оси, следовательно

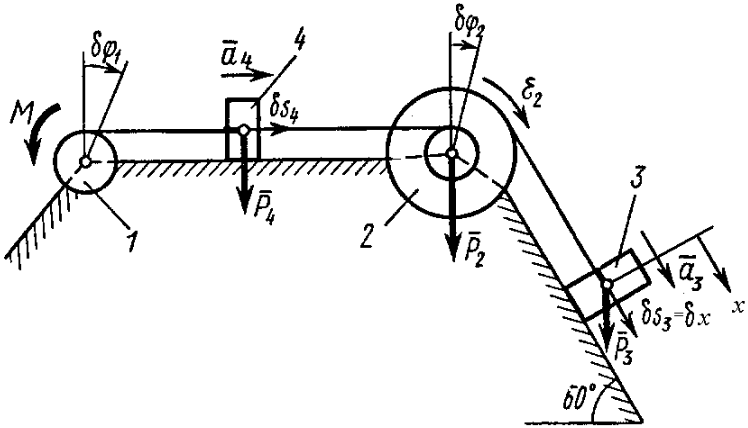


Рис. 17

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \rho_2^2 \omega_2^2 ,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 , \qquad T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_4^2 .$$

Скорости ω_2, v_3 и v_4 выразим через обобщенную скорость $\dot{x}$:

$$\omega_2 = \frac{\dot{x}}{r_2} , \quad v_3 = \dot{x} , \quad v_4 = \dot{x} \frac{r_2}{R_2} .$$

Получим:

$$T = \frac{1}{2g} \left(P_3 + P_4 \frac{r_2^2}{R_2^2} + P_2 \frac{\rho_2^2}{R_2^2} \right) \dot{x}^2 .$$

Так как кинетическая энергия зависит только от $\dot{x}$, производные левой части уравнения Лагранжа примут вид:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{g}\left(P_3 + P_4\frac{r_2^2}{R_2^2} + P_2\frac{\rho_2^2}{R_2^2}\right)\dot{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{1}{g}\left(P_3 + P_4\frac{r_2^2}{R_2^2} + P_2\frac{\rho_2^2}{R_2^2}\right)\ddot{x}.$$

3. Найдем обобщенную силу Q. Для этого составим уравнение работ активных сил на перемещении δx. Изобразим на чертеже активные силы $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$ и пару сил с моментом M. Сообщим системе возможное перемещение $\delta x = \delta s_3$ и составим выражение для суммы работ:

$$\delta A = \sum \delta A_k^a = P_3 \sin 60^\circ \delta s_3 - M\delta\varphi_1.$$

Выразим $\delta\varphi_1$ через δx:

$$\delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1 R_2}\delta x.$$

В результате получим

$$\delta A = \sum \delta A_k^a = \left(P_3 \sin 60^\circ - \frac{Mr_2}{R_1 R_2}\right)\delta x.$$

Учитывая, что

$$\delta A = Q\delta x,$$

находим обобщенную силу:

$$Q = P_3 \sin 60^\circ - \frac{Mr_2}{R_1 R_2}.$$

4. Приравниваем обе части уравнения Лагранжа:

$$\frac{1}{g}\left(P_3+P_4\frac{r_2^2}{R_2^2}+P_2\frac{\rho_2^2}{R_2^2}\right)\ddot{x}=P_3\sin 60^\circ-\frac{Mr_2}{R_1R_2}.$$

Отсюда находим

$$a_3=\frac{P_3\sin 60^\circ-\dfrac{Mr_2}{R_1R_2}}{P_3+P_4\dfrac{r_2^2}{R_2^2}+P_2\dfrac{\rho_2^2}{R_2^2}}g=-0{,}9\ \text{м/с}^2.$$

О т в е т : $a_3=-0{,}9$ м/с^2, знак минус указывает, что ускорение груза 3 и ускорения других тел направлены противоположно показанным на рисунке.

Задания для самостоятельной работы

Механическая система (см. рис. 18–20) состоит из грузов, цилиндрического сплошного однородного катка и ступенчатых шкивов с радиусами ступеней R и r (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми нитями, намотанными на шкивы (участки нитей параллельны соответствующим плоскостям), либо находятся в зацеплении. Система движется из состояния покоя под действием силы $\overline{F}$. Найти: как функцию времени закон и характеристики движения тела, на которое действует сила; определить их значение в момент времени $t_1=1$ с. Численные данные приведены в табл. 4, во всех вариантах принять $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=60^\circ$, $R_1=R$, $r_1=0{,}4R$, $R_2=R$, $r_2=0{,}6R$, $r_5=0{,}8R$. Коэффициент трения тел о поверхность 0,01.

Таблица 4

№ варианта	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	F
1.	$10P$		$8P$		$2P$	$5P$
2.		$6P$	$2P$	$8P$		$10P$
3.	$5P$			$12P$	$2P$	$15P$
4.		$2P$	P		$5P$	$6P$
5.			$5P$	P	$8P$	$12P$
6.			$2P$	$5P$	P	$10P$
7.	$2P$		$8P$		P	$14P$
8.		$2P$	P		$10P$	$8P$
9.			$3P$	$15P$	$5P$	$12P$
10.			$10P$	P	$2P$	$15P$
11.	$3P$	$2P$			P	$20P$
12.		$5P$	$2P$	$8P$		$12P$
13.	P		$5P$	$10P$		$15P$
14.		$2P$	P	$15P$		$20P$
15.	$2P$	$5P$			P	$25P$
16.		$3P$		$7P$	$10P$	$18P$
17.	P			$3P$	$14P$	$6P$
18.		P	$2P$	$15P$		$5P$
19.	$3P$	$2P$	$12P$			$6P$
20.			$15P$	$5P$	$8P$	$12P$
21.			$7P$	$2P$	$18P$	$5P$
22.	$5P$		$10P$	$14P$		$15P$
23.	$3P$			$5P$	$15P$	$18P$
24.		P	$2P$	$7P$		$6P$
25.		$6P$		$10P$	$5P$	$20P$

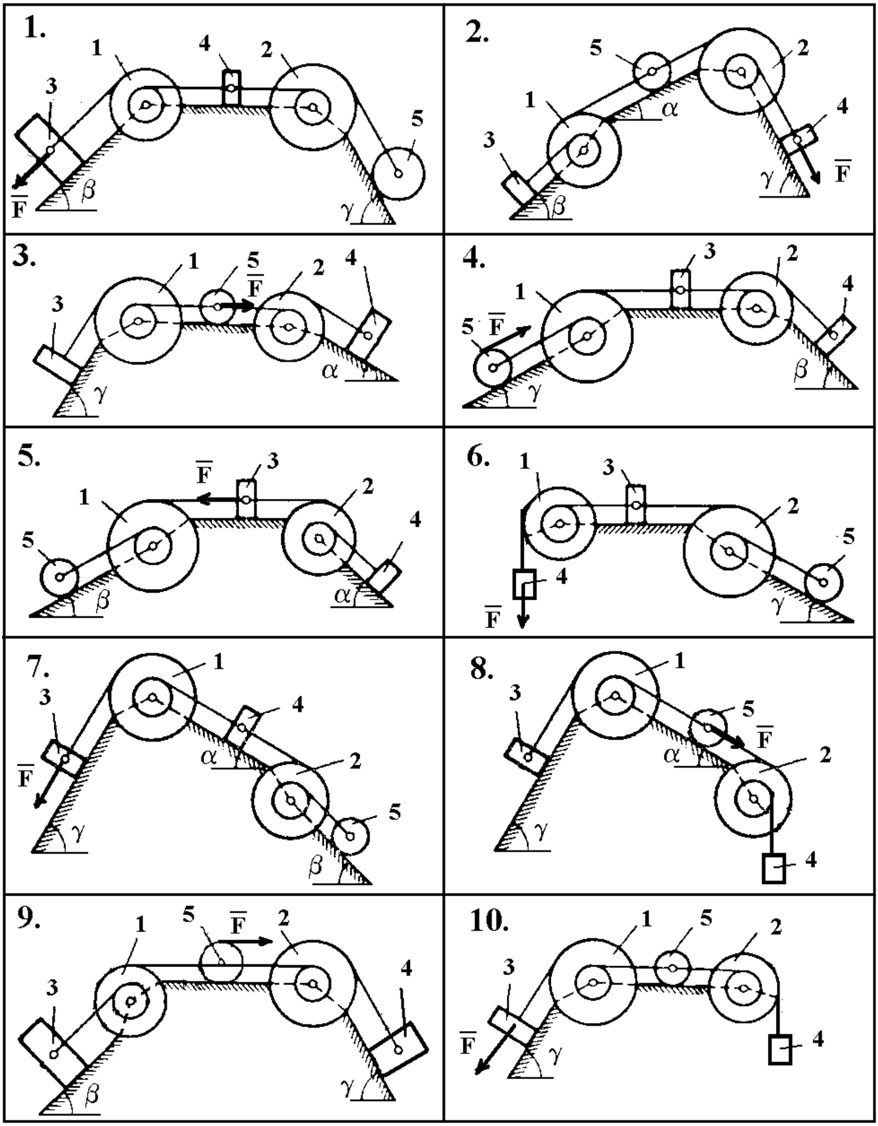

1. 1 4 2 3 5 F β γ
2. 5 2 1 α 4 3 F γ β
3. 1 5 F 2 4 3 α γ
4. 3 2 4 1 5 F β γ
5. F 3 2 1 4 5 α β
6. 1 3 2 5 4 F γ
7. 1 3 4 2 F α 5 γ β
8. 1 3 5 F α 2 γ 4
9. 1 5 F 2 4 3 β γ
10. 1 5 2 3 F γ 4

Рис. 18

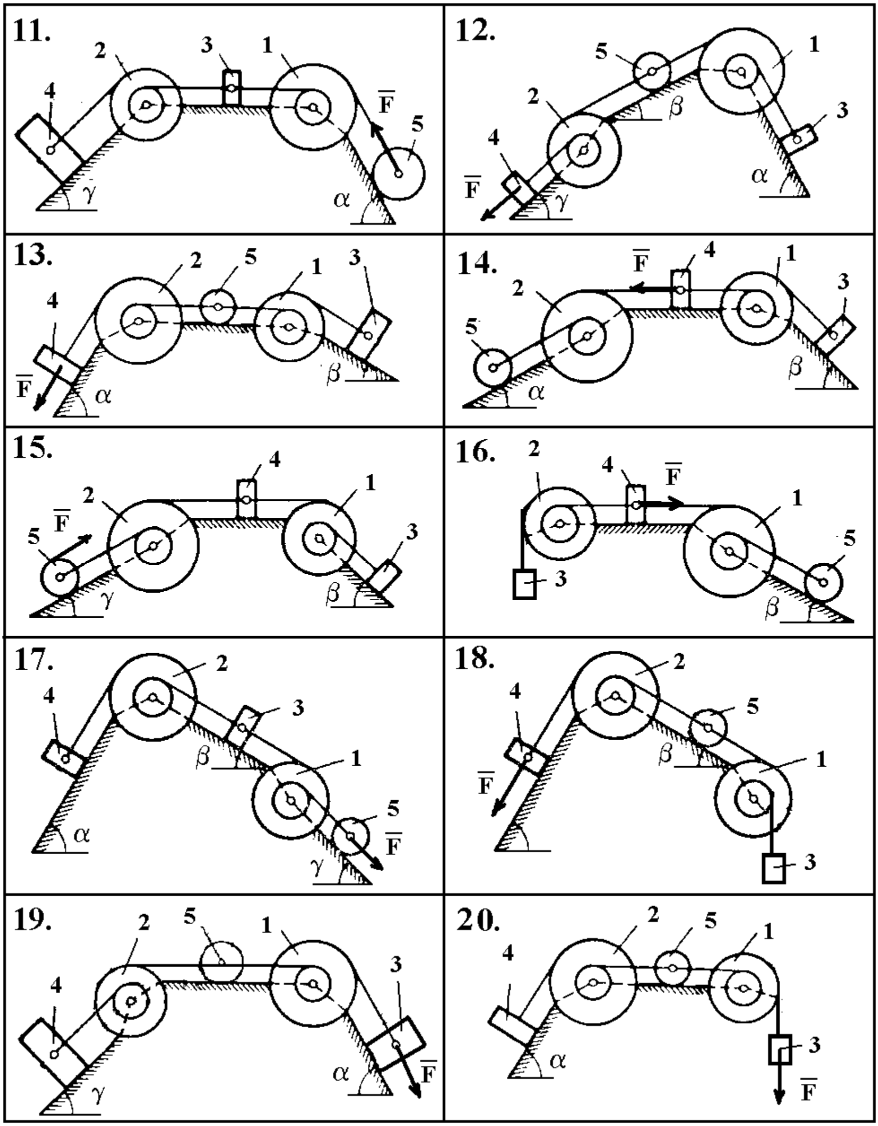


Рис. 19

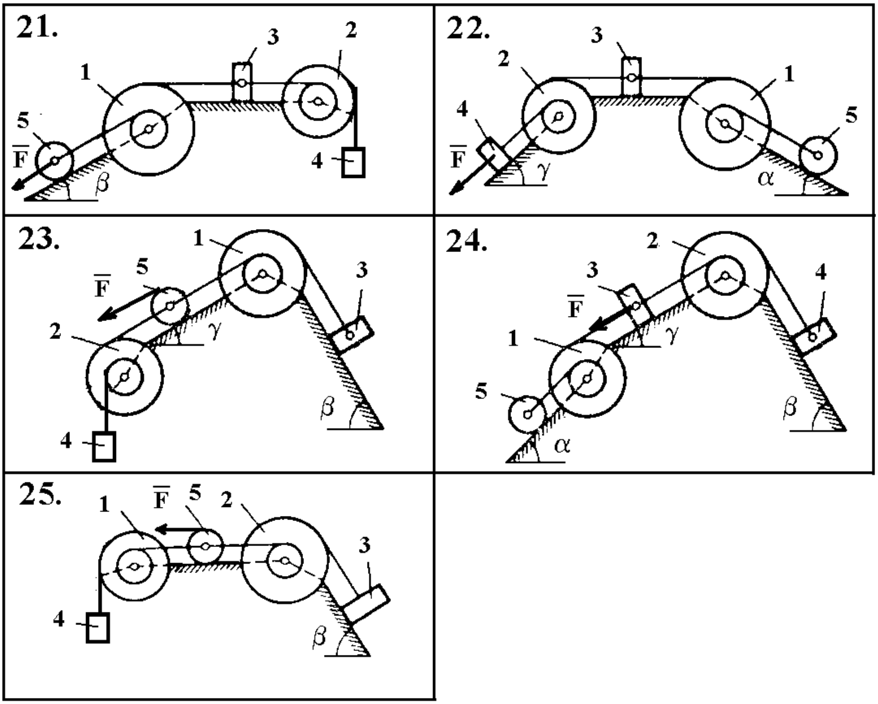


Рис. 20

Вопросы для самопроверки

1) Обобщенные координаты, обобщенные скорости и обобщенные силы механической системы.

2) Понятия кинетической и потенциальной энергии системы.

3) Способы вычисления кинетической энергии твердого тела в случаях поступательного, вращательного и плоскопараллельного движения.

4) Примеры вычисления потенциальной энергии: однородного поля силы тяжести, линейной силы упругости, силы притяжения по закону Ньютона.

5) Колебания системы с одной степенью свободы

6) Свободные колебания и их характеристики.

7) Сравнить одномерное свободное колебание материальной точки и колебательное движение консервативной механической системы с одной степенью свободы. Как с помощью этого сравнения можно ввести понятия обобщенной массы, приведенного коэффициента жесткости? Какие параметры данной механической системы входят в эти характеристики?

8) Как записываются уравнения Лагранжа в случае системы, число степеней которой равно n?

9) Вид уравнений Лагранжа в случае потенциальных сил.

10) Уравнение Лагранжа как алгоритм получения уравнений движения механической системы.

11) Как с помощью уравнений Лагранжа могут быть получены дифференциальные уравнения относительно обобщенных координат?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: учебник для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов / Н.Н. Никитин. – М.: Высш. шк., 1990. 607 с.
2. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: в 2х т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2002. 736 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М: Высш. шк., 2008. 416 с.
4. Цывильский В.Л. Теоретическая механика / В.Л. Цывильский. – М: Высш. шк., 2008. 368 с.
5. Переславцева Н.С. Теоретическая механика: учеб. пособие / Н.С. Переславцева, Н.П. Бестужева. – Воронеж: ВГТУ, 2009. – 157 с.
6. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике / И.В. Мещерский. – СПб.: Лань, 2001. 448 с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для техн. вузов / под ред. А.А. Яблонского. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. 384 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
для студентов всех направлений
заочной формы обучения
(6 часов)

Составители:
Переславцева Наталья Сергеевна
Воропаев Алексей Алексеевич
Хван Дмитрий Владимирович
Хливненко Любовь Владимировна

В авторской редакции

Компьютерный набор Н. С. Переславцевой

Подписано к изданию 12.11.2021.
Уч.-изд. л. 2,6.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14