

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

А. А. Катрахова В. С. Купцов Е. М. Васильев

**Спецглавы математики и их приложения
к задачам электромеханики и теории
управления: курс лекций**

Часть 2

Утверждено учебно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2019

УДК 517.53 (075.8)

ББК 22.1 я7

К 29

Рецензенты:

кафедра дифференциальных уравнений Воронежского государственного университета (зав. кафедрой д-р физ.- мат. наук, проф. А.И. Шашкин); д-р техн. наук, проф. Н.Д. Вервейко

Катрахова А.А.

Спецглавы математики и их приложения к задачам электромеханики и теории управления: курс лекций для студентов по направлениям 27.03.04 «Управление в технических системах», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», (все профили), Ч.2. Учеб. пособие. А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Е.М. Васильев – Воронеж : ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2019. 272 с.

В учебном пособии содержится теоретический материал и задачи по курсу «Спецглавы математики».

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлениям 27.03.04 «Управление в технических системах», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», (все профили), дисциплине «Спецглавы математики».

Ил. 98. Библиогр.: 14 назв.

УДК 517.53 (075.8)

ББК 22.1 я7

- © Катрахова А.А., Купцов В.С., Васильев Е.М., 2019
- © ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2019

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие содержит теоретический материал и задачи по курсу «Спецглавы математики».

Содержание учебного пособия соответствует программе курса математики для бакалавров инженерно-технических специальностей вузов, утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

Пособие состоит из трех частей: уравнения математической физики, элементов вариационного исчисления и дискретной математики.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1.1. Уравнение колебаний струны

Пусть струна закреплена на концах. Струной называется тонкая нить (без сопротивления при изгибе и с не меняющейся длиной). Сила натяжения $T(x)$ струны будет определяющей, и не учитывается сила тяжести струны.

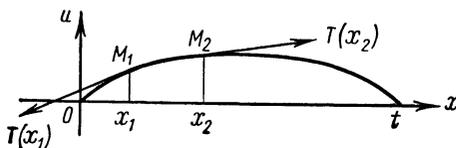


Рис. 1.1

В положении равновесия струна направлена по оси Ox . Рассматриваются поперечные колебания струны (дви-

жение струны будет в одной плоскостим, и точки струны перемещаются вдоль оси Oy) рис. 1.1.

Пусть $u(x, t)$ перемещение точек струны из положения равновесия. Рассматриваются малые колебания струны, при этом $u(x, t)$ и производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ будут малыми (их квадратами и произведениями можно пренебречь).

Рассмотрим участок (x_1, x_2) (рис. 1.1). Струна имеет в этом случае положение M_1, M_2 и ее длина в момент времени t :

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx x_2 - x_1 = S.$$

Для малых колебаний участков струны не будет удлинений. По закону Гука натяжение T для точек струны не меняется со временем. Будем рассматривать в этом случае поперечные колебания струны. Силы инерции и внешние силы будут параллельны оси Ou. Проекция сил на ось Ox будет $T(x_1)\cos\alpha(x_1) - T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0$ ($\alpha(x)$ - угол между касательной в точке с абсциссой x к струне с положительным направлением оси x). Имеем

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx 1 \text{ и } T(x_1) \approx T(x_2).$$

Проекция на ось Ou сил натяжения для точек M_1 и M_2 равняется $Y = T_0[\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)]$, и так как

$$\sin\alpha(x) = \frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1 + tg^2\alpha(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\text{то } Y = T_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_1} \right] \text{ и}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

$$\text{Имеем} \quad Y = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Пусть $p(x, t)$ внешняя сила струны (направлена вдоль оси Ox и меняется по длине). Проекция на ось Ox этой силы на участке M_1M_2 струны равна

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx$$

Введем $\rho(x)$ линейную плотность струны. Сила инерции участка M_1M_2 струны

$$- \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

Из условия равновесия струны проекция всех сил на ось Ox на участке M_1M_2 струны равна нулю:

$$\int_{x_1}^x \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \left(x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + p(x, t) \right] dx = 0.$$

И так как x_1 и x_2 произвольны, то подынтегральная функция равна нулю в произвольный момент времени t :

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, t).$$

Получим уравнение колебаний струны.

При $\rho = \text{const}$ для однородной струны уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

$$\text{где } a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, f(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho}.$$

Если $p(x, t) = 0$, имеем свободные колебания струны и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Уравнение будет иметь бесчисленное множество частных решений. Необходимы дополнительные условия, определяемые физическим смыслом задачи. В начальный момент времени ($t = 0$) зададим положение и скорость точек струны:

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Условия будем называть начальными условиями. Для ограниченной струны задаются условия на ее концах. Если струна закреплена, то на концах $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = 0$ при $t \geq 0$, и это будут краевые или граничные условия.

Можно также исследовать колебания полубесконечной или бесконечной струны (один или оба конца бесконечны). Для первого случая граничное условие $u|_{x=0} = 0$, а для второго случае граничных условий не будет, а начальные функции будут $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ для всех $0 \leq x < \infty$ или для всех $-\infty < x < \infty$.

1.2. Решение задач о колебаниях бесконечной и полуограниченной струны (метод Даламбера)

А. Рассмотрим бесконечную струну (в состоянии равновесия она совпадает с осью Ox ($-\infty < x < \infty$)). В начальный момент времени $t = 0$ для точек струны задаются начальные отклонения и начальные скорости. Найдем отклонение $u(t, x)$ от положения равновесия точки x в момент времени t . Найдем функцию $u(t, x)$ из уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$$

для $x \in (-\infty, \infty)$, $t > 0$ и начальных условиях

$$\begin{cases} u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ - начальное отклонение; $\psi(x)$ - начальная скорость точки x при $t = 0$. У струны нет граничных точек, поэтому нет граничных условий.

Запишем основное уравнение в новых независимых переменных $\xi = x + at$, $\eta = x - at$. Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Также можно найти

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right).$$

Подставим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ в основное уравнение.

Для функции $u(\xi, \eta)$ получим дифференциальное уравнение $\frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, или $\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right] = 0$. Решение его будет

$\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} = C(\eta)$, или $u(\xi, \eta) = C_1(\xi) + C_2(\eta)$, где $C_1(\xi), C_2(\eta)$ - произвольные функции от одной переменной.

Решение нашего уравнения можно представить в виде $u(t, x) = C_1(x + at) + C_2(x - at)$, и теперь необходимо найти функции $C_1(\xi), C_2(\eta)$ так, чтобы были выполнены начальные усло-

вия. Для вычисления функций $C_1(\xi), C_2(\eta)$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1(x) + C_2(x) = \varphi(x); \\ a[C_1'(x) + C_2'(x)] = \psi(x). \end{cases}$$

Интегрируя второе уравнение в пределах от 0 до x , получим:

$$\begin{cases} C_1(x) + C_2(x) = \varphi(x); \\ C_1(x) - C_2(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(z) dz + A. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений имеем:

$$C_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz + \frac{A}{2};$$

$$C_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz - \frac{A}{2}.$$

Решение задачи о колебаниях бесконечной струны будет:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= C_1(x + at) + C_2(x - at) = \\ &= \frac{\varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(z) dz + \frac{\varphi(x - at)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \psi(z) dz = \\ &= \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_{x-at}^0 \psi(z) dz + \int_0^{x+at} \psi(z) dz \right], \end{aligned}$$

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

Эта формула называется формулой Даламбера.

Физическая интерпретация формулы Даламбера

Два частных случая колебания бесконечной струны:

1) для колебаний выполнено: начальное отклонение $\varphi(x)$, начальные скорости $\psi(x) = 0$;

2) начальные отклонения $\varphi(x) = 0$, начальные скорости $\psi(x) \neq 0$.

В первом случае решение задачи будет
$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}.$$

Если начальная форма струны имеет вид (рис.1.2), то в момент времени t форма струны будет (рис.1.3).

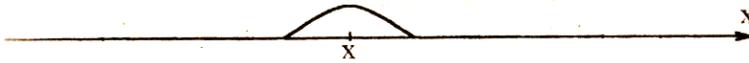


Рис. 1.2

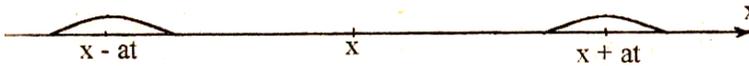


Рис. 1.3

Т. е. возмущение струны для точки x распространяется вправо и влево со скоростью a по величине в два раза меньше. При прохождении полуволны точки струны возвращаются в положение равновесия. Отклонение точки x в момент времени t вычисляется сложением отклонений точек $x - at$ и $x + at$ в начальный момент времени (уменьшенные вдвое).

Во втором случае решение задачи:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz = \frac{1}{2a} [\Psi(x + at) - \Psi(x - at)],$$

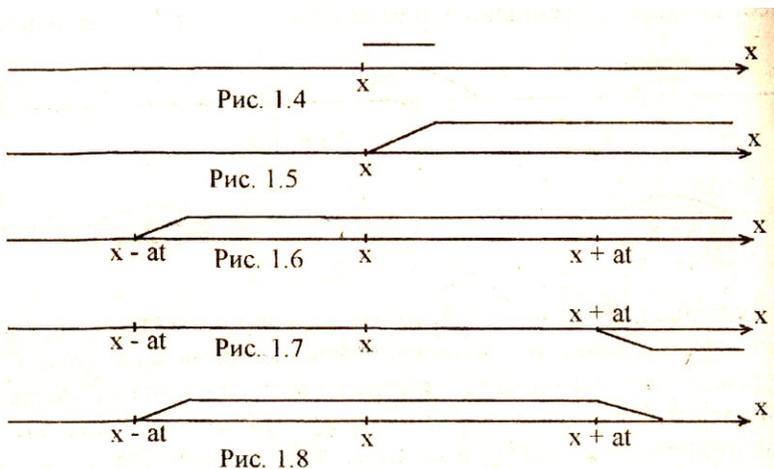
где $\Psi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(z) dz$ - первообразная функции $\psi(x)$.

Пусть график функции $\psi(x)$ имеет вид см. рис.1.4.

То график функции $\Psi(x)$ имеет вид см. рис. 1.5.

На рис. 1.6 и 1.7 имеются графики функций $\frac{1}{2a}\Psi(x+at)$ и $-\frac{1}{2a}\Psi(x-at)$. Форма струны в момент времени имеет вид см. рис. 1.8.

В этом случае от точки x вправо и влево со скоростью a движется волна, и после прохождения волны точки струны будут иметь новое положение равновесия. В общем случае эти процессы в струне накладываются один на другой.



Б. Пусть струна в стоянии равновесия совпадает с полуосью Ox ($0 \leq x < \infty$). В начальный момент времени $t=0$ точками для струны задаются начальное отклонение $\varphi(x)$ и начальная скорость $\psi(x)$.

Вычислим решение задачи о колебаниях струны в двух вариантах: левый конец струны закреплен (задача 1) и точка $x=0$ перемещается в направлении колебаний (задача 2).

Определим функцию $u(t, x)$ (при $0 < x < \infty, t > 0$) из уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$$

и начальных условий

$$\begin{cases} u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

и граничных условий

$$u(t, x)|_{x=0} = 0 \quad (\text{задача 1})$$

или

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}|_{x=0} = 0 \quad (\text{задача 2}).$$

Можно доказать:

1. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетные, то

$$u(t, x)|_{x=0} = 0 \quad \text{при любом } t.$$

2. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четные, то $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}|_{x=0} = 0$.

Если $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\psi(-x) = -\psi(x)$, то

$$u(t, x)|_{x=0} = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(z) dz = 0.$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четные, тогда

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \frac{\varphi'(x+at) + \varphi'(x-at)}{2} + \frac{\psi(x+at) + \psi(x-at)}{2a}.$$

Имеем, что производная от четной функции будет нечетной функцией, тогда

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{\psi(at) - \psi(-at)}{2a} = 0.$$

Для решения задачи 1 продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю числовую ось Ox нечетным образом и построим функции:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \geq 0; \\ -\varphi(-x), & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{если } x \geq 0; \\ -\psi(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Решение задачи о колебаниях бесконечной струны с начальными условиями $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ имеет вид

$$u(t, x) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(z) dz.$$

Функция $u(t, x)$ у есть решение основного дифференциального уравнения при всех x при $x \geq 0$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям $u(t, x) \Big|_{x=0} = 0$. Она имеет вид:

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, \text{ если } t \leq \frac{x}{a},$$

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x + at) - \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(z) dz, \text{ если } t > \frac{x}{a}.$$

Также продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю числовую ось Ox четным образом и получим решение задачи 2 на полуоси $0 < x < \infty$ с граничным условием $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$:

$$u(t, x) = \frac{\varphi_2(x + at) + \varphi_2(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_2(z) dz$$

где

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \geq 0; \\ \varphi(-x), & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{если } x \geq 0; \\ \psi(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Решение задачи 2 имеет вид:

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, \text{ если } t \leq x/a,$$

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(z) dz + \int_0^{at-x} \psi(z) dz \right], \text{ если } t > x/a.$$

Пример. Пусть начальное отклонение $\varphi(x)$ полуограниченной струны, закрепленной в точке $x=0$, отлично от нуля для промежутка (a, b) и начальная скорость $\psi(x) = 0$.

Функцию $\varphi(x)$ продолжим на всю числовую ось Ox нечетным образом. Распространение колебаний в полуограниченной струне изображено на рис. 1.9.

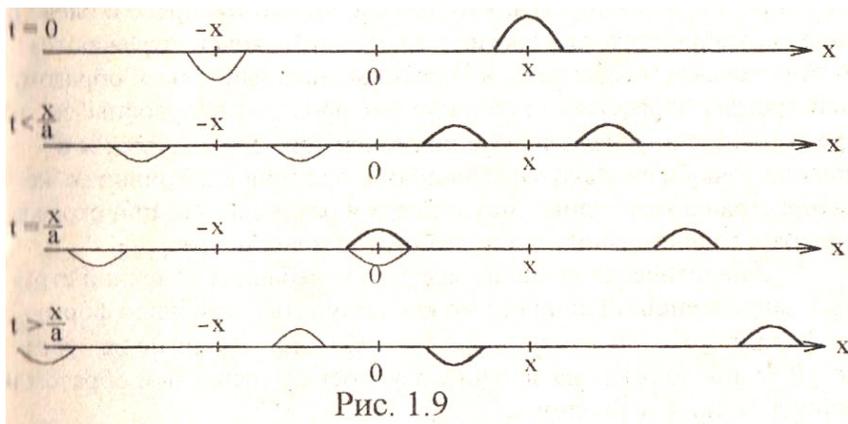


Рис. 1.9

В начале он такой же, как в неограниченной струне.

Заданное отклонение разбивается на две полуволны, движущиеся в разные стороны с постоянной скоростью a . При

$t = \frac{x}{a}$ полуволна, движущаяся влево с положительной полуоси

Ox , складывается с такой же полуволной, движущейся вправо с отрицательной полуоси Ox и имеющей положительный знак.

Поэтому отклонения будут уничтожаться. При $t > \frac{x}{a}$ волна из

отрицательной полуоси Ox имеет движение вправо с той постоянной скоростью. Волна движущаяся влево, достигнув точки $x=0$, отражается от этой точки, меняет знак на обратный и продолжает движение вправо с той же скоростью. Если в точке

$x = 0$ задано граничное условие $\left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$, то отражение

волны отклонения от граничной точки будет без изменения знака.

Решение задачи о колебаниях конечной струны с закрепленными концами могут быть получены из формулы Даламбера (функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, заданные на отрезке $[0, l]$, продолжают на всю числовую ось Ox нечетным образом и периодически с периодом $2l$).

Решение задачи Коши для $u(x, t)$ справедливо, если $\varphi_0(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\varphi_1(x)$ - до первого. Решение задачи единственно. Это следует из формулы для $u(x, t)$.

Частные случаи

I. Начальные скорости точек струны равны нулю и начальное смещение справедливо в конечном промежутке $(-\alpha, \alpha)$ струны, т. е. $\varphi_0(x) = 0$ вне этого промежутка.

Решение $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)}{2}.$$

Решение будет определяться через сумму двух волн, распространяющихся направо и налево со скоростью a и начальная форма обеих волн определяется функцией $\frac{1}{2}\varphi_0(x)$, равной половине начального смещения. Пусть точка x струны лежит правее интервала $(-\alpha, \alpha)$, т. е. $x > \alpha$. Если $t < \frac{x-\alpha}{a}$, то из вида функции $\varphi_0(x)$ имеем, что $u(x, t) = 0$ (до точки x волна еще не дошла). С момента времени $t = \frac{x-\alpha}{a}$ точка x начнет колебаться (время прохождения переднего фронта прямой волны). Если $t > \frac{x+\alpha}{a}$, следует, что $u(x, t) = 0$. Время $t = \frac{x+\alpha}{a}$ соответствует прохождению заднего фронта прямой волны через точку x , после чего в этой точке $u(x, t)$ обращается в нуль. То же имеется и для точек струны, лежащих внутри промежутка $(-\alpha, \alpha)$ или левее его.

2. Начальное смещение равно нулю, а $\varphi_0(x)$ отлична от нуля на конечном интервале $(-\alpha, \alpha)$. Струна в этом варианте имеет начальный импульс.

Для $u(x, t)$ имеем:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z) dz$$

или

$$\frac{1}{2a} \int_0^x \varphi_1(z) dz = \psi(x),$$

получим

$$u(x, t) = \psi(x + at) - \psi(x - at),$$

т. е. по струне проходят две волны (прямая и одна обратная).

Решение рассмотрим подробно.

Пусть точка x струны находится правее интервала $(-\alpha, \alpha)$. При $t=0$ интервал интегрирования $(x - at, x + at)$ вырождается в точку x и при увеличении t , увеличивается в обе стороны со скоростью a . При $t < \frac{x - \alpha}{a}$ он не имеет общих точек с $(-\alpha, \alpha)$, а функция $\varphi_1(z)$ в нем равна нулю, и $u(x, t) = 0$, т. е. покой в точке x . С момента времени $t = \frac{x - \alpha}{a}$ интервал $(x - at, x + at)$ будет накладываться на $(-\alpha, \alpha)$, где $\varphi_1(z)$ отлична от нуля, и тогда точка x начнет колебаться (момент прохождения переднего фронта волны через точку x). При $t > \frac{x + \alpha}{a}$ интервал $(x - at, x + at)$ будет включен в $(-\alpha, \alpha)$, а интегрирование по $(x - at, x + at)$ будет заменено к интегрированию по $(-\alpha, \alpha)$, так как вне его $\varphi_1(z) = 0$, т. е. при $t > \frac{x + \alpha}{a}$ будет иметь

постоянное значение $u(x, t)$:
$$\frac{1}{2a} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_1(z) dz.$$

Момент времени $t = \frac{x + \alpha}{a}$ - это прохождения заднего фронта волны через точку x . Начальный импульс определяет картину решения: с течением времени точки струны попадают на отрезок (длина которого определяется интегралом) и будут без движения в новом положении. Волны будут оставлять после себя след своего прохождения.

3. *Ограниченная струна.* Рассмотрим струну длиной l с закрепленными концами. Найдем решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при граничных условиях $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = 0$ и начальных условиях $u|_{t=0} = \varphi_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x)$ ($0 \leq x \leq l$).

Решение $u(x, t) = \Theta_1(x - at) + \Theta_2(x + at)$, где Θ_1 и Θ_2 определяются по формулам:

$$\Theta_1(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)dz, \quad \Theta_2(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)dz.$$

Функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, а также, $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$, определены лишь в промежутке $(0, l)$, а аргументы $x \pm at$ могут лежать и вне этого промежутка. Тогда для применения решения необходимо продолжить функции $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ или функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ вне промежутка $(0, l)$. Это продолжение сводится к определению начального возмущения бесконечной струны так, чтобы движение ее участка $(0, l)$ было то же самое, чтобы он был закреплен на концах, а оставшаяся часть струны была бы отброшена.

Из граничных условий имеем:

$$\Theta_1(-at) + \Theta_2(at) = 0, \quad \Theta_1(l - at) + \Theta_2(l + at) = 0 \text{ или, обозначая } at \text{ через } x, \Theta_1(-x) = -\Theta_2(x), \Theta_1(l - x) = -\Theta_2(l + x).$$

Если x меняется в промежутке $(0, l)$, то первая из формул определяет функцию $\Theta_1(x)$ в промежутке $(-l, 0)$, вторая — функцию $\Theta_2(x)$ в промежутке $(l, 2l)$. Обе функции $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ вполне определяются на промежутке длины $2l$. Отсюда имеем, что $\Theta_2(2l + x) = -\Theta_1(-x) = \Theta_2(x)$, $\Theta_1(2l + x) = \Theta_1(x)$, т. е. функции $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ являются функциями периодическими с периодом $2l$. Функции $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ имеют смысл при всех вещественных x .

И так как

$$\varphi_0(x) = \Theta_1(x) + \Theta_2(x), \quad \varphi_1(x) = a[\Theta_2'(x) - \Theta_1'(x)],$$

то найдем $\varphi_0(-x) = \Theta_1(-x) + \Theta_2(-x) = -\Theta_2(x) - \Theta_1(x) = -\varphi_0(x)$,

$$\varphi_1(-x) = a[\Theta_2'(-x) - \Theta_1'(-x)] = a[\Theta_1'(x) - \Theta_2'(x)] = -\varphi_1(x),$$

$$\varphi_0(x+2l) = \varphi_0(x), \quad \varphi_1(x+2l) = \varphi_1(x).$$

Чтобы найденное решение имело непрерывные производные до второго порядка включительно, необходимо выполнения условий:

$$\varphi_0(l) = \varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0'(l) = \varphi_0'(0), \quad \varphi_1(l) = \varphi_1(0) = 0.$$

Эти уравнения определяют согласование начальных и граничных условий. Закрепленные концы струны на ее колебания оказывают влияние на решение. .

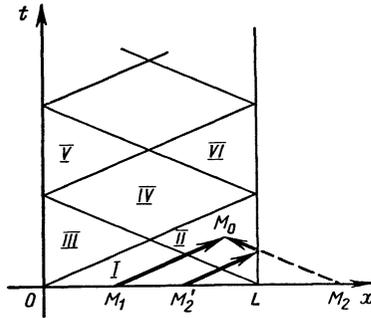


Рис. 1.10

Ввиду ограниченности струны необходимо рассматривать только полосу верхней полуплоскости $t > 0$ между прямыми $x = 0$ и $x = l$ (рис. 1.10). Проведем через точки O и L характеристики до встречи с противоположными границами полосы. Разобьем полосу на области (I), (II), (III), ...

Точки области (I) определяют моменты времени t , где к точкам x струны доходят прямая и обратная волны из внутренних точек струны, т.е. фиктивно добавленные бесконечные части струны еще на данные колебания не влияют. Точки вне области (I) соответствуют такому времени t , когда к точкам x

струны доходят волны, вышедшие в начальный момент времени из фиктивной части струны. Т.е. действие закрепленного конца $x = l$ свелось к отражению волны смещения.

Такой же процесс будет для волн, дошедших до конца $x = 0$; в точках области (III) будет движение двух волн: обратной и прямой, отраженных от конца $x = 0$. В точках областей (IV), (V), (VI), ... получим волны, для которых будет несколько таких отражений от обоих концов струны. Из этого можно получить, что колебание струны, закрепленной на концах, будет периодическим с периодом $\frac{2l}{a}$.

Понятие об обобщенных решениях

Рассмотрим снова задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях $u|_{t=0} = \varphi_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x)$.

Решение задачи определяет функция

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z) dz.$$

Формула определяет классическое решение уравнения, если $\varphi_0(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\varphi_1(x)$ — до первого. Решение физических задач может быть таким, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ не удовлетворяют указанным условиям. В этом случае рассматривают так называемые «обобщенные решения» задачи Коши.

Обобщенным решением задачи Коши для основного уравнения при начальных условиях будет функция $u(x, t)$, являющаяся пределом равномерно сходящейся последовательности решений $u_n(x, t)$ основного уравнения при начальных условиях

$$u_n|_{t=0} = \varphi_{n0}(x), \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_{1n}(x).$$

При этрм последовательность функций $\varphi_{n0}(x)$, должна иметь непрерывные вторые производные и сходится равномерно к $\varphi_0(x)$, а последовательность функций $\varphi_{1n}(x)$, имеющих непрерывные первые производные, сходится равномерно к $\varphi_1(x)$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x=l$, имеет в начальный момент времени $t=0$ форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку $x = \frac{l}{2}$. Определить форму струны в моменты времени $t = \frac{l}{2a}$ и $t = \frac{l}{a}$, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

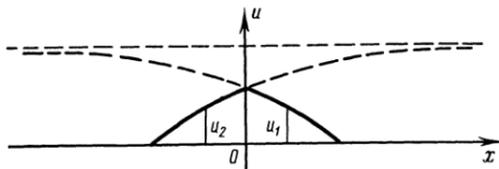


Рис. 1.11

2. Бесконечная струна, находящаяся в прямолинейном положении равновесия, получает в начальный момент времени ($t=0$) удар от молоточка, масса которого равна M , причем этот молоточек касается струны в точке $x=0$ и имеет начальную скорость V_0 .

Доказать, что в любой момент времени $t > 0$ возмущенная струна имеет вид, показанный на рис. 1.11, где u_1 —прямая волна: $u_1 = \frac{MaV_0}{2T} \left\{ 1 - e^{-\frac{2T_0}{Ma^2}(x-at)} \right\}$ при $x-at < 0$; $u_1=0$ при $x-at > 0$,

и $u_2(x, t)$ — обратная волна:

$$u_2 = \frac{MaV_0}{2T} \left\{ 1 - e^{-\frac{2T_0}{Ma^2}(x+at)} \right\} \text{ при } x+at > 0; u_2=0 \text{ при } x+at < 0.$$

Указание. При интегрировании уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

следует использовать условия

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = M \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = -T_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + T_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

1.3. Продольные колебания стержня

Рассмотрим однородный стержень длины l , для растяжения или изгибающего которого необходимо приложить силу.

Применим метод характеристик для изучения продольных колебаний стержня, при которых поперечные сечения ρq , перемещаясь вдоль оси стержня и остаются плоскими и параллельными друг другу (рис. 1.12).

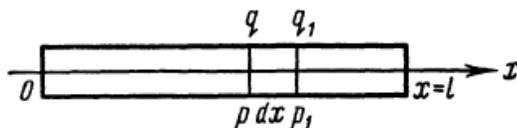


Рис.1.12

Это справедливо, если поперечные размеры стержня будут невелики по сравнению с его длиной.

Растянем или сожмем стержень вдоль продольной оси, тогда в нем возникнут продольные колебания. Ось Ox направим вдоль оси стержня, в состоянии покоя концы стержня будут находиться в точках $x=0$ и $x=l$, пусть x — абсцисса произвольного сечения стержня, когда он находится в покое.

Пусть $u(x, t)$ смещение этого сечения в момент времени t , а смещение сечения с абсциссой $x+dx$ будет: $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$.

Относительное удлинение стержня в сечении с абсциссой x выражается производной $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$. Если стержень совершает малые колебания, то вычислим в сечении натяжение T по закону Гука:

$$T = ES \frac{\partial u}{\partial x},$$

где E —модуль упругости материала стержня, а S —площадь его поперечного сечения. Рассмотрим элемент стержня между двумя сечениями, абсциссы которых в состоянии покоя равны x и $x + dx$. На этот элемент будут действовать силы натяжения T_x и T_{x+dx} , направленных вдоль оси Ox . Результирующая этих

сил $T_{x+dx} - T_x = ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \approx ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$ и направлена

также вдоль Ox . Ускорение этого элемента равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. И тогда:

$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$, где ρ - объемная плотность стержня.

Пусть $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, сократив уравнение равновесия на $S dx$,

получим уравнение продольных колебаний однородного стержня:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это уравнение показывает, что продольные колебания стержня имеют волновой характер.

Пусть на стержень действует внешняя сила $F(x, t)$, рассчитанная на единицу его объема, тогда получим

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + F(x, t) S dx \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} F(x, t).$$

Получено уравнение вынужденных продольных колебаний стержня. Для полного определения движения стержня необходимо задать начальные условия, т. е. смещения сечений

стержня и их скорости и $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ в начальный момент времени

имеем $u|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x)$, где $f(x)$ и $F(x)$ заданы на интервале $(0, l)$.

Также должны быть заданы граничные условия на концах стержня:

1. Стержень закреплен на обоих концах, т. е.

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

в любой момент времени t .

2. Один конец стержня закреплен, другой свободен,

т. е. $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0$ в любой момент времени t . На свободном

конце $x = l$ натяжение $T = ES \frac{\partial u}{\partial x}$ равно нулю (нет

внешних сил) и $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0$.

3. Оба конца стержня свободны, т. е.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad \text{в любой момент времени } t.$$

1.4. Колебания стержня с одним закрепленным концом

Упругий цилиндрический стержень, имеющий в нерастянутом (естественном) состоянии длину l , закрепляется в конце $x = 0$ и затем растягивается за конец $x = l$ до длины l_1 ; после этого конец $x = l$ отпускается, как результат в стержне образуются продольные колебания. Определим скорость колебания произвольного сечения возмущенного стержня.

Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ в начальный момент времени смещение сечения с абсциссой x пропорционально этой абсциссе

$$u|_{t=0} = f(x) = rx \quad (0 < x < l),$$

где r - множитель пропорциональности, который определяется, если принять во внимание то, что в начальный момент времени смещение на конце $x = l$ стержня равно $l_1 - l$, т. е. $T=0$, $l_1 - l = rl$ или $r = (l_1 - l)/l$. И скорости всех промежуточных сечений стержня в начальный момент времени равны нулю:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (0 < x < l).$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$u = \varphi(at - x) + \psi(at + x).$$

Определим функции φ и ψ с использованием граничных условий и начальных условий. Из первого граничного условия: $u|_{x=0} = \varphi(at) + \psi(at)$ или $\psi(z) = -\varphi(z)$ ($z=at$) и формула имеет вид $u = \varphi(at - x) - \varphi(at + x)$. Дифференцируя это равенство по x и полагая затем $x = l$, а из второго граничного условия имеем: $0 = -\varphi'(at - l) - \varphi'(at + l)$ или, обозначая аргумент $at - l$ через z , получим равенство $-\varphi'(z - 2l) = \varphi'(z)$ с по-

мощью которого найдем выражение функции $\varphi'(z)$ для всех значений z . И в силу начальных условий имеем $rx = \varphi(-x) - \varphi(x)$ ($0 < x < l$), $0 = \varphi'(-x) - \varphi'(x)$. Дифференцируя равенство по x и решая полученное уравнение совместно с уравнением $rx = \varphi(-x) - \varphi(x)$, получим выражение функции $\varphi(z) = -\frac{r}{2}$ для всех значений z , лежащих в интервале $-l < z < l$.

Тогда $\varphi(z) = \frac{r}{2}$ для всех z , удовлетворяющих $l < z < 3l$.

Функция $\varphi(z)$ имеет период $4l$, и тогда получим, что функция $\varphi(z)$ определяется при всех значениях z . Обозначим через v скорость поперечного сечения стержня с абсциссой x . Эта скорость вычисляется из уравнения

$$\frac{v}{a} = \varphi(at - x) - \varphi(at + x).$$

Из этой формулы видно, какие волны подходят в определенные моменты времени к сечению P с абсциссой x . Если эта абсцисса лежит внутри интервала $(-l, l)$, то, начиная с момента $t = 0$ до момента времени $t = \frac{l-x}{a}$, оба аргумента функций, входящих в правую часть формулы, не будут выходить за пределы интервала $(-l, l)$.

Отсюда имеем, что

$$\frac{v}{a} = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2} = 0.$$

Другими словами, в течение времени $t = \frac{l-x}{a}$, считая от момента начала колебаний, сечение P остается в покое. Это сечение начнет колебаться с момента $t = \frac{l-x}{a}$, когда к нему подойдет обратная волна, вышедшая в начальный момент времени из возмущенного конца $x=l$. Вычислим скорость сечения P . Если

время изменяется от момента $t = \frac{l-x}{a}$ до момента $t = \frac{l+x}{a}$, то аргумент функции $\varphi(at-x)$ изменяется в интервале $(-l, l)$, а аргумент функции $\varphi(at+x)$ - в интервале $(l, 3l)$.

Получим, что в течение времени

$$t = \frac{l+x}{a} - \frac{l-x}{a} = \frac{2x}{a}$$

сечение Р будет обладать скоростью, определяемой равенством $\frac{v}{a} = -\frac{r}{2} - \frac{r}{2} = -r$. С момента времени $t = \frac{l+x}{a}$ будет к сечению Р подойдет прямая волна, которая произошла от обратной волны, отразившейся в момент $t = \frac{l}{a}$ от закрепленного конца $x = 0$. Распространения волн будут повторяться, так как функция $\varphi(z)$ имеет период $4l$.

1.5. Продольный удар груза по стержню

Рассмотрим цилиндрический стержень, один конец ($x=0$) которого закреплен, а другой ($x=l$) свободен. Пусть в момент времени $t = 0$ свободный конец подвержен удару груза массы M вдоль оси стержня со скоростью v . Определим продольные колебания стержня при этом ударе.

Уравнение продольных колебаний однородного стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}),$$

где E - модуль упругости, ρ - плотность материала.

Граничное условие на левом конце ($x = 0$) будет $u(0,t)=0$.

Уравнение движения груза под действием силы реакции стержня, которая равна по величине усилию в сечении

$x = l$ стержня и направлена в противоположную сторону, имеет вид

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}.$$

Это будет граничным условием на конце $x = l$.

Или

$$ml \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}.$$

Если обозначить через $m = \frac{M}{\rho S l}$ отношение массы движущегося груза к массе стержня.

Решение $u(x, t)$ должно удовлетворять также начальным условиям $u|_{t=0} = 0$ при $0 \leq x \leq l$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \text{ при } 0 \leq x \leq l \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v \text{ при } t=0 \text{ и } x=l.$$

Второе начальное условие говорит о том, что в момент удара движущегося груза все промежуточные сечения стержня имеют скорость равную нулю, а скорость конца стержня равна скорости груза. Общее решение нашего уравнения имеет вид

$$u = \varphi(at - x) + \psi(at + x),$$

где φ и ψ — произвольные функции.

Определим функции φ и ψ таким образом, чтобы решение $u(x, t)$ удовлетворяло граничным и начальным условиям. Из граничного условия следует, что $\psi = -\varphi$, и решение имеет вид $u = \varphi(at - x) - \varphi(at + x)$. Из начальных условий имеем $\varphi(-z) - \varphi(z) = 0$, $\varphi'(-z) - \varphi'(z) = 0$, ($0 \leq z \leq l$). Отсюда следует, что $\varphi(z) = 0$, если $-l < z < l$, т. е. в этом же интервале $\varphi(z)$ — постоянная, которая считается равной нулю. Т.е. имеем $\varphi(z) = 0$ ($-l < z < l$).

Найдем функцию $\varphi(z)$ вне интервала $-l < z < l$. Т.к.

$$ml[\varphi''(at-l) - \varphi''(at+l)] = \varphi'(at-l) - \varphi'(at+l) \text{ или, полагая}$$

$$z = at+l, \varphi''(z) + \frac{1}{ml}\varphi'(z) = \varphi''(z-2l) - \frac{1}{ml}\varphi'(z-2l).$$

Уравнение дает возможность продолжить функцию $\varphi(z)$ за пределы интервала $(-l, l)$. Определим $\varphi(z)$ вне интервала $(-l, l)$. При $l < z < 3l$ имеем $\varphi''(z) + \frac{1}{ml}\varphi'(z) = 0$.

Откуда $\varphi'(z) = Ce^{-\frac{z}{ml}}$, где C — произвольная постоянная.

Начальное условие $a[\varphi'(-l+0) - \varphi'(l+0)] = -v$ или $\varphi'(l+0) = \frac{v}{a}$. Следовательно, $\frac{v}{a} = Ce^{-\frac{1}{m}}$, так что

$$C = e^{\frac{1}{m}} \frac{v}{a} \text{ и } \varphi'(z) = \frac{v}{a} e^{-\frac{z-l}{ml}} \quad (l < z < 3l).$$

Заметим, что $\varphi'(z)$ в точке $z = l$ имеет разрыв непрерывности.

При $3l < z < 5l$ уравнение для $\varphi(z)$ имеет вид

$$\varphi''(z) + \frac{1}{ml}\varphi'(z) = -\frac{2v}{2ml}e^{-\frac{z-3l}{ml}}, \text{ откуда}$$

$$\varphi'(z) = Ce^{-\frac{z}{ml}} - \frac{2v}{aml}(z-3l)e^{-\frac{z-3l}{ml}},$$

где C — произвольная постоянная. Произвольную постоянную C вычислим из условия непрерывности изменения скорости

$\frac{\partial u}{\partial t}$ в сечении $x=l$ при $t > 0$ и при $t = \frac{2l}{a}$. Имеем

$$\varphi'(l-0) - \varphi'(3l-0) = \varphi'(l+0) - \varphi'(3l+0)$$

или $-\frac{v}{a}e^{-\frac{2}{m}} = \frac{v}{a} - Ce^{-\frac{3}{m}}$, откуда $C = \frac{v}{a}(e^{\frac{1}{m}} + e^{\frac{3}{m}})$.

Далее получим

$$\varphi'(z) = \frac{v}{a} e^{\frac{z-l}{ml}} + \frac{v}{a} \left[1 - \frac{2}{ml} (z-3l) \right] e^{\frac{z-3l}{ml}} \quad (3l < z < 5l).$$

Точно также можно найти $\varphi'(z)$ в интервалах $5l < z < 7l$, $7l < z < 9l$ и т. д.

Функция $\varphi(z)$ определяется интегрированием выражения $\varphi'(z)$, постоянная интегрирования определяется из условия непрерывности функции $u(x, t)$ в точке $x = l$. Это условие, если положить t последовательно равным $0, \frac{2l}{a}, \dots$, дает уравнения

$$0 = \varphi(-l+0) - \varphi(l+0);$$

$$\varphi(l-0) - \varphi(3l-0) = \varphi(l+0) - \varphi(3l+0), \dots,$$

откуда получаем

$$0 = \varphi(-l+0) = \varphi(l+0), \varphi(3l+0) = \varphi(3l-0), \dots$$

Таким образом, мы имеем

$$\varphi(z) = \frac{mlv}{a} \left(1 - e^{\frac{z-l}{ml}} \right) \quad (l < z < 3l),$$

$$\varphi(z) = \frac{mlv}{a} e^{\frac{z-l}{ml}} + \frac{mlv}{a} \left[1 + \frac{2}{ml} (z-3l) \right] e^{\frac{z-3l}{ml}} \quad (3l < z < 5l), \dots$$

Из полученного решения имеем при $0 < t < \frac{l}{a}$

$\varphi(at-x) = 0$ и $u(x, t) = -\varphi(at+x)$, т. е. по стержню распространяется только обратная волна, идущая от конца $x=l$, подвергнувшегося удару; при $t = \frac{l}{a}$ она достигнет закрепленного конца, и

при $\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$ к ней прибавится отраженная волна $\varphi(at-x)$, т.

е. решение будет иметь вид $u(x, t) = \varphi(at-x) - \varphi(at+x)$. При $t = \frac{2l}{a}$ волна $\varphi(at-x)$ отразится от конца $x = l$, так что слагае-

мое $\varphi(at+x)$ в решении на интервале $\frac{2l}{a} < t < \frac{3l}{a}$ будет иметь другое выражение. Таким образом $u(x, t)$ имеет различные выражения в интервалах

$$0 < t < \frac{l}{a}, \frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}, \frac{2l}{a} < t < \frac{3l}{a}, \dots, n \frac{l}{a} < t < (n+1) \frac{l}{a}.$$

В данной выше задаче считается, что стержень как бы соединяется с ударяющим телом для любого момента времени $t > 0$. И если тело отделяется от стержня, то полученное решение пригодно на тот промежуток времени, пока $\frac{\partial u(l, t)}{\partial t} < 0$.

Когда же в этом решении $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точке $x = l$ становится положительным, соударение оканчивается.

При $0 < t < \frac{2l}{a}$ $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -\frac{v}{a} e^{-\frac{at}{ml}} < 0$ и акт соударения не может закончиться.

При $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -\frac{v}{a} e^{-\frac{at}{ml}} \left[1 + 2e^{\frac{2}{m}} \left(1 - \frac{at - 2l}{ml} \right) \right]$,
и $\frac{\partial u(l, t)}{\partial t}$ становится положительным, когда $\frac{2at}{ml} = \frac{4}{m} + 2 + e^{\frac{2}{m}}$;

последнее уравнение может иметь в интервале $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ корень при условии, что $2 + e^{\frac{2}{m}} < \frac{4}{m}$. Уравнение $2 + e^{\frac{2}{m}} < \frac{4}{m}$ имеет корень $m = 1,73 \dots$

Если $m < 1,73 \dots$, соударение прекращается в момент времени t , который лежит в интервале $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ и определя-

ется по формуле $t = \frac{l}{a} \left(2 + m + \frac{1}{2} m e^{-\frac{2}{m}} \right)$. Если $m > 1,73 \dots$, то можно также проверить, заканчивается ли соударение в момент времени t , лежащий в интервале $\frac{4l}{a} < t < \frac{6l}{a}$.

1.6. Метод Фурье решения задачи о колебаниях конечной струны с закрепленными концами

Рассмотрим (другой метод) решения задачи о колебаниях конечной струны. Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2},$$

удовлетворяющего начальным условиям $u(t, 0) = u(t, l) = 0$ и граничным условиям:

$$\begin{cases} u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Вычислим частные решения нашего уравнения, отличные от тождественного нуля, удовлетворяющие граничным условиям. Решения будем искать в виде $u(t, x) = X(x)T(t)$, где $X(x)$ и $T(t)$ отличны от тождественного нуля и $X(0) = X(l) = 0$. Дифференцируя функцию $u(t, x)$ дважды по переменным t и x и подставляя полученные производные в уравнение, получим

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x), \text{ или } \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Левая часть этого уравнения не зависит от x , правая не зависит от t , поэтому правая и левая часть может быть только

постоянной. Обозначая эту постоянную через $-\lambda$, получим дифференциальные уравнения для определения функции $T(t)$ и $X(x)$:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0;$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Решения уравнений отличны от тождественного нуля и $X(0) = X(l) = 0$.

Ненулевые решения уравнения, удовлетворяющие граничному условию, называются собственными функциями, а те значения λ , для которых эти решения существуют, называются собственными значениями краевой задачи. Можно показать, что если $\lambda \leq 0$, то наше уравнение имеет единственное решение $X(x) = 0$, удовлетворяющее граничному условию.

Поэтому будем рассматривать случаи, когда $\lambda = \mu^2 > 0$.

Общее решение уравнения $X''(x) + X(x) = 0$ имеет вид $X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$. Полагая в нем $x=0$ и $x=l$, получим систему уравнений для определения C_1 и C_2 :

$$C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0;$$

$$C_1 \cos \mu l + C_2 \sin \mu l = 0.$$

Имеем $C_1 = 0$, $C_2 \sin \mu l = 0$. Так как $X(x) \neq 0$, то $C_2 \neq 0$, следовательно, $\sin \mu l = 0$, то есть $\mu l = n\pi$, где $n=1,2,\dots$. Таким образом, наше уравнение имеет ненулевые решения, удовлетворяющие граничному условию только при

$\lambda = \lambda_n = \mu_n^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, и эти решения имеют вид

$X_n(x) = C_2 \sin \frac{n\pi x}{l}$ ($n=1,2,\dots$). Полагая $\lambda = \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, получим

равнение $T''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) = 0$ для определения функций

$T_n(t)$. Общее решение этих уравнений имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{an\pi t}{l} + B_n \sin \frac{an\pi t}{l}.$$

Т.е. было получено бесконечно много частных решений

$$u_n(t, x) = \left(A_n \cos \frac{an\pi t}{l} + B_n \sin \frac{an\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

нашего уравнения, удовлетворяющих граничному условию.

Данное дифференциальное уравнение линейное однородное. Сумма конечного числа частных решений этого уравнения также является решением уравнения, удовлетворяющим граничному условию.

Допустим, что решение исходной задачи можно искать в виде суммы бесконечного числа частных решений, то есть в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an\pi t}{l} + B_n \sin \frac{an\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

коэффициенты A_n и B_n которого находятся таким образом, чтобы выполнялись начальные условия. Это возможно, если ряд можно дифференцировать дважды по переменным t и x . Дифференцируя ряд по переменной t , получим

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{an\pi t}{l} + B_n \frac{an\pi}{l} \cos \frac{an\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Полагая здесь $t = 0$, получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Следовательно, числа A_n и $B_n \frac{an\pi}{l}$ являются коэффициентами Фурье в разложении функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, l]$, то есть

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, B_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$\text{и } B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Таким образом, решение поставленной задачи имеет вид

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an\pi t}{l} + B_n \sin \frac{an\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Теорема. Если функция $\psi(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную на отрезке $[0, l]$ и удовлетворяет граничному условию $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, то ряд можно дифференцировать дважды по переменным t и x .

1.7. Вынужденные колебания струны с закрепленными концами

Пусть на точки струны длины l в направлении колебаний действует непрерывно распределенная сила, плотность распределения которой равна $g(t, x)$. В начальный момент времени точкам струны придаются начальное отклонение $\varphi(x)$ и начальная скорость $\psi(x)$. Требуется найти отклонение $u(t, x)$ точек струны при $t > 0$. Эта задача сводится к следующей математической задаче. Найти функцию $u(t, x)$, определенную на отрезке $[0, l]$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \gamma(t, x),$$

начальным условиям:

$$\begin{cases} u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

и граничным условиям

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0.$$

Здесь $\gamma(t, x) = \frac{1}{\rho} g(t, x)$.

Функцию $u(t, x)$ будем искать в виде суммы $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$, где $v(t, x)$ - решение задачи о свободных колебаниях струны с заданными начальными и граничными условиями, а $w(t, x)$ - решение задачи о вынужденных колебаниях струны с нулевыми начальными условиями. Функция $u(t, x)$ определяется по формуле

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an\pi t}{l} + B_n \sin \frac{an\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Функция $w(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + \gamma(t, x),$$

начальным условиям

$$w(t, x)|_{t=0} = \frac{\partial w(t, x)}{\partial t}|_{t=0} = 0$$

и граничным условиям: $w(t,0) = w(t,l) = 0$.

Функцию $w(t,x)$ будем искать в виде ряда Фурье

$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin \frac{n\pi x}{l}$, коэффициенты которого $\gamma_n(t)$ подлежат определению. Для этого функцию $\gamma(t,x)$ разложим в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,l]$:

$$\gamma(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \gamma(t,x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Функцию $w(t,x)$ продифференцируем по переменным t и x дважды. Имеем

$$\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n''(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \gamma_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Используя полученные ряды, получим тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\gamma_n''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} \gamma_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Отсюда следует, что функция $\gamma_n(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\gamma_n''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} \gamma_n(t) = b_n(t). \quad (*)$$

Чтобы обеспечить выполнение начальных условий

$w(t,x)|_{t=0} = 0, \frac{\partial w(t,x)}{\partial t}|_{t=0} = 0$, потребуем для функции $\gamma_n(t)$ выполнения начальных условий

$$\gamma_n(0) = \gamma_n'(0) = 0. \quad (**)$$

Применяя преобразование Лапласа к левой и правой части уравнения (*) и учитывая условия (**), получим

$$\left(\rho^2 + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} \right) \gamma_n(\rho) = b_n(\rho)$$

то есть

$$\gamma_n(\rho) = \frac{1}{an\pi} \frac{\frac{an\pi}{l}}{\rho^2 + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}} b_n(\rho).$$

Отсюда и из теоремы об умножении изображений следует, что

$$\gamma_n(t) = \frac{l}{an\pi} \int_0^l b_n(\tau) \sin \frac{an\pi(t-\tau)}{l} d\tau.$$

Таким образом, решение задачи о вынужденных колебаниях струны с закрепленными концами имеет вид

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an\pi t}{l} + B_n \sin \frac{an\pi t}{l} + \gamma_n(t) \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$\gamma_n(t) = \frac{l}{an\pi} \int_0^l b_n(\tau) \sin \frac{an\pi(t-\tau)}{l} d\tau;$$

$$b_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \gamma(t, x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

1.8. Общая схема метода разделения переменных (метода Фурье). Задача Штурма - Лиувилля

Выше рассматривалась задача отыскания ненулевых решений дифференциального уравнения $X''(x) + \lambda X(x) = 0$,

удовлетворяющих граничному условию $X(0) = X(l) = 0$. Задача отыскания ненулевых решений однородных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих однородным граничным условиям, встречается и при решении других задач математической физики. Рассмотрим, например, задачу о свободных колебаниях неоднородной струны с закрепленными концами. Это задача сводится к отысканию функции $u(t, x)$ ($0 \leq x \leq l, t > 0$), удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right] - q(x)u(t, x) = \rho(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2},$$

начальным условиям

$$\begin{cases} u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \\ \left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

и граничным условиям $u(t, 0) = u(t, l) = 0$.

Коэффициент $k(x)$ характеризует сопротивление струны растяжению, $q(x)$ – сопротивление среды, $\rho(x)$ – плотность струны в точке x .

Будем искать ненулевые решения нашего уравнения, удовлетворяющие граничному условию, в виде $u(t, x) = T(t)X(x), X(0) = X(l) = 0$. Дифференцируя дважды функцию $u(t, x)$ по переменным t и x и подставляя полученные производные в наше уравнение, получим уравнение

$$T(t)[k(x)X'(x)]' - q(x)T(t)X(x) = \rho(x)T''(t)X(x).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{[k(x)X'(x)]' - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

Для определения функции $X(x)$ возникает следующая задача. Найти ненулевые решения дифференциального уравне-

ния $[k(x)X'(x)]' - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0$, удовлетворяющие граничному условию $X(0)=X(l)=0$. Эта задача называется задачей Штурма - Лиувилля. Те значения λ , для которых существуют ненулевые решения задачи, называются собственными значениями, а решения $X(x)$ – собственными функциями задачи Штурма – Лиувилля. Вместо граничных условий могут встречаться граничные условия общего вида

$$\begin{cases} [aX(x) + bX'(x)]_{x=0} = 0; \\ [cX(x) + dX'(x)]_{x=l} = 0, \end{cases}$$

где a, b, c, d – постоянные числа или непрерывные функции от x . Различают не особый и особый случаи задачи Штурма – Лиувилля.

Не особый случай. Задача Штурма - Лиувилля называется не особой, если функции $k(x)$, $k'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ непрерывны, причем $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$. В этом случае справедливы следующие утверждения:

1. Существует бесконечно много собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, которым соответствуют собственные функции $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x), \dots$.
2. Все собственные значения задачи положительны $\lambda_n > 0$.
3. Все собственные значения задачи простые, то есть каждому собственному значению λ_n соответствует с точностью до постоянного множителя одна собственная функция $X_n(x)$.
4. Собственные функции, отвечающие различным соответственным значениям, ортогональны с весом $\rho(x)$:

$$\int_0^l \rho(x)X_n(x)X_m(x)dx = 0, \text{ если } n \neq m.$$

5. (Теорема Стеклова). Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[0, l]$ непрерывные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет граничным условиям $f(0)=f(l)=0$, то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x),$$

где

$$c_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x) f(x) X_n(x) dx,$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx.$$

Утверждение 1 и 5 примем без доказательства.

Особые случаи. Особые случаи Штурма - Лиувилля отличаются от не особого случая тем, что или функция $k(x)$ может обращаться в ноль в некоторых точках отрезка $[0, l]$, или уравнение рассматривается на промежутке бесконечной длины.

Рассмотрим случай, когда функция $k(x)$ обращается в ноль в точке $x=0$, причем $k(x) = x\varphi(x)$, где $\varphi(x) > 0$. Это означает, что число 0 является простым корнем уравнения $k(x) = 0$. В этом случае справедливо следующее утверждение, которое примем без доказательства.

Теорема. Пусть функции $k(x) = x\varphi(x), k'(x), q(x), \rho(x)$ непрерывны на отрезке $[0, l]$, причем $\varphi(x) > 0, q(x) \geq 0, \rho(x) > 0$.

Тогда, если $X_1(x), X_2(x)$ линейно независимые решения нашего уравнения и если $\lim_{x \rightarrow 0} X_1(x) = X_1(0) \neq \infty$, то

$\lim_{x \rightarrow 0} X_2(x) = \infty$. Общее решение нашего уравнения в этом случае

имеет вид $X(x) = C_1 X_1(x) + C_2 X_2(x)$, где

$\lim_{x \rightarrow 0} X_1(x) = X_1(0) \neq \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} X_2(x) = \infty$. Поэтому, если решение $X(x) = C_1 X_1(x) + C_2 X_2(x)$ удовлетворяет условию $\lim_{x \rightarrow 0} X(x) = X(0) \neq 0$, то $C_2 = 0$. Условие $\lim_{x \rightarrow 0} X(x) = X(0) \neq 0$ позволяет найти одну из постоянных в общем решении уравнения нашего, то есть это условие заменяет одно из граничных условий задачи Штурма - Лиувилля. Поэтому задача Штурма - Лиувилля в первом случае ставится следующим образом.

Найти ненулевые решения уравнения

$$\left[k(x)X'(x) \right]' - q(x)X(x) + \lambda \rho(x)X(x) = 0,$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$\lim_{x \rightarrow 0} X(x) = X(0) \neq 0, X(0) = 0.$$

В особом случае условие $\lim_{x \rightarrow 0} X(x) = X(0) \neq 0$ заменяет условие $X(0) = 0$ в не особом случае.

Справедливы следующие утверждения о собственных значениях и собственных функциях в особом случае:

1. Существует бесконечно много собственных значений $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, которым соответствуют собственные функции $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x), \dots$. Собственные значения могут быть кратными, причем кратность каждого собственного значения конечна: каждому собственному значению может соответствовать только конечное число линейно независимых собственных функций.
2. Собственные значения $\lambda_n \geq 0$, число $\lambda = 0$ может быть собственным значением.

3. Собственные функции $X_n(x)$, $X_m(x)$, различным собственным значениям λ_n, λ_m , ортогональны на отрезке $[0, l]$, $\int_0^l \rho(x) X_n(x) X_m(x) dx = 0$, если $n \neq m$.
4. (Теорема Стеклова). Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[0, l]$ непрерывные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет граничным условиям $f(0) = f(l) = 0$, если $\lim_{x \rightarrow 0} q(x) = \infty$ и $f(0) \neq \infty$, $f(l) = 0$, если $\lim_{x \rightarrow 0} q(x) = q(0) \neq \infty$, то функция $f(x)$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x),$$

где

$$c_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x) f(x) X_n(x) dx.$$

Второй особый случай задачи Штурма - Лиувилля заключается в том, что ненулевые решения основного уравнения ищутся в промежутке бесконечной длины, например, в промежутке $[0, \infty)$ или $(-\infty, \infty)$. В этом случае справедливо следующее утверждение, которое примем без доказательства.

Теорема. Пусть функции $k(x)$, $k'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ непрерывны на промежутке $[0, \infty)$, причем $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$, и пусть $X_1(x)$, $X_2(x)$ линейно независимые решения основного уравнения. Тогда, если для некоторого n $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X_1(x)}{x^n} = 0$, то

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X_2(x)}{x^n} = \infty$, если решение $X_1(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ растет не быстрее некоторой степенной функции x^n , то решение $X_2(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ растет быстрее любой степенной функции x^n .

Из этой теоремы следует, что если из общего решения $X(x) = C_1 X_1(x) + C_2 X_2(x)$ уравнения требуется найти частное решение, растущее при $x \rightarrow +\infty$ не быстрее некоторой степенной функции, то $C_2 = 0$, то есть условие $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X_1(x)}{x^n} = 0$ для некоторого n заменяет граничное условие $X(l) = 0$. Поэтому задача Штурма - Лиувилля во втором особом случае ставится следующим образом. Найти ненулевое решение основного уравнения, удовлетворяющее граничному условию $X(0) = 0$ и растущее при $x \rightarrow +\infty$ не быстрее некоторой степенной функции x^n . Свойства собственных значений и собственных функций во втором особом случае формулируются так же, как и свойства 1-4 в первом особом случае.

1.9. Уравнение колебаний мембраны

Мембраной называют свободно изгибающуюся натянутую пленку. Пусть в положении равновесия мембрана расположена в плоскости xOy и занимает некоторую область D , ограниченную замкнутой кривой L . Далее предположим, что мембрана находится под действием равномерного натяжения T , приложенного к краям мембраны. Это означает, что если провести линию по мембране в любом направлении, то сила взаимодействия между двумя частями, разделенными элементами линии, пропорциональна длине элемента и перпендикулярна его направлению; величина силы, действующая на элемент ds линии, будет равна Tds . Будем рассматривать только поперечные колебания мембраны, при которых каждая ее точка движется перпендикулярно плоскости xOy , параллельно

оси Oz . Тогда смещение и точки (x, y) мембраны будет функцией от x, y и t . Рассматривая далее только малые колебания мембраны, будем считать, что функция $u(x, y, t)$, а также ее частные производные по x и y малы, так что квадратами и произведениями их можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами. Выделим произвольный участок (σ) мембраны, ограниченный в положении равновесия кривой L . Когда мембрана будет выведена из положения равновесия, этот участок мембраны деформируется в участок σ' поверхности мембраны, ограниченный пространственной кривой l' . Площадь участка σ' в момент времени t равна

$$\sigma' = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy \approx \iint_{\sigma} dx dy = \sigma.$$

Таким образом, при наших предположениях можно пренебречь изменением площади произвольно взятого участка мембраны в процессе колебаний и считать, что любой участок σ' мембраны будет находиться под действием первоначально го натяжения T .

Перейдем к выводу уравнения поперечных колебаний мембраны. Рассмотрим произвольный участок σ' мембраны. Со стороны остальной части мембраны на этот участок действует направленное по нормали к контуру l' равномерно распределенное натяжение T , лежащее в касательной плоскости к поверхности мембраны. Найдем проекцию на ось Oz сил натяжения, приложенных к кривой l' , ограничивающей участок σ' мембраны. Обозначим через ds' элемент дуги кривой dl' . На этот элемент действует натяжение, равное по величине $T ds'$. Косинус угла, образованного вектором натяжения T с осью.

Он равен, в силу наших предположений, $\frac{\partial u}{\partial n}$, где n - направление внешней нормали к кривой l' , ограничивающей участок мембраны в положении равновесия (рис. 1.13). Отсюда следует, что проекция на ось Oz сил натяжения, приложенных к

элементу ds' контура, равна $T \frac{\partial u}{\partial n} ds'$ и проекция на ось Ou сил натяжения, приложенных ко всему контуру, равна $T \int_{l'} \frac{\partial u}{\partial n} ds'$.

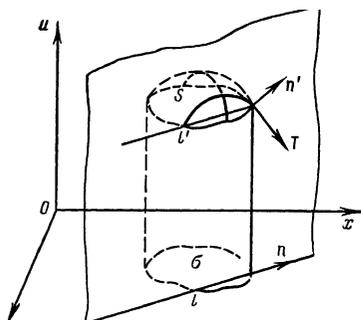


Рис. 1.13

Так как при малых колебаниях мембраны можно считать $ds \approx ds'$, то, применяя формулу Грина, получим

$$T \int_l \frac{\partial u}{\partial n} ds = T \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

Предположим далее, что на мембрану параллельно оси Ou действует внешняя сила $p(x, y, t)$, рассчитанная на единицу площади. Тогда проекция на ось Ou внешней силы, действующей на участок σ' мембраны, будет равна $\iint_{\sigma} p(x, y, t) dx dy$.

Силы должны в любой момент времени t уравновеситься силами инерции участка σ' мембраны

$$- \iint_{\sigma} \rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dy,$$

где $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность мембраны.

Таким образом, мы получаем равенство

$$\iint_{\sigma} \left[\rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t) \right] dx dy = 0.$$

Отсюда в силу произвольности площадки следует, что

$$\rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t).$$

Это есть дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны. В случае однородной мембраны $\rho = \text{const}$ уравнение малых колебаний мембраны можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t),$$

где $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$; $f(x, y, t) = \frac{p(x, y, t)}{\rho}$.

Если внешняя сила отсутствует, т. е. $p(x, y, t) = 0$, то получаем уравнение свободных колебаний однородной мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Как и при рассмотрении колебаний струны, одного этого уравнения недостаточно для полного определения движения мембраны; нужно задать смещение и скорость ее точек в начальный момент времени:

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x, y).$$

Далее, так как на контуре L мембрана закреплена, то должно быть $u|_L = 0$ при любом $t \geq 0$.

1.10. Решение задачи о радиальных колебаниях круглой мембраны

Задача о свободных колебаниях однородной круглой мембраны с закрепленной границей заключается в следующем.

Найти функцию $u(t, x, y)$, удовлетворяющую в круге $x^2 + y^2 < R^2$ дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial y^2} \right],$$

начальным условиям
$$\begin{cases} u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

и граничному условию

$$u(t, x, y)|_{x^2+y^2=R^2} = 0 \quad (\text{рис. 1.14}).$$

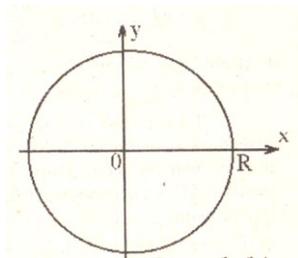


Рис. 1.14

В полярных координатах r, θ эта задача формулируется следующим образом. Найти функцию $u(t, r, \theta)$, удовлетворяющую в круге $r < R$ дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u(t, r, \theta)}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u(t, r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(t, r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(t, r, \theta)}{\partial \theta^2} \right],$$

начальным условиям

$$\begin{cases} u(t, r, \theta)|_{t=0} = \varphi(r, \theta), \\ \frac{\partial u(t, r, \theta)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(r, \theta) \end{cases}$$

и граничному условию $u(t, r, \theta)|_{r=R} = 0$.

Рассмотрим частный случай этой задачи, когда начальные отклонения и начальные скорости не зависят от переменной θ . Это означает, что точки, одинаково удаленные от центра мембраны, в начальный момент времени имеют одинаковые отклонения и одинаковые скорости. В этом случае и при $t > 0$ отклонение точек мембраны не будет зависеть от переменной θ . Таким образом, рассматривается следующая задача. Найти функцию $u(t, r)$, удовлетворяющую в круге $r < R$ дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u(t, r)}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u(t, r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(t, r)}{\partial r} \right],$$

начальным условиям

$$\begin{cases} u(t, r)|_{t=0} = \varphi(r), \\ \frac{\partial u(t, r)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(r) \end{cases}$$

и граничному условию $u(t, r)|_{r=R} = 0$.

Для решения этой задачи используем метод разделения переменных, примененный нами ранее для решения задачи о колебаниях конечной струны. Найдем сначала ненулевые решения нашего уравнения, удовлетворяющие только граничному условию. Эти решения будем искать в виде $u(t, r) = T(t)X(x)$, где $X(0) \neq \infty$, $X(R) = 0$.

Дифференцируя функцию $u(t, r)$ и подставляя результаты дифференцирования в наше уравнение, получим

$$T''(t)X(r) = a^2 \left[X'' + \frac{1}{r} X'(r) \right] T(t) = 0,$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(r) + \frac{1}{r} X'(r)}{X(r)} = -\lambda.$$

Отсюда следует, что

$$T''(r) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (***)$$

$$X''(r) + \frac{1}{r} X'(r) + \lambda X(r) = 0 \quad (0 \leq r \leq R),$$

$$(X(0) \neq \infty, X(R) = 0).$$

Уравнение можно записать в виде

$$r^2 X''(r) + rX'(r) + \lambda r^2 X(r) = 0.$$

Следовательно, это уравнение является уравнением Бесселя с $n=0$. Поэтому на отрезке $[0, R]$ при $n=0$, сделаем в уравнении замену независимой переменной $r = R\rho$, тогда

$$\frac{d}{dr} = \frac{d}{d\rho} \frac{1}{R}, \quad \frac{d^2}{dr^2} = \frac{d^2}{d\rho^2} \frac{1}{R^2}.$$

В результате этой замены уравнение примет вид

$$X''(\rho) + \frac{1}{\rho} X'(\rho) + \lambda R^2 X(\rho) = 0.$$

Таким образом, мы пришли к следующей задаче. Найти ненулевые решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие на отрезке $[0, 1]$ граничным условиям

$$X(0) \neq \infty, X(1) = 0.$$

Ненулевые решения, удовлетворяющие условию $X(0) \neq \infty$, существуют только при $\lambda R^2 = (\mu_k^{(0)})^2$, где $\mu_k^{(0)}$ – положительные решения уравнения $J_0(\mu) = 0$, и эти решения имеют вид $X_k(\rho) = J_0(\mu_k \rho)$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, наша

задача имеет ненулевые решения только при $\lambda = \lambda_k = \frac{(\mu_k^{(0)})^2}{R^2}$, и

эти решения имеют вид $X_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right)$. Подставляя значе-

ния $\lambda = \lambda_k = \frac{(\mu_k^{(0)})^2}{R^2}$ в уравнение (***) и решая полученное уравнение, находим

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{a\mu_k^{(0)} t}{R} + B_k \sin \frac{a\mu_k^{(0)} t}{R}.$$

Таким образом, мы получили бесконечно много частных решений уравнения, удовлетворяющих граничному условию

$$u_k(t, r) = \left(A_k \cos \frac{a\mu_k^{(0)} t}{R} + B_k \sin \frac{a\mu_k^{(0)} t}{R} \right) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right).$$

Решение исходной задачи будем искать в виде

$$u_k(t, r) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{a\mu_k^{(0)} t}{R} + B_k \sin \frac{a\mu_k^{(0)} t}{R} \right) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right),$$

где A_k, B_k подбираются таким образом, чтобы выполнялись начальные условия. Имеем

$$\frac{\partial u(t, r)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-A_k \frac{a\mu_k^{(0)} t}{R} \sin \frac{a\mu_k^{(0)} t}{R} + B_k \frac{a\mu_k^{(0)} t}{R} \cos \frac{a\mu_k^{(0)} t}{R} \right) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right). \text{ Полагая в}$$

этих равенствах $t=0$, получим

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right), \quad \psi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{a\mu_k^{(0)}}{R} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right).$$

Обозначим в этих формулах $\frac{r}{R} = \rho$, $r = R\rho$. Тогда

$$\varphi(R\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(\mu_k^{(0)} \rho), \quad \psi(R\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} B_n \frac{a\mu_k^{(0)}}{R} J_0(\mu_k^{(0)} \rho).$$

Отсюда следует, что

$$A_k = \frac{2}{J_1^2(\mu_k^{(0)})} \int_0^1 \rho \varphi(R\rho) J_0(\mu_k^{(0)} \rho) d\rho;$$

$$B_k = \frac{2}{a\mu_k^{(0)} J_1^2(\mu_k^{(0)})} \int_0^1 \rho \psi(R\rho) J_0(\mu_k^{(0)} \rho) d\rho,$$

или, если в интегралах сделать замену переменной $R\rho = r$, то

$$A_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k^{(0)})} \int_0^R R \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr;$$

$$B_k = \frac{2}{R\mu_k^{(0)} J_1^2(\mu_k^{(0)})} \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

1.11. Решение задачи о продольных колебаниях стержня методом Фурье

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях однородного упругого стержня длины l , когда один его конец $x = 0$ закреплен, а другой $x = l$ свободен. Было показано, что эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}$$

при граничных условиях $u|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{x=l} = 0$ и начальных

условиях $u|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x)$ ($0 < x < l$).

Согласно методу Фурье частные решения уравнения будем искать в виде $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Подставив $u(x, t)$ в основное уравнение, получим $\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$, откуда получаем два уравнения

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0;$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Чтобы функция $X(x)$, отличная от тождественного нуля, удовлетворяла граничным условиям, очевидно, нужно потребовать выполнения условий $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Таким образом, мы пришли к задаче о собственных числах для уравнения

$$X(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \text{ при граничных условиях } u|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{x=l} = 0.$$

Интегрируя уравнение, получим

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

И имеем $C_1 = 0$, $C_2 \lambda \sin \lambda l = 0$.

Считая $C_2 \neq 0$ (в противном случае имели бы $X(x) \equiv 0$), находим $\cos \lambda x = 0$, откуда $\lambda l = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ (k — целое число).

Таким образом, нетривиальные решения задачи возможны лишь при значениях $\lambda_k = \frac{(2k + 1)\pi}{2l}$. Собственным числам λ_k^2 соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin \frac{(2k + 1)\pi x}{2l} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

определенные с точностью до постоянного множителя, который мы положили равным единице (отрицательные целые значения k новых собственных функций не дадут). При $\lambda = \lambda_k$ общее решение основного уравнения имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{(2k + 1)\pi a t}{2l} + b_k \sin \frac{(2k + 1)\pi a t}{2l},$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

Найдем $u_k(x, t) = T_k(t)X_k(x) = \left(a_k \cos \frac{(2k + 1)\pi a t}{2l} + b_k \sin \frac{(2k + 1)\pi a t}{2l} \right) \sin \frac{(2k + 1)\pi x}{2l}$.

Составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \right) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Для выполнения начальных условий необходимо, чтобы

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)\pi a}{2l} b_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Предполагая, что ряды сходятся равномерно, можно определить коэффициенты a_k и b_k , умножив обе части равенств рядов на $\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ и проинтегрировав по x в пределах

от $x = 0$ до $x = l$. Тогда, приняв во внимание, что

$$\int_0^l \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n; \\ \frac{l}{2} & \text{при } k = n, \end{cases}$$

получим:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx;$$

$$b_n = \frac{4}{(2n+1)} \int_0^l F(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx.$$

С помощью метода Фурье легко можно исследовать задачу о продольных колебаниях стержня. Напомним, что поставленная там задача приводится к решению основного уравнения при граничных и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x) = rx, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (0 < x < l), \quad \text{где } r - \text{ постоянная.}$$

Применяя формулы, полученные выше, найдем, что

$$a_k = \frac{(-1)^k 8lr}{(2k+1)^2 \pi^2}, \quad b_k = 0, \quad \text{откуда вытекает, что относительное перемещение сечения стержня с абсциссой } x \text{ выражается рядом}$$

$$u(x,t) = \frac{8lr}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Пример 1. Решить неоднородное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2t - 1 \quad (0 \leq x \leq l), \quad (t \geq 0)$$

при однородных краевых условиях $u|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0$ и нулевых начальных условиях $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

Задача описывает вынужденные колебания однородной струны, закрепленной на концах, под действием внешней возмущающей силы $f(x,t) = 2t$. Применяя метод Фурье разделения переменных, полагаем $u(x,t) = X(x)T(t)$ для решения соответствующего однородного уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при

начальных условиях. Подставив $u(x,t)$ в это уравнение, получаем равенство $\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$, возможное лишь в случае, если

обе части его не зависят ни от x , ни от t , т.е. представляет собой одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через c : $\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c$.

Используем краевые условия $u(0,t) = X(0)T(t)$, следовательно $X(0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = X'(l)T(t) = 0$ и $X'(l) = 0$.

Таким образом, приходим к задаче Штурма-Лиувилля: найти такие значения параметра c , при которых существуют нетривиальные (т.е. отличные от тождественного нуля) решения уравнения, удовлетворяющие краевым условиям:

$$X''(x) - c(x) = 0; \quad X(0) = 0; \quad \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (*)$$

При $c \geq 0$ в общем решении уравнения, согласно краевым условиям, $c_1=0$, $c_2=0$ и решение задачи (*) становится $X(x) \equiv 0$ - случаи не интересны. При $c > 0$, $c = -\lambda^2$: общее решение вида: $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$, $X(x) = -c_1 \lambda \sin \lambda x + c_2 \lambda \cos \lambda x$. $X(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 = 0$, $X'(l) = c_2 \lambda \cos \lambda l = 0$, $\forall c_2 \neq 0$. Поэтому $\cos \lambda l = 0$. Находим ее собственные значения $\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{1}{l}$ и соответствующие им собственные функции $X_k(x) = \sin \lambda_k x$, $k=0, 1, 2, \dots$, определяемые с точностью до постоянного множителя, который мы полагаем равным единице. Следовательно, лишь при $c = -\lambda_k^2$, $k=0, 1, 2, \dots$, имеем нетривиальные решения задачи (*). Решение задачи ищем в виде ряда Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \sin(\lambda_k x),$$

где $T_k(0) = 0$, $T_k'(0) = 0$.

Подставляя $u(x, t)$ в основное уравнение, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} (T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t)) \sin(\lambda_k x) = 2t - 1 \quad \text{и для нахождения функций}$$

$T_k(t)$ разложим функцию в ряд Фурье по синусам на интервале $(0, l)$.

Так как $l = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(\lambda_k x)$, то получаем уравнение

$$T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = 4t / \lambda_k \quad \text{общее решение которого, имеет вид}$$

$$T_k(t) = A \sin(\lambda_k t) + B \cos(\lambda_k t) \frac{4t}{\lambda_k^3} \quad \text{и значения неопределенных}$$

коэффициентов:

$$A = -\frac{4t}{\lambda_k^4}, \quad B = 0, \quad T_k(t) = \frac{4t}{\lambda_k^3} + \frac{4t}{\lambda_k^4} \sin(\lambda_k t).$$

Окончательно

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^4} (\lambda_k t - \sin(\lambda_k t)) \right) \sin(\lambda_k x), \quad \lambda_k = (\pi/2 + k\pi)/l.$$

1.12. Решение задачи теплопроводности бесконечного и полуграниченного стержня

А. Пусть в стержне бесконечной длины $(-\infty < x < \infty)$ задано начальное распределение температур. Требуется найти температуру $u(t, x)$ в любой точке $x \in (-\infty, \infty)$ в любой момент времени $t > 0$. Это означает, что требуется найти решение $u(t, x)$ дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \quad (x \in (-\infty, \infty), t > 0),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x).$$

Пусть $U(t, \xi)$, $\phi(\xi)$ – преобразования Фурье по переменной x функций $u(t, x)$, $\varphi(x)$:

$$U(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) e^{-i\xi x} dx = F_x[u(t, x)];$$

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, x) e^{-i\xi x} dx = F_x[\varphi(t, x)],$$

тогда

$$F_x \left[\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right] = \frac{\partial U(t, \xi)}{\partial t}, \quad F_x \left[\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right] = -\xi^2 U(t, \xi).$$

Применяя преобразование Фурье к левой и правой части основного уравнения и начального условия, приходим к

следующей задаче. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial U(t, \xi)}{\partial t} = -a^2 \xi^2 U(t, \xi),$$

удовлетворяющее начальному условию $U(t, \xi)|_{t=0} = \phi(\xi)$.

Решение этой задачи имеет вид $U(t, \xi) = \phi(\xi)e^{-a^2 \xi^2 t}$. Искомая функция $u(t, x)$ находится с помощью обратного преобразования Фурье:

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(t, \xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

или

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) e^{i\xi x} e^{-a^2 \xi^2 t} d\xi,$$

где

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) e^{-i\xi z} dz,$$

то есть

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) e^{-i\xi z} dz \right] e^{-a^2 \xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-z)} e^{-a^2 \xi^2 t} d\xi \right] dz. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-z)} e^{-a^2 \xi^2 t} d\xi$. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-z)} e^{-a^2 \xi^2 t} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} \cos \xi(x-z) d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} \sin \xi(x-z) d\xi.$$

Функция $e^{-a^2\xi^2t} \cos\xi(x-z)$ - четная, а функция $e^{-a^2\xi^2t} \sin\xi(x-z)$ - нечетная по переменной ξ .

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\xi^2t} \cos\xi(x-z) d\xi = 2 \int_0^{\infty} e^{-a^2\xi^2t} \cos\xi(x-z) d\xi,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\xi^2t} \sin\xi(x-z) d\xi = 0.$$

Следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-z)} e^{-a^2\xi^2t} d\xi = 2 \int_0^{\infty} e^{-a^2\xi^2t} \cos(x-z) d\xi.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной

$a^2\xi^2t = \eta^2$, $\xi = \frac{\eta}{a\sqrt{t}}$, $d\xi = \frac{d\eta}{a\sqrt{t}}$ и обозначим $\frac{x-z}{a\sqrt{t}} = \beta$, по-

лучим $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-z)} e^{-a^2\xi^2t} d\xi = \frac{2}{a\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cos\beta\eta d\eta$.

Положим $I(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cos\beta\eta d\eta$.

Тогда

$$I'(\beta) = - \int_0^{\infty} \eta e^{-\eta^2} \sin\beta\eta d\eta = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin\beta\eta d(e^{-\eta^2}) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\eta^2} \sin\beta \Big|_0^{\infty} - \frac{\beta}{2} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} \cos\beta\eta d\eta = -\frac{\beta}{2} I(\beta).$$

Так как $I(0) = \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (интеграл Пуассона), то

функция $I(\beta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$I'(\beta) = -\frac{\beta}{2} I(\beta) \text{ и начальному условию } I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Решение этой задачи

$$I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-z)} e^{-a^2\xi^2t} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}},$$

следовательно,

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}} dz.$$

Полученная формула называется формулой Пуассона.

Б. Пусть в точках x , $x \in [0, \infty)$, стержня задано начальное распределение температур $\varphi(x)$. Требуется найти температуру $u(t, x)$ стержня в любой точке $x \geq 0$ в момент времени $t > 0$ при условии, что граничная точка $x = 0$ либо поддерживается при ненулевой температуре, либо теплоизолирована. Это значит, что требуется найти решение $u(t, x)$ дифференциального уравнения

$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$ при $x \geq 0$, $t > 0$, удовлетворяющее начальному условию $u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x)$ и одному из граничных условий $u(t, x)|_{x=0} = 0$ или $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}|_{x=0} = 0$.

Чтобы решить эти задачи, рассмотрим решение задачи теплопроводности бесконечного стержня

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_a^b \varphi(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}} dz, \text{ где } -\infty < x < \infty, t > 0.$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма. Если функция $\varphi(x)$ нечетная, то решение $u(t, x)$ удовлетворяет условию $u(t, x)|_{x=0} = 0$, если же функция $\varphi(x)$ четная, то $u(t, x)$ удовлетворяет условию $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}|_{x=0} = 0$.

В самом деле, если функция $\varphi(x)$ нечетная, то

$u(t, x)|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) e^{-\frac{z^2}{2a^2 t}} dz = 0$ в силу нечетности подынтегральной функции.

Если функция $\varphi(x)$ четная, то

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \frac{1}{a^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} (x-z)\varphi(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{2a^2 t}} dz,$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2a^3 t \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} z\varphi(z) e^{-\frac{z^2}{2a^2 t}} dz = 0,$$

так как функция $x\varphi(x)$ четная.

Чтобы получить решения задач теплопроводности полубесконечного стержня, построим продолжение функции $\varphi(x)$ на всю числовую ось Ox нечетным или четным образом, то есть построим функции:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \geq 0; \\ -\varphi(-x), & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \geq 0; \\ \varphi(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

$$\varphi_1(-x) = -\varphi_1(x), \quad \varphi_2(-x) = \varphi_2(x).$$

Решение задачи теплопроводности для бесконечного стержня с начальным условием $u(t, x)|_{t=0} = \varphi_1(x)$

$$u_2(t,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}} dz,$$

удовлетворяет при $x \geq 0$ основному дифференциальному уравнению, начальному условию $u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x)$ и граничному условию $u(t,x)|_{x=0} = 0$, то есть функция $u_1(t,x)$, рассматриваемая только при $x \geq 0$, является решением. Точно

так же функция $u_2(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}} dz$, рассматри-

ваемая только при $x \geq 0$, является решением основного дифференциального уравнения, удовлетворяет начальному усло-

вию $u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x)$ и граничному условию $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$.

Решения $u_2(t,x)$ можно преобразовать:

$$u_1(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\int_{-\infty}^0 \varphi_1(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}} dz + \int_0^{\infty} \varphi_1(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}} dz \right] =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[- \int_{-\infty}^0 \varphi(-z_1) e^{-\frac{(x-z_1)^2}{4a^2t}} dz_1 + \int_0^{\infty} \varphi(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}} dz \right],$$

$$u_2(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\int_{-\infty}^0 \varphi(-z_1) e^{-\frac{(x-z_1)^2}{4a^2t}} dz_1 + \int_0^{\infty} \varphi(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}} dz \right].$$

Если в первых интегралах сделать замену переменной $z_1 = -z$, то получим:

$$u_1(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[- \int_0^{-\infty} \varphi(z) e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2t}} dz + \int_0^{\infty} \varphi(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}} dz \right],$$

$$u_2(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\int_0^{\infty} \varphi(z) e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2t}} dz + \int_0^{\infty} \varphi(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}} dz \right],$$

ИЛИ

$$u_1(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(z) \left[e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2t}} \right] dz,$$

$$u_2(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(z) \left[e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2t}} \right] dz.$$

1.13. Решение задачи теплопроводности в конечном стержне

Пусть в стержне длины l задано начальное распределение температур. Требуется найти температуру точек стержня при $t > 0$. Рассмотрим сначала случай, когда на концах поддерживается нулевая температура, т.е. рассмотрим следующую задачу. Найти функцию $u(t, x)$, удовлетворяющую при $0 < x < l$, $t > 0$ дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2},$$

начальному условию $u(t, x)|_{x=0} = \varphi(x)$, и граничным условиям $u(t, 0) = u(t, l) = 0$.

Найдем сначала ненулевые решения $u(t, x)$ нашего уравнения, удовлетворяющие только граничному условию. Эти решения будем искать в виде $u(t, x) = T(t)X(x)$, где $X(0) = X(l) = 0$. Дифференцируя функцию $u(t, x)$ по переменным t и x дважды и подставляя результаты дифференцирования в основное уравнение и поделив его на $T(t)X(x)$, получим

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда следует, что

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0; \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Задача имеет ненулевые решения только при

$\lambda = \lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}$ ($k = 1, 2, \dots$). Решения имеют вид $X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$,

тогда из уравнения для $T(t)$ получим:

$$T_k(t) = A_k e^{-\frac{(ak\pi)^2 t}{l^2}}.$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{(ak\pi)^2 t}{l^2}} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Коэффициенты A_k которого подбираются таким образом, чтобы выполнялось начальное условие.

При $t=0$, получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Рассмотрим теперь случай, когда на концах отрезка $[0, l]$ поддерживается постоянная температура u_0 и u_1 . В этом случае требуется найти решение основного уравнения, удовлетворяющее начальному условию и граничным условиям $u(t, 0) = u_0$, $u(t, l) = u_1$.

Эта задача сводится к предыдущей с помощью замены неизвестной функции $v(t, x) = u(t, x) - [u_0 + \frac{u_1 - u_0}{l} x]$.

Так как $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, то функция $v(t, x)$ является решением. Функция $v(x)$ удовлетворяет условию

$$v(t, x)|_{t=0} = \varphi(x) - [u_0 + \frac{u_1 - u_0}{l} x] = \psi(x).$$

Поэтому

$$v(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

И

$$u(t, x) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{(ak\pi)^2 t}{l^2}} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где A_k вычисляется по вышеприведенным формулам. Аналогично решаются задачи теплопроводности конечного стержня при граничных условиях других типов.

1.14. Решение задачи теплопроводности в однородном шаре

Пусть в шаре $x^2 + y^2 \leq R^2$ задано начальное распределение температур, и пусть в точках сферы $x^2 + y^2 = R^2$ поддерживается нулевая температура. Мы рассмотрим частный случай этой задачи, когда начальная температура зависит лишь от расстояния точки от центра шара и не зависит от угловых координат этой точки. Поэтому и при $t > 0$ температура в точках шара зависит лишь от расстояния этой точки от центра шара. По этой причине задачу целесообразно решать в сферической системе координат ρ, θ, φ . Как известно, оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{ctg\theta}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Рассматриваемая задача заключается в следующем.

Найти функцию $u(t, \rho)$ удовлетворяющую при $t > 0$ $0 \leq \rho < R$ уравнению

$$\frac{\partial u(t, \rho)}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u(t, \rho)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u(t, \rho)}{\partial \rho} \right]$$

и начальному условию $u(t, \rho)|_{t=0} = g(\rho)$ и граничным условиям $u(t, 0) \neq \infty, u(t, R) = 0$. Первое условие говорит о том,

что температура в центре шара не может быть бесконечной. Для решения этой задачи введем вспомогательную функцию

$$v(t, \rho) = \rho u(t, \rho). \text{ Тогда } u(t, \rho) = v(t, \rho) / \rho, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} v, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^3} v,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}.$$

Подставляя результаты дифференцирования в основное уравнение, приходим после сокращения на $1/\rho$ к задаче.

Найти функцию $v(t, \rho)$, удовлетворяющую при $t > 0$, $0 < \rho < R$ дифференциальному уравнению $\frac{\partial v(t, \rho)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v(t, \rho)}{\partial \rho^2}$, начальному условию $v(0, \rho) = \rho g(\rho)$ и граничному условию $v(t, 0) = v(t, R) = 0$.

Решение этой задачи имеет вид

$$v(t, \rho) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{(ak\pi)^2 t}{l^2}} \sin \frac{k\pi \rho}{R},$$

где

$$A_k = \frac{2}{R} \int_0^R \rho g(\rho) \sin \frac{k\pi \rho}{R} d\rho.$$

Таким образом, решение задачи теплопроводности в однородном шаре имеет вид

$$u(t, \rho) = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{(ak\pi)^2 t}{l^2}} \sin \frac{k\pi\rho}{R},$$

где A_k вычисляется по формуле приведенной выше.

1.15. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа

Рассмотрим задачу об определении установившейся температуры в однородном твердом теле. Ранее было установлено, что распространение тепла в изотропном однородном теле (при отсутствии источников тепла) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Пусть температура в каждой точке (x, y, z) тела установилась (она не меняется с течением времени). Тогда производная по времени равна нулю и уравнение будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Для определения $u(x, y, z)$ не надо задавать начальное распределение температуры (начальное условие), а достаточно задать одно граничное условие, не зависящее от времени.

Задача определения решения уравнения Лапласа по его значениям на границе нашей области называется задачей Дирихле, а задача определения решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего граничному условию $\frac{du}{dn} \Big|_s = 0$, называется задачей Неймана.

Потенциальное движение несжимаемой жидкости

Рассмотрим установившееся движение несжимаемой жидкости и движение жидкости невихревое (потенциальное),

т.е. вектор $v = \text{grad } \varphi$. Плотность ρ постоянна, и из уравнения неразрывности имеем $\text{div } \varphi = 0$.

$$\text{Так как } \text{div}(\text{grad}\varphi) = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

т.е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

1.16. Общий вид уравнения эллиптического типа

Уравнение

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = f,$$

где a_{ij}, b_i, c, f - функции, заданные в области V , являются в этой области эллиптическим типом, если квадратичная форма

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta$$

сохраняет в области V знак и не равна нулю.

Число n будет называться числом измерений области V .

Будем рассматривать трехмерные области ($n = 3$), но результаты применимы для плоских ($n = 2$) и для многомерных ($n > 3$) областей.

Предполагается, что функции a_{ij}, b_i, c, f непрерывны и функции a_{ij} , а также функции

$$e_i = b_i - \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial a_{i\beta}}{\partial x_\beta}$$

будут иметь непрерывные первые производные. Тогда наше уравнение можно преобразовать к виду

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_{\beta}} + \sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} + cu = f.$$

Выражение, стоящее в левой части вышеприведенного уравнения, обозначим через μu .

Основное уравнение будет записано в виде $\mu u = f$.

Основные граничные задачи

1. Первая граничная задача (задача Дирихле): $\mu u = f$, когда $x \in V - FV$; $u = \psi$, когда $x \in FV$.

2. Вторая граничная задача (задача Неймана): $\mu u = f$, когда $x \in V - FV$; $\alpha \frac{du}{dv} + \beta u = \psi$, когда $x \in FV$, где коэффициент α не равен нулю на поверхности FV ;

$\alpha \frac{d}{dv}$ - это дифференцирование по направлению нормали к FV .

3. Смешанная (третья) граничная задача:

$\mu u = f$, когда $x \in V - FV$; $\alpha \frac{du}{dv} + \beta u = \psi$, когда $x \in FV$.

где коэффициент α , не обращаясь на всей поверхности FV в нуль тождественно, но равен нулю на части FV .

Эти граничные задачи будем называть внутренними или внешними, если они ставятся внутри или вне конечной замкнутой поверхности FV .

Сопряженные граничные задачи

Рассмотрим граничное условие задачи Неймана:

$$\alpha \frac{du}{dv} + \beta u = \psi, \quad \text{когда } x \in FV \quad (\alpha \neq 0).$$

Его можно привести к виду

$$\alpha \frac{du}{dv} + gu = \psi, \quad \text{когда } x \in FV,$$

где g и ψ - известные функции.

Запишем его в виде

$$Pu = \psi, \quad \text{когда } x \in FV.$$

Граничное условие

$$Qu = a \frac{du}{dv} + (g - b)u = \psi, \quad \text{когда } x \in FV,$$

где дифференциальное выражение Qu определено вторым из равенств, а ψ - некоторая функция, которая определена на FV , назовем сопряженным граничному условию.

Назовем далее сопряженными граничные задачи:

$$\mu u = f, \quad \text{когда } x \in V - FV; \quad Pu = \psi, \quad \text{когда } x \in FV;$$

$$Nv = f, \quad \text{когда } x \in V - FV; \quad Qu = \tilde{\psi}, \quad \text{когда } x \in FV,$$

где μu и Nv - сопряженные дифференциальные выражения, и Pu и Qu - соответствующие им выражения; f, \tilde{f} и $\psi, \tilde{\psi}$ - функции, определенные соответственно в изучаемой области V и на ее границе FV .

Для граничной задачи Дирихле:

$$\mu u = f, \quad \text{когда } x \in V - FV; \quad u = \psi, \quad \text{когда } x \in FV.$$

Тогда сопряженной к ней назовем задачу:

$$Nv = f, \quad \text{когда } x \in V - FV; \quad v = \tilde{\psi}, \quad \text{когда } x \in FV.$$

Если функции f и ψ тождественно равны нулю, то задачу будем называть однородной. Сопряженная задача называется однородной, если тождественно равны нулю \tilde{f} и $\tilde{\psi}$.

1.17. Фундаментальные решения. Функция Грина

Фундаментальным решением уравнения $\mu L = 0$ называют функцию Леви $L(\xi, x)$, которая при $\xi \neq x$ удовлетворяет этому уравнению по координатам x или ξ и зависит от координат другой точки, как от параметров. В выражениях $\mu_\xi L$

или $\mu_x L$ индексы ξ , x – это переменные по которым производится дифференцирование. Выражения $\mu_\xi u$ и $\mu_x u$ понимают как $\mu_x u(x)$ и $\mu_\xi u(\xi)$.

Рассмотрим задачу Дирихле: Найти решение уравнения $\mu_x u = f$, когда $x \in V - FV$; $u(x) = \psi$, когда $x \in FV$, где f и ψ -непрерывные функции.

Пусть решение $u(x)$ этой задачи и функция Леви $L(\xi, x)$ дифференциального выражения $\mu_x u$ непрерывны в замкнутой области V вместе со своими первыми производными. Применим к функции $u(x)$ формулу Грина — Стокса и получим

$$u(x) = \int_{FV} (LP_\xi u - \psi Q_\xi L) dS_\xi - \iiint_V (Lf - uN_\xi L) dV_\xi.$$

Если существует фундаментальное решение однородной задачи:

$$N_\xi G(\xi, x) = 0, \quad \text{когда } \xi \in V - FV - x;$$

$$G(\xi, x) = 0, \quad \text{когда } \xi \in FV, x \in V - FV,$$

сопряженной задаче Дирихле, если это решение непрерывно в области V вместе со своими первыми производными, то $L(\xi, x) = G(\xi, x)$.

Формула для $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = - \int_{FV} \psi(\xi) Q_\xi G(\xi, x) dS_\xi - \iiint_V f(\xi) G(\xi, x) dV_\xi.$$

Фундаментальное решение однородной задачи называют функцией Грина задачи Дирихле. Также вводится функция Грина для задачи Неймана.

Рассмотрим задачу: Найти решение уравнения $\mu_x u = f$, когда $x \in V - FV$; $Pu = \psi$, когда $x \in FV$.

Пусть $u(x)$ - решение этой задачи, непрерывное в замкнутой области V со своими производными первого порядка.

По формуле Грина—Стокса:

$$u(x) = \iint_{FV} (L\psi - uQ_\xi L) dS_\xi - \iiint_V (Lf - vN_\xi L) dV_\xi,$$

где $G(\xi, x)$ - фундаментальное решение однородной задачи:

$$N_\xi G(\xi, x) = 0, \quad \text{когда } \xi \in V - FV - x;$$

$$Q_\xi G(\xi, x) = 0, \quad \text{когда } \xi \in FV, x \in V - FV,$$

сопряженной задаче. Это решение должно быть непрерывно в области V вместе со своими первыми производными.

Пусть $L(\xi, x) = G(\xi, x)$, тогда:

$$u(x) = \iint_{FV} \psi(\xi) G(\xi, x) dS_\xi - \iiint_V f(\xi) G(\xi, x) dV_\xi.$$

Фундаментальное решение нашей задачи будет функция Грина. Вводятся также вторая функция Грина и характеристическая функция Неймана.

Рассмотрим две взаимно сопряженные граничные задачи, и пусть их функции Грина $G(\xi, x)$ и $\tilde{G}(\xi, x)$ существуют. По определению:

$$\mu_\xi \tilde{G}(\xi, x) = 0, \quad N_\xi G(\xi, x) = 0, \quad \text{когда } \xi \in V - FV - x;$$

$$G(\xi, x) = 0, \quad \tilde{G}(\xi, x) = 0, \quad \text{когда } \xi \in FV, x \in V - FV,$$

или

$$P_\xi \tilde{G}(\xi, x) = 0, \quad Q_\xi G(\xi, x) = 0, \quad \text{когда } \xi \in FV, x \in V -$$

Первое граничное условие ставится для задач Дирихле, второе - для задач Неймана. Если функции $G(\xi, x)$ и $\tilde{G}(\xi, x)$ имеют производные первого порядка по координатам точки ξ , непрерывные в области $V - x$, то зафиксировав две точки $x = x'$ и $x = x''$ ($x' \neq x''$), можно применить формулу Грина к функциям $G(\xi, x')$ и $G(\xi, x'')$ в области $V - V_1(x', p) - V_1(x'', p)$, где $V_1(x', p)$ и $V_1(x'', p)$ - эллипсоидальные окрестности точек x' и x'' . Имеем

$$\iint_{FV_1(x',p)+FV_1(x'',p)} [G(\xi, x')P_\xi \tilde{G}(\xi, x'') - \tilde{G}(\xi, x'')Q_\xi G(\xi, x')] dS_\xi = 0.$$

Перейдем к пределу при $p \rightarrow 0$. При этом справедливы формулы:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \iint_{FV_1(x',p)} [G(\xi, x')P_\xi \tilde{G}(\xi, x'') - \tilde{G}(\xi, x'')Q_\xi G(\xi, x')] dS_\xi = -\tilde{G}(x', x''),$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \iint_{FV_1(x'',p)} [G(\xi, x')P_\xi \tilde{G}(\xi, x'') - \tilde{G}(\xi, x'')Q_\xi G(\xi, x')] dS_\xi = \tilde{G}(x'', x')$$

Можно получить формулу $\tilde{G}(x', x'') = G(x'', x')$ связывающую функции Грина для сопряженных граничных задач.

Если дифференциальное выражение μ самосопряженное, то $\tilde{G}(\xi, x) = G(\xi, x)$ и $G(x', x'') = G(x'', x')$.

Если для самосопряженной граничной задачи, поставленной в области, существует функция Грина $G(\xi, x)$, непрерывная в области вместе со своими первыми производными, то эта функция будет симметричной относительно ξ и x .

1.18. Условия разрешимости граничных задач

Пусть u - решение задачи Дирихле: $\mu u = f$, если $x \in V - FV$; $u = \psi$, когда $x \in FV$, непрерывное в области V вместе со своими первыми производными, v - какое-либо решение однородной сопряженной задачи: $Nv = 0$, если $x \in V - FV$; $v = 0$, когда $x \in FV$, с тем же условием.

При этом функции f и ψ будут непрерывными. Применим формулу Грина. Можно получить

$$\iiint_V f v dV + \iint_{FV} v \psi \frac{dv}{dv} = 0.$$

Аналогично и для задачи Неймана: $\mu u = f$, если $x \in V - FV$; $Pu = \psi$, когда $x \in FV$, получим

$$\iiint_V f \nu dV + \iint_{FV} \nu \psi dS = 0,$$

где ν - решение однородной сопряженной задачи: $N\nu = 0$, если $x \in V - FV$; $P\nu = 0$, когда $x \in FV$, непрерывное в области V вместе со своими первыми производными.

Рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$\mu u = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^3 e_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = f,$$

коэффициенты a_{ij}, e_i, c ($i, j = 1, 2, 3$) и f определены в замкнутой области V , и первые производные коэффициентов a_{ij} и e_i и коэффициент c непрерывны и удовлетворяют условию Гёльдера в области V , а f - непрерывен в области V и также удовлетворяет условию Гёльдера в области $V - FV$.

При этих условиях и условии $c \leq 0$ задача Дирихле

$$\mu u = f, \text{ когда } x \in V - FV; \quad u = \psi, \text{ когда } x \in FV,$$

имеет единственное решение, если функция ψ непрерывна на границе FV .

Задача Дирихле и сопряженная ей задача будут:

$$\mu u = \tilde{f}, \text{ когда } x \in V - FV; \quad u = \tilde{\psi}, \text{ когда } x \in FV,$$

где функции \tilde{f} и $\tilde{\psi}$ обладают свойствами, что и f и ψ соответственно, имеют единственное решение.

Если $c > 0$, то имеет место альтернатива:

либо однородные взаимно сопряженные задачи $\mu u = 0$, когда $x \in V - FV$; $u = 0$, когда $x \in FV$, $N\nu = 0$, когда $x \in V - FV$; $\nu = 0$, когда $x \in FV$, задачи не имеют решений, отличных от тождественного нуля, и тогда задача Дирихле имеет единственное решение, либо эти задачи имеют по

одинаковому числу m линейно - независимых решений u_1, u_2, \dots, u_m и $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$, и тогда задача Дирихле разрешима при выполнении соответствующих интегральных соотношений

для каждого из решений u_1, u_2, \dots, u_m . Если последнее условие выполнено, то задача Дирихле имеет бесчисленное множество решений, и если u - одно из них, то все остальные определены в виде $u + \sum_{\alpha=1}^m c_{\alpha} u_{\alpha}$, где c_{α} - постоянные. Решение u задачи Дирихле, ортогональное ко всем решениям u_1, u_2, \dots, u_m однородной задачи и единственно.

1.19. Понятие гармонической функции

Функция называется гармонической в области V , если эта функция имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно во всех внутренних точках области V и является решением в этой области уравнения Лапласа $\Delta u(x, y, z) = 0$. Аналогичное понятие гармонической функции $u(x, y)$ вводится для плоской области D . Примером такой функции в пространстве будет функция $u(x, y, z) = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

В самом деле, функция $1/\rho$ не зависит от сферических координат. Оператор Лапласа и уравнение Лапласа в сферической системе координат для этой функции имеют вид

$$\Delta u(\rho) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \Delta u(\rho) = \frac{2}{\rho^3} - \frac{2}{\rho^3} = 0. \quad \text{Так как}$$

$$-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{2}{\rho^3}. \quad \text{Следовательно, функция } 1/\rho \text{ является}$$

гармонической функцией во всем пространстве, кроме начала координат. Точно также функция $u(x, y) = \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ является гармонической функцией на всей плоскости, кроме

точки $\rho=0$. Функции $\frac{1}{\rho}$ и $\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)$ называются фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости.

1.20. Задачи Дирихле для круга и шара (методом Фурье)

А. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье.

В полярной системе координат задача формулируется так: найти функцию $u(r, \varphi)$, удовлетворяющую при $r < R$ дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{и} \quad \text{условию} \quad u(r, \varphi)|_{r=R} = u^*(\varphi).$$

Найдем частные решения уравнения в виде $u(r, \varphi) = X(r)Y(\varphi)$, где $X(r)$, $Y(\varphi)$ - ненулевые функции, с условиями: $X(0)$ ограничено, и $Y(\varphi + 2\pi) = Y(\varphi)$.

Дифференцируя функцию $u(r, \varphi) = X(r)Y(\varphi)$, по r и φ подставляя результаты дифференцирования в наше уравнение, получим

$$X''(r)Y(\varphi) + \frac{1}{r} X'(r)Y(\varphi) - \frac{1}{r^2} X(r)Y(\varphi) = 0,$$

$$\frac{r^2 X''(r) + rX'(r)}{X(r)} = \frac{Y''(\varphi)}{Y(\varphi)} = \lambda.$$

Отсюда следует, что

$$r^2 X''(r) + rX'(r) - \lambda X(r) = 0, \quad Y''(\varphi) + \lambda Y(\varphi) = 0.$$

Уравнение для $Y(\varphi)$ имеет решения, удовлетворяющие условию $Y(\varphi+2\pi)=Y(\varphi)$ только при $\lambda=n^2$, и эти решения имеют вид $Y_n(\varphi)=A_n \cos(n\varphi)+B_n \sin(n\varphi)$, $n=0,1,\dots$ Уравнение

$$r^2 X''(r) + rX'(r) - n^2 X(r) = 0$$

имеет два линейно независимых решения r^n и r^{-n} . Второе решение r^{-n} не ограничено в точке $r=0$. Поэтому полагаем $X_n(r)=r^n$, $n=0,1,\dots$ Получено бесконечно много частных решений уравнения: $u_n(r,\varphi)=r^n(A_n \cos(n\varphi)+B_n \sin(n\varphi))$, $n=0,1,\dots$

Решение $u_0(r,\varphi)=A_0/2$.

Решение поставленной задачи будем искать в виде ряда

$$u(r,\varphi) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)),$$

коэффициенты которого A_0, A_n, B_n такие, что функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет граничному условию. Имеем

$$u^*(\varphi) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)),$$

Отсюда следует, что $A_0, R^n, R^n A_n, R^n B_n$ являются коэффициентами Фурье для функции $u^*(\varphi)$ на отрезке $[0,2\pi]$. Поэтому

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u^*(\theta) d\theta, \quad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} u^*(\theta) \cos(n\theta) d\theta,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} u^*(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

Подставляя значения A_0, A_n, B_n в решение, получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^*(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \left\{ \int_0^{2\pi} u^*(\theta) \cos(n\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} u^*(\theta) \sin(n\theta) d\theta \right\}.$$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^*(\theta) d\theta + \frac{2}{\pi} \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \int_0^{2\pi} u^*(\theta) \cos(n(\theta - \varphi)) d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^*(\theta) \left\{ 1 + 2 \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \cos n(\theta - \varphi) \right\} d\theta.$$

Обозначим $\theta - \varphi = \omega$ и найдем сумму ряда, стоящего в квадратных скобках формулы

Имеем

$$1 + 2 \sum_{n=1}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\omega = -1 + 2 \sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\omega =$$

$$-1 + 2 \sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(in\omega) + 2 \sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(-in\omega).$$

Здесь $\sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(in\omega), \sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(-in\omega)$ - геометрические

прогрессии со знаменателями $q_1 = \frac{r}{R} \exp(i\omega)$ и $q_2 = \frac{r}{R} \exp(-i\omega)$. Так как решение ищется в круге $r < R$, то $|q_1| =$

$|q_2| = \frac{r}{R} < 1$, ряды $\sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(in\omega), \sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(-in\omega)$

сходятся. Суммируя эти ряды получим

$$-1 + 2 \sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(in\omega) + 2 \sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(-in\omega) =$$

$-1+1/(1-(r/R)\exp(i\omega))+1/(1-(r/R)\exp(-i\omega))=(R^2-r^2)/(R^2+r^2-2Rr\cos\omega)$, где $\omega=\theta-\varphi$.

Таким образом, решение нашей задачи имеет вид

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u^*(\theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \omega)} d\theta.$$

Получили другим способом решение задачи Дирихле для круга в виде интеграла Пуассона.

Б. Решение задачи Дирихле в шаре для уравнения Лапласа (метод Фурье)

Пусть требуется найти функцию $u(x,y,z)$, гармоничную в шаре $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ и принимающую заданные значения в точках сферы

В сферической системе координат задача заключается в следующем. Требуется найти функцию $u(\rho,\theta,\varphi)$, удовлетворяющую при $\rho < R$ уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

и граничному условию $u(\rho,\theta,\varphi)|_{\rho=R} = u^*(\theta,\varphi)$.

Метод Фурье решения этой задачи заключается в следующем: сначала ищутся частные решения основного уравнения в виде $u(\rho,\theta,\varphi) = X(\rho)Y(\theta,\varphi)$, где функция $X(\rho)$ ограничена в точке $\rho=0$, функция $Y(\theta,\varphi)$ ограничена по переменной θ и периодична по переменной φ с периодом 2π .

Функции $Y(\theta,\varphi)$ являются собственными функциями, отвечающими собственным значениям $\lambda=n(n+1)$ этими функциями являются сферические функции

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_{nm} \cos(m\varphi) + B_{nm} \sin(m\varphi)) P_n^{(m)}(\cos\theta), \quad n=0,1,\dots$$

Функции $X(\rho)$ являются решениями уравнения

$$\rho^2 X''(\rho) + 2\rho X'(\rho) - n(n+1)X(\rho) = 0$$

ограниченными в точке $\rho=0$. Частные решения этого уравнения будем искать в виде $X(\rho)=\rho^k$. Для определения k получаем уравнение $k^2+k-n(n+1)=0$, которое имеет решения $k_1=n$ и $k_2=-n-1$. Следовательно, это уравнение имеет два линейно независимых решения ρ^n и $1/\rho^{n+1}$. Второе решение не ограничено при $\rho \rightarrow 0$, но ограничено при $\rho > R$, поэтому оно используется для решения внешней задачи Дирихле для шара. Для решения внутренней задачи Дирихле выбираем $X(\rho)=\rho^n$. Таким образом, мы получили бесконечно много частных решений уравнения

$$u_n(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^n (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) P_n^{(m)}(\cos\theta), n=0,1,\dots$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде ряда

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \rho^n (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

Коэффициенты этого ряда определяются так, чтобы выполнялось граничное условие. Полагая в решении $\rho=R$, получим

$$u^*(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} R^n (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

Отсюда следует, что

$$A_{mn} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2 R^n} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u^*(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos(\theta)) \cos m\varphi \sin\theta d\theta,$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2 R^n} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u^*(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos(\theta)) \sin m\varphi \sin\theta d\theta.$$

Рассмотрим случай, когда решение задачи Дирихле для шара не зависит от φ , то есть решение имеет осевую симметрию. В этом случае функция $u(\rho, \theta)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

и удовлетворяет граничному условию $u(\rho, \theta)|_{\rho=R} = u^*(\theta)$.

Частные решения нашего уравнения будут вида $u(\rho, \theta) = X(\rho)Y(\theta)$, ограниченные при $\rho=0$, $\theta=0$, $\theta=\pi$, находятся из уравнений:

$$\begin{aligned} \rho^2 X''(\rho) + 2\rho X'(\rho) - \lambda X(\rho) &= 0 \\ Y''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta Y'(\theta) + \lambda Y(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение с помощью замены переменной $\cos \theta = t$ приводится к уравнению Лежандра

$$(1-t^2) \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - 2t \frac{\partial Y}{\partial t} + \lambda Y = 0$$

Поэтому уравнение имеет решения, ограниченные в точках $\theta=0$, $\theta=\pi$ только при $\lambda=n(n+1)$, и этими решениями являются функции $Y_n(\theta) = P_n(\cos \theta)$, где $P_n(t)$ - многочлен Лежандра n -ого порядка. Второе уравнение при $\lambda=n(n+1)$ имеет решение $X_n(\rho) = \rho^n$, ограниченное в точке $\rho=0$. Следовательно, частные решения уравнения, ограниченные при $\rho=0$, $\theta=0$, $\theta=\pi$ имеют вид $u_n(\rho, \theta) = \rho^n P_n(\cos \theta)$, $n=1, 2, \dots$

Решение задачи Дирихле в этом случае находится в виде ряда $u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^n P_n(\cos \theta)$.

Коэффициенты этого ряда находятся так, чтобы выполнялось граничное условие. Полагая в равенстве $\rho = R$, получим

$$u^*(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta).$$

Отсюда следует, что

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{2\pi} u^*(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta.$$

1.21. Задача Дирихле одномерного и двумерного случаев

А. Найти стационарное распределение температуры $U(x)$ в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня имеем

$$u|_{x=0} = \varphi_0, u|_{x=l} = \varphi_1.$$

Решим уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $u(x) = C_1 x + C_2$ - общее решение. C_1, C_2 определим из краевых условий: $\varphi_0 = C_1 \cdot 0 + C_2$, $\varphi_1 = C_1 l + C_2 \rightarrow C_2 = \varphi_0, C_1 = (\varphi_1 - \varphi_0)/l$.

Решение $u(x) = (\varphi_1 - \varphi_0)x/l + \varphi_0$ - стационарное распределение температуры в данном стержне носит линейный характер.

Б. Будем решать задачу Дирихле для уравнения Лапласа, преобразованного заменой $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ в уравнение Лапласа в полярных координатах (r, φ) точки (x, y)

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Пусть дан круг радиуса R с центром в полюсе 0 полярной системы координат, на окружности которого задана непрерывная периодическая функция $f(\varphi)$ полярного угла $\varphi \in [0, 2\pi]$. Будем искать функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в круге и удовлетворяющую на его окружности граничному уравне-

нию $u(\rho, \varphi)|_{\rho=R} = \Phi(\varphi)R(r)$. Искомая функция должна удовлетворять в круге уравнению Лапласа.

Согласно методу Фурье частное решение нашего уравнения ищется в виде произведения $u(r, \varphi) = \Phi(\varphi)R(r)$. Подставим это выражение в наше уравнение, получим

$$r^2 R''(r)\Phi(\varphi) + rR'(r)\Phi(\varphi) + R(r)\Phi''(\varphi) = 0,$$

$$(r^2 R''(r) + rR'(r))\Phi(\varphi) = -R(r)\Phi''(\varphi).$$

Разделяем переменные

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Так как левая часть этого равенства не зависит от r , а правая от φ , то обе они не зависят ни от r , ни от φ , то есть равны постоянному числу. Тождество возможно лишь в том случае, когда общая величина отношения будет постоянной. Обозначим эту через λ . Приравнявая каждую часть полученного равенства к постоянной λ , получаем обыкновенные дифференциальные линейные однородные уравнения

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \quad \Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0.$$

Параметр $\lambda = \text{const}$. Отсюда, если $\lambda = 0$, то уравнения принимают вид

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = 0, \quad \Phi''(\varphi) = 0.$$

Их решения: $\Phi(\varphi) = A_0 + B_0 \varphi$; $R(r) = C_0 + D_0 \ln r$,
 $A_0, B_0, C_0, D_0 = \text{const}$.

Если же $\lambda > 0$, то решение уравнения будет вида $\Phi(\varphi) = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi$. Решение уравнения Эйлера будем искать в виде $R(r) = r^m$. Подставляя его в соответствующее уравнение, получим $r^2 m(m-1)r^{m-1} + r m r^{m-1} - k^2 r^m = 0$, или $(m^2 - k)r^m = 0$, т. е. $m_{1,2} = \pm k$.

Итак, имеется два линейно независимых частных решения $R_1=r^k$ и $R_2=r^{-k}$; их линейная комбинация с константами даст общее решение уравнения: $R(r)=C r^k + D r^{-k}$, $C, D=\text{const}$.

Подставим общие решения $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$ в соответствующие формулы.

Получим функции $u_0(r, \varphi)=(A_0+B_0\varphi)(C_0+D_0 \ln r)$ при $k=0$, функции $u_k(r, \varphi)=(A_0+B_0\varphi)(C_0+D_0 \ln r)$, которые будут частными решениями уравнения. Получено множество частных решений уравнения Лапласа: $u_0(r, \varphi)=a_0/2$, $u_k(r, \varphi)=(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)r^k$, $k=1, 2, 3, \dots$, непрерывных в круге.

Решение задачи Дирихле можно искать в виде функции

$$u(r, \varphi) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)).$$

Подберем произвольные постоянные a_0, a_n, b_n так, чтобы выполнялись граничные условия.

При $r=R$ имеем $u(\rho, \varphi)|_{\rho=R} = f(\varphi)$, то есть

$$f(\varphi) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)).$$

Для выполнения равенства нужно, чтобы функция $f(\varphi)$ разлагалась в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$ и чтобы $a_n R^n$ и $b_n R^n$ были ее коэффициентами Фурье, то есть вычислялись по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Таким образом, получим формулу решения задачи Дирихле

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{2}{\pi} \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(\alpha(t - \varphi)) dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ 1 + 2 \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} \cos \alpha(t - \varphi) \right\} dt.$$

Используя формулу Эйлера $\cos(\alpha t) = (\exp(i\alpha t) + \exp(-i\alpha t))/2$

и формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках:

$$1 + 2 \sum_{n=1}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos nt = -1 + 2 \sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(int) + 2 \sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(-int).$$

Суммируя эти ряды получим

$$-1 + 2 \sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(int) + 2 \sum_{n=0}^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(-int) =$$

$$-1 + 1/(1 - (r/R)\exp(it)) + 1/(1 - (r/R)\exp(-it)) = (R^2 - r^2)/(R^2 + r^2 - 2Rr \cos t).$$

Таким образом, решение нашей задачи имеет вид

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(t)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(t - \varphi)} dt,$$

где интеграл, стоящий в правой части, называется интегралом Пуассона.

Вывод: Решение задачи Дирихле для круга находят в виде ряда, где коэффициенты вычисляются по формулам, либо через интеграл Пуассона находится решение данной задачи.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2.1. Типы уравнений второго порядка

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Коэффициенты a_{ij} - заданные функции в области D пространства (x_1, \dots, x_n) , причем $a_{ij} = a_{ji}$. Функции и независимые переменные будут вещественны.

Возьмем определенную точку (x_1^0, \dots, x_n^0) в области D и рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) t_i t_j.$$

Уравнение будет эллиптическим в точке (x_1^0, \dots, x_n^0) , если в этой точке квадратичная форма положительно или отрицательно определенная.

Уравнение будет гиперболическим в точке (x_1^0, \dots, x_n^0) , если в этой точке квадратичная форма при преобразовании ее к сумме квадратов содержит все коэффициенты (кроме одного) одного знака, а оставшийся коэффициент имеет противоположный знак.

Уравнение называется ультрагиперболическим в точке (x_1^0, \dots, x_n^0) , если в этой точке квадратичная форма при ее преобразовании к сумме квадратов будет содержать больше одного положительного коэффициента или больше одного отрицательного и все коэффициенты не равны нулю.

Уравнение относится к параболическому типу в точке (x_1^0, \dots, x_n^0) , если в этой точке квадратичная форма при ее преобразовании к сумме квадратов будет иметь один коэффициент равный нулю, остальные коэффициенты имеют одинаковый знак.

Уравнение относится к эллиптическому типу, гиперболическому типу и т. д. в области D , если во всех точках области оно будет эллиптическим, гиперболическим и т. д.

Пусть a_{ij} постоянны, то к какому типу принадлежит уравнения, не зависит от значений независимых переменных. Уравнение Лапласа будет эллиптическим. Уравнением гиперболическим - волновое уравнение и уравнением теплопроводности - параболического типа.

2.2. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть имеется уравнение с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, \dots, x_n).$$

Введем вместо (x_1, \dots, x_n) новые независимые переменные (ξ_1, \dots, ξ_n) по формуле $\xi_k = \sum_{i=1}^n c_{ki} x_i$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Предполагается, что преобразование неособенное, т. е. определитель $|c_{ki}|$ отличен от нуля. Тогда можно вычислить производные от старых переменных через новые переменные:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n c_{ki} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n c_{ki} c_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l}.$$

В новых координатах уравнение примет вид

$$\sum_{k,l=1}^n a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + cu = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n),$$

где $a_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} c_{ki} c_{lj}$.

Формулы преобразования коэффициентов для вторых производных от функции u при замене независимых переменных совпадают с формулами преобразования коэффициентов квадратичной формы $\sum_{k,j=1}^n a_{ij} t_i t_j$, если в нее ввести линейное

преобразование $t_i = \sum_{k=1}^n c_{ki} \tau_k$, ($i = 1, 2, \dots, n$), приводящее к ви-

ду $\sum_{k,l=1}^n a_{kl} \tau_k \tau_l$. В линейной алгебре получено, что можно по-

добрать коэффициенты c_{ik} так, чтобы квадратичная форма будет:

$\sum_{k=1}^n \lambda_k \tau_k^2$, или $a_{kl} = 0$ при $k \neq l$ и $a_{kk} = \lambda_k$. При этом коэффициенты λ_k равны ± 1 или нулю. Знак у λ_k определяет тип уравнения. Уравнение в новых координатах имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + cu = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Полученное уравнения называется каноническим.

Пусть все λ_k отличны от нуля (уравнение не параболическое). В этом случае можно путем преобразований освободиться от производных первого порядка, для этого вместо u введем функцию v :

$$u = ve^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda_k} \xi_k}.$$

Подставим это в основное уравнение, получим уравнение вида

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} + c_1 v = f_2(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Уравнения эллиптического типа имеют все $\lambda_k = 1$ или $\lambda_k = -1$ (можем считать, что все $\lambda_k = 1$). Всякое линейное уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами всегда можно привести к виду

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_1 u = f(x_1, \dots, x_n).$$

Для гиперболических уравнений имеем $(n + 1)$ независимых переменных, и пусть $\xi_{n+1} = t$. Тогда линейное гиперболическое уравнение с постоянными коэффициентами будет:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_2 u = f_3(x_1, \dots, x_n, t).$$

Для уравнения с переменными коэффициентами для каждой точки (x^0_1, \dots, x^0_n) области D можно ввести преобразование независимых переменных, приводящее наше уравнение к каноническому виду в этой точке.

Для каждой точки (x^0_1, \dots, x^0_n) имеется преобразование независимых переменных, приводящее уравнение к каноническому виду; а для других точек преобразование может не иметь канонический вид.

2.3. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

Пусть имеем квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

где коэффициенты A, B, C функции от x и y имеют непрерывные производные до второго порядка включительно. Предполагается, что A, B, C не будут одновременно нулями. Тогда уравнению соответствует квадратичная форма

$$At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2.$$

Дифференциальное уравнение будет:

1) гиперболическим, если $B^2 - AC > 0$ (квадратичная форма знакопеременная);

2) параболическим, если $B^2 - AC = 0$ (квадратичная форма знакопостоянная);

3) эллиптическим, если $B^2 - AC < 0$ (квадратичная форма знакоопределенная).

Вместо (x, y) рассмотрим новые независимые переменные (ξ, η) . Пусть $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции и якобиан

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \frac{\left| \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y} \right|}{\left| \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|} \neq 0$$

в области D .

В новых переменных ξ и η наше уравнение имеет вид

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0,$$

где

$$A(\xi, \eta) = A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \quad C(\xi, \eta) = A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2;$$

$$B(\xi, \eta) = A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что

$$B^2 - AC = (B^2 - AC) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2.$$

Преобразование независимых переменных не меняет типа уравнения. Покажем, что две функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось одно из условий:

1) $A=0, C=0$; 2) $A=0, B=0$; 3) $A=C, B=0$.

Тогда преобразованное основное уравнение примет наиболее простой вид.

1. В области D уравнение будет гиперболическим, если $B^2 - AC > 0$.

В точке (x_0, y_0) и ее окрестности можно будет привести уравнение к каноническому виду (для $A \neq 0$, или $C \neq 0$).

Рассмотрим уравнение

$$A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

Пусть $A \neq 0$. Так как $B^2 - AC > 0$, то уравнение будет вида

$$\left[A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \left[A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0.$$

Одно уравнение распадается на два:

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, ; A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Для интегрирования уравнений составим для них системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}}$$

или

$$A dy - (B + \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0, \quad A dy - (B - \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0.$$

Это уравнение можно записать в виде уравнения

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0.$$

Коэффициенты этих уравнений имеют непрерывные частные производные до второго порядка. Так как $A(x_0, y_0) \neq 0$, то существуют интегралы $\varphi_1(x, y) = const$, $\varphi_2(x, y) = const$ уравнений и левые части имеют непрерывные частные производные до второго порядка в окрестности точки (x_0, y_0) . Левые части интегралов будут решениями уравнений.

Кривые (решения) называются характеристиками, а уравнение — уравнением характеристик.

Для гиперболических уравнений ($B^2 - AC > 0$) интегралы вещественны и различны. В этом случае имеем два различных семейства вещественных характеристик. Пусть в преобразовании $\xi = \xi(x, y) = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \eta(x, y) = \varphi_2(x, y)$, где $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ - соответственно дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнений. Решения можно выбирать так, чтобы якобиан $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} \neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) области D .

Функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ удовлетворяют уравнениям $A = C = 0$. Коэффициент $B \neq 0$ в рассматриваемой области. Приведем наше уравнение к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_1 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Оно также будет каноническим.

Если основное уравнение линейное относительно производных первого порядка и самой функции, то преобразованное уравнение также линейное:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) u = f(\xi, \eta).$$

Пусть $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, тогда можно привести наше уравнение к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right).$$

Это канонический вид гиперболического уравнения.

2. $B^2 - AC = 0$. В области D уравнение будет параболическим. Коэффициенты A, B, C уравнения не равны нулю (одновременно) и из условия $B^2 - AC = 0$ следует, что в каждой точке области один из коэффициентов A и C не равен нулю. Пусть $A \neq 0$ в точке (x_0, y_0) , в окрестности которой приводится наше уравнение к каноническому виду. Тогда оба уравнения для φ совпадают и удовлетворяют уравнению

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Решение уравнения, в силу условия $B^2 - AC = 0$, удовлетворяет также уравнению

$$B \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Можно найти решение для $\varphi(x, y)$ такое, чтобы функция $\varphi(x, y)$ имела непрерывные частные производные

второго порядка и первые производные, не равные нулю одновременно в окрестности точки (x_0, y_0) . Для уравнения параболического типа имеется одно семейство вещественных характеристик $\varphi(x, y) = const$, а за $\eta(x, y)$ можно брать любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию такую, чтобы якобиан $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ в окрестности точки (x_0, y_0) . Тогда

в уравнении $A \equiv 0$, а коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial \xi \partial \eta}$ имеет вид

$$B = \left(A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(B \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Если $B \equiv 0$ в окрестности точки (x_0, y_0) , то коэффициент C в уравнении преобразуется к виду

$$C = \frac{1}{A} \left(A \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \text{ т.е. } C \neq 0, \text{ так как в противном}$$

случае якобиан $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = 0$. Поделим на $C \neq 0$ уравнение и приведем его к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Это - канонический вид уравнения параболического типа.

3. $B^2 - AC < 0$. В области D уравнение будет эллиптическим. Коэффициенты A, B, C - это аналитические функции от x и y . Уравнение относительно φ имеет аналитическое решение $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) и

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| \neq 0.$$

Пусть имеем преобразование $\xi = \varphi_1(x, y), \eta = \varphi_2(x, y)$.

При этом $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} \neq 0$, $A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$

или

$$A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Следует, что $A = C$, $B = 0$.

По определенности квадратичной формы имеем $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2 (B^2 - AC < 0)$, коэффициенты $A = C$ могут обратиться в нуль в случае, если

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Решение $\varphi(x, y)$ выбирается так, чтобы равенства не выполнялись одновременно. В нашем уравнении $A = C \neq 0$ и после деления на A оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Это каноническое уравнение эллиптического типа.

Замечание. В различных частях области D уравнение может быть различного типа. Точки параболичности уравнения характеризуются $B^2 - AC = 0$.

Пусть множество точек области D будет простым с гладкой кривой σ . Кривая σ будет называться линией параболического вырождения. Если кривая σ делит область D на две части, в одной из которых наше уравнение является эллиптическим, а в другой — гиперболическим, то в области D будет смешанного типа.

1. Уравнение Трикоми $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ - уравнение смешанного типа в любой области D в точках оси Ox . При $y > 0$

оно будет эллиптическим, при $y < 0$ - гиперболическим, при $y = 0$ - линия параболичности.

2. Уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ - уравнение смешанного

типа в области D , содержащей точки оси Ox ; $y = 0$ - линия параболичности, которая будет характеристикой ($y = 0$ - огибающая семейства характеристик).

3. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

3.1. Задача Коши

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y).$$

Это линейное гиперболическое уравнение с двумя независимыми переменными ($a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и $f(x, y)$ - непрерывные функции). Уравнение характеристик для этого уравнения:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Уравнения имеют соответственно решения y и x . Следовательно, $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ - это характеристики уравнения.

Пусть в плоскости xOy задана дуга кривой l , которая пересекается не более чем в одной точке с прямыми, параллельными осям координат. Уравнение этой дуги может быть записано в виде $y = g(x)$ или $x = h(y)$. При этом существуют производные $g'(x)$ и $h'(y)$, отличные от нуля. Пусть

вдоль дуги кривой l определены значения u и $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$u|_{y=g(x)} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=g(x)} = \varphi_1(x).$$

На кривой $y=g(x)$ можно найти значения производной $\frac{\partial u}{\partial x}$. Дифференцируя по x первое из условий, получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=g(x)} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=g(x)} \cdot g'(x) = \varphi_0'(x),$$

или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=g(x)} = \varphi_0'(x) - \varphi_1(x)g'(x) = \omega(x).$$

Задача Коши: найти решение уравнения в некоторой окрестности кривой l , удовлетворяющее условиям Коши.

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Рассмотрим функции
Тогда наше уравнение равносильно системе трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = f(x, y) - av - bw - cu, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = f(x, y) - av - bw - cu, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = w. \end{cases}$$

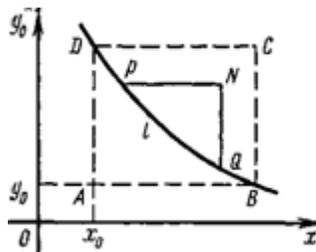


Рис. 3.1

В прямоугольнике $ABCD$ (рис. 3.1) возьмем произвольную точку N ($x > y$) и проведем через нее характеристики NP и NQ до пересечения с кривой l . Интегрируя первое и третье уравнения системы по прямой QN , а второе - по PN , получим:

$$\left. \begin{aligned} v(x, y) &= w(x) + \int_{g(x)}^y [f(x, y) - av - bw - cu] dy; \\ w(x, y) &= \varphi_1(x) + \int_{h(x)}^y [f(x, y) - av - bw - cu] dx; \\ u(x, y) &= \varphi_0(x) + \int_{g(x)}^y w(x, y) dy. \end{aligned} \right\}$$

Если $u(x, y)$ есть решение нашего уравнения, удовлетворяющее условиям Коши, то функции v , w и u удовлетворяют системе интегральных уравнений. Решение системы определяется методом последовательных приближений. Нулевым приближением будет $v_0 = w(x)$, $w_0 = \varphi_1(x)$, $u_0 = \varphi_0(x)$.

3.2. Задача Гурса

Необходимо найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y),$$

имеющего заданные значения на характеристиках $x = x_0$ и

$$y = y_0:$$

$$u|_{x=x_0} = \varphi_1(y), y_0 \leq y \leq b;$$

$$u|_{y=y_0} = \varphi_2(x), x_0 \leq x \leq a.$$

Пусть $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ имеют непрерывные производные первого порядка и $\varphi_1(y_0) = \varphi_2(x_0)$.

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Введем, как и в задаче Коши,

Основное уравнение равносильно системе трех уравнений в частных производных и их интегралов:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) - a(x, y)v - b(x, y)w - c(x, y)u;$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f(x, y) - a(x, y)v - b(x, y)w - c(x, y)u;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = w.$$

$$\left. \begin{aligned} v(x, y) &= \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^y [f(x, y) - av - bw - cu] dy; \\ w(x, y) &= \varphi_1'(y) + \int_{x_0}^x [f(x, y) - av - bw - cu] dx; \\ u(x, y) &= \varphi_2(x) + \int_{y_0}^y w dy. \end{aligned} \right\}$$

Для задачи Гурса существование и единственность решения системы доказывается методом последовательных приближений.

3.3. Метод Римана

Получим интегральную формулу, определяющую в явном виде решение задачи Коши. В этой задаче существование решения при этом предполагается.

Рассмотрим

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u.$$

Здесь коэффициенты a и b непрерывно дифференцируемы. Сопряженное ему дифференциальное выражение имеет вид

$$L^*(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv.$$

Уравнение $L^*(v) = g$ будем называть сопряженным с уравнением $L(u) = f$. Запишем тождество

$$vL(u) - uL^*(v) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} + 2buv \right).$$

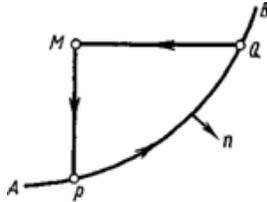


Рис. 3.2

Пусть Q область, ограничена дугой PQ кривой AB и двумя прямыми, параллельными осям и выходящими из точек $M(x_0, y_0)$ (рис. 3.2). Запишем формулу Остроградского:

$$\iint_{\Omega} [vL(u) - uL^*(v)] dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} - 2buv \right) dx + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) dy,$$

где контур Γ имеет три части: характеристики QM и MP и дуга PQ .

Рассмотрим интегралы, взятые вдоль кривых QM и MP . Вдоль характеристики QM меняется y , и при интегрировании по QM имеем $\frac{1}{2} \int_{QM} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) dy$.

Интегрируя первое слагаемое по частям, получим

$$\frac{1}{2} \int_{QM} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) dy = \frac{1}{2} (uv) \Big|_Q^M - \int_{QM} u \left(\frac{\partial v}{\partial y} - av \right) dy$$

и вычислим

$$\frac{1}{2} \int_{MP} (u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} - 2buv) dx = -\frac{1}{2} (uv)|_M^P + \int_{PM} u(\frac{\partial v}{\partial x} - bv) dx.$$

Используя это, получим

$$\begin{aligned} (uv)_M &= \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} - \frac{1}{2} \int_{PQ} (u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} - 2buv) dx + \\ &+ (v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv) dy + \int_{QM} u(\frac{\partial v}{\partial y} - av) dy + \int_{PM} u(\frac{\partial v}{\partial x} - bv) dx + \\ &+ \iint_{\Omega} [vL(u) - uL^*(v)] dx dy. \end{aligned}$$

Пусть u решение задачи Коши основного уравнения. Обозначим за v решение однородного сопряженного уравнения $L^*(v) = 0$ с условиями:

$$v|_{x=x_0} = e^{\int_{y_0}^y a(x_0, y) dy}, \quad v|_{y=y_0} = e^{\int_{x_0}^x b(x, y_0) dx}.$$

Решение зависит от выбора точки (x_0, y_0) , т. е. оно будет функцией пары точек. Примем обозначение $v = v(x, y; x_0, y_0)$. Имеем

$$\frac{\partial v(x_0, y; x_0, y_0)}{\partial y} = a(x_0, y)v(x_0, y; x_0, y_0) \text{ на характеристике } MP;$$

$$\frac{\partial v(x, y_0; x_0, y_0)}{\partial x} = b(x, y_0)v(x, y_0; x_0, y_0) \text{ на характеристике } MQ;$$

$$v(x_0, y; x_0, y_0) = 1.$$

Решение $v = v(x, y; x_0, y_0)$ однородного сопряженного уравнения с заданными условиями называется *функцией Римана*. Эта функция будет не зависимой ни от данных Коши на l , ни от вида этой кривой. Для нее точка (x, y) - аргумент, а точка (x_0, y_0) — параметр.

Получим формулу Римана

$$u(x_0, y_0) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} - \frac{1}{2} \int_{PQ} (u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} - 2buv) dx + \\ + (v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv) dy + \iint_{\Omega} v f dx dy.$$

Формула Римана это решение исходного уравнения для произвольных начальных данных (на произвольной не характеристической кривой l) через функцию Римана $v(x, y; x_0, y_0)$. Из формулы Римана имеем, что если достаточно мало изменить данные Коши на кривой l , то и решение задачи изменится также малым образом. Решение u в точке M будет зависеть от начальных данных вдоль дуги PQ кривой l и вырезаемой из характеристик, выходящими из точки M . Если данные Коши на кривой l вне дуги PQ изменить, сохраняя непрерывность в точках P и Q , то решение будет меняться только вне криволинейного треугольника MPQ . Каждая характеристика будет отделять область, где решение осталось неизменным, от той области, где оно изменилось. Т. е. за всякую характеристическую линию решения уравнения будут продолжаться неоднозначно.

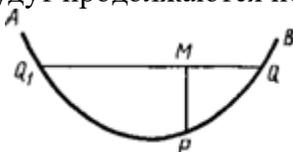


Рис. 3.3

Предположение, что прямые, параллельные осям, т. е. характеристики, пересекают линию l не более чем в одной точке, будет существенным.

Если не выполнено условие задачи Коши, то она неразрешима.

Пусть кривая l имеет вид, указанный на рис. 3.3. Методом Римана можно вычислить значение функции $u(x, y)$ в

точке M (пользуясь криволинейным треугольником PQM , или криволинейным треугольником Q_1PM). Полученные две формулы имеют, в точке M разные значения для u , т.е. задача Коши будет неразрешимой.

Примеры на приложение метода Римана

Пример 1. Найти решение уравнения

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{y=1} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = F(x).$$

С помощью замены переменных $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$ уравнение приведем к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

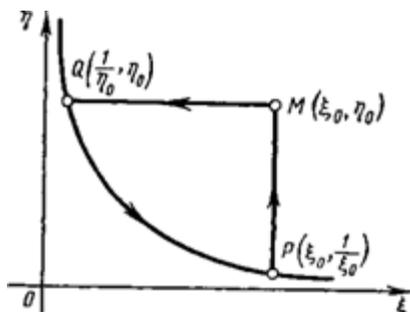


Рис. 3.4

Прямая $y = 1$ в новых переменных имеет вид равнобочной гиперболы $\xi\eta = 1$ (рис. 3.4).

При $x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}$, $y = \sqrt{\xi\eta}$ имеем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\xi\eta=1} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\xi\eta=1}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\xi\eta=1} = -\frac{\xi^2}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\xi}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\xi\eta=1}$$

и

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\xi\eta=1} = \frac{1}{2} f'(\xi) + \frac{1}{2\xi} F(\xi), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\xi\eta=1} = -\frac{\xi^2}{2} \cdot f'(\xi) + \frac{\xi}{2} F(\xi),$$

а также $u|_{\xi\eta=1} = f(\xi)$.

Если в формуле Римана $a = 0$, $b = -\frac{1}{2\xi}$, $f = 0$, тогда

$$u(\xi_0, \eta_0) = \frac{(uv)_P - (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int_{QP} \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{uv}{\xi} \right) d\xi - \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\eta.$$

Найдем функцию Римана $v(\xi, \eta; \xi_0; \eta_0)$. Эта функция удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

и условиям на характеристиках:

$$v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = e^{-\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{2\xi}} = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}} \quad (\text{на } MQ),$$

$$v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = e^{\int_0^{\eta} d\eta} = 1 \quad (\text{на } MP).$$

Функция $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}}$ это и есть искомая функ-

ция Римана. Далее

$$u(P) = f(\xi), \quad u(Q) = f\left(\frac{1}{\eta_0}\right), \quad v(P) = v\left(\xi_0, \frac{1}{\xi_0}; \xi_0, \eta_0\right) = 1, \quad v(Q) = v\left(\frac{1}{\eta_0}, \eta_0; \xi_0, \eta_0\right),$$

получим

$$u(\xi_0, \eta_0) = \frac{f(\xi_0)}{2} + \frac{\sqrt{\xi_0 \eta_0}}{2} f\left(\frac{1}{\eta_0}\right) + \frac{\sqrt{\xi_0}}{4} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \frac{f(\xi)}{\xi^{3/2}} d\xi - \frac{\sqrt{\xi_0}}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \frac{F(\xi)}{\xi^{3/2}} d\xi.$$

В старых переменных x и y решение задачи Коши:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} f(x, y) + \frac{y}{2} f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\sqrt{xy}}{4} \int_{xy}^{\frac{x}{y}} \frac{f(z) dz}{z^{3/2}} - \frac{\sqrt{xy}}{2} \int_{xy}^{\frac{x}{y}} \frac{F(z) dz}{z^{3/2}}.$$

Пример 2. Найти решение уравнения

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 (x > 0),$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = F(x).$$

Приведем уравнение к каноническому виду, для чего составим уравнение характеристик:

$$x dy^2 - dx^2 = 0.$$

Это уравнение имеет два различных интеграла:

$$\frac{y}{2} + \sqrt{x} = C_1, \quad \frac{y}{2} - \sqrt{x} = C_2.$$

Необходимо ввести новые переменные ξ и η по формулам

$$\xi = \frac{y}{2} + \sqrt{x}, \quad \eta = \frac{y}{2} - \sqrt{x} (x > 0). \quad \text{Присоединим к этим равенствам}$$

еще одну зависимость $w = u\sqrt{\xi - \eta}$, тогда наше уравнение преобразуется к следующему каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4} \frac{w}{(\xi - \eta)^2} = 0.$$

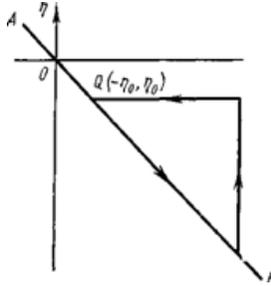


Рис. 3.5

За кривую АВ (рис. 3.5) в методе Римана берем биссектрису $\eta = -\xi$. Для решения поставленной задачи найдем

частное решение сопряженного уравнения $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4} \frac{v}{(\xi - \eta)^2} = 0$, которое удовлетворяло бы следующим условиям на характеристиках:

$$v(\xi_0, \eta; \xi_0, \eta_0) = 1 \text{ (на MP);}$$

$$v(\xi, \eta_0; \xi_0, \eta_0) = 1 \text{ (на MQ).}$$

Решение уравнения ищем в виде $v = G(\sigma)$, где

$$\sigma = \frac{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}{(\xi_0 - \eta_0)(\xi - \eta)}.$$

Для $G(\sigma)$ получим следующее уравнение:

$$\sigma(1 - \sigma)G''(\sigma) + (1 - 2\sigma)G'(\sigma) - \frac{1}{4}G(\sigma) = 0.$$

Это уравнение - частный случай гипергеометрического уравнения Гаусса

$$\sigma(1 - \sigma)y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)\sigma]y' - \alpha\beta y = 0 \quad \text{при}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1.$$

Уравнение Гаусса имеет частное решение в виде гипергеометрического ряда

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \sigma) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma} \sigma + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} \sigma^2 + \dots,$$

абсолютно сходящегося при $|\sigma| < 1$.

Т.е.

$$v = G(\sigma) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \sigma\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sigma^2 + \dots,$$

Следовательно, функция

$$v = G \frac{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}{(\xi_0 - \eta_0)(\xi - \eta)} \quad \text{будет искомой функцией Римана.}$$

Возьмем формулу, Римана и в ней пусть $a = b = 0$, $f = 0$.

Тогда

$$w(\xi_0, \eta_0) = \frac{w(P) + w(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_{Q^P} \left(v \frac{\partial w}{\partial \xi} - w \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\xi - \left(v \frac{\partial w}{\partial \eta} - w \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\eta,$$

и

$$w(\xi_0, \eta_0) = \frac{w(P) + w(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_{-\eta_0}^{\xi_0} v \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\xi - \frac{1}{2} \int_{-\eta_0}^{\xi_0} w \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\xi.$$

Вычислим производные. Так как $x = \frac{1}{4}(\xi - \eta)^2$, $y = \xi + \eta$, то

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\eta = -\xi} = \xi \left. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta = -\xi} = -\xi \left. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

И тогда

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta = -\xi} = 2 \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 2F(\xi^2).$$

Дифференцируя w по ξ и η и применяя $\eta = -\xi$, получим

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \xi} \right|_{\eta = -\xi} = \sqrt{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u}{2\sqrt{2\xi}}, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial \eta} \right|_{\eta = -\xi} = \sqrt{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{2\sqrt{2\xi}}.$$

Отсюда имеем

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right|_{\eta=-\xi} = \sqrt{2\xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=-\xi} = \sqrt{2\xi} F(\xi^2).$$

Далее из формул

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v}{\partial \xi} \right|_{\eta=-\xi} &= \left. \frac{\partial G}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right|_{\eta=-\xi} = \frac{1}{4} \frac{(\xi + \eta_0)(\xi + \xi_0)}{(\xi_0 - \eta_0)\xi^2} \left(\frac{dG}{d\sigma} \right)_{\eta=\xi}; \\ \left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{\eta=-\xi} &= \left. \frac{\partial G}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \right|_{\eta=-\xi} = \frac{1}{4} \frac{(\xi - \eta_0)(\xi - \xi_0)}{(\xi_0 - \eta_0)\xi^2} \left(\frac{dG}{d\sigma} \right)_{\eta=-\xi} \end{aligned}$$

вытекает, что

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{\eta=-\xi} = -\frac{\xi_0 + \eta_0}{2(\xi_0 - \eta_0)\xi} \left(\frac{dG}{d\sigma} \right)_{\eta=-\xi}.$$

Значение функции w берется на биссектрисе $\eta = -\xi$ и в точках P и Q .

$$\text{Так как } w|_{\eta=-\xi} = w(\xi, -\xi) = \sqrt{2\xi}, \quad u(x, 0) = \sqrt{2\xi} f(\xi^2).$$

Отсюда получаем

$$w(P) = w(\xi_0, -\xi_0) = \sqrt{2\xi} f(\xi_0^2), \quad w(Q) = w(-\eta_0, \eta_0) = \sqrt{-2\eta_0} f(\eta_0^2).$$

Принимая теперь во внимание, что

$$u(x_0, y_0) = \frac{w(\xi_0, \eta_0)}{\sqrt{2^4 x_0}},$$

найдем

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{\sqrt{\xi_0} f(\xi_0^2) + \sqrt{-\eta_0} f(\eta_0^2)}{\sqrt{2^4 x_0}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt[4]{x_0}} \int_{-\eta_0}^{\xi} G \left(\frac{(\xi_0 - \xi)(\xi + \eta_0)}{2\xi(\xi_0 - \eta_0)} \right) F(\xi^2) \sqrt{\xi} d\xi + \\ &+ \frac{\xi_0 + \eta_0}{4(\xi_0 - \eta_0)\sqrt[4]{x_0}} \int_{-\eta_0}^{\xi_0} \left(\frac{dG}{d\sigma} \right)_{\eta=-\xi} f(\xi^2) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}. \end{aligned}$$

В старых переменных x и y получим решение задачи Коши:

$$u(x, y) = \frac{\sqrt{\sqrt{x} + \frac{y}{2}} f(x + \sqrt{xy} + \frac{y^2}{4}) + \sqrt{\sqrt{x} - \frac{y}{2}} f(x - \sqrt{xy} + \frac{y^2}{4})}{2\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \int_{\sqrt{x} - \frac{y}{2}}^{\sqrt{x} + \frac{y}{2}} \Phi(x, y, z) dz.$$

Пример 3. Исследовать процесс передачи тепла в неподвижном горизонтальном слое воды высотой $H=0,01$ м и начальной температурой $T(y,0)=20$ °С, $0 \leq y \leq H$, заключенном между горизонтальными пластинами, на которых поддерживается постоянная температура: на нижней пластине $T(0,t)=100$ °С, на верхней $T(H,t)=20$ °С, где $0 \leq t \leq t_m$. (рис. 3.6). Рекомендуемое время изучения процесса $t_m = 180$ с.

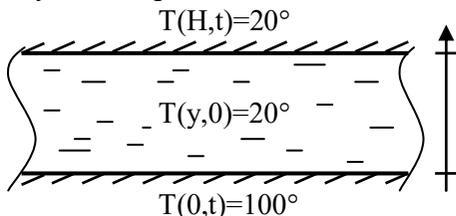


Рис. 3.6. Эскиз слоя воды с исходными данными зада-

Коэффициент теплопроводности воды $\lambda = 0,59 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}$;

теплоемкость $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$; плотность $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Решение. Для численного решения задачи воспользуемся явной разностной схемой Эйлера для уравнения теплопроводности: начальным условием $T_{i,0}=20$ °С, $i = \overline{0, n}$; граничными условиями $T_{0,j} = 100$ °С, $T_{n,j} = 20$ °С, $j = \overline{0, m}$, где $h=0,0005$ м; $\tau=0,5$ с; коэффициент температуропроводности

$$a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} = \frac{0,59}{4200 \cdot 1000} = 14 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}; \quad n = \frac{H}{h} = \frac{0,01}{0,0005} = 20; \quad m = \frac{t_m}{\tau} = \frac{180}{0,5} = 360.$$

Для выбранных значений h и τ условие Куранта

$$\frac{2a\tau}{h^2} = \frac{2 \cdot 14 \cdot 10^{-8} \cdot 0,5}{0,0005^2} = 0,56 \leq 1$$

выполняется, и можно приступить к составлению программы.

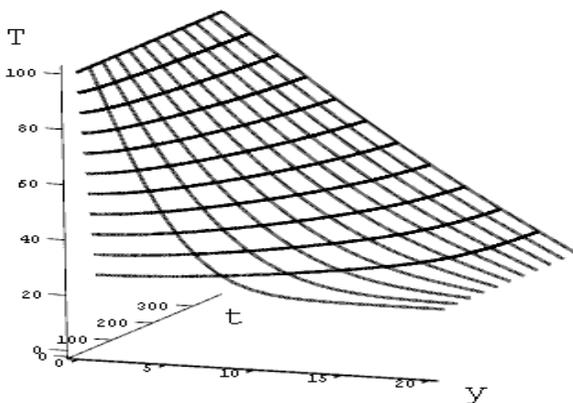
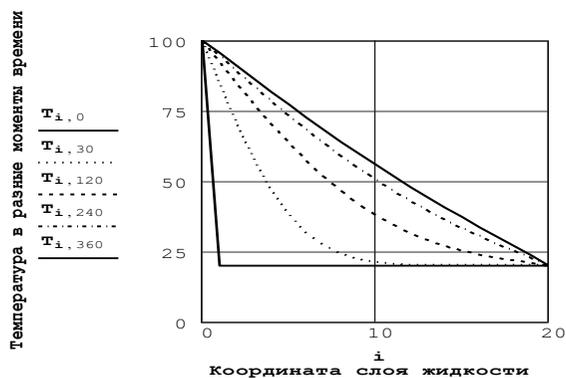


Рис. 3.7. Изменение температуры слоя жидкости в процессе теплопередачи

Текст программы, реализующей вычисления по указанной схеме в математическом пакете Mathcad, представлен ниже.

**Программа моделирования процесса теплопроводности
в неподвижном слое жидкости
по явной разностной схеме Эйлера**

Уравнение

теплопроводности:

$$\frac{d}{dt}T = a \cdot \frac{d^2}{dy^2}T$$

$$a \equiv 14 \times 10^{-8} \quad H \equiv 0.01 \text{ м} \quad n := \frac{H}{h}$$

$$h \equiv 0.0005 \text{ м} \quad n = 20$$

$$tm \equiv 180 \text{ с} \quad \tau \equiv 0.5 \text{ с} \quad m := \frac{tm}{\tau} \quad m = 360$$

$$C := \frac{a \cdot \tau}{h^2} \quad 2C = 0.56 \quad \text{Условие Куранта } 2C < 1$$

выполняется

Начальное условие : $i := 0.. n \quad T_{i,0} := 20$

Граничные условия : $j := 0.. m \quad T_{0,j} := 100 \quad T_{n,j} := 20$

Явная разностная схема Эйлера

$$F(T) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0.. m-1 \\ \quad \text{for } i \in 1.. n-1 \\ \quad \quad T_{i,j+1} \leftarrow (1-2C) \cdot T_{i,j} + C \cdot (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) \end{array} \right. T$$

Результаты решения представлены на рис. 3.7. иллюстрирующем различные временные сечения процесса.

На первом рис. 3.7 показано распределение температуры в подогреваемом слое в моменты времени 0, 15, 60, 120 и 180 с.

Координата y представлена номерами i узлов сетки и изменяется от 0 до 20; аналогично по оси времени номера узлов изменяются от 0 до 360.

На втором рис. 3.7 для наглядности дано трехмерное изображение процесса.

Рисунок показывает, что по истечении 180 с процесс нагревания жидкости практически завершается и в слое устанавливается линейное распределение температуры: от 100 °С у нижней границы до 20 °С у верхней.

4. ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

4.1. Дифференциальные уравнения свободных электрических колебаний

Если по проводу пропускают электрический ток, то образуется электромагнитное поле, которое изменяет силу тока и величину напряжения. В проводе появляется колебательный процесс.

Пусть ось Ox направлена по оси провода, начало координат будет в одном из его концов; длина провода будет l .

При этом сила тока i и напряжение v в любой точке провода есть функции координаты x и времени t . Ток i и напряжение v описываются дифференциальными уравнениями с частными производными. В этих уравнениях предполагается, что емкость, сопротивление, самоиндукция и утечка вдоль провода определены непрерывно и равномерно и постоянные C , R , L и G рассчитаны на единицу длины провода.

Пусть часть провода между двумя сечениями $x = x_1$ и $x = x_2$. По закону Ома для этой части провода имеем

$$v(x_1, t) - v(x_2, t) = R \int_{x_1}^{x_2} i(x, t) dx + L \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx.$$

или

$$v(x_1, t) - v(x_2, t) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dx,$$

т. е.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri \right) dx = 0.$$

В силу произвольности координат x_1 и x_2 имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0.$$

Количество электричества, протекающего по участку

$$(x_1, x_2) \text{ провода за единицу времени } i(x_1, t) - i(x_2, t) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial i}{\partial x} dx,$$

равно сумме количества электричества, которое нужно для зарядки этого участка провода, и количества электричества, которое теряется в связи с несовершенством изоляции:

$$C \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v}{\partial t} dx + G \int_{x_1}^{x_2} v dx,$$

или

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv \right) dx = 0, \text{ отсюда следует } \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0.$$

4.2. Телеграфное уравнение

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv,$$

а также уравнение для силы тока i :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial i}{\partial t} + GRi.$$

В результате получим, что напряжение v и сила тока i - это решение одного и того же типа. Уравнение называют телеграфным уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2b_0 \frac{\partial w}{\partial t} + c_0 w,$$

где $a_0 = LC$, $2b_0 = RC + GL$, $c_0 = GR$.

Если рассмотреть новую функцию $u(x, t)$, положив

$$w = e^{-\frac{b_0 t}{a_0}} u,$$

то уравнение будет иметь простую форму

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu, \quad \text{где } a = \frac{1}{\sqrt{a_0}}, \quad b = \frac{\sqrt{b_0^2 - a_0 c_0}}{a_0}.$$

4.3. Интегрирование телеграфного уравнения по методу Римана

Метод Римана используется для решения телеграфного уравнения с начальными условиями

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x).$$

Приведем телеграфное уравнение к каноническому виду, и используя новые независимые переменные ξ и η :

$$\xi = \frac{b}{a}(x + at), \quad \eta = \frac{b}{a}(x - at)$$

Телеграфное уравнение примет вид:

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} u = 0.$$

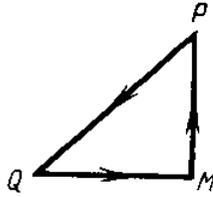


Рис. 4.1

Прямая $t = 0$ в новых переменных - биссектриса (рис. 4.1):

$\xi = \eta$. Можно записать связи $x = \frac{a}{b} \frac{\xi + \eta}{2}$, $t = \frac{1}{b} \frac{\xi - \eta}{2}$, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial u}{\partial t},$$

и из начальных условий получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=\xi} = \frac{1}{b} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{b} F(x) = \frac{1}{b} F\left(\frac{a}{b} \xi\right), \text{ а также } u|_{\eta=\xi} = f\left(\frac{a}{b} \xi\right).$$

Пусть в формуле Римана $a = 0$, $b = 0$, $f = 0$, то имеем

$$u(\varepsilon_0, \eta_0) = \frac{(uv)P + (uv)Q}{2} + \frac{1}{2} \int_{QP} v \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\xi - \frac{1}{2} \int_{QP} u \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\xi.$$

Функция Римана $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ удовлетворяет сопряженному уравнению $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} v = 0$ и равна 1 на характеристиках MP и MQ. Решение нашего уравнения будет $v = G(\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)})$.

Введем $\lambda = \sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}$.

Функция $v = G$ есть решение уравнения

$$G''(\lambda) + \frac{1}{\lambda} G'(\lambda) + G(\lambda) = 0.$$

Частным решением будет функция Бесселя нулевого порядка:

$$J_0(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2^2} + \frac{\lambda^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{\lambda^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots$$

Если $v = J_0(\lambda)$, то получим решение уравнения, которое справедливо на характеристиках $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$ значения 1 (здесь $\lambda = 0$). И $v = J_0(\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)})$.

Вычислим

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \xi} \right|_{\eta = \xi} = \left. \frac{dJ_0}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \right|_{\eta = \xi} = 0.5(\xi - \eta_0) / (\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}) J_0' \Big|_{\eta = \xi},$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{\eta = \xi} = \left. \frac{dJ_0}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \right|_{\eta = \xi} = 0.5(\xi - \eta_0) / (\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}) J_0' \Big|_{\eta = \xi}$$

и выражение

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \xi} \right|_{\eta = \xi} - \left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{\eta = \xi} = 0.5(\xi_0 - \eta_0) / (\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}).$$

Получим

$$u(p) = f(a\xi_0/b), u(Q) = f(a\eta_0/b).$$

$$u(\varepsilon_0, \eta_0) = \frac{f(a\xi_0/b) + f(a\eta_0/b)}{2} + \frac{1}{2b} \int_{\eta_0}^{\xi_0} J_0(\sqrt{(\xi - \xi_0)(\xi - \eta_0)}) F(a\xi/b) d\xi -$$

$$\frac{\xi_0 - \eta_0}{4} \int_{\eta_0}^{\xi_0} \frac{J_0'(\sqrt{(\xi - \xi_0)(\xi - \eta_0)})}{\sqrt{(\xi - \xi_0)(\xi - \eta_0)}} f(a\xi/b) d\xi.$$

В старых координатах имеем

$$u(x, t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-at}^{x+at} \Phi(x, t, z) dz,$$

где

$$\Phi(x, t, z) = \frac{J_0(b\sqrt{(z-x)^2 - (at)^2}) F(z)}{a} + \frac{bt f(z) J_0'((b/a)\sqrt{(z-x)^2 - (at)^2})}{\sqrt{(z-x)^2 - (at)^2}}.$$

ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.1. Вариация и ее свойства

Решение вариационных задач это исследование функционалов на максимум и минимум. Теория определения максимума и минимума функций нескольких переменных для функционалов аналогична.

Величина z называется *функцией* x ($z=f(x)$), если любому x из области определения поставлено в соответствие значение z . Такое же определение имеется для функции нескольких переменных.

Величина v называется *функционалом* зависящим от $y(x)$, что обозначается так: $v=v[y(x)]$, если функции $y(x)$ соответствует значение v .

Приращением Δx функции $f(x)$ называется разность $\Delta x = x - x_1$. Так как x - независимое переменное, то дифференциал x равен приращению ($dx = \Delta x$).

Вариацией δy аргумента $y(x)$ функционала $v[y(x)]$ называется $\delta y = y(x) - y_1(x)$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной*, если малому изменению x соответствует малое изменение $f(x)$.

Функционал $v[y(x)]$ будет *непрерывным*, если малому изменению $y(x)$ соответствует малое изменение $v[y(x)]$.

Функции $y(x)$ и $y_1(x)$ будут близкими, если модуль разности $y(x)-y_1(x)$ мал для всех x . Можно считать близкими только те функции, для которых малы модули разностей

$$y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x).$$

Поэтому вводятся определения близости кривых $y=y(x)$ и $y_1=y_1(x)$ так кривые y и y_1 близки нулевого порядка, если

модуль разности $y - y_1$ мал. Кривые $y=y(x)$ и $y_1=y_1(x)$ имеют близость k -го порядка, если малы модули разностей

$$y(x) - y_1(x), y'(x) - y_1'(x), \dots, y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x).$$

Ниже изображены кривые (рис. 1.1), близкие в смысле близости нулевого порядка.

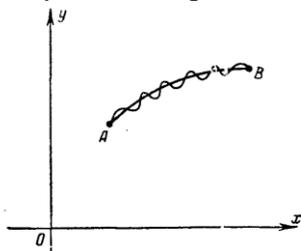


Рис. 1.1.

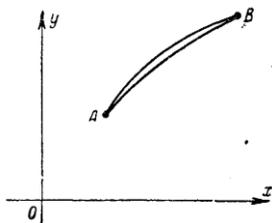


Рис. 1.2.

На рис. 1.2 имеются кривые близкие первого порядка.

Функция $f(x)$ непрерывна при $x=x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, при $|x - x_0| < \delta$.

Функционал $v[y(x)]$ непрерывен при $y=y_0(x)$ (близости k -го порядка), если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $|v[y(x)] - v[y_0(x)]| < \varepsilon$.

Функционал $v[y(x)]$ непрерывен при $y=y_0(x)$ (близости k -го порядка), если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $|y(x) - y_0(x)| < \delta, \dots, |y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| < \delta$.

При этом функция $y(x)$ берется из класса функций, на котором функционал $v[y(x)]$ определен.

Если определено понятие расстояния $\rho(y_1, y_2)$ между кривыми $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ ($x_0 \leq x \leq x_1$), то близкими кривыми это кривые, расстояние между которыми мало.

Если $\rho(y_1, y_2) = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y_1(x) - y_2(x)|$, то приходим к понятию близости нулевого порядка.

Если считать

$$\rho(y_1, y_2) = \sum_{p=1}^k \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y_1^p(x) - y_2^p(x)|$$

(y_1 и y_2 имеют непрерывные производные до порядка k включительно), то близость кривых будет k -го порядка.

Линейной функцией называется функция $l(x)$:

$l(kx) = kl(x)$, где k - произвольная постоянная и

$$l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2).$$

Линейным функционалом называется функционал $L[y(x)]$, если $L[ky(x)] = kL[y(x)]$, где k — произвольная постоянная и $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$.

Примером линейного функционала является

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_1}^{x_2} p(x)y + q(x)y' dx.$$

Приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ можно представить в виде $\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x$, где $A(x)$ не зависит от Δx , $\beta(x, \Delta x) \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Функция называется *дифференцируемой*, если существует ее производная. Линейная по отношению к Δx часть приращения - $A(x)\Delta x$ называется *дифференциалом функции* и обозначается df . Можно получить $A(x) = f'(x)$ и $df = f'(x)\Delta x$.

Приращение функционала $\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$

можно представить в виде $\Delta v = L[y(x) + \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \max |\delta y|$, где $L[y(x), \delta y]$ - линейно по отношению к δy . Пусть функционал $\max |\delta y|$ (максимальное значение $|\delta y|$ и $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$ при $\max |\delta y| \rightarrow 0$). Линейная величина по отношению к значению $|\delta y|$, т. е. $L[y(x), \delta y]$ называется *вариацией функционала* δv .

Рассмотрим $f(x + \alpha \Delta x)$ при фиксированном x , Δx и α . Если $\alpha=1$, то получим $f(x + \Delta x)$, а при $\alpha=0$ получим исход-

ное значение функции $f(x)$. При этом производная $f(x + \alpha\Delta x)$ по α при $\alpha=0$ равна дифференциалу функции $f(x)$ в точке x , т. е.

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha\Delta x) \right|_{\alpha=0} = f'(x + \Delta x)\Delta x \Big|_{\alpha=0} = f'(x)\Delta x = df(x).$$

Для функции $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно получить $f(x_1 + \alpha\Delta x_1, \dots, x_n + \alpha\Delta x_n)$ и при $\alpha=0$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_1 + \alpha\Delta x_1, \dots, x_n + \alpha\Delta x_n) \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = df.$$

Для функционалов вида $v[y(x)]$, зависящих от нескольких неизвестных функций или от функций нескольких переменных, можно ввести вариацию как производную от $v[y(x) + \alpha\delta y]$ по α при $\alpha=0$, т. е.

$$\Delta v = v[y(x) + \alpha\delta y] - v[y(x)] = L(y, \alpha\delta y)|\alpha|\max|\delta y|.$$

Производная $v[y(x) + \alpha\delta y]$ по α при $\alpha=0$ будет

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (L(y, \alpha\delta y) + \beta[y(x)\alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|) / \alpha =$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(y, \delta y)}{\alpha} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\beta[y(x)\alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|) / \alpha = L(y, \delta y)$$

в силу линейности $L(y, \delta\delta y) = \alpha L(y, \delta y)$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\beta[y(x)\alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|) / \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\beta[y(x)\alpha\delta y]\max|\delta y|) = 0,$$

т. к. $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

$$\text{Дифференциал функции } f(x): \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha\Delta x) \right|_{\alpha=0},$$

$$\text{а вариация функционала } v[y(x)]: \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha\delta y] \right|_{\alpha=0}.$$

Определение. Функционал $v[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ максимума, если функционал $v[y(x)]$ на близкой к

$y = y_0(x)$ кривой не больше $v[y_0(x)]$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} [y_0(x)]v[y(x)] \leq 0$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ (дифференцируемая) имеет максимум или минимум во внутренней точке $x=x_0$, то в этой точке $df=0$.

Теорема 2. Если функционал $v[y(x)]$ (имеющий вариацию) достигает максимума или минимума при $y=y_0(x)$, где $y(x)$ - внутренняя точка функционала, то при $y=y_0(x)$, $\delta v = 0$.

Если функционал $v[y(x)]$ достигает на кривой $y=y_0(x)$ максимума или минимума, для которых модуль разности $y(x) - y_0(x)$ мал, то максимум или минимум называется *сильным*.

Если же функционал $v[y(x)]$ достигает на кривой $y=y_0(x)$ максимума или минимума по отношению к кривым $y=y(x)$, близким к $y=y_0(x)$ (близость первого порядка), то максимум или минимум называется *слабым*.

1.2. Уравнение Эйлера

Рассмотрим функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

граничные точки допустимых кривых закреплены: $y(x_0)=y_0$ и $y(x_1)=y_1$ (рис. 1.3).

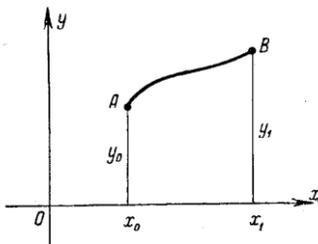


Рис. 1.3

Функцию $F(x, y, y')$ будет трижды дифференцируема.

Необходимым условием экстремума будет равенство нулю вариации функционала.

Пусть экстремум достигается на кривой $y=y(x)$.

Возьмем близкую к $y=y(x)$ кривую $y=\bar{y}(x)$ и рассмотрим $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x))$.

При $\alpha=0$ получим кривую $y=y(x)$, а при $\alpha=1$ имеем $y=\bar{y}(x)$ (рис. 1.4). Разность $\bar{y}(x) - y(x)$ называется вариацией функции $y(x)$ и обозначается δy .

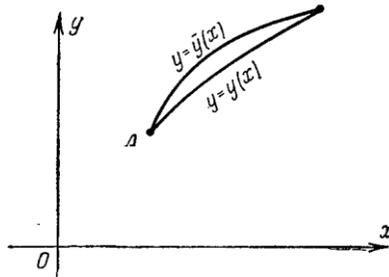


Рис. 1.4

Вариация функции $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$ является функцией x . Вычислим производные

$$(\delta y)' = \bar{y}'(x) - y'(x);$$

$$(\delta y)'' = \bar{y}''(x) - y''(x);$$

.....

$$(\delta y)^{(k)} = \bar{y}^{(k)}(x) - y^{(k)}(x).$$

Рассмотрим $y=y(x, \alpha)$, где $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y$ (при $\alpha=0$ кривую, на которой достигается экстремум, а при $\alpha=1$ - некоторую кривую сравнения).

Если функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

задан только на кривых $y=y(x, \alpha)$, то функционал превращается в функцию: $v[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha)$.

Функция $\varphi(\alpha)$ имеет экстремум при $\alpha=0$, так как при $\alpha=0$ получаем $y=y(x)$. Необходимым условием экстремума функции $\varphi(\alpha)$ при $\alpha=0$ будет $\varphi'(0) = 0$, так как

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) dx.$$

Вычислим производную

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} y'(x, \alpha)) dx,$$

где $F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))$, $F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))$ и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha \delta y] = \delta y, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} [y'(x) + \alpha \delta y'] = \delta y'. \end{aligned}$$

Имеем

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) \delta y + F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \delta y'] dx;$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'_x(x)) \delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \delta y'] dx.$$

Функция $\varphi'(0)$ называется вариацией функционала δv .

Необходимое условие экстремума функционала: $\delta v=0$.

Для функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

это условие $\int_{x_0}^{x_1} [F_{y_x} \delta y + F_{y'} \delta y'] dx = 0$.

Интегрируем второе слагаемое по частям и, учитывая что $\delta y' = (\delta y)'$, $\delta y|_{x_1}^{x_2} = 0$, получим

$$\delta v = [F_{y'} \delta y] \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_0}^{x_1} [F_y + \frac{d}{dx} F_{y'}] \delta y dx = \int_{x_0}^{x_1} [F_y + \frac{d}{dx} F_{y'}] \delta y dx.$$

Необходимое условие экстремума приобретает вид:

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y + \frac{d}{dx} F_{y'}] \delta y dx = 0.$$

Причем множитель $F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_{y'}$ кривой $y=y(x)$ является заданной функцией, а второй множитель δy , ввиду произвола в выборе кривой сравнения $y=y(x)$, является произвольной функцией удовлетворяющей функции δy в граничных точках $x=x_0$, и $x=x_1$ обращается в нуль (δy или δy и $\delta y'$ малы по абсолютной величине).

Основная лемма вариационного исчисления.

Если для каждой непрерывной функции $\eta(x)$

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = 0$$

(функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_1]$), то $\Phi(x) \equiv 0$ на том же отрезке (без доказательства).

Согласно этой лемме имеем для функционала

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y + \frac{d}{dx} F_{y'}] \delta y dx = 0.$$

Условия леммы выполнены: на экстремальной кривой

$F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_{y'}$ есть непрерывная функция, а вариация δy является произвольной функцией, т. е. $F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_{y'} = 0$ на кривой $y=y(x)$ и $y=y(x)$. Следовательно, имеем

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_{y'} = 0, \text{ или } F_y - F_{xy'} - F_{yy'} - F_{y'y''} y'' = 0.$$

Полученное уравнение называется *уравнением Эйлера*.

Интегральные кривые Эйлера $y=y(x, C_1, C_2)$ называются экстремалими. На *экстремалих* может достигаться экстремум

функционала:
$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Для кривой, реализующей экстремум функционала, интегрируем уравнение Эйлера и определяем произвольные постоянные, входящие в общее решение этого уравнения, из условий $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$.

Краевая задача $F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_{y'} = 0, y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным. Для многих вариационных задач существование решения вытекает из физического или геометрического смысла задачи

Пример 1.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + x^2 y) dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=a.$$

Уравнение Эйлера: $\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} = 0$ или $y-x=0$.

Первое граничное условие $y(0)=0$ выполнено, а второе граничное условие при $a = 1$. Если же $a \neq 1$, то экстремали не существует.

Пример 2. Определить кривую с заданными граничными точками, при вращении которой вокруг оси абсцисс образуется поверхность наименьшей площади (рис. 1.5).

Площадь поверхности вращения будет

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

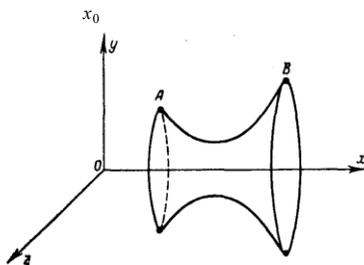


Рис. 1.5

Подынтегральная функция зависит от y и y' . Интеграл уравнения Эйлера будет: $F - y'F_{y'} = C_1$, или в данном случае

$$\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{y(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1,$$

После преобразований получаем

$$\frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1.$$

Это уравнение интегрируется при замене $y' = sht$. Тогда $y = C_1 ch t$, а

$$dx = \frac{dy}{y} = \frac{C_1 sht dt}{sht} = C dt_1,$$

$$x = C_1 t + C_2.$$

Искомая поверхность образуется вращением линии и имеет вид: $x = C_1 t + C_2$, $y = C_1 ch t$.

Если, исключим параметр t , то будем иметь $y = ch \frac{x - C_2}{C_2}$.

Это семейство цепных линий, от вращения которых образуются поверхности (катеноидами). C_1 и C_2 определяются из условия прохождения искомой линии. В зависимости от положения точек A и B существует одно, два или нет решения.

$$\text{Функционалы вида } \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

Необходимое условие экстремума функционала v имеет вид

$$v[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}; \\ y_1(x_1) &= y_{11}, \dots, y_n(x_1) = y_{n1}. \end{aligned}$$

Варьируется одна из функций $y_j(x)$, $j=1, 2, \dots, n$, все остальные функции неизменные.

Функционал $v[y_1, y_2, \dots, y_n]$ будет зависеть от одной варьируемой функции, например от $y_i(x)$: $v[y_1, \dots, y_n] = v[y_j]$.

Функция, реализующая экстремум, определяется из уравнения Эйлера $F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_{y'} = 0$.

Это рассуждение применимо к любой функции $y_i (i=1, 2, \dots, n)$. Получим систему дифференциальных уравнений

второго порядка $F_{y_i} - \frac{\partial}{\partial x} F_{y_i'} = 0$, определяющих $2n$ -

параметрическое семейство интегральных кривых в пространстве x, y_1, y_2, \dots, y_n . Если функционал зависит от двух функций $y(x)$ и $z(x)$, то функционал

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$$

с условиями $y(x_0)=y_0, z(x_0)=z_0, y(x_1)=y_1, z(x_1)=z_1$ определяется выбором $y=y(x), z=z(x)$ (рис. 1.6). Варьируя только $y(x)$ и фиксируя $z(x)$, можно изменить кривую так, что ее проекция на xOz не изменяется (рис. 1.7).

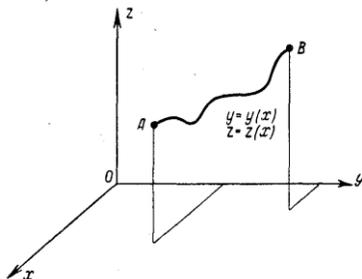


Рис. 1.6

Фиксируя $y(x)$ и варьируя $z(x)$, варьируем кривую так, что она все время лежит на проектирующем цилиндре $y=y(x)$. При этом получаем систему двух уравнений Эйлера:

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_{y'} = 0; \quad F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z'} = 0.$$

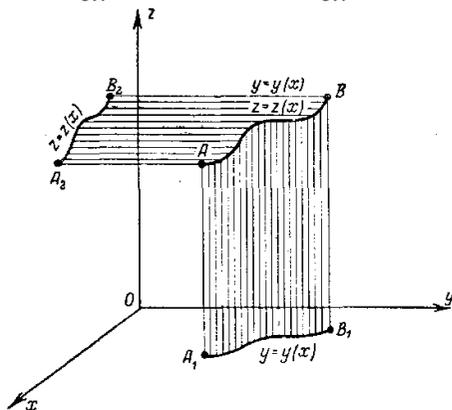


Рис. 1.7

Пример 3. Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx$$

с условиями $y(0)=0$, $y(\pi/2)=1$, $z(0)=0$, $y(\pi/2)=-1$.

Система дифференциальных уравнений Эйлера имеет вид: $y''-z=0$, $z''-y=0$. Исключая одну из неизвестных функций, получаем $y^{IV}-y=0$.

Интегрируя, это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, имеем:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \exp(x) + C_2 \exp(-x) + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \\ z &= C_1 \exp(x) + C_2 \exp(-x) - C_3 \cos x - C_4 \sin x. \end{aligned}$$

Из граничных условий имеем: $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=0$, $C_4=1$, следовательно, $y = \sin x$, $z = -\sin x$.

Пример 4. Найти уравнения линий распространения света в оптически неоднородной среде (скорость распространения света будет: $v(x, y, z)$).

Из принципа Ферми свет распространяется из одной точки $A(x_0, y_0)$ в другую $B(x_1, y_1)$ по кривой (время T прохождения света будет наименьшим).

Уравнение искомой кривой $y=y(x)$ и $z=z(x)$ и

$$T = \int_{x_0}^{x_1} [\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} / v(x, y, z)] dx.$$

Из уравнений Эйлера для этого функционала:

$$\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\sqrt{1 + y^2 + z^2}}{v^2} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{v \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\sqrt{1 + y^2 + z^2}}{v^2} + \frac{d}{dx} \frac{z'}{v \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = 0$$

будем определять линии распространения света.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Задача 1. Рассмотрим электрический привод постоянно-го тока, предназначенный для поворота платформы экскаватора. Задачей этого электропривода является угловое перемещение (поворот) платформы из положения $\varphi(t_1)=\varphi_1$ в положение $\varphi(t_2)=\varphi_2$. В начальный t_1 и конечный t_2 моменты времени скорость платформы равна нулю: $\dot{\varphi}(t_1)=0$; $\dot{\varphi}(t_2)=0$.

Найти закон управления током $i(t)$ двигателя, соответствующий энергосберегающему режиму его работы: затраты энергии на поворот платформы должны быть минимальными.

Формализуем поставленную задачу.

Уравнения движения двигателя:

$$\begin{cases} J \frac{d\omega(t)}{dt} + M_c = M_o(t); \\ L \frac{di(t)}{dt} + i(t)R + E(t) = u(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

где J – момент инерции двигателя, исполнительного механизма и платформы, приведённый к ротору двигателя, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$; ω – угловая частота вращения ротора двигателя, с^{-1} ; i – ток в якорной обмотке двигателя, А; M_c, M_o – момент сопротивления нагрузки (сухое трение) и момент, развиваемый на валу двигателя, Н·м: $M_o=c_m i$, c_m – постоянная двигателя по моменту, Н·м/А; L, R – индуктивность и активное сопротивление цепи якоря, Гн, Ом; E – противо ЭДС (В): $E=c_e \omega$, c_e – постоянная двигателя для ЭДС, В·с; u – напряжение питания двигателя, В.

Затраты энергии на поворот платформы складываются из энергии S , необходимой для совершения полезной механической работы, и потерь в обмотке двигателя:

$$P = R \int_0^T i^2(t) dt,$$

где T – заданное время поворота платформы.

Очевидно, что именно потери P могут быть минимизированы путём выбора управления $i(t)$, т. е. искомая функция $i(t)$ должна доставлять минимум функционалу:

$$Q = \int_0^T i^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (2.2)$$

в котором константа R опущена как не влияющая на результат решения.

Ограничениями задачи являются: заданный угол φ поворота платформы, приведённый к ротору двигателя:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \int_0^T \omega(t) dt, \quad (2.3)$$

взаимосвязь между током i и частотой вращения ω из (2.1):

$$i = \frac{J}{c_m} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{M_c}{c_m}. \quad (2.4)$$

Ограничение (2.4) можно исключить из явного вхождения в формулировку задачи путём его введения в функционал (2.2):

$$Q = \int_0^T (J\dot{\omega} + M_c)^2 dt \rightarrow \min, \quad (2.5)$$

где постоянный множитель $1/c_m$ опущен.

Задача поиска экстремума функционала (2.5) с ограничением (2.3) может быть сформулирована как общая задача Лагранжа без ограничений путём перехода к расширенному функционалу:

$$\Theta = \int_0^T (J\dot{\omega} + M_c)^2 dt + \lambda \int_0^T \omega(t) dt \rightarrow \min, \text{ в котором}$$

подынтегральное выражение образует так называемую вспомогательную функцию:

$$F = (J\dot{\omega} + M_c)^2 + \lambda\omega \rightarrow \min, \quad (2.6)$$

содержащую неопределённый множитель λ .

Учитывая граничные условия $\omega(0)=0$ и $\omega(T)=0$, получим окончательную формулировку решаемой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta = \int_0^T [(J\dot{\omega} + M_c)^2 + \lambda\omega] dt \rightarrow \min, \\ \int_0^T \omega(t) dt = \varphi; \quad \omega(0) = 0; \quad \omega(T) = 0. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Задача (2.7) представляет собою изопериметрическую задачу с вспомогательной функцией F и закреплёнными концами. В ней необходимо найти две неизвестные функции $\omega(t)$ и $\lambda(t)$, причём в данном частном случае в силу изопериметрического условия (2.3) справедливо: $\lambda(t)=\lambda=\text{const}$. Для определения $\omega(t)$ и λ имеем два уравнения – уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\omega}} = 0, \quad \text{и уравнение связи} \quad \int_0^T \omega(t) dt = \varphi.$$

Подставляя (2.6) в уравнение Эйлера, получаем

$$\lambda - \frac{d}{dt} (2J^2\dot{\omega} + 2JM_c) = \lambda - 2J^2\ddot{\omega} = 0. \quad (2.8)$$

Решение дифференциального уравнения (2.8) имеет вид

$$\omega = \frac{\lambda}{4J^2} t^2 + c_1 t + c_0. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.3), получим

$$\int_0^T \left(\frac{\lambda}{4J^2} t^2 + c_1 t + c_0 \right) dt = \left(\frac{\lambda t^3}{12J^2} + \frac{c_1 t^2}{2} + c_0 t \right) \Big|_0^T = \frac{\lambda T^3}{12J^2} + \frac{c_1 T^2}{2} + c_0 T = \varphi. \quad (2.10)$$

Положив $\omega(0)=\omega_1$ и $\omega(T)=\omega_2$, из (2.9) получим $c_0=\omega_1$. Тогда совместное решение (2.9) для $t=T$ и (2.10) даёт:

$$\lambda = 12J^2 \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)T - 2\varphi}{T^3}; \quad c_1 = \frac{6\varphi - 2(2\omega_1 + \omega_2)T}{T^2}.$$

Для условий (2.7) $\omega(0)=0$ и $\omega(T)=0$ имеем:

$$\lambda = -\frac{24J^2\varphi}{T^3}; \quad c_1 = \frac{6\varphi}{T^2},$$

и, с учётом (2.9) окончательно:

$$\omega(t) = -\frac{6\varphi}{T^3}t^2 + \frac{6\varphi}{T^2}t, \quad (2.11)$$

и

$$i(t) = \frac{J}{c_m} \frac{d\omega}{dt} + \frac{M_c}{c_m} = \frac{1}{c_m} \left(-\frac{12J\varphi}{T^3}t + \frac{6J\varphi}{T^2} + M_c \right). \quad (2.12)$$

Для определения вида найденного экстремума проверяем условие Лежандра: $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{\omega}^2} = \frac{\partial(2J^2\dot{\omega} + 2JM_c)}{\partial \dot{\omega}} = 2J^2 > 0$.

Таким образом, найденное решение (2.11) и (2.12) обеспечивает функционалу Q минимум. Для иллюстрации полученного решения составим имитационную модель объекта (рис. 2.1) с параметрами $L=0,05$ Гн; $R=0,06$ Ом; $J=100$ кг·м²;

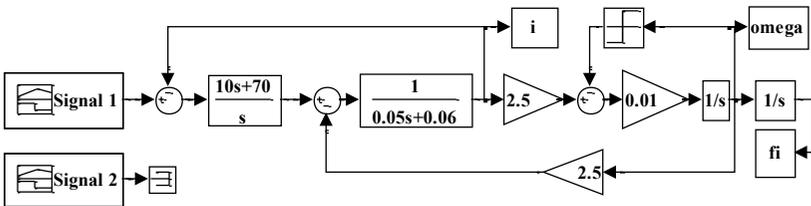


Рис. 2.1. Имитационная модель системы оптимального управления поворотом платформы

$U=400$ В; $M=300$ Н·м; $c_e=c_m=2,5$; $i_{ном}=200$ А; $\omega_{ном}=1500$ об/мин.

Функция момента сопротивления формируется в виде момента сухого трения: $M_c = M \cdot \text{sign}(\omega)$. Двигатель снабжён пропорционально-интегрирующим регулятором с передаточной функцией $W(s)$: $W(s) = \frac{10s + 70}{s}$, в совокупности с которым образует следящую систему регулирования тока двигателя по желаемому закону, в частности, вида (2.12).

Графики изменения тока $i(t)$ при оптимальном управлении (2.12) соответствующей частоты вращения $\omega(t)$ и угла поворота $\varphi(t)$ при заданном значении последнего 100 радиан за время $T=5$ с, представлены на рис. 2.2а,б.

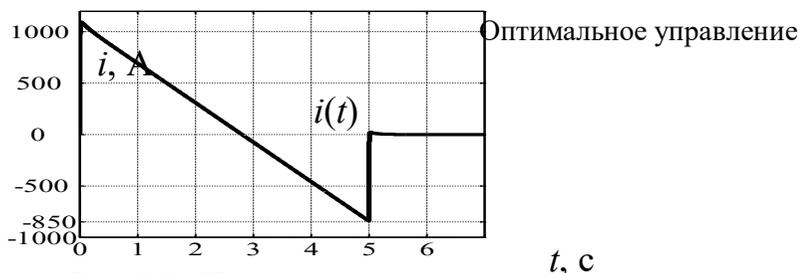


Рис. 2.2а. Изменение тока при оптимальном управлении (2.12)

Потери энергии при полученном оптимальном управлении (2.12) для $T=5$ с, $M=300$ Н·м и $\varphi=100$ рад составляют

$$\begin{aligned}
 P &= R \int_0^T i^2(t) dt = \int_0^T \frac{R}{c_m^2} \left(-\frac{12J\varphi}{T^3} t + \frac{6J\varphi}{T^2} + M \right)^2 dt = \\
 &= R \frac{12J^2\varphi^2 + T^4 M^2}{c_m^2 T^3} \Bigg|_{\substack{J=100 \\ \varphi=100 \\ T=5 \\ c_m=2,5 \\ R=0,06}} = 96,48 \text{ кДж.}
 \end{aligned}$$

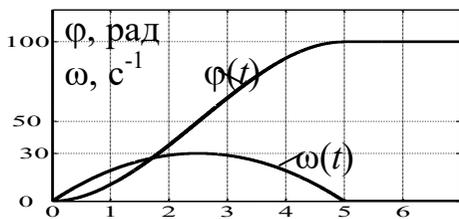


Рис. 2.2б. Изменение частоты вращения $\omega(t)$ и угла поворота $\varphi(t)$ при оптимальном управлении

Для сравнения рассмотрим изменения тока при оптимальном управлении (2.12) с тривиальным решением задачи, при котором половину времени поворота платформы её частота вращения линейно возрастает до значения ω_{\max} , а вторую половину – снижается до нуля.

В этом случае для того чтобы за время T повернуть платформу на угол φ , потребуется выполнение равенства

$$\varphi = \int_0^T \frac{\omega_{\max}}{2} dt = \frac{\omega_{\max} T}{2}.$$

Отсюда $\omega_{\max} = \frac{2\varphi}{T}$, и, далее

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{4\varphi}{T^2} t, & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; \\ -\frac{4\varphi}{T^2} (t - T), & \text{при } \frac{T}{2} < t \leq T. \end{cases}$$

С учётом (2.4) получаем:

$$i(t) = \frac{J}{c_m} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{M_c}{c_m} = \begin{cases} \left(\frac{4J\varphi}{T^2} + M_c \right) \frac{1}{c_m}, & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; \\ \left(-\frac{4J\varphi}{T^2} + M_c \right) \frac{1}{c_m}, & \text{при } \frac{T}{2} < t \leq T. \end{cases} \quad (2.13)$$

Графики изменения тока $i(t)$ при неоптимальном управлении (2.13) соответствующей частоты вращения $\omega(t)$ и угла

поворота $\varphi(t)$ при тех же заданных значениях $\varphi=100$ радиан и $T=5$ с представлены на рис. 2.3а,б.

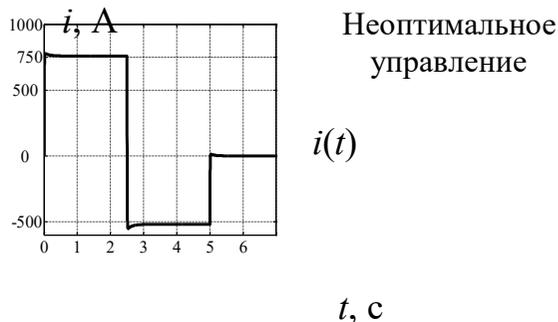


Рис. 2.3а. Изменение тока при неоптимальном управлении (2.13)

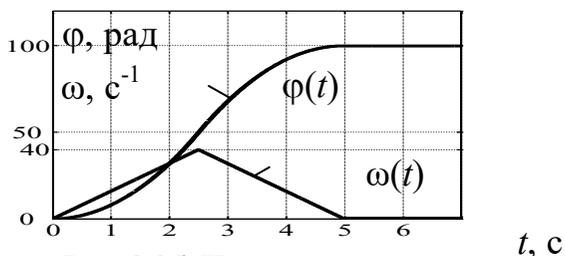


Рис. 2.3б. Изменение частоты вращения $\omega(t)$

Потери энергии при неоптимальном управлении (2.13):

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^T i^2(t) R dt = \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{4J\varphi}{T^2} + M \right)^2 \frac{R}{c_m^2} dt + \int_{\frac{T}{2}}^T \left(-\frac{4J\varphi}{T^2} + M \right)^2 \frac{R}{c_m^2} dt = \\
 &= R \frac{16J^2\varphi^2 + T^4 M^2}{c_m^2 T^3} \Bigg|_{\substack{J=100 \\ \varphi=100 \\ T=5 \\ c_m=2.5 \\ R=0.06}} = 127,2 \text{ кДж.}
 \end{aligned}$$

Значение потерь при неоптимальном управлении (2.13) превышает найденные выше потери при управлении (2.12) на 30,72 кДж, причём эта разница растёт пропорционально второй степени всех основных рабочих характеристик объекта: угла поворота φ , момента инерции J и момента сухого трения M .

Найденные выражения для экстремалей (2.11) и (2.12) позволяют реализовать управление электроприводом не только по току i в соответствии с (2.12), но и по частоте вращения ω , подавая на вход системы регулирования задающее воздействие вида (2.11).

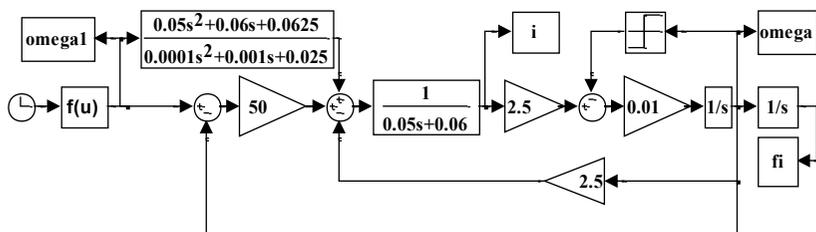


Рис. 2.4. Имитационная модель системы оптимального управления поворотом платформы с обратной связью по частоте вращения

На рис. 2.4 представлена имитационная модель такой системы регулирования с обратной связью по частоте вращения.

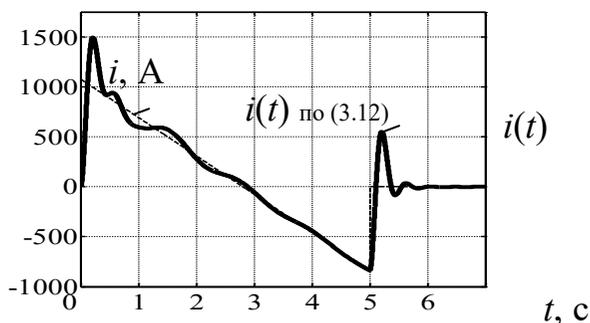


Рис. 2.5а. Изменение тока при оптимальном управлении частотой вращения (2.11)

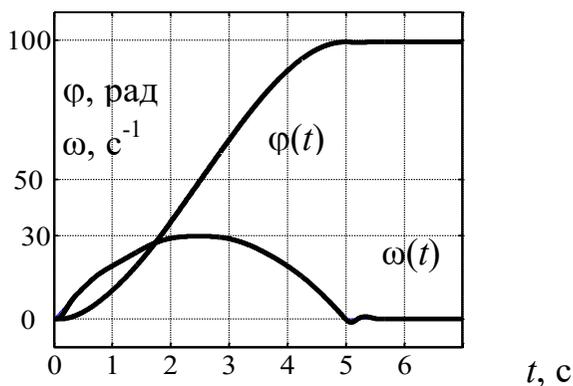


Рис. 2.5б. Изменение частоты вращения $\omega(t)$ и угла поворота $\varphi(t)$ при оптимальном управлении по экстремали (2.11)

На рис. 2.5а,б представлены полученные на этой модели фактические законы изменения тока, частоты вращения и угла поворота платформы.

Анализ этих рисунков показывает, что кинематические зависимости частоты вращения и угла поворота практически

не отличаются от расчётных, однако отклонение функции тока от экстремали (2.12) уже достаточно заметно и снижает отмеченную выше эффективность оптимального управления. Из этого следует, что непосредственное управление физической величиной, входящей в выражение критерия оптимизации задачи, является более предпочтительным по сравнению с математически эквивалентными, но опосредованными вариантами управления. Важно отметить, что оптимальное решение (2.12) задачи найдено без учёта технических ограничений на максимально допустимое значение тока $i(t)$, иными словами: рассмотренная задача решена без учёта ограничений на управляющее воздействие.

Задача 2. Управление электроприводом подъёмного крана с гибкой связью его подвижной тележки с перемещаемым по горизонтали грузом должно предусматривать демпфирование возникающих при этом раскачиваний (колебаний) груза (рис.2.6).

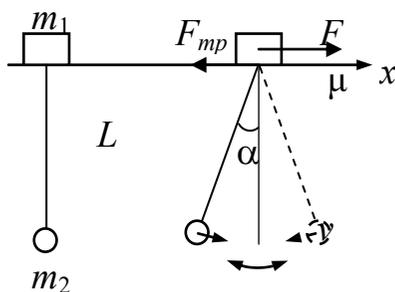


Рис. 2.6. Иллюстрация постановки задачи

На рис. 2.6 обозначены: m_1, m_2 - массы тележки и груза соответственно, кг; L - длина подвеса груза, м; x - координата горизонтального перемещения каретки, м; α - угловое отклонение подвешенного груза от вертикали, рад; μ - коэффициент сухого трения тележки (вязким трением в силу малых значений

скорости перемещения подвижных частей системы пренебрегаем); F_{mp} —сила сухого трения, действующая на каретку, Н.

Ставится задача: найти закон изменения силы F , прикладываемой со стороны электропривода к тележке, обеспечивающий за заданное время T перемещение груза на расстояние S без раскачиваний, т. е. проекция абсолютной скорости v груза на неподвижную ось x не должна менять своего знака.

Рассматриваемый в задаче объект представим схемой математического маятника со свободной и подвижной по горизонтали точкой подвеса (рис. 2.7), на котором $\omega(t) = -\dot{\alpha}(t)$ — частота вращения груза в момент времени t , c^{-1} ; F_H — сила натяжения троса, Н; g — ускорение свободного падения, $g=9,81 \text{ м/с}^2$.

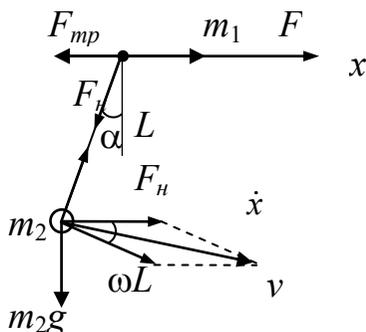


Рис. 2.7. Расчётная схема объекта “тележка-груз”

Для описания объекта составим уравнения его движения в координатах x и α в виде уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases} -\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = F - F_{mp}; \\ -\frac{\partial E}{\partial \alpha} + \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}} = -m_2 g L \sin \alpha, \end{cases} \quad (2.14)$$

где $E = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2}$ — кинетическая энергия системы.

Получая абсолютную скорость v груза в виде

$$v^2 = \dot{x}^2 + (\omega L)^2 + 2\dot{x}\omega L \cos\alpha = \dot{x}^2 + L^2\dot{\alpha}^2 + 2L\dot{x}\dot{\alpha} \cos\alpha,$$

придём к развёрнутому выражению для E :

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2 L^2}{2} \dot{\alpha}^2 + m_2 L \dot{x} \dot{\alpha} \cos\alpha. \quad (2.15)$$

Подставив (2.15) в (2.14), получаем:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 L(\ddot{\alpha} \cos\alpha - \dot{\alpha}^2 \sin\alpha) = F - F_{mp}; \\ \ddot{x} \cos\alpha + L\ddot{\alpha} + g \sin\alpha = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Силу сухого трения F_{mp} определим в виде

$$F_{mp} = \mu F_n \cos\alpha, \text{ где сила натяжения } F_n:$$

$$F_n = m_2 g \cos\alpha + m_2 \ddot{x} \sin\alpha + m_2 \dot{\alpha}^2 L. \quad (2.17)$$

Система уравнений (2.16), (2.17) полностью описывает движение рассматриваемого объекта.

Имитационная модель, составленная по этим уравнениям в пакете Matlab, представлена на рис. 2.8 для параметров: $m_1=100$ кг; $m_2=200$ кг; $L=5$ м; $T=5$ с; $S=10$ м; $\mu=0,01$.

Поведение тележки и груза при тривиальном управлении таким объектом (включение привода на постоянный номинальный режим и его выключение при достижении кареткой заданной координаты x) показано на рис. 2.9 и хорошо иллюстрирует колебательность системы “тележка-груз”, причём при отсутствии активного торможения после отключения привода тележка продолжает двигаться по инерции, постепенно теряя избыточно запасённую энергию системы на преодоление силы трения. Для дальнейшей работы с моделью (2.16), (2.17) линеаризуем её для диапазона малых значений α и учтём некоторые упрощающие условия:

$$\ddot{\alpha} \cos\alpha \gg \dot{\alpha}^2 \sin\alpha; \cos\alpha \approx 1; \sin\alpha \approx \alpha; g \cos\alpha \gg \ddot{x} \sin\alpha + \dot{\alpha}^2 L.$$

Получим

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2L\ddot{\alpha} = F - \mu m_2 g; \\ \ddot{x} + L\ddot{\alpha} + g\alpha = 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

или, выразив в явном виде \ddot{x} :

$$\ddot{x} = -L\ddot{\alpha} - g\alpha, \quad (2.19)$$

подставив (2.19) в первое уравнение из (2.18):

$$-m_1L\ddot{\alpha} - (m_1 + m_2)g\alpha = F - \mu m_2 g. \quad (2.20)$$

Поскольку слагаемое $\mu m_2 g$ не зависит от времени, то правую часть равенства (2.20) в дальнейшем будем обозначать как одну функцию $F(t) = F - \mu m_2 g$. Имитационная модель ли-неаризованной системы представлена на рис. 2.10.

Перейдём к нахождению оптимального управления $F(t)$. В качестве критерия оптимальности, обеспечивающего наименьшую колебательность системы, выберем используемый в теории управления интегральный квадратичный критерий

$$Q = \int_0^T (\alpha^{(n)2} + \dots + \ddot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^2 + \alpha^2) dt \rightarrow \min. \quad (2.21)$$

Необходимый порядок n старшей производной в критерии Q определяется числом $2n$ свободных коэффициентов c_1, \dots, c_{2n} в общем виде искомой экстремали $\alpha(t)$, которые требуется найти для обеспечения граничных условий задачи, вытекающих из её физического содержания:

$$\alpha(0) = 0; \quad \dot{\alpha}(0) = 0; \quad x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0;$$

$$\alpha(T) = 0; \quad \dot{\alpha}(T) = 0; \quad \ddot{\alpha}(T) = 0; \quad x(T) = S; \quad \dot{x}(T) = 0; \quad \ddot{x}(T) = 0.$$

С учётом (2.19) из приведённых условий можно исключить требование $\ddot{x}(T) = 0$ как вытекающее из $\alpha(T) = 0$ и $\ddot{\alpha}(T) = 0$. Кроме того, заменив требование $x(T) = S$ на

$$\int_0^T \dot{x}(t) dt = S, \text{ можно не учитывать также и условие } x(0) = 0, \text{ по-}$$

скольку $x(t)$ в явном виде в (2.18) не входит и в момент време-

ни $t=0$ полностью определяется условием $\dot{x}(0)=0$. В результате получаем систему из 8 граничных условий:

$$\alpha(0) = 0; \quad \dot{\alpha}(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0;$$

$$\alpha(T) = 0; \quad \dot{\alpha}(T) = 0; \quad \ddot{\alpha}(T) = 0; \quad \int_0^T \dot{x}(t) dt = S; \quad \dot{x}(T) = 0. \quad (2.22)$$

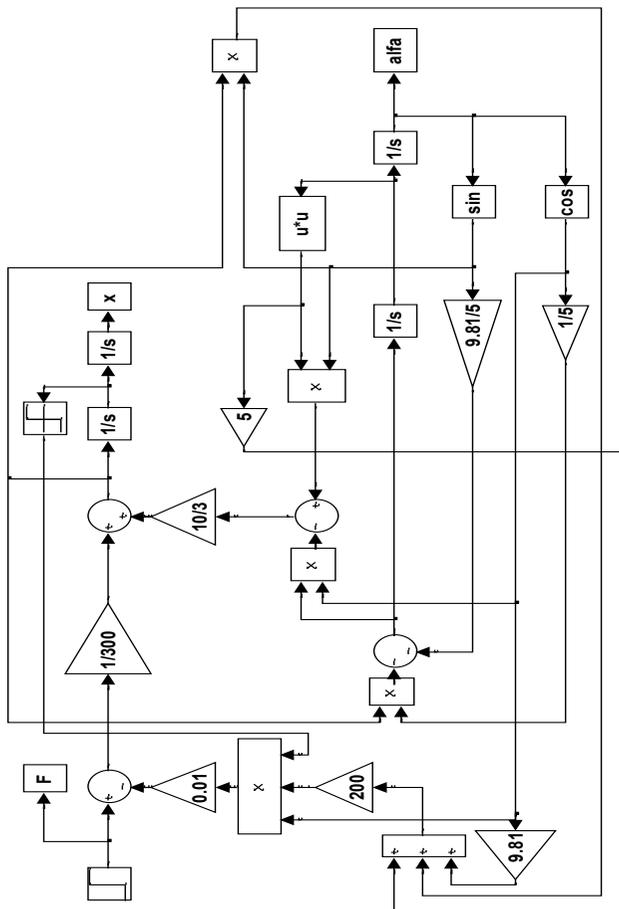


Рис. 2.8. Полная имитационная модель объекта

Для выполнения (2.22) потребуется значение $n=4$.

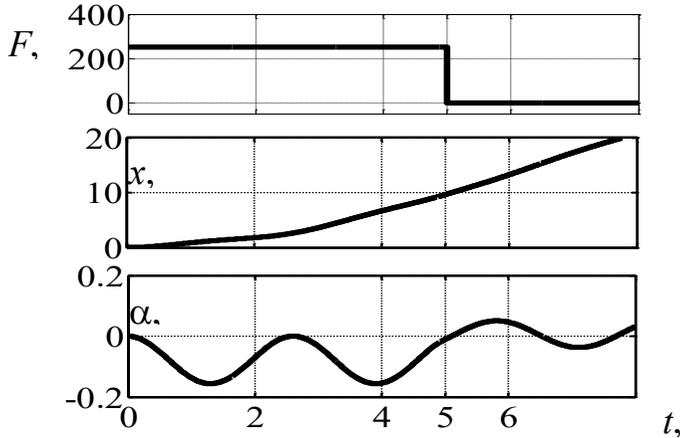


Рис. 2.9. Движение объекта при тривиальном управлении F

Формируем критерий:

$$Q = \int_0^T (\alpha^{(4)^2} + \alpha^{(3)^2} + \ddot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^2 + \alpha^2) dt \rightarrow \min. \quad (2.23)$$

Система уравнений (2.22), (2.23) представляет собою формальную постановку решаемой вариационной задачи.

Обозначим подинтегральную функцию из (2.23) через $\Phi(t, \alpha)$ и составим уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\alpha}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{\alpha}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha^{(3)}} + \frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha^{(4)}} = 0. \quad (2.24)$$

После подстановки (2.23) в (2.24) придём к дифференциальному уравнению

$$2\alpha - 2\ddot{\alpha} + 2\alpha^{(4)} - 2\alpha^{(6)} + 2\alpha^{(8)} = 0. \quad (2.25)$$

Характеристическое уравнение для (2.25)

$$p^8 - p^6 + p^4 - p^2 + 1 = 0$$

имеет корни $p_{1,2} = \sigma_1 \pm \beta_1 i$; $p_{3,4} = -\sigma_1 \pm \beta_1 i$; $p_{5,6} = \sigma_2 \pm \beta_2 i$; $p_{7,8} = -\sigma_2 \pm \beta_2 i$:

$$\sigma_1 = 0,25\sqrt{10-2\sqrt{5}}; \quad \sigma_2 = 0,25\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$\beta_1 = 0,25(1+\sqrt{5}); \quad \beta_2 = 0,25(-1+\sqrt{5}).$$

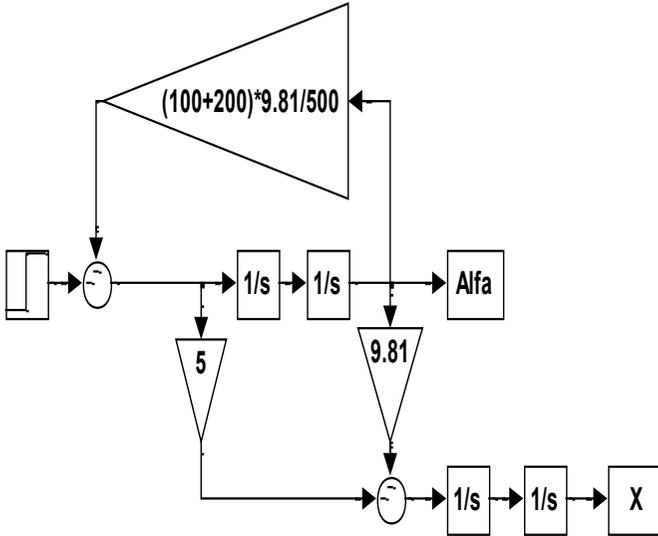


Рис. 2.10. Имитационная модель
линеаризованной системы

Соответствующее полученным корням решение дифференциального уравнения (2.25) является искомой экстремалью:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & e^{\sigma_1 t} (c_1 \cos(\beta_1 t) + c_2 \sin(\beta_1 t)) + \\ & + e^{-\sigma_1 t} (c_3 \cos(\beta_1 t) + c_4 \sin(\beta_1 t)) + \\ & + e^{\sigma_2 t} (c_5 \cos(\beta_2 t) + c_6 \sin(\beta_2 t)) + \\ & + e^{-\sigma_2 t} (c_7 \cos(\beta_2 t) + c_8 \sin(\beta_2 t)). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Подставляя (2.26) в выражения (2.22) для граничных условий, а также учитывая соотношение

$$\dot{x}(t) = \int (-\ddot{\alpha}L - \alpha g) dt,$$

получим систему из 8 уравнений с 8 неизвестными и далее иско-
мые коэффициенты: $c_1=0,202$; $c_2=-0,000723$; $c_3=-1,24$; $c_4=-$

$$\alpha(t) := e^{\sigma^1 \cdot t} \cdot (c_1 \cdot \cos(\beta_1 \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\beta_1 \cdot t)) + e^{-\sigma^1 \cdot t} \cdot (c_3 \cdot \cos(\beta_1 \cdot t) + c_4 \cdot \sin(\beta_1 \cdot t)) +$$

$$+ e^{\sigma^2 \cdot t} \cdot (c_5 \cdot \cos(\beta_2 \cdot t) + c_6 \cdot \sin(\beta_2 \cdot t)) + e^{-\sigma^2 \cdot t} \cdot (c_7 \cdot \cos(\beta_2 \cdot t) + c_8 \cdot \sin(\beta_2 \cdot t))$$

$$p\alpha(t) := \frac{d}{dt} \alpha(t) \qquad p2\alpha(t) := \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t)$$

$$p_x(t) := \left(- \int p2\alpha(t) dt \right) \cdot L - \left(\int \alpha(t) dt \right) \cdot g$$

□ Исходные данные m1, m2, L, S, T, g

□ выражения для alfa, palfa, p2alfa, px

Given

$$\alpha(0) = 0 \quad p\alpha(0) = 0 \quad p_x(0) = 0$$

$$\alpha(T) = 0 \quad p\alpha(T) = 0 \quad p2\alpha(T) = 0 \quad p_x(T) = 0$$

$$\int_0^T p_x(t) dt = S$$

$$R := \text{Find}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8) \text{ float}, 5 \rightarrow \begin{pmatrix} .20214 \\ -.72286e-3 \\ -1.2356 \\ -7.4178 \\ .72453e-1 \\ .13952e-1 \\ .96105 \\ 19.408 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.11. Программа вычисления параметров
экстремали $\alpha(t)$ в пакете Mathcad
 $7,42$; $c_5=0,0724$; $c_6=0,014$; $c_7=0,961$; $c_8=19,4$.

Последовательность вычислений коэффициентов c_1, \dots, c_8
в пакете Mathcad представлена на рис. 2.11, обозначения на ко-
тором очевидны из текста программы.

Графики полученных расчётных зависимостей от времени координат системы

$$\alpha(t), \dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), x(t), \dot{x}(t),$$

$\ddot{x}(t), x_2(t) = x(t) + L \sin \alpha(t)$ приведены на рис. 2.12, 2.13, 2.14, где x_2 – абсолютная координата груза по горизонтали.

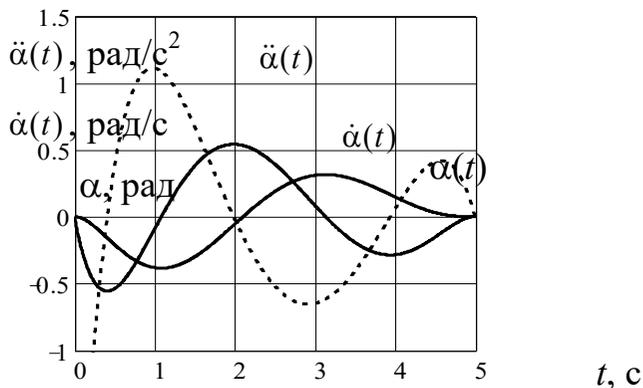


Рис. 2.12. Оптимальное изменение угловой координаты α и её производных для груза

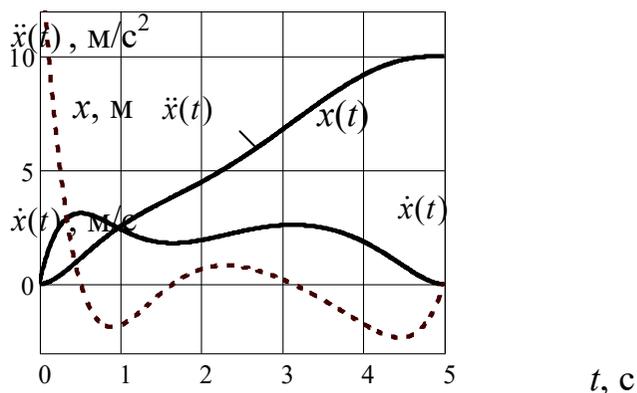


Рис. 2.13. Оптимальное изменение координаты x и её производных для каретки

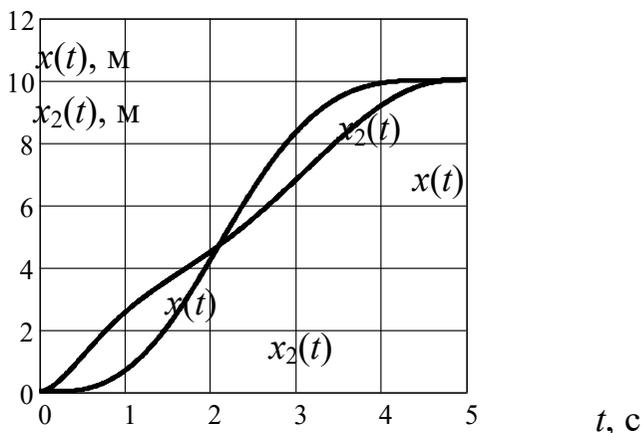


Рис. 2.14. Абсолютные перемещения тележки $x(t)$ и груза $x_2(t)$ по горизонтали

Рис. 2.12-2.14 показывают, что движение тележки и груза приобрело монотонный характер: в начале перемещения ($t < 2,1$ с) груз отстаёт от тележки, а затем, при подходе к координате $x=10$ м, опережает её и в точке $x=10$, $x_2=10$ система завершает движение (рис. 2.15).

Используемый для решения задачи критерий (2.21) имеет много модификаций, отличающихся весовыми коэффициентами его слагаемых, с помощью которых можно влиять на те или иные характеристики движения. В частности, показанные на рис. 2.12. и 2.13 графики вторых производных указывают на большие значения этих величин в момент трогания: $\ddot{\alpha}(0) = -3,9$ рад/с², $\ddot{x}(0) = 15,9$ м/с². С целью уменьшения этих значений можно повысить весомость старших производных в критерии (2.23), исключив, например, слагаемое α^2 :

$$Q = \int_0^T (\alpha^{(4)^2} + \alpha^{(3)^2} + \ddot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^2) dt \rightarrow \min. \quad (2.27)$$

Уравнение Эйлера для (2.27):

$$-2\ddot{\alpha} + 2\alpha^{(4)} - 2\alpha^{(6)} + 2\alpha^{(8)} = 0. \quad (2.28)$$

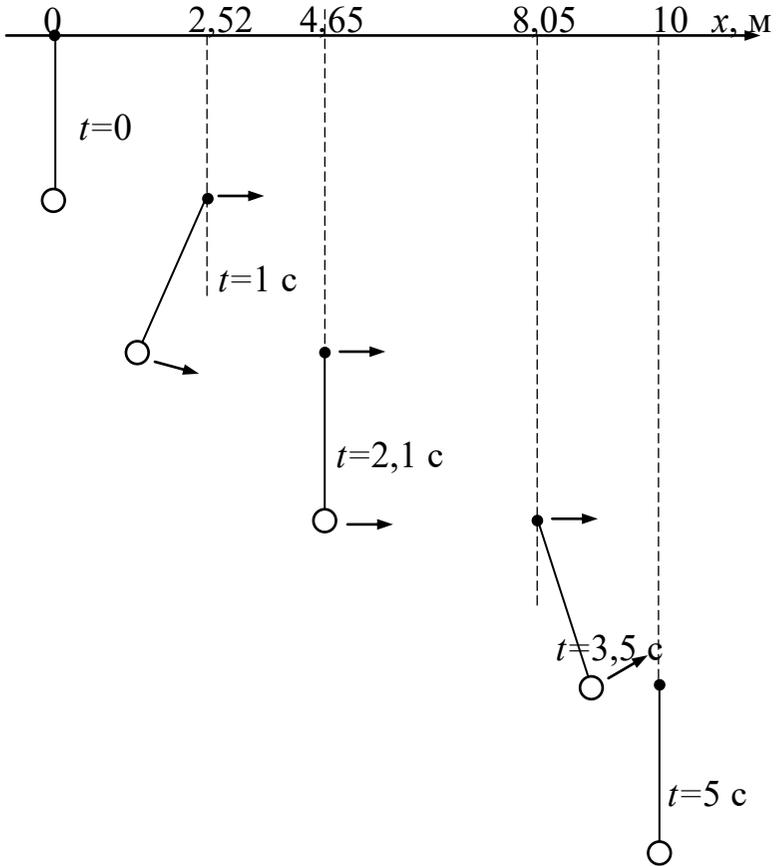


Рис. 2.15. Пошаговая иллюстрация движения “тележка-груз” при оптимальном управлении

Характеристический полином:

$$p^8 - p^6 + p^4 - p^2 = 0,$$

имеет корни:

$$p_{1,2} = 0; \quad p_{3,4} = \pm \sigma; \quad p_{5,6} = \sigma_1 \pm \beta_1 i; \quad p_{7,8} = -\sigma_1 \pm \beta_1 i; \quad \sigma = 1;$$

$$\sigma_1 = 0,5\sqrt{2}; \quad \beta_1 = 0,5\sqrt{2}.$$

Общий вид искомой экстремали:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & c_1 + c_2 t + c_3 e^{\sigma_1 t} + c_4 e^{-\sigma_1 t} + \\ & + e^{\sigma_1 t} (c_5 \cos(\beta_1 t) + c_6 \sin(\beta_1 t)) + \\ & + e^{-\sigma_1 t} (c_7 \cos(\beta_1 t) + c_8 \sin(\beta_1 t)). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Найденные значения коэффициентов: $c_1=-3,11$; $c_2=2,83$; $c_3=-0,0714$; $c_4=-4,95$; $c_5=0,126$; $c_6=-0,289$; $c_7=8,00$; $c_8=-2,73$.

Характер движения системы по экстремали (2.29) практически совпадает с функцией (2.26), однако максимальные значения вторых производных $\ddot{\alpha}(t)$ и $\ddot{x}(t)$, как и следовало ожидать, уменьшились: $\ddot{\alpha}(0) = -2,6 \text{ рад/с}^2$, $\ddot{x}(0) = 12,9 \text{ м/с}^2$ (рис. 2.12, 2.13).

Следует заметить, что при решении данной задачи также можно воспользоваться критерием минимума энергии, требуемой на перемещение груза (аналогичный критерий использован в задаче 1). Эта возможность вытекает из того обстоятельства, что любые раскачивания груза являются проявлением запасённой в системе избыточной энергии, которая не расходуется на перемещение груза. Таким образом, на практике выбор критерия оптимальности вариационной задачи является, как правило, многоальтернативным. Для проверки найденного оптимального закона управления (2.29) использовалась полная имитационная модель объекта (рис. 2.8), к которой добавлены наблюдатель координат $[\alpha(t) \ \dot{\alpha}(t)]^T$ и модальный регулятор $R=[r_1 \ r_2]=[50 \ 2,8]$.

Общая структура системы оптимального управления представлена на рис. 2.16, а результаты моделирования на рис. 2.17. Полученные графики зависимостей $x(t)$ и $\alpha(t)$ показывают, что цель управления достигнута.

При этом следует подчеркнуть, что при решении вариационной задачи применялась линеаризованная модель объекта (2.18), но при проверке результата решения (2.29) использовалась полная система нелинейных дифференциальных уравнений (2.16), (2.17).

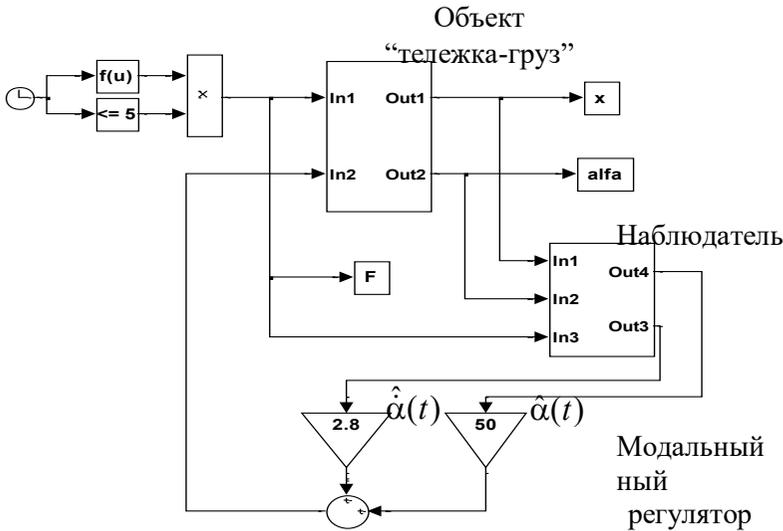


Рис. 2.16. Структурная схема системы оптимального управления с наблюдателем координат $\alpha(t)$, $\dot{\alpha}(t)$

В завершение раздела 2.1 отметим, что решения (2.26), (2.29) искались в классе непрерывных функций, результаты могут быть получены и при разрывном управлении, пример которого представлен на рис. 2.18.

На этом рисунке управляющее воздействие F представляет собою разрывную кусочно-постоянную функцию, ограниченную по модулю.

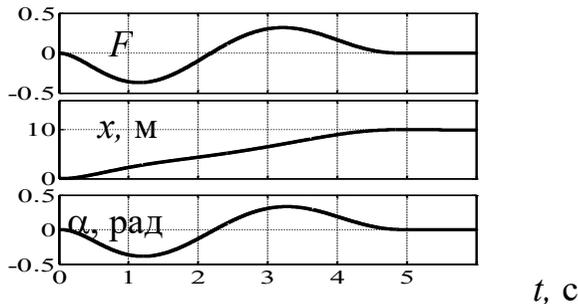


Рис. 2.17. Результаты проверки оптимального управления (2.29) на имитационной модели системы регулирования

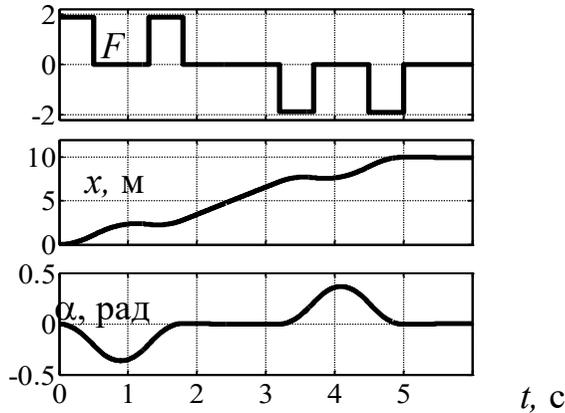


Рис. 2.18. Иллюстрация эмпирического способа импульсного управления объектом

Решение задачи оптимального движения объекта при ограничениях на управление. Принцип максимума Понтрягина

При рассмотрении задач 1 и 2 отмечалось, что найденные экстремали могут потребовать для своей реализации технически недопустимых значений управляющих воздействий, т.е. в условие задачи необходимо вводить соответствующие ограничения. Задачи с ограничениями могут быть решены с помощью уравнения Эйлера, однако в том случае, если уравнения движения объекта представимы в нормальной форме Коши и являются линейными относительно управления, то целесообразно воспользоваться другим методом вариационного исчисления – принципом максимума.

Рассмотрим примеры таких задач.

Задача 3. Вернёмся к задаче 1, где рассматривался электропривод поворота платформы экскаватора, для которой требовалось найти закон управления током $i(t)$ двигателя, обеспе-

чивающего поворот платформы за заданное время T на известный угол φ с минимальными затратами энергии.

Введём в эту задачу ограничение на управление:

$$|i(t)| \leq I_{\max},$$

где для конкретного примера примем $I_{\max} = 200$ А.

Исходные уравнения движения электропривода:

$$\begin{cases} J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + M_c = c_m \cdot i; \\ L \frac{di}{dt} + iR + E = u \end{cases}$$

(обозначения см. в задаче 1) перепишем в явном виде относительно регулируемой величины $\varphi(t)$ и управления $i(t)$:

$$\ddot{\varphi} = \frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J}. \quad (2.30)$$

Вводя обозначения $x_1 = \varphi$; $x_2 = \dot{\varphi}$, перейдём к нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Минимизируемый функционал задачи:

$$Q = \int_0^T i^2(t) dt \rightarrow \min \quad (2.32)$$

включим в число фазовых координат x

$$\dot{x}_0(t) = i^2(t). \quad (2.33)$$

Составим вспомогательную функцию – гамильтониан H :

$$H = \sum_{i=0}^2 \psi_i \dot{x}_i = \psi_0 i^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 \left(\frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J} \right) \rightarrow \max. \quad (2.34)$$

Найдём максимум для (2.34), не учитывая ограничение на управление.

Для определения функции $i(t)$, доставляющей экстремум гамильтониану, запишем необходимое условие существования экстремума $\frac{\partial H}{\partial i} = 0$, или $2\psi_0 i + \frac{\psi_2 c_m}{J} = 0$, откуда

$$i(t) = -\frac{\psi_2(t)c_m}{2\psi_0(t)J}. \quad (2.35)$$

Для нахождения в выражении (2.35) неизвестных функций $\psi_0(t)$ и $\psi_2(t)$ воспользуемся известным соотношением между неопределёнными множителями $\psi_i(t)$ и гамильтонианом H :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Для H вида (2.34) последнее соотношение образует систему трёх дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_0}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0; \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Из (2.36) получаем выражения для ψ_i :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \text{const} = c_0; \\ \psi_1 &= \text{const} = c_1; \\ \psi_2 &= -\int \psi_1 dt = c_2 - c_1 t, \end{aligned}$$

и далее:

$$i(t) = -\frac{c_2 - c_1 t}{2c_0 J} = a_1 - a_2 t, \quad (2.37)$$

где $a_1 = -\frac{c_2}{2c_0 J}$; $a_2 = -\frac{c_1}{2c_0 J}$.

Выражение (2.37) является искомой экстремалью для управляющего воздействия $i(t)$, обеспечивающего минимум функционалу (2.32). Эта экстремаль найдена с использованием принципа максимума для гамильтониана H . Для того чтобы сравнить (2.37) с аналогичным результатом (2.12), полученным с помощью уравнения Эйлера, найдём неизвестные параметры a_1 и a_2 , входящие в (2.37).

Интегрируем (2.30) с учётом (2.37):

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\phi} = \int \ddot{\phi} dt = \int \left(\frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J} \right) dt = \\ &= \int \left[\frac{c_m}{J} (a_1 - a_2 t) - \frac{M_c}{J} \right] dt = -\frac{c_m a_2}{2J} t^2 + \left(\frac{c_m a_1}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t + a_3. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов a_1 , a_2 и постоянной интегрирования a_3 обратимся к граничным условиям задачи:

$$\omega(0)=0, \quad \omega(T)=0, \quad \int_0^T \omega(t) dt = \phi.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_3 = 0; \\ -\frac{c_m a_2}{2J} T^2 + \left(\frac{c_m a_1}{J} - \frac{M_c}{J} \right) T + a_3 = 0; \\ -\frac{c_m a_2}{6J} T^3 + \left(\frac{c_m a_1}{J} - \frac{M_c}{J} \right) \frac{T^2}{2} + a_3 T = \phi, \end{cases}$$

решение которой:

$$a_1 = \left(\frac{6J\phi}{T^2} + M_c \right) \cdot \frac{1}{c_m}; \quad a_2 = -\frac{12J\phi}{T^3} \cdot \frac{1}{c_m}; \quad a_3 = 0,$$

приводит к выражениям (2.39) и (2.40), полностью совпадающим с соответствующими экстремальями (2.11) и (2.12), полученными с помощью уравнения Эйлера в задаче 1:

$$\omega(t) = -\frac{6\varphi}{T^3}t^2 + \frac{6\varphi}{T^2}t, \quad (2.39)$$

$$i(t) = \frac{1}{c_m} \left(-\frac{12J\varphi}{T^3}t + \frac{6J\varphi}{T^2} + M_c \right). \quad (2.40)$$

Таким образом, мы показали, что принцип максимума позволяет решать вариационные задачи без ограничений на управление и даёт те же результаты, что и уравнения Эйлера.

Учтём теперь наличие ограничения $|i(t)| \leq I_{\max}$.

Анализ выражения (2.34) для гамильтониана показывает, что при $\psi_0(t) \geq 0$ его максимум достигается при максимальных по модулю значениях управления $|i(t)| = I_{\max}$, точнее, если

$$i(t) = I_{\max} \text{sign}(\psi_2). \quad (2.41)$$

Из (2.41) следует, что экстремаль $i(t)$ имеет кусочно-постоянную форму (структуру), причём в силу вещественности корней характеристического уравнения для (2.30) $p^2=0$; $p_{1,2}=0$ $i(t)$ имеет два интервала постоянства.

Для получения неизвестной функции $\psi_2(t)$, входящей в (2.41), воспользуемся системой уравнений (6.36), из которой $\psi_2(t) = c_2 - c_1 t$, и окончательно

$$i(t) = I_{\max} \text{sign}(c_2 - c_1 t); \quad \psi_0 = c_0 \geq 0.$$

Для определения параметров c_1 и c_2 закона управления можно снова воспользоваться граничными условиями $\omega(0)=0$,

$$\omega(T)=0, \quad \int_0^T \omega(t) dt = \varphi, \quad \text{однако неизвестный коэффициент } c_0 \text{ не}$$

входит в выражения для $i(t)$ и $\omega(t)$ и останется неопределённым, т. е. исходная предпосылка о том, что $\psi_0 \geq 0$, не может быть подтверждена, и наше предположение о структуре управления вида (2.41) обосновать не удаётся.

Таким образом, наша попытка сформировать с помощью принципа максимума оптимальное управление $i(t)$ с учётом ограничения $|i(t)| \leq I_{\max}$ завершилась неудачей и была предпринята с учебными целями для иллюстрации основного условия

применимости этого метода – линейности уравнений движения и функционала Q относительно управления. Это условие, как следует из (2.32) и (2.33) в поставленной задаче не выполняется. Вместе с тем нелинейность уравнения (2.33), не является препятствием для решения задачи с помощью уравнения Эйлера. Для этого неравенство $|i(t)| \leq I_{\max}$ преобразуем в ограничительное равенство путём введения дополнительной переменной z (для $i(t) \geq 0$): $i(t) = I_{\max} - z$ или

$$i - I_{\max} + z^2 = 0. \quad (2.42)$$

В результате задача поиска минимума функционала

$$Q = \int_0^T i^2(t) dt = \int_0^T (J\dot{\omega} + M_c)^2 dt \rightarrow \min$$

должна содержать два ограничения равенства:

$$\int_0^T \omega(t) dt = \varphi; \quad i - I_{\max} + z^2 = 0.$$

Составим функцию Лагранжа, включающую эти ограничения:

$$F = i^2 + \lambda_1 \omega + \lambda_2(t) \cdot (i - I_{\max} + z^2), \quad \text{или} \\ F = (J\dot{\omega} + M_c)^2 + \lambda_1 \omega + \lambda_2(t) \cdot (J\dot{\omega} + M_c - I_{\max} + z^2). \quad (2.43)$$

Сформировав указанным образом функцию Лагранжа, мы получаем классическую вариационную задачу без ограничений. Решим её с помощью уравнений Эйлера для двух переменных ω и z :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{\omega}} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

С учётом изопериметрического условия получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \frac{d}{dt} (2J^2 \dot{\omega} + 2JM_c + \lambda_2(t)J) = \lambda_1 - 2J^2 \ddot{\omega} - \dot{\lambda}_2 J = 0; \\ 2\lambda_2 z = 0; \\ \int_0^T \omega(t) dt = \varphi. \end{cases} \quad (2.45)$$

Система трёх уравнений (2.45) для четырёх неизвестных $\omega(t)$, $z(t)$, λ_1 , $\lambda_2(t)$ содержит одну свободную переменную, в качестве которой удобно взять $\lambda_2 = \text{const}$.

Тогда (2.45) распадается на два независимых уравнения:

$$\lambda_1 - 2J^2 \ddot{\omega} = 0$$

с решением $\omega = \frac{\lambda}{4J^2} t^2 + c_1 t + c_0$;

$$i(t) = \frac{J}{c_m} \dot{\omega} + \frac{M_c}{c_m} = \frac{1}{c_m} \left(\frac{\lambda}{2J^2} t + c_1 + M_c \right), \quad (2.46)$$

полученным ранее в (2.9) – (2.12); и уравнение $z=0$ или $i(t)=I_{\max}$.

Аналогично, для $i(t) \leq 0$ запишем $i(t) \geq -I_{\max}$, или $i + I_{\max} - z^2 = 0$, и придём к равенству: $i(t) = -I_{\max}$.

Общее решение

$$|i(t)| = I_{\max}. \quad (2.47)$$

Вид полученного решения (2.46), (2.47) свидетельствует о том, что искомый экстремум функционала Q достигается на кривых, составленных из фрагментов экстремали (2.46) и отрезков границы допустимой области (2.47), и для завершения решения задачи осталось найти точки перехода (сопряжения) от экстремали к границе и обратно.

Рассмотрим общий случай такого перехода, когда имеются две точки сопряжения (рис. 2.19).

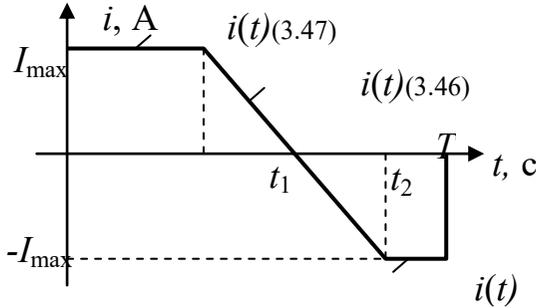


Рис. 2.19. Общий случай сопряжения экстремали (2.46) и границ допустимой области (2.47)

Из рис. 2.19 вытекает структура оптимального управления $i(t)$:

$$i(t) = \begin{cases} I_{\max}, & 0 \leq t < t_1; \\ \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} - \frac{2I_{\max}}{t_2 - t_1} t, & t_1 \leq t \leq t_2; \\ -I_{\max}, & t_2 < t \leq T; \\ 0, & T < t. \end{cases} \quad (2.48)$$

Определим неизвестные параметры t_1 и t_2 в (2.48).

Из граничных условий $\omega(0)=0$, $\omega(T)=0$ следует, что

$$\int_0^T \dot{\omega}(t) dt = 0. \quad (2.49)$$

(Напомним, что $\int_0^T \dot{\omega}(t) dt = \omega(t)|_0^T = \omega(T) - \omega(0) = 0$).

Подставляя в (2.49) соотношение:

$$\dot{\omega} = \frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J},$$

(см. (2.30)), придём к интегралу

$$\begin{aligned} & \frac{c_m}{J} \int_0^T i(t) dt - \frac{M_c}{J} \int_0^T dt = \\ & = \frac{c_m}{J} \left[\int_0^{t_1} I_{\max} dt + \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt + \int_{t_2}^T (-I_{\max}) dt + \right] - \frac{M_c}{J} \int_0^T dt = 0. \end{aligned}$$

Поскольку из условия сопряжения участков экстремали $i(t_1)=I_{\max}$; $i(t_2)=-I_{\max}$, то

$$\int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = 0,$$

и (2.49) получит вид

$$\begin{aligned} & \frac{c_m I_{\max}}{J} t \Big|_0^{t_1} - \frac{c_m I_{\max}}{J} t \Big|_{t_2}^T - \frac{M_c}{J} t \Big|_0^T = \\ & = \frac{c_m I_{\max}}{J} t_1 - \frac{c_m I_{\max}}{J} (T - t_2) - \frac{M_c}{J} T = 0, \end{aligned}$$

или

$$c_m I_{\max} (t_1 - (T - t_2)) = M_c T. \quad (2.50)$$

Из (2.50), в частности, следует, что с ростом момента сопротивления M_c значение t_2 приблизится к T и участок экстремали с $i(t)=-I_{\max}$ исчезнет.

Для определения двух неизвестных t_1 и t_2 одного уравнения (2.50) недостаточно, и в качестве второго уравнения ис-

пользуем граничное условие $\int_0^T \omega(t) dt = \varphi$.

Поскольку $\omega(t) = \int \dot{\omega}(t) dt = \int \left(\frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J} \right) dt$ имеем

$$\omega(t) = \begin{cases} \left(\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t, & 0 \leq t < t_1; \\ \frac{c_m}{J} \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} t - \frac{I_{\max}}{t_2 - t_1} t^2 \right) - \frac{M_c}{J} t + c_1, & t_1 \leq t \leq t_2; \\ \left(-\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t + c_2, & t_2 < t \leq T; \\ 0, & T < t, \end{cases} \quad (2.51)$$

где постоянные интегрирования c_1 и c_2 определяются из условий сопряжения участков экстремали в точках t_1 и t_2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t_1 &= \frac{c_m}{J} \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} t_1 - \frac{I_{\max}}{t_2 - t_1} t_1^2 \right) - \frac{M_c}{J} t_1 + c_1; \\ \left(-\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t_2 + c_2 &= \frac{c_m}{J} \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} t_2 - \frac{I_{\max}}{t_2 - t_1} t_2^2 \right) - \frac{M_c}{J} t_2 + c_1, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t_1 - \frac{c_m}{J} \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} t_1 - \frac{I_{\max}}{t_2 - t_1} t_1^2 \right) + \frac{M_c}{J} t_1; \\ c_2 &= \left(\frac{c_m I_{\max}}{J} + \frac{M_c}{J} \right) t_2 + \frac{c_m}{J} \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} t_2 - \frac{I_{\max}}{t_2 - t_1} t_2^2 \right) - \frac{M_c}{J} t_2 + c_1. \end{aligned}$$

Отметим, что постоянная c_2 может быть найдена из (2.51) и граничного условия $\omega(T)=0$, т. е.

$$c_2 = \left(\frac{c_m I_{\max}}{J} + \frac{M_c}{J} \right) T.$$

Интегрируем (2.51) по участкам $[0; t_1]$, $[t_1; t_2]$, $[t_2; T]$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \omega(t) dt &= \int_0^{t_1} \left(\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{c_m}{J} \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} t - \frac{I_{\max}}{t_2 - t_1} t^2 \right) - \frac{M_c}{J} t + c_1 \right] dt + \\ &+ \int_{t_2}^T \left[\left(-\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t + c_2 \right] dt = \varphi. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Решая систему уравнений (2.50), (2.52), найдём t_1 и t_2 для заданных параметров привода: $M_c=300$ Н·м; $I_{\max}=200$ А; $c_m=2,5$ Н·м/А; $J=100$ кг·м²; $T=5$ с; $\varphi=100$ рад.

$$\begin{aligned}
 f_{i1}(t_1, t_2) &:= \int_0^{t_1} \left(c_m \cdot \frac{im}{J} - \frac{M}{J} \right) \cdot t \, dt \\
 c_1 &:= \left(c_m \cdot \frac{im}{J} - \frac{M}{J} \right) \cdot t_1 - \frac{c_m}{J} \cdot \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} \cdot im \cdot t_1 - \frac{im}{t_2 - t_1} \cdot t_1^2 \right) + \frac{M}{J} \cdot t_1 \\
 f_{i2}(t_1, t_2) &:= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{c_m}{J} \cdot \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} \cdot im \cdot t - \frac{im}{t_2 - t_1} \cdot t^2 \right) - \frac{M}{J} \cdot t + c_1 \right] dt \\
 c_2 &:= \left(\frac{c_m \cdot im}{J} + \frac{M}{J} \right) \cdot T \\
 f_{i3}(t_1, t_2) &:= \int_{t_2}^T \left[\left(-c_m \cdot \frac{im}{J} - \frac{M}{J} \right) \cdot t + c_2 \right] dt
 \end{aligned}$$

$$c_m := 2.5 \quad M := 300 \quad im := 200 \quad J := 100 \quad T := 5 \quad fi := 100$$

□ Выражения для f_{i1} , f_{i2} , f_{i3}

Given

$$c_m \cdot im \cdot (t_1 - T + t_2) = M \cdot T$$

$$f_{i1}(t_1, t_2) + f_{i2}(t_1, t_2) + f_{i3}(t_1, t_2) = fi$$

$$r := \text{Find}(t_1, t_2) \text{ float}, 5 \rightarrow \begin{pmatrix} 4. + 6.9282 \cdot i & 4. - 6.9282 \cdot i \\ 4. - 6.9282 \cdot i & 4. + 6.9282 \cdot i \end{pmatrix}$$

Рис. 2.20. Программа в пакете Mathcad для решения системы уравнений (2.50), (2.52)

Вычисления в пакете Mathcad (рис. 2.20) дают не имеющие физического смысла комплексные значения t_1 и t_2 . Решение задачи с заданными параметрами не существует. Действительно, введение ограничения на значения тока $|i(t)| \leq I_{\max}$ значительно снижает производительность электропривода, и повернуть вал двигателя на угол $\varphi=100$ рад за время $T=5$ с с данным ограничением невозможно.

Для проверки этого предположения на рис. 2.21 показано изменение угла поворота $\varphi(t)$ при постоянном токе $i(t)=I_{\max}$. Видим, что при $I_{\max}=200$ А угол $\varphi(t)$ достигает заданное значение $\varphi=100$ рад только через 10 с, т. е. имеющее физический

смысл решение вида (2.48) (рис. 2.19) можно получить только при $T > 10$ с.

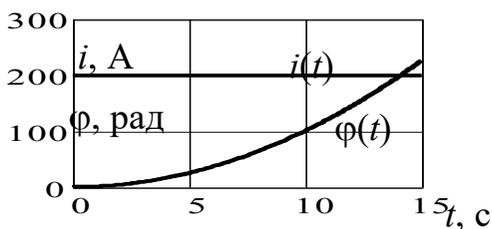


Рис. 2.21. Изменение угла поворота $\varphi(t)$ при постоянном

Пример такого решения задачи показан на рис. 2.22: $t_1=7,33$ с; $t_2=11,07$ с, – а также на рис. 2.23а,б.

При увеличении T свыше 11,5 с граница экстремали $i(t)=-I_{\max}$ исчезает, и вид оптимального управления будет соответствовать рис. 2.24.

$$cm := 2.5 \quad M := 300 \quad im := 200 \quad J := 100 \quad T := 11.5 \quad fi := 100$$

▣Выражения для $fi1, fi2, fi3$

Given

$$cm \cdot im \cdot (t1 - T + t2) = M \cdot T$$

$$fi1(t1, t2) + fi2(t1, t2) + fi3(t1, t2) = fi$$

$$r := \text{Find}(t1, t2) \text{ float}, 5 \rightarrow \begin{pmatrix} 11.065 & 7.3345 \\ 7.3345 & 11.065 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.22. Фрагмент программы для решения системы уравнений (2.50), (2.52) при $T=11,5$ с

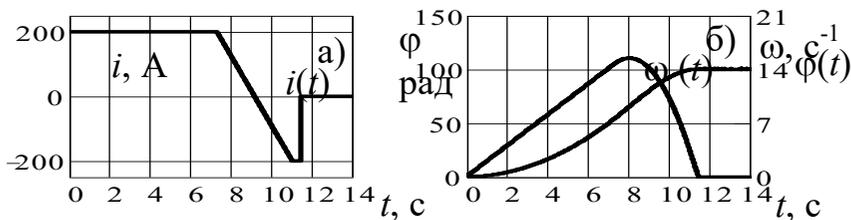


Рис. 2.23. Оптимальное движение привода при $T=11,5$

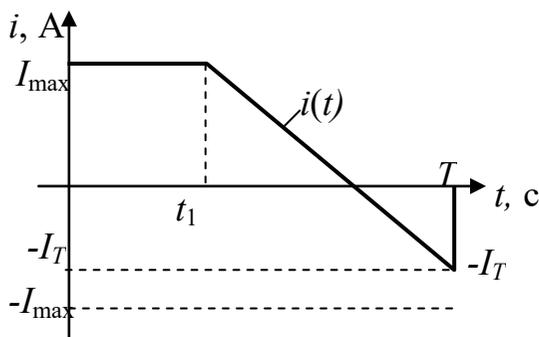


Рис. 2.24. Структура экстремали $i(t)$ с одним участком, лежащим на границе допустимой области

Для экстремали вида, представленного на рис. 2.24, имеем

$$i(t) = \begin{cases} I_{\max}, & 0 \leq t < t_1; \\ -I_T + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot (T - t), & t_1 \leq t \leq T; \\ 0, & T < t, \end{cases} \quad (2.53)$$

где I_T – значение тока при $t=T$ имеем $i(T)=I_T$.

Для определения в (2.53) неизвестных величин t_1 и I_T снова воспользуемся условиями

$$\int_0^T \dot{\omega}(t) dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^T \omega(t) dt = \varphi.$$

С учётом соотношения

$$\omega(t) = \int \dot{\omega}(t) dt = \int \left(\frac{c_m}{J} i(t) - \frac{M_c}{J} \right) dt \quad (2.54)$$

получаем

$$\int_0^T \dot{\omega}(t) dt = \frac{c_m I_{\max}}{J} t_1 + \frac{c_m}{J} \cdot \left[\left(-I_T + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} T \right) \cdot (T - t_1) - \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot \frac{T^2 - t_1^2}{2} \right] - \frac{M_c T}{J} = 0 \quad (2.55)$$

Из (2.53) и (2.54) получаем выражение для $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \begin{cases} \left(\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t, & 0 \leq t < t_1; \\ \frac{c_m}{J} \left[-I_T t + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot \left(Tt - \frac{t^2}{2} \right) \right] - \frac{M_c}{J} t + c, & t_1 \leq t \leq T; \\ 0, & T < t, \end{cases} \quad (2.56)$$

где постоянная интегрирования c определяется из условия сопряжения участка экстремали (2.53) в точке t_1 :

$$\left(\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t_1 = \frac{c_m}{J} \left[-I_T t_1 + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot \left(Tt_1 - \frac{t_1^2}{2} \right) \right] - \frac{M_c}{J} t_1 + c,$$

откуда

$$c = \left(\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t_1 - \frac{c_m}{J} \left[-I_T t_1 + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot \left(Tt_1 - \frac{t_1^2}{2} \right) \right] + \frac{M_c}{J} t_1.$$

Теперь интегрируем $\omega(t)$ по участкам $[0; t_1]$, $[t_1; T]$:

$$\int_0^T \omega(t) dt = \int_0^{t_1} \left(\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t dt + \int_{t_1}^T \frac{c_m}{J} \left[-I_T t + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot \left(Tt - \frac{t^2}{2} \right) \right] - \frac{M_c}{J} t + c = \varphi. \quad (2.57)$$

$$\phi_1(t_1, iT) := \int_0^{t_1} \left(\frac{cm \cdot im}{J} - \frac{M}{J} \right) \cdot t \, dt$$

$$c := \left(\frac{cm \cdot im}{J} - \frac{M}{J} \right) \cdot t_1 - \frac{cm}{J} \cdot \left[-iT \cdot t_1 + \frac{im + iT}{T - t_1} \cdot \left(T \cdot t_1 - \frac{t_1^2}{2} \right) \right] + \frac{M}{J} \cdot t_1$$

$$\phi_2(t_1, iT) := \int_{t_1}^T \left[\frac{cm}{J} \cdot \left[-iT \cdot t + \frac{im + iT}{T - t_1} \cdot \left(T \cdot t - \frac{t^2}{2} \right) \right] - \frac{M}{J} \cdot t + c \right] dt$$

$$cm := 2.5 \quad M := 300 \quad im := 200 \quad J := 100 \quad T := 12 \quad fi := 100$$

▣Выражения для ϕ_1, ϕ_2

Given

$$\frac{cm \cdot im \cdot t_1}{J} + \frac{cm}{J} \cdot \left[\left(-iT + \frac{im + iT}{T - t_1} \cdot T \right) \cdot (T - t_1) - \frac{im + iT}{T - t_1} \cdot \frac{T^2 - t_1^2}{2} \right] - \frac{M \cdot T}{J} = 0$$

$$\phi_1(t_1, iT) + \phi_2(t_1, iT) = fi$$

$$r := \text{Find}(t_1, iT) \text{ float}, 5 \rightarrow \begin{pmatrix} 6.5000 & 12.000 & .20000e21 \\ 149.09 & .15068e22 & -200.00 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.25. Программа в пакете Mathcad для решения системы уравнений (2.55), (2.57)

Совместное решение (2.55) и (2.57) (программа в пакете Mathcad на рис. 2.25) для $T=12$ с даёт $t_1=6,5$ с и $I_T=149,09$ А.

Расчётные графики движения привода, построенные по аналитическим выражениям для тока (2.53), частоты вращения (2.56) и угла поворота привода, представлены на рис. 2.26а,б.

Найденное решение проверено на имитационной модели системы (рис. 2.1). В качестве управляющего воздействия использован ток двигателя $i(t)$ (2.53).

Результаты проверки показаны на рис. 2.27а,б и полностью подтверждают расчётные графики рис. 2.26.

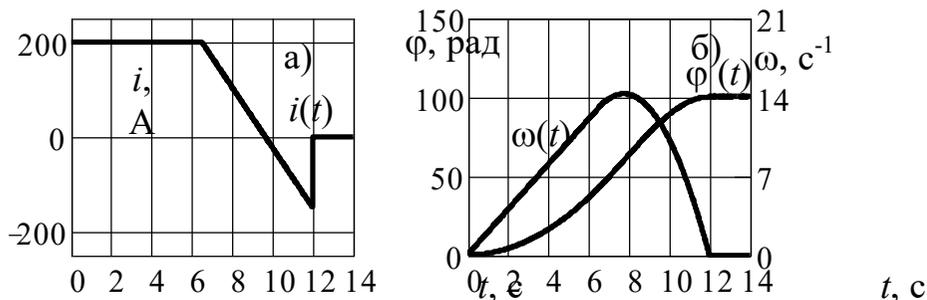


Рис. 2.26. Оптимальное движение привода по экстремалям (2.53) и (2.56)

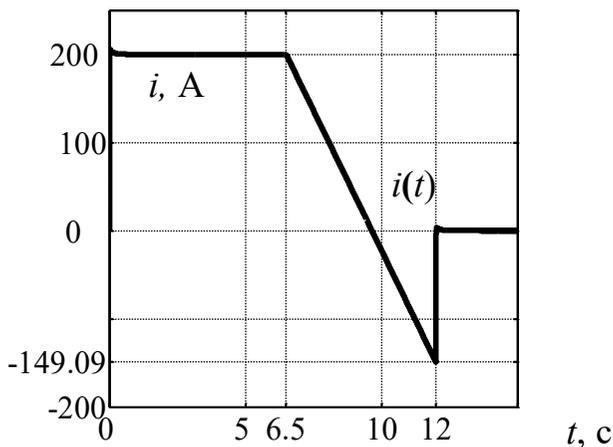


Рис. 2.27 а. Изменение тока при оптимальном управлении (2.53)

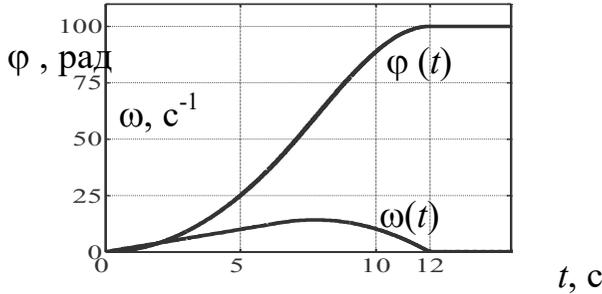


Рис. 2.27 б. Изменение частоты вращения $\omega(t)$ и угла поворота $\varphi(t)$ привода при оптимальном управлении (2.53)

Поставленная задача оптимального энергосберегающего управления с учётом ограничений по току решена для заданного времени угла поворота платформы $T=12$ с. Потери энергии за это время составят

$$P = R \int_0^T i^2(t) dt = R \left[\int_0^{t_1} I_{\max}^2 dt + \int_{t_1}^T \left(-I_T + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot (T - t) \right)^2 dt \right] =$$

$$= RI_{\max}^2 t_1 + R \frac{(I_T^2 - I_{\max} I_T + I_{\max}^2) \cdot (T - t_1)}{3} = 19,17 \text{ кДж.}$$

Чтобы сравнить этот результат с эффективностью оптимального управления без ограничений воспользуемся ранее найденным выражением для потерь

$$P = R \frac{12J^2 \varphi^2 + T^4 M^2}{c_m^2 T^3} \Bigg|_{\substack{J=100 \\ \varphi=100 \\ T=12 \\ c_m=2,5 \\ R=0,06}} = 17,03 \text{ кДж.}$$

Таким образом, управление без ограничений по току в энергетическом смысле эффективнее управления с ограничением. Однако ток при этом принимает значения $i(0)=286,7$ А и $i(12)=-46,7$ А, т. е. в начале движения превышает допустимое значение $I_{\max}=200$ А.

Задача 4. Рассмотрим теперь пример линейной задачи с ограничением на управление, наиболее полно раскрывающий возможности принципа максимума.

Пусть требуется осуществить поворот платформы экскаватора (см. задачи 1,3) на угол $\varphi=100$ рад за кратчайшее время T , при этом управляющее воздействие – ток $i(t)$ – ограничен по модулю $|i(t)| \leq I_{\max}$.

Воспользуемся известным описанием объекта управления (2.31):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J}. \end{cases}$$

Целевой функционал в этой задаче по сравнению с задачами 1,3 изменится:

$$Q = T = \int_0^T 1 dt \rightarrow \min. \quad (2.58)$$

Включим функционал (2.58) в число фазовых координат

$$\dot{x}_0(t) = 1 \quad (2.59)$$

и составим гамильтониан

$$H = \sum_{i=0}^2 \psi_i \dot{x}_i = \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 \left(\frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J} \right) \rightarrow \max. \quad (6.60)$$

Управление $i(t)$ входит в гамильтониан H линейно, и максимум H достигается при максимальном значении слагаемого $\psi_2 \left(\frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J} \right)$, из чего немедленно вытекает структура оптимального управления:

$$i(t) = I_{\max} \operatorname{sign} \psi_2. \quad (2.61)$$

Для определения ψ_2 составим уравнения взаимосвязи гамильтониана H и функций $\psi_i(t)$:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Для H вида (2.60) последнее соотношение образует систему трёх дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_0}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0; \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Решение системы уравнений (2.62):

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \text{const} = c_0; \\ \psi_1 &= \text{const} = c_1; \\ \psi_2 &= -\int \psi_1 dt = c_2 - c_1 t, \end{aligned}$$

и искомая экстремаль опишется выражением:

$$i(t) = I_{\max} \text{sign}(c_2 - c_1 t), \quad (2.63)$$

имеющим в силу линейности $\psi_2(t)$ не более двух интервалов постоянства $i(t)=I_{\max}$ или $i(t)=-I_{\max}$ с точкой перехода (переключения) со значения I_{\max} на значение $(-I_{\max})$ в некоторый момент t_1 . Определим момент t_1 переключения.

Поскольку

$$i(t) = \begin{cases} I_{\max}, & 0 \leq t < t_1; \\ -I_{\max}, & t_1 \leq t \leq T; \\ 0, & T < t, \end{cases}$$

$$\text{и } \omega(t) = \dot{\phi}(t) = \int \ddot{\phi}(t) dt = \int \left(\frac{c_m}{J} i(t) - \frac{M_c}{J} \right) dt,$$

то величина скорости $\omega(t)$ получит вид:

$$\omega(t) = \begin{cases} \left(\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t, & 0 \leq t < t_1; \\ \left(-\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t + c_3, & t_1 \leq t \leq T; \\ 0, & T < t. \end{cases} \quad (2.64)$$

Условие сопряжения участков $\omega(t)$ в точке переключения t_1

$$\left(\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t_1 = \left(-\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t_1 + c_3 \quad (2.65)$$

даёт значение c_3 :

$$c_3 = \frac{2c_m I_{\max}}{J} t_1.$$

Требуемый угол поворота платформы

$$\begin{aligned} \int_0^T \omega(t) dt &= \left(\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) \cdot \frac{t_1^2}{2} + \\ &+ \left(-\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) \cdot \left(\frac{T^2 - t_1^2}{2} \right) + \frac{2c_m I_{\max} t_1}{J} \cdot (T - t_1) = \varphi. \end{aligned} \quad (2.66)$$

С другой стороны

$$\frac{\omega_{\max} T}{2} = \varphi, \quad (2.67)$$

где
$$\omega_{\max} = \left(\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t_1.$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) \frac{t_1 T}{2} = \varphi. \quad (2.68)$$

При заданных параметрах $c_m=2,5$ Н·м/А, $I_{\max}=200$ А, $J=100$ кг·м², $M_c=300$ Н·м система уравнений (2.66), (2.68) позволит определить две содержащиеся в них неизвестные вели-

чины t_1 и T : $t_1=8,944$ с; $T=11,180$ с (см. программу решения в пакете Mathcad на рис. 2.28).

$cm := 2.5$ $M := 300$ $im := 200$ $J := 100$ $fi := 100$

given

$$\left(\frac{cm}{J} \cdot im - \frac{M}{J}\right) \cdot \frac{t_1^2}{2} + \left(\frac{-cm}{J} \cdot im - \frac{M}{J}\right) \cdot \left(\frac{T^2 - t_1^2}{2}\right) + \frac{2cm \cdot im \cdot t_1}{J} \cdot (T - t_1) = fi$$

$$\left(\frac{cm}{J} \cdot im - \frac{M}{J}\right) \cdot \frac{t_1 \cdot T}{2} = fi$$

$$\text{find}(t_1, T) \text{ float}, 5 \rightarrow \begin{pmatrix} -10. & 10. & -8.9443 & 8.9443 \\ -10. & 10. & -11.180 & 11.180 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.28. Программа решения системы уравнений (2.66), (2.68)

Результаты проверки полученного решения на имитационной модели в пакете Matlab представлены на рис. 2.29а,б и подтверждают выполнение всех условий задачи.

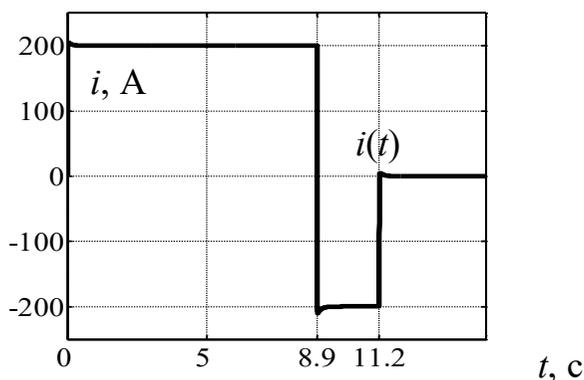


Рис. 2.29 а. Изменение тока при управлении, оптимальном по быстродействию

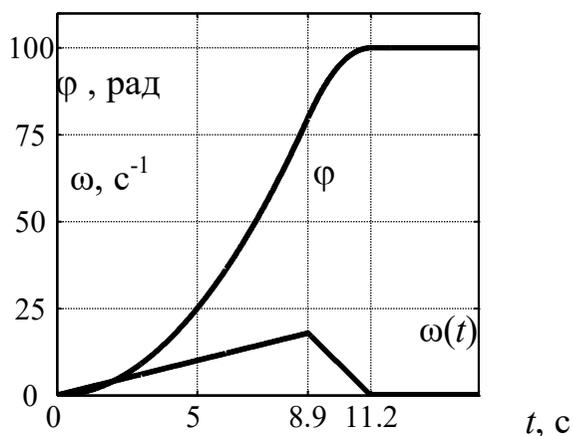


Рис. 2.29 б. Изменение угла поворота и частоты вращения при управлении,

На рис. 2.29б следует обратить внимание на кусочно-линейный характер изменения частоты вращения $\omega(t)$, подтверждающий полученное выше аналитическое выражение (2.64) для $\omega(t)$ и правомерность применения соотношения (2.67), связывающего частоту вращения и угол поворота φ платформы.

Потери энергии при управлении, оптимальном по быстродействию, составляют

$$P = R \int_0^T i^2(t) dt = 0,06 \cdot 200^2 \cdot 11,18 = 26,83 \text{ кДж.}$$

Это значение значительно превышает потери при энергосберегающих управлениях, рассмотренных в предыдущих задачах (17,03 кДж и 19,17 кДж), причём полученный выигрыш в быстродействии оказался практически незначимым (в задаче 3 величина $T=12$ с).

Контрольные задания к разделу

Варианты параметров электрических приводов
для выполнения контрольных заданий

№	J , кг·м ²	M_c , Н·м	c_e , В·с; c_m , Н·м/А	T , с	φ , рад	R , Ом
1	500	100	3	5	100	0,06
2	100	100	3	10	200	0,06
3	200	300	2	10	100	0,06
4	300	200	2	20	200	0,06
5	400	400	2	20	100	0,06
6	500	400	2	25	100	0,06

Задание 1. Для заданного варианта параметров электропривода найти оптимальное управление, обеспечивающее наибольший угол поворота φ привода за заданное время T . Граничные условия по скорости нулевые.

Варианты задания:

- 1) управляющее воздействие – ток двигателя;
- 2) управляющее воздействие – напряжение питания;
- 3) нет ограничений на управление;
- 4) есть ограничение на управление (задаётся разработчиком).

Задание 2. Для заданного варианта параметров электропривода найти оптимальное управление, обеспечивающее наименьшее время поворота привода на заданный угол φ .

Варианты задания:

- 1) управляющее воздействие – напряжение питания;
- 2) нет ограничений на управление;
- 3) есть ограничение на управление (задаётся разработчиком);

4) есть ограничение по нагреву (потери энергии на со-
противлении якоря двигателя) – задаётся разработчиком.

Задание 3. Для параметров объекта, описанного в задаче
2 раздела 3.1, построить оптимальное управление, переводящее
груз по горизонтали на заданное расстояние за минимальное
время. Граничные условия по скорости нулевые. Раскачивания
груза не допускаются.

Варианты задания:

- 1) нет ограничений на управление;
- 2) есть ограничения на управление.

Задание 4. Для заданного варианта параметров электро-
привода найти оптимальное управление, обеспечивающее
наименьшее значение потерь энергии при повороте привода на
заданный угол φ и заданное время T . Момент сопротивления
линейно зависит от частоты вращения. Граничные условия по
скорости нулевые.

Варианты задания:

- 1) управляющее воздействие – ток двигателя;
- 2) управляющее воздействие – напряжение питания;
- 3) нет ограничений на управление;
- 4) есть ограничение на управление (задаётся разработчи-
ком).

Задание 5. Для заданного варианта параметров электро-
привода найти оптимальное управление, обеспечивающее по-
ворот привода на заданный угол φ за минимальное время T .
Момент сопротивления линейно зависит от частоты вращения.
Граничные условия по скорости нулевые.

Варианты задания:

- 1) управляющее воздействие – ток двигателя;
- 2) управляющее воздействие – напряжение питания;
- 3) нет ограничений на управление;
- 4) есть ограничение на управление.

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

1. ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Основные положения теории множеств

В дискретной математике имеется раздел множества.

Множеством называется совокупность (как единое целое) объектов.

Примеры: множество целых чисел, букв, т. д. Множества определены, если элементы множества разные.

Объекты множества будем называть элементами множества. Например, число $8,2$ – элемент множества рациональных чисел, а буква c – элемент множества букв.

Элементы множества будут заключены в фигурных скобках $\{ \}$. Множества обозначаются буквами $A, B, Y \dots$ или буквами с индексами C_1, A_k . Элементы множества обозначаются буквами $a, b, y \dots$ или буквами $b_1, b_2 \dots$.

Пусть элемент b является элементом множества B , то $b \in B$, т. е. элемент b принадлежит множеству B , а $b \notin B$ – элемент b не принадлежит множеству B . Элементы множества различны, но если во множестве имеются повторяющиеся элементы, то оно будет называться мультимножеством.

Для числовых множеств вводится:

N – множество натуральных чисел ($N = \{1, 2, 3, \dots\}$);

Z – множество целых чисел ($Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$);

Q – множество рациональных чисел ($Q = \{m | n \setminus m, n \in Z; n \neq 0\}$);

R – множество вещественных чисел;

C – множество комплексных чисел.

Множества бывают конечными (число его элементов конечно) и бесконечными (число его элементов бесконечно).

Количество элементов конечного множества называется *мощностью* множества ($|X|=n$, если множество X содержит n элементов и n -размерность множества).

Пустым множеством называют множество, которое не содержит элементов. Будем его обозначают \emptyset Например: $\{y \in R \mid 2y^2 + 2y + 15 = 0\} = \emptyset$ Пустое множество будет конечным (так принято). Множество из всех элементов называется *универсумом* (U).

Существуют способы задания множеств - это перечисление и описание. Способ перечисления соответствует перечислению всех элементов множества. Например, множество студентов в группе {Иванов, Сидоров}. Более короткая запись множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - это $X = \{x_i\}, i \in I$.

Способ путем описания множества состоит в том, что указываются свойства, которые имеют все элементы множества. В этом случае используется вид $X = \{x \mid x \text{ имеет свойством } A(x)\}$.

Если не вызывает сомнений из какого множества берутся элементы x , то указание о принадлежности x множеству M можно не делать.

Множество можно задать с помощью характеристической функции $\mu_x = \begin{cases} 1, & x \in X; \\ 0, & x \notin X. \end{cases}$

При этом $\mu_{\emptyset} = 0$; $\mu_U = 1$.

Пример. Пусть на универсуме $U = \{a, b, c, d, e\}$ определено множество $X = \{a, c, d\}$, тогда

$$\mu_x(a) = 1, \mu_x(b) = 0, \mu_x(c) = 1, \mu_x(d) = 1, \mu_x(e) = 0.$$

Произвольные множества X и Y имеют два типа отношений – *отношение равенства и отношение включения*.

Два множества будут равными, если их элементы одинаковы. Обозначение $X=Y$ (X и Y равны) и $X \neq Y$ (X и Y неравны).

Для любых множеств X, Y, Z справедливо $X = X$, $X = Y \rightarrow Y = X$, $(X = Y \text{ и } Y = Z) \rightarrow X = Z$. Для равных множеств порядок элементов в множествах несуществен.

Если элемент множества X будет элементом множества Y , то X включено в Y , т. е. $X \subseteq Y : X \subseteq Y \Leftrightarrow (x \in X \rightarrow x \in Y)$.

Множество X является *подмножеством* множества Y .

Иногда X и Y могут совпадать и \subseteq называется отношением *нестромого включения*.

Можно записать свойства подмножества:

$$X \subseteq X, (X \subseteq Y \text{ и } Y \subseteq Z) \rightarrow X \subseteq Z.$$

Если $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$, то X есть *собственное подмножество* Y и обозначается $X \subset Y$. Отношение между множествами в этом случае будет отношением *нестромого включения*.

Отношения строгого включения обладают свойством:

$$(X \subset Y \text{ и } Y \subset Z) \rightarrow X \subset Z.$$

Если не включено подмножества X во множество Y , то можно записывать это так: $X \not\subseteq Y (X \not\subset Y)$.

1.2. Операции над множествами и их свойства. Диаграммы Эйлера-Венна

Вводятся для множеств операции над множествами.

Объединением множеств X и Y ($X \cup Y$) называется множество, элементы которого являются элементами множества X или Y : $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$.

Пересечением множеств X и Y ($X \cap Y$) называется множество, элементы которого являются элементами этих множеств X и Y : $X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}$.

При этом выполняются включения:

$$X \cap Y \subseteq X \subseteq X \cup Y; \quad X \cap Y \subseteq Y \subseteq X \cup Y.$$

Разностью множеств X и Y называется множество $X \setminus Y$ элементов X , которые не принадлежат Y :

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin Y\}.$$

Дополнением множества X называется множество \bar{X} элементов x , которые не принадлежат множеству X :

$$\bar{X} = U \setminus X.$$

Симметрической разностью (кольцевой суммой) множеств X и Y называется множество $X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

Замечание. $X \setminus Y = X \cap \bar{Y}$.

Универсальное множество графически изображают как точки прямоугольника, а отдельные области этого прямоугольника - это различные подмножества всего множества. Графическое описание универсального множества и его подмножеств называется *диаграммой Эйлера-Венна*.

На диаграмме Эйлера-Венна показываются основные операции над множествами (рис. 1.1-1.5).

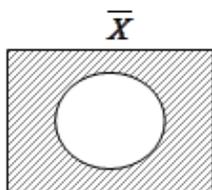


Рис. 1.1

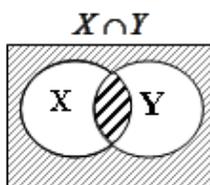


Рис. 1.2

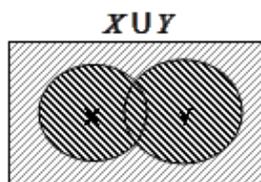


Рис. 1.3

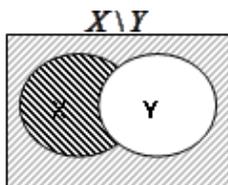


Рис. 1.4

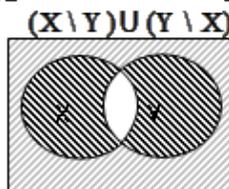


Рис. 1.5

Для множеств X, Y, Z выполняются основные свойства:

1. Коммутативность объединения и пересечения:

$$X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X.$$
2. Ассоциативность объединения и пересечения:

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z,$$

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z.$$
3. Законы дистрибутивности

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z),$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$
4. $X \cup \emptyset = X, \quad X \cap \emptyset = \emptyset.$
5. $X \cup U = U, \quad X \cap U = X.$
6. Законы комплиментарности: $X \cup \bar{X} = U, \quad X \cap \bar{X} = \emptyset.$
7. Законы идемпотентности: $X \cup X = X, \quad X \cap X = X.$
8. Законы де Моргана: $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y}, \quad \overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}.$
9. Закон двойного дополнения $\overline{\bar{X}} = X.$
10. Законы поглощения:

$$X \cup (X \cap Y) = X, \quad X \cap (X \cup Y) = X.$$

Можно показать для множеств:

$$X \subseteq Y; \quad X \cap Y = X; \quad X \cup Y = Y; \quad X \setminus Y = \emptyset; \quad \bar{X} \cup Y = U.$$

Любая из операций над множествами определяется с помощью операции \cap и $\bar{}$.

Операций пересечение, объединение определены для любого множества X_i , где индексы i пробегают множество I . Совокупность множеств $\{X_1, \dots, X_n\}$ называется *покрытием* множества X , если $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$. При условии выполнения $|X| > 0$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$ можно ввести понятие *разбиения* множества.

Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Тогда $\{\{a, b, d\}, \{c, f\}, \{e\}\}$ – разбиение множества X , а $\{\{a, b, d\}, \{b, c, f\}, \{b, e\}\}$ – покрытие множества X .

Декартовым (прямым) произведением множеств

X и Y называется множество упорядоченных пар $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X \text{ и } y \in Y\}$.

1.3. Мощность множества

1. Пусть заданы два конечных множества X и Y . Размерность объединения двух множеств X и Y ($N(X) = |X|$, $N(Y) = |Y|$) Y будет равным $N(X \cup Y) = N(X) + N(Y) - N(X \cap Y)$.

Теорема. Если X_1, \dots, X_n - произвольные множества, то $N(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n) = N(X_1) + N(X_2) + \dots + N(X_n) - N(X_1 \cap X_2) - \dots - N(X_{n-1} \cap X_n) + \dots + N(X_1 \cap X_2 \cap X_3) + \dots + N(X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n) - \dots + (-1)^{n-1} N(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n)$ (вычисление по данной формуле производится методом включений и исключений).

2, Для любого разбиения конечного множества $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ выполнено $|X| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n|$, которое называют *правилом суммы*.

3. Для любого покрытия конечного множества $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ выполнено $|X| \leq |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n|$, которое называется *обобщенным правилом суммы*.

4. Для любых конечных множеств X_1, \dots, X_n справедливо $|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = |X_1| |X_2| \dots |X_n|$, которое называется *правилом произведения*.

Если $X_1, \dots, X_n = X$, то $|X^n| = |X|^n$. $|X^n| = |X|^n$.

5. Если $|X| = n$, то $|p(X)| = 2^n$.

Две пары (x,y) и (u,v) считаются равными тогда и только тогда, когда $x = u$ и $y = v$.

Для любого множества X существует множество, элементы которого входят в различные подмножества множества X . Это множество называется *семейством множества* или

булеаном множества X и обозначается $P(X)$. Множество \emptyset включено в любое множество, поэтому $\emptyset \subseteq P(X)$.

1.4. Взаимно однозначное соответствие между множествами

В многих задачах необходимо сопоставлять элементы множеств. Такое соответствие между элементами двух множеств будет называться *взаимно однозначным соответствием*.

Пусть X и Y два конечных множества размерностями m и n и между ними устанавливаем взаимно однозначное соответствие, если $m=n$.

Первый элемент из множества X может быть сопоставлен с любым из n элементов множества Y , а для каждого такого сопоставления второй элемент множества X может быть сопоставлен с любым из оставшихся $n-1$ элементов множества Y и т. д. Общее число взаимно однозначных соответствий для n -элементных множеств будет равно $n(n-1) \dots 1=n!$

1.5. Счетные и несчетные множества

Множества будут бесконечными, если установление между ними взаимно однозначного соответствия не позволяют работать с бесконечно большим числом элементов множества. Для сопоставления бесконечных множеств будем брать натуральный ряд чисел $N: 1, 2, \dots, n, \dots$ и если бесконечное множество сопоставить во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом чисел, то множество называют *счетным*. В противном случае его называют *несчетным*.

Пример 1 .Рассмотрим множество равносторонних треугольников, в которых вершинами каждого треугольника являются середины сторон построенного треугольника (рис. 1.6). Бесконечное множество равносторонних треугольников приводится во взаимно однозначное соответствие с натуральным

рядом чисел. Бесконечное множество таких равносторонних треугольников является счетным.

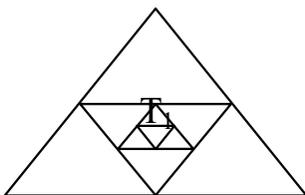


Рис. 1.6

Пример 2. Множество квадратов целых чисел $1, 4, 9, \dots, n^2 \dots$ представляет собой подмножество множества натуральных чисел N , но такое множество является счетным.

Пример 3. Счетным будет множество Z целых чисел.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОШЕНИЙ

2.1. Бинарные отношения. Свойства отношений

Решение многих задач требует рассматривать элементы, между которыми имеется зависимость.

Множество X имеет n -арное отношение, подмножество R_n -й декартовой степени $X^n = X \times X \times \dots \times X$ данного множества. Носителем отношения будет $R \subseteq X^n, X$.

Упорядоченные элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ имеются в отношении R , если $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$.

Одноместное отношение будет *унарным* и соответствует подмножеству X .

Также в задачах применяются *бинарные* отношения $R \subseteq X \times X$. И если $(x, y) \in R$, то будем писать xRy .

Пусть $R = \{(x, y) \mid x \leq y, x, y \in R\}$, определено на множестве. Тогда xRy означает, что $x \leq y$, и в качестве обозначения этого отношения берется символ \leq .

Любому бинарному отношению соответствует матрица

бинарного отношения $R = (r_{ij})_{n \times n}$ ($n = |X|$) r_{ij} , определяются так: $r_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, x_j) \in R; \\ 0, & (x_i, x_j) \notin R. \end{cases}$

Эта матрица дает полную информацию о связях между элементами и вводится как информация на компьютер.

Она состоит из нулей и единиц.

Пример. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, а таблица описывает бинарное отношение:

R	x_1	x_2	x_3
x_1	0	0	1
x_2	1	1	1
x_3	1	0	1

Отношение $R \subseteq X \times X$ называется *рефлексивным*, если $\forall x \in X (x, x) \in R$; и *антирефлексивным*, если $\forall x \in X (x, x) \notin R$; *симметричным*, если $\forall x, y \in X ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$; *антисимметричным*, если $\forall x, y \in X ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R)$; *транзитивным*, если $\forall x, y, z ((x, y) \in R \text{ и } (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R)$.

Следующие отношения для множества (\mathbf{R}) имеют свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности:

$R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \text{ и } x = y\}$; $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \text{ и } x^2 = y^2\}$.

Отношение $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \text{ и } x \leq y\}$ будет рефлексивным, транзитивным и несимметричным.

Если отношение является рефлексивным, то матрица бинарного отношения содержит единицы на главной диагонали. Если отношение симметрично, то матрица будет симметричной относительно главной диагонали, а для антисимметричного отношения произведение элементов, расположенных симметрично диагонали, будет равно нулю.

Если на множестве X определено отношение $V \subseteq X \times X$, то совокупности $G=(X,V)$ называют *графом*, здесь X – множество *вершин* графа, а V – множество линий, соединяющих все или часть этих вершин.

Если в паре (x,y) играет роль порядок следования элементов, то эту линию будем называть *дугой* (или направленным отрезком прямой), а граф G – *ориентированным графом* или *орграфом*. Граф G в противном случае называется *неориентированным графом* или *неорграфом*.

Две противоположно направленные дуги между двумя вершинами в графе обычно заменяют ребром.

Граф задается с помощью матрицы смежности

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ ($n = |X|$) a_{ij} , определяются так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, x_j) \in V; \\ 0, & (x_i, x_j) \notin V. \end{cases}$$

Матрица смежности графа совпадает с матрицей бинарного отношения.

Пример. Пусть матрица бинарного отношения R , заданного на универсальном множестве $U = \{a, b, c, d, e\}$, имеет вид

R	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	0	0	0	1	1
c	0	1	0	0	1
d	0	0	1	0	1
e	1	0	0	0	0

Граф имеет вид (рис. 2.1).

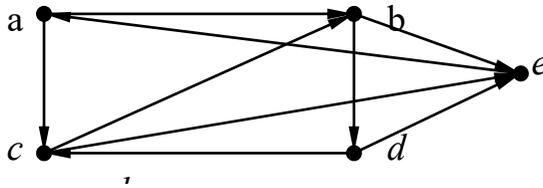


Рис. 2.1

Если отношение V рефлексивно, то в каждой вершине графа G имеется петля; если V симметрично, то любые две вершины графа G соединены парой дуг; если V антисимметрично, то в G любые две вершины x и y ($x, y \in V$) соединены дугой. Граф G имеет транзитивное отношение V , тогда для всякой пары дуг (конец первой совпадает с началом второй) имеется третья дуга (у нее общее начало с первой и общий конец со второй) – *транзитивно замыкающая дуга*.

Отношение будет множеством упорядоченных пар, тогда для него можно ввести операции такие же, что и для множеств (операции объединения, пересечения, разности и дополнения).

Также для отношений определены операции: *инверсией отношения R* (или обратное к отношению R)

$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$. Матрица обратного отношения R^{-1} – это транспонированная матрица отношения, т. е. R^T .

Если R_1, R_2 – отношения на множестве X , тогда *композицией отношений R_1 и R_2* называется отношение:

$$R_1 \circ R_2 = X \times Y = \{(x, y) \mid \exists z : (x, z) \in R_1 \text{ и } (z, y) \in R_2\}.$$

и $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$.

С помощью операции композиции можно определить свойство транзитивности. Если $R \circ R \subseteq R$, то отношение транзитивно.

Для бинарных отношений P, Q, R выполняются:

$$1) (P^{-1})^{-1} = P;$$

- 2) $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$;
- 3) $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ (ассоциативность композиции).

2.2. Отношение эквивалентности и разбиения

Рассмотрим специальные типы отношений.

Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение будем называть отношением эквивалентности.

Классом эквивалентности $K(x)$ элемента x называется множество элементов $y \in X$, каждый из которых находится с этим элементом в отношении эквивалентности

Сущность моделирования устанавливает отношение эквивалентности между двумя системами.

Модель называется изоморфной, если между моделью и реальной системой имеется полное поэлементное соответствие. Имеются модели, элементы которых соответствуют большим частям реальной системы (полного поэлементного соответствие не имеется). Эти модели называются гомоморфными.

2.3. Отношения порядка. Диаграмма Хассе

Эквивалентность является обобщением отношения равенства. Эквивалентные элементы определены как «равные». Обобщение отношения \leq будет называться отношения порядка.

Отношение $R \subseteq X^2$ называется предпорядком, при этом R рефлексивно и транзитивно. Например, отношение $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (1,3)\}$ на $X = \{1,2,3\}$ будет предпорядком. Отношение нестрогого порядка – это рефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение (обозна-

чается $\underline{\pi}$). Антирефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение будет отношением строгого порядка ($\underline{\pi}$).

При этом отношения строгого и нестрогого порядков называются отношениями упорядоченности. Отношение, которое обратное отношению упорядоченности, будет отношением упорядоченности, т. е. $(\underline{\pi})^{-1} = \text{ф}$.

Пример. Пусть Y – некоторое множество. Отношение включения \subseteq на множестве подмножеств $P(Y)$ будет отношением нестрогого порядка.

2. Отношение « x старше y » на некотором множестве людей является отношением строгого порядка.

Если два элемента x и y множества X находятся в отношении порядка, то X называется множеством *линейно упорядоченным или цепью*. В противном случае множество X называется *частично упорядоченным*. Можно в частично упорядоченном множестве выделить цепь.

Цепь с повторяющимися элементами называется мультицепью. Пусть между элементами x и y имеется отношение порядка, тогда они называются *сравнимыми*, в противном случае – *несравнимыми*.

Антицепью называется подмножество частично упорядоченного множества, где два элемента несравнимы. Специальным частично упорядоченного множества $P = \{z \in X | x \underline{\pi} z \underline{\pi} y\}$ будет замкнутый интервал $[x, y]$, а для множества $P = \{z \in X | x \underline{\pi} z \underline{\pi} y\}$ интервал (x, y) будет открытым.

Двойственным к частично упорядоченному множеств будет частично упорядоченное множество, которое определено на том же носителе с помощью обратного отношения.

Пусть имеем множество X с отношением на не множествем *частичного порядка* $\underline{\pi}$.

Элемент y покрывает элемент x , если $x \underline{\pi} y$ и нет никако-

го элемента $z \in X$, такого что $x \underline{\pi} z \underline{\pi} y$. Т. е. y покрывает x тогда, когда $x \underline{\pi} y$ и $[x,y]=\{x,y\}$. Частично упорядоченное множество представляется в виде схемы.

Диаграммой Хассе некоторого частично упорядоченного множества X будет граф, вершинами которого являются элементы множества X , а пара (x,y) образует ребро, при этом элемент y покрывает элемент x . Если $x \underline{\pi} y$, то y рисуют с большей вертикальной координатой, чем x .

Пример. Отношение включения \subseteq на булеане $P(X)$, $X=\{a, b, c\}$. Оно будет частично упорядоченным множеством.

Множество $P(X)$ имеет восемь элементов: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$. Диаграмма Хассе этого отношения (рис. 2.2):

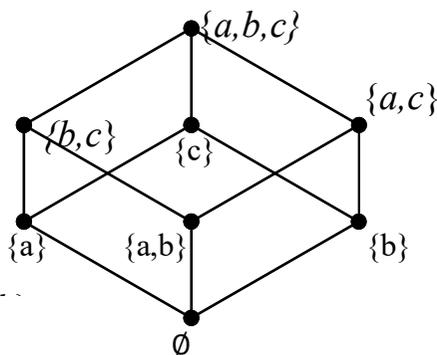


Рис. 2.2

Чтение диаграмм Хассе состоит: $x \underline{\pi} y$, если можно пройти из точки x в точку y вдоль восходящих отрезков, соединяющих точки (смена направления движения допускается в точках диаграммы).

Если X и Y два частично упорядоченных множества и их диаграммы Хассе совпадают, то эти частично упорядоченные множества будут иметь одинаковую структуру.

Пусть имеется частично упорядоченное множество X . Элементов x и y из множества X для них *верхней гранью* называется элемент $z \in X$, такой, что $z \neq x$ и $z \neq y$, а их *нижней гранью* – любой элемент $t \in X$, такой, что $t \neq x$ и $t \neq y$.

На диаграмме Хассе $x \underline{t} y$ означает, что имеется путь из x в y ; верхняя грань x и y – это вершина, в которой есть путь из x и y ; нижняя грань x и y – это вершина, из которой есть путь и в x , и в y .

Для некоторых элементов верхняя и нижняя грань не существует или не единственна (причем различные верхние (или нижние) грани могут быть несравнимы).

3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

3.1. Составные высказывания

Основные понятия

В формально-логических высказываниях встречаются истинные и ложные предложения.

Повествовательное предложение (если оно истинно или ложно) называется **высказыванием**.

Будем обозначать высказывания буквами: A, B, C, \dots

Элементарные высказывания называются **атомами**.

Употребляемые в обычной речи логические связки "и", "или", "если..., то...", "эквивалентно" и т. д. помогают строить новые, "сложные" высказывания.

В языке из простых предложений с помощью логических связок можно строить сложные предложения. В логических высказываниях можно также образовывать **составные высказывания**.

От исходных высказываний и соответствующей трактовки связок можно определить его истинность или ложность

Для высказывания можно определить его **истинностное значение** или ложность («И», если высказывание истинно или «Л», если высказывание ложно).

Составные высказывания

При помощи логических операций из атомов (элементарных высказываний) строятся сложные высказывания.

Порядок их выполнения определяется скобками.

Характеристика высказывания в таблице истинности.

Пример. Пусть $D = \overline{(A \wedge B)} \vee C$, то таблица истинности:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$D = \overline{(A \wedge B)} \vee C$
<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>
<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>
<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>

3.2. Основные логические операции.

Формулы логики

Логические операции.

Рассмотрим *A*, *B* – некоторые высказывания, для которых не известно их истинностное значение.

Отрицанием высказывания *A* называется высказывание \overline{A} ($\neg A$), которое истинно, если *A* – ложно, и ложно, если *A* – истинно. "НЕ" – связке соответствует логическая операция отрицания. Для отрицания таблица истинности записывается так:

<i>A</i>	\overline{A}
<i>И</i>	<i>Л</i>
<i>Л</i>	<i>И</i>

Конъюнкцией высказываний A и B называется высказывание $A \wedge B$ (" A и B "), которое истинно тогда, когда A , B – истинно. "И" - связке операция конъюнкция, обозначается операция знаком \wedge (или $\&$).

Таблица истинности для этой операции:

A	B	$A \wedge B$
I	I	I
I	L	L
L	I	L
L	L	L

Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание $A \vee B$ (" A или B "), которое ложно тогда, когда A , B – ложны. "ИЛИ" соответствует операция дизъюнкция, обозначение операции – знак \vee .

Таблица истинности дизъюнкции:

A	B	$A \vee B$
I	I	I
I	L	I
L	I	I
L	L	L

Связке "ЕСЛИ...,ТО" соответствует логическая операция импликации, обозначение операции знак \rightarrow .

Импликацией высказываний A и B называется высказывание $A \rightarrow B$ (читается "если A , то B "), которое ложно тогда, когда A – истинно, а B – ложно. Связке "ЕСЛИ...,ТО" будет сопоставлена логическая операция импликации, которая имеет обозначение знак \rightarrow .

Таблица истинности импликации:

A	B	$A \rightarrow B$
I	I	I
I	L	L
L	I	I
L	L	I

Высказывание A будет называться *условием* или *посылкой*, высказывание B - заключением или следствием импликации.

Эквиваленцией высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$ (" A тогда, когда B " или " A эквивалентно B "), которое считается истинным тогда, когда оба высказывания A и B имеют одинаковое истинностное значение.

Эквиваленция $A \leftrightarrow B$ определяется следующим образом: "Для того, чтобы A , необходимо и достаточно, чтобы B ".

Таблица истинности эквиваленции:

A	B	$A \leftrightarrow B$
I	I	I
I	L	L
L	I	L
L	L	I

Операция **Стрелка Пирса** (отрицанием дизъюнкции) - \downarrow .

Эта операция задается таблицей:

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Операция **Штрих Шеффера** (отрицанием конъюнкции) - $|$.

Логическая операция задается таблицей:

p	q	$p q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Сумма по модулю два (отрицанием эквивалентности) - \oplus

Логическая операция задается таблицей:

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Формулы логики высказываний

Основная задача логики - это изучение логических форм составных высказываний при помощи логических операций.

Вводятся формулы логики высказываний:

Элементарные формулы (атомы) являются формулами логики высказываний.

1. Если A, B – формулы, то \bar{A} , $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ тоже будут формулами логики высказываний.

2. Формулы логики высказываний это те, для которых выполняется 1, 2.

В логических формулах можно уменьшить число скобок (опустить внешнюю пару скобок) или упорядочить знаки логических операций по приоритету: \leftrightarrow , \rightarrow , \vee , \wedge , $\bar{}$.

Формулы логики, принимающие значение "истина" при любых элементарных высказываниях, входящих в формулу, будем называть **тождественно истинными** (законами логики, тавтологиями).

Формулы логики, для которых они всегда ложны, называются **тождественно ложными** (или противоречиями).

Формулы логики, принимающие значение «ложь» хотя бы на одном наборе элементарных высказываний, входящих в формулу, называются **опровержимыми**, и в противном случае, если они принимают значение «истина» хотя бы на одном наборе значений атомов, входящих в формулу, называются **выполнимыми**.

P и Q высказывания называются *равносильными*, если их истинностные значения совпадают при любом выборе истинностных значений.

$P \equiv Q$ означает, что формулы P и Q равносильны.

3.3. Законы логики. Равносильные преобразования

Законы логики (свойства логических операций)

Формулы логики:

\equiv

$A = A$ - закон двойного отрицания.

$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ - закон коммутативности конъюнкции.

$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ - закон коммутативности дизъюнкции.

$(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ - закон ассоциативности конъюнкции.

$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ - закон ассоциативности дизъюнкции.

$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ - закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции.

$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ - закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции.

$\overline{A \vee B} \leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ - закон отрицания дизъюнкции.

$\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ - закон отрицания конъюнкции.

$\overline{A \rightarrow B} \leftrightarrow A \wedge \overline{B}$ - закон отрицания импликации.

$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ - закон выражения эквивалентности через конъюнкцию и импликацию.

$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$ - закон контрапозиции.

$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$ - закон силлогизма.

Законы можно доказать так:

Построить таблицы истинности для левых и правых частей эквивалентности, значения для всех атомов должны быть одинаковые

Строится значение всей формулы и проверяется, что формула является тавтологией.

Пример 1. Докажем закон отрицания конъюнкции ($\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$).

1. Вычисляются значения для $\overline{A \wedge B}$ и $\overline{A} \vee \overline{B}$ и сравниваются.

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A} \vee \overline{B}$
И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И
Л	Л	Л	И	И	И	И

Найдем значение $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ и убедимся, что при всех значениях A и B - это истинное значение.

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$
И	И	И	Л	Л	Л	Л	И
И	Л	Л	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И	И

Формула B - **логическое следствие** формул A_1, A_2, \dots, A_n , если формула B принимает истинные значения такие же, при которых истинна каждая из формул A_1, A_2, \dots, A_n .

Формула $(A_1, A_2, \dots, A_n) \Rightarrow B$ говорит, что B – логическое следствие формул A_1, A_2, \dots, A_n .

Пример 2. $(A \rightarrow B, A \rightarrow \overline{B}) \Rightarrow \overline{A}$.

Докажем это с помощью таблицы истинности.

A	B	$A \rightarrow B$	\overline{B}	$A \rightarrow \overline{B}$	\overline{A}
И	И	И	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	И	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И

Противоречие логически влечет любую формулу.

Тавтология логически следует из любой формулы логики.

Формулы F и G будут называться равносильными ($F \equiv G$), если они являются логическими следствиями друг друга.

Теорема 1. $A \Rightarrow B$ тогда, если $A \rightarrow B$ – тавтология.

Теорема 2. $A \equiv B$, тогда, если $A \leftrightarrow B$ – тавтология.

4. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ.

4.1. Основные определения и действия с ними

Если переменная x принимает значения 0 или 1, то она называется булевой (логической, двоичной). Функция F , зависящая от булевых переменных x_1, x_2, \dots, x_n и принимающая также значения 0 или 1, называется булевой (логической, двоичной) и обозначается $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Булевы функции F от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n могут быть заданы с помощью таблицы истинности, имеющей 2^n строк и $n + 1$ столбцов. В левой части таблицы содержатся наборы значений n переменных, расположенные в порядке возрастания, а в правой ее части имеются значения функции F на соответствующих наборах.

Булева функция n переменных F однозначно определяется 2^n - разрядным булевым вектором ее значений (F)

Множество наборов, при которых функция F имеет значение 1, называется характеристическим (N_F).

Элементарные булевы функции.

Булевы (логические) функции от одной переменной $2^{2^1} = 2^2 = 4$.

Таблица истинности:

x	0	x	\bar{x}	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Элементарные булевы функции от двух переменных

Конъюнкция	Дизъюнкция	Импликация	Эквиваленция	Сложение по модулю два	стрелка Пирса
$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0

Функция $x_1 \wedge x_2$ называется конъюнкцией .

Конъюнкция равна единице, если $x_1=1$ и $x_2=1$.

Можно ввести другое название конъюнкции — логическое умножение, так как ее таблица истинности совпадает с таблицей обычного умножения для чисел 0 и 1.

Функция $x_1 \vee x_2$ называется дизъюнкцией. Дизъюнкция $x_1 \vee x_2$ равна единице, только если $x_1=1$ или $x_2=1$ (т. е. хотя бы одна переменная равна единице)

Часто ее называют функцией ИЛИ.

Булевы функции могут быть определены аналитически с помощью формул.

Пусть формула определяет булеву функцию F . Она при этом тождественно равна единице, в этом случае она называется тождественно истинной.

Если формула определяет булеву функцию F и она тождественно равна нулю, то ее будем называть тождественно ложной.

Если формулы a и b имеют одни и те же переменные и определяют одну и ту же булеву функцию F , то формулы a и b называются равносильными.

Основные равносильности

Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

Идемпотентность

$$x \vee x \vee \dots \vee x = x, \quad x x \dots x = x.$$

Коммутативность

$$x \vee y = y \vee x, \quad xy = yx.$$

Ассоциативность

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x(yz) = (xy)z.$$

Дистрибутивность

$$x(y \vee z) = (xy) \vee xz, \quad x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)..$$

Законы де Моргана

$$\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}, \quad \overline{x \vee y} = \overline{x} \overline{y}.$$

Формулы с константами

$$x \vee \overline{x} = 1, \quad 0 \vee x = 1, \quad 1 \vee x = 1, \quad x \overline{x} = 0, \quad 0x = 0, \quad 1x = 1.$$

Дополнительные равносильности

$$x \rightarrow y = \overline{x} \vee y, \quad x \leftrightarrow y = \overline{x} \vee y, \quad x \leftrightarrow y = \overline{xy} \vee xy,$$

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x), \quad x \oplus y = \overline{xy} \vee x \overline{y},$$

$$x \oplus 1 = \overline{x}, \quad x \vee y = x \oplus x \oplus xy, \quad x \downarrow y = \overline{x \vee y},$$

$$x|y = \overline{xy}, \quad xy \vee \overline{xy} = x, \quad (x \vee y)(x \vee \overline{y}) = x, \quad \text{(законы склеивания),}$$

$$x \vee xy = x, \quad \text{(закон поглощения).} \quad xy \vee \overline{xz} = xy \vee z \overline{x} \vee yz, \quad \text{(закон обобщенного склеивания).}$$

Переменная x_i булевой функции F несущественна (фиктивна), если изменение значения x_i в каждом наборе значений x_1, x_2, \dots, x_n не меняет значения функции. Имеется формула булевой функции, в которой отсутствует x_i .

4.2. Совершенная дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (СДНФ и СКНФ). Дизъюнктивные нормальные формы

Введем определение элементарной конъюнкции. Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция, в которой литералов (переменных или их отрицаний) встречается не более чем по одному разу.

Элементарная конъюнкция булевой функции $F(x_1, \dots, x_n)$ содержащая n литералов, называется полной (минтермом). Дизъюнкция для конечного множества элементарных конъюнкций булевой функции F называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) функции F .

Число элементарных конъюнкций (слагаемых, термов), составляющих ДНФ, называется длиной ДНФ. ДНФ $F = x_1 \overline{x_2} \vee x_2 x_3 x_4 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}$ имеет длину равную 3.

Для произвольной булевой функции F существует много различных реализующих ее ДНФ.

Две (или несколько) ДНФ, реализующих одну и ту же булеву функцию F , называются эквивалентными (или равносильными).

ДНФ булевой функции F , состоящая только из полных элементарных конъюнкций, называется совершенной ДНФ (СДНФ).

С помощью формул равносильности булеву функцию можно преобразовать к ДНФ, а потом к СДНФ.

Конъюнктивные нормальные формы

Элементарной дизъюнкцией будем называть дизъюнкцию литералов (переменных или их отрицаний), взятых не более чем по одному разу.

Дизъюнкции $x_1 \vee \overline{x_3}$, $x_1 \vee x_2 \vee x_3, 1$ будут элементарными. Первая элементарная дизъюнкция имеет ранг (число литералов) 2, вторая – 3, а третья – 0.

Дизъюнкция $x_1 \vee \overline{x_1}$, $x_1 \vee x_2 \vee x_2$, не являются элементарными. Элементарная дизъюнкция булевой функции $F = F(x_1, \dots, x_n)$, содержащая n литералов, называется полной.

Конъюнкция любого конечного множества элементарных дизъюнкций булевой функции F называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ) функции F .

Число элементарных дизъюнкций, составляющих КНФ, называется длиной КНФ. Две (или несколько) КНФ, определяющие одну и ту же булеву функцию F , называются эквивалентными (равносильными). КНФ булевой функции F , состоящая из полных элементарных дизъюнкций, будет называться совершенной КНФ (СКНФ).

Аналитический способ приведения к СДНФ

ПФ к СДНФ приводится так: применив равносильные формулы для элементарных конъюнкций (если в сомножителях имеются не все переменные, то следует умножить на единицы, представленные в виде дизъюнкций каждой недостающей переменной с ее отрицанием) и раскрыть скобки по дистрибутивному закону, а затем исключить повторения.

К СКНФ приводится также, но только к элементарным дизъюнкциям, которые содержат слагаемыми не все переменные, прибавляют нули, представленные в виде конъюнкций каждой недостающей переменной с ее отрицанием.

Пример. Пусть имеем ПФ ДНФ $\overline{X} \wedge Z \vee Y \wedge Z$. Приведем ее к СДНФ аналитически. В первую элементарную конъюнкцию не входит переменная Y , во вторую – переменная X .

Первую элементарную конъюнкцию умножим на $1 \equiv Y \vee \overline{Y}$, а вторую – на $1 \equiv X \vee \overline{X}$.

$$\begin{aligned}
& \bar{X} \wedge Z \vee Y \wedge Z \equiv \bar{X} \wedge Z \wedge (Y \vee \bar{Y}) \vee Y \wedge Z \wedge (X \vee \bar{X}) \equiv \\
& \equiv X \wedge Z \wedge Y \vee X \wedge Z \wedge \bar{Y} \vee Y \wedge Z \wedge X \vee Y \wedge Z \wedge \bar{X} \equiv \\
& \equiv \bar{X} \wedge Z \wedge Y \vee \bar{X} \wedge Z \wedge \bar{Y} \vee Y \wedge Z \wedge X \vee Y \wedge Z \wedge \bar{X} \equiv \\
& \equiv \bar{X} \wedge Z \wedge Y \vee \bar{X} \wedge Z \wedge \bar{Y} \vee Y \wedge Z \wedge \bar{X} - \text{СДНФ}
\end{aligned}$$

4.3. Табличный способ приведения к СДНФ и к СКНФ

Табличный способ приведения к СДНФ

Используя таблицу истинности, можно получить СДНФ для ПФ: построим таблицу истинности ПФ и найдем строки, где формула имеет истинностное значение 1, и в этой строке рассмотрим элементарную конъюнкцию (переменная, принимающая значение 1, входит в нее без отрицания, а 0 – с отрицанием). Составим дизъюнкцию всех этих элементарных конъюнкций - это и будет СДНФ.

Пример. Получить из ПФ $X \vee \bar{Y} \leftrightarrow Z$ к СДНФ.

Построим таблицу истинности :

СДНФ: $\bar{X} \wedge \bar{Y} \wedge Z \vee \bar{X} \wedge \bar{Y} \wedge \bar{Z} \vee X \wedge \bar{Y} \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge Z.$

Табличный способ приведения к СКНФ

Используя таблицу истинности, можно составить СКНФ для ПФ: составим таблицу истинности данной ПФ и найдем строки, где формула имеет истинностное значение 0, и в этой строке рассмотрим элементарную дизъюнкцию (переменная, принимающая значение 1, входит в нее без отрицания, а 0 – с отрицанием). Составим конъюнкцию всех этих элементарных дизъюнкций - это и будет СКНФ.

Пример. Привести ПФ $X \vee \bar{Y} \leftrightarrow Z$ к СКНФ. Построим таблицу истинности и на ее основе составим СКНФ.

X	Y	Z	$X \vee \bar{Y} \leftrightarrow Z$	Элементарных дизъюнкций
0	0	0	0	$X \vee Y \vee Z$
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	0	$X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}$
1	0	0	0	$\bar{X} \vee Y \vee Z$
1	0	1	1	
1	1	0	0	$\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z$
1	1	1	1	

СКНФ:

$$(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}) \wedge (\bar{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z).$$

Можно убедиться (по таблице истинности), что тождественно ложные формулы не встречаются для СДНФ; тождественно истинные формулы не имеют СКНФ.

Если ПФ имеет СДНФ или СКНФ, то они получены единственным образом.

Минимизация булевых функций в классе ДНФ

Всякую булеву функцию можно представить в ДНФ. Как известно, представление данной булевой функции в виде ДНФ можно осуществить не единственным образом. В связи с этим ставится вопрос о приведении булевой функции к такой ДНФ, которая была бы в некотором смысле наиболее простой по сравнению с другими ДНФ.

ДНФ называется *минимальной*, если она содержит по сравнению с другими эквивалентными ей формами минимальное количество символов (при подсчете символов учитывается каждое вхождение символа в формулу).

В простейших случаях минимизацию функции можно осуществить, выписав все ДНФ для этой функции и выбрав из них минимальную. Однако такой подход к решению задачи в общем случае может оказаться очень трудоемким. Поэтому

рассмотрим другие способы решения задачи минимизации булевой функции в классе ДНФ.

Пример 1. Разработать схему управления подвижной платформы с четырьмя независимыми ведущими электродвигателями-колёсами. Органы управления: кнопки – «Вперёд», «По часовой», «Против часовой».

Пусть X_1 – кнопка «Вперёд»; X_2 – кнопка «По часовой стрелке»; X_3 – кнопка «Против часовой стрелки».

Для упрощения объединим левую пару колес в одну переменную, а правую – в другую. Тогда Y_1 – Левая пара колес, движение вперед; Y_2 – Левая пара колес, движение назад; Y_3 – Правая пара колес, движение вперед; Y_4 – Правая пара колес, движение назад.

Составим таблицу истинности:

X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	Y4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0

Используя метод СДНФ и выбирая «1», получим:

X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	Y4
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0

Для каждой операции получим следующие выражения:

$$\underline{Y1} = X1 \wedge \neg X2 \wedge \neg X3 \vee \neg X1 \wedge X2 \wedge \neg X3 = \neg X3 \wedge (X1 \wedge \neg X2 \vee \neg X1 \wedge X2) = \underline{\neg X3 \wedge (X1 \oplus X2)};$$

X1	X2	X3	$\neg X3$	$X1 \oplus X2$	$\neg X3 \wedge (X1 \oplus X2)$
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1

$$\underline{Y2} = \underline{\neg X1 \wedge \neg X2 \wedge X3};$$

X1	X2	X3	$\neg X1$	$\neg X2$	$X1 \wedge \neg X2$	$\neg X1 \wedge \neg X2 \wedge X3$
0	0	1	1	1	1	1

$$\underline{Y3} = X1 \wedge \neg X2 \wedge \neg X3 \vee \neg X1 \wedge \neg X2 \wedge X3 = \neg X2 \wedge (X1 \neg \wedge X3 \vee \neg X1 \wedge X3) = \underline{\neg X2 \wedge (X1 \oplus X3)};$$

X1	X2	X3	$\neg X2$	$X1 \oplus X3$	$\neg X2 \wedge (X1 \oplus X3)$
0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1

$$\underline{Y4} = \underline{\neg X1 \wedge X2 \wedge \neg X3};$$

X2	X1	X3	$\neg X1$	$\neg X3$	$\neg X1 \wedge X2$	$\neg X1 \wedge X2 \wedge \neg X3$
1	0	0	1	1	1	1

Применен метод построения алгоритма управления подвижной платформы способом формирования логических функций. Составив таблицу истинности для моей задачи, используя её для построения СДНФ и минимизировав полученные операции, привел к ПФ и в итоге для каждой команды получены следующие уравнения:

$$\underline{Y1 = \neg X3 \wedge (X1 \oplus X2);}, \quad \underline{Y2 = \neg X1 \wedge \neg X2 \wedge X3;},$$

$$\underline{Y3 = \neg X2 \wedge (X1 \oplus X3);} \quad \underline{Y4 = \neg X1 \wedge X2 \wedge \neg X3;}$$

. Разработана схема управления электродвигателем, который совершает поступательное движение на рабочем участке, а именно перемещается влево и вправо. уравнения:

$$1) \quad Y1 = S1 \wedge \neg S2 \wedge K1$$

$$2) \quad Y2 = \neg S1 \wedge S2 \wedge K2.$$

Пример 2. Разработать схему управления электродвигателем объекта, совершающего возвратно-поступательные движения на рабочем участке. Цель движения – поместить объект в центральную зону рабочего участка. Реверс двигателя совершается при наезде на левый или правый датчики, находящиеся на концах рабочего участка. Остановка происходит по сигналу датчика, расположенного в центральной зоне. Орган управления – тумблер «Пуск».

Решение: Пусть: S1 – «Тумблер включения»,

Тогда Y1 – «Срабатывание левого датчика реверса»;

Y2 – «Срабатывание правого датчика реверса»;

Y3 – «Срабатывание датчика остановки в центральной зоне рабочего участка»;

Y- «Остановка движения» .

Составим таблицу истинности

S1	Y1	Y2	Y3	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Используя метод СДНФ и выбирая «1», получим:

S1	Y1	Y2	Y3	Y
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1

Имеем

$$Y = (S1 \wedge \overline{Y1} \wedge \overline{Y2} \wedge Y3) \vee (S1 \wedge \overline{Y1} \wedge Y2 \wedge Y) \vee (S1 \wedge Y1 \wedge \overline{Y2} \wedge Y3).$$

Далее минимизируем полученную нами функцию:

$$Y4 = S1 \wedge Y3 \wedge (\overline{Y1} \wedge \overline{Y2} \vee \overline{Y1} \wedge Y2 \vee Y1 \vee Y2);$$

$$Y4 = S1 \wedge Y3 \wedge (\overline{Y1} \wedge (\overline{Y2} \wedge Y2) \vee Y1 \wedge Y2);$$

$$Y4 = S1 \wedge Y3 \wedge (\overline{Y1} \vee Y1 \wedge Y2);$$

$$Y4 = S1 \wedge Y3 \wedge ((\overline{Y1} \vee Y1) \wedge (\overline{Y1} \vee Y2));$$

$$Y4 = S1 \wedge Y3 \wedge (\overline{Y1} \vee Y2).$$

Составив таблицу истинности, применив метод СДНФ и минимизировав функцию, получим для остановки движения объекта следующую функцию: $Y4 = S1 \wedge Y3 \wedge (\overline{Y1} \vee Y2)$.

5. ПРИМЕНЕНИЕ КОМБИНАЦИОННОЙ ЛОГИКИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ АВТОМАТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

5.1. Задача минимизации булевых функций

Рассмотрим выражения:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3})(x_1 \overline{x_2} \overline{x_3})(x_1 \overline{x_2} x_3)(x_1 x_2 \overline{x_3})(x_1 x_2 x_3)$$

$$\text{и } f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \overline{x_2} \overline{x_3}.$$

Несмотря на существенные различия, оба этих выражения описывают одну и ту же булеву функцию – в этом можно убедиться, составив по этим выражениям полные таблицы значений $f(x_1, x_2, x_3)$.

Очевидно, что на практике, составив на основе технического задания аналитическое выражение для булевой функции, перед её практической реализацией следует попытаться упростить – минимизировать полученное выражение. При этом наиболее распространённым и интуитивно понятным критерием сложности выражения служит количество литералов (букв)

в алгебраической записи функции. По этому критерию сложность первого из рассматриваемых выражений составляет $L=15$, а для второго $L=3$.

Рассмотрим формальные способы минимизации булевых функций по этому критерию.

5.2. Минимизация методом Квайна

Метод Квайна для минимизации булевых функций хорошо приспособлен для реализации на вычислительных машинах и поэтому традиционно излагается в виде алгоритма.

1. От произвольной формы задания булевой функции аналитически или с помощью таблицы переходят к СДНФ.

Например, функция

$$y(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2) \vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) x_3$$

задана в смешанной форме. Построим СДНФ аналитически:

$$\begin{aligned} y(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 x_2) \vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) x_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 = \\ &= x_1 x_2 (x_3 \vee \bar{x}_3) \vee \bar{x}_1 x_3 (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 x_3 (x_1 \vee \bar{x}_1) = \\ &= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3. \end{aligned}$$

После удаления шестой компоненты, совпадающей с четвёртой, получим СДНФ:

$$y(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3.$$

2. В найденной СДНФ проводят минимизацию (склеивание) по правилу $x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1$.

Склеивание осуществляется систематическим сравнением каждой компоненты с каждой от начала записи функции к концу. Если какая-либо компонента ни с чем не объединилась, то она переносится в результат этого пункта алгоритма без изменений. На рис. 5.1 показаны возможные для рассматриваемого примера пары объединяемых компонент.

$$y(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3.$$

Рис. 5.1. Возможные пары объединяемых компонент.

Результат первой минимизации подвергается повторно-му склеиванию:

$$y(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_3 \vee \bar{x}_2 x_3.$$

Окончательный результат:

$$y(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_3 \vee x_3 = x_1 x_2 \vee x_3.$$

Дальнейшее склеивание невозможно, то есть получена минимальная форма исходной функции.

Метод Квайна может быть распространён и на случай представления булевых функций в СКНФ. При этом используется аналогичное правило склейки: $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1 \vee (x_2 \bar{x}_2) = x_1$.

Пример.

$$y(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Результат минимизации:

$$y(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_3).$$

Изложенный вариант алгоритма Квайна является его простейшей версией и обладает существенным недостатком: в результате работы алгоритма может быть получена форма, для которой дальнейшее склеивание невозможно, однако в действительности эта форма не является минимальной. Такие результаты минимизации по алгоритму Квайна называют тупи-

ковыми формами. Поясним проблему тупиковых форм на примере.

Пусть задана булева функция в виде
 $y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$

На рис. 5.2 показаны все возможные объединения.

$$y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

Рис. 5.2. Все возможные пары объединяемых компонент

В результате первой же процедуры объединения приходим к форме, не подлежащей дальнейшему склеиванию:

а) $y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2.$

Результаты минимизации позволяют оценить их как весьма скромные и обращают внимание на то, что все компоненты исходной формы склеиваются дважды, в то время как для минимизации любой из компонент достаточно склеить её один раз. Сокращённые и полный варианты объединений показаны на рис. 5.3, где компоненты СДНФ условно обозначены кружками с цифрами-номерами.

В соответствии с вариантами объединений, показанными на рис. 5.3, можно выписать еще три формы булевой функции: б) $y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2;$

в) $y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2;$

г) $y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3.$

Очевидно, что только две последние формы действительно являются минимальными.

Процедуры выявления тупиковых форм, не являющихся минимальными, значительно усложняют алгоритм Квайна. Поэтому широкое распространение на практике получила графическая интерпретация этого алгоритма – карта Карно (диа-

грамма Вейча), в которой опасность получения тупиковой не минимальной формы устраняется визуально.

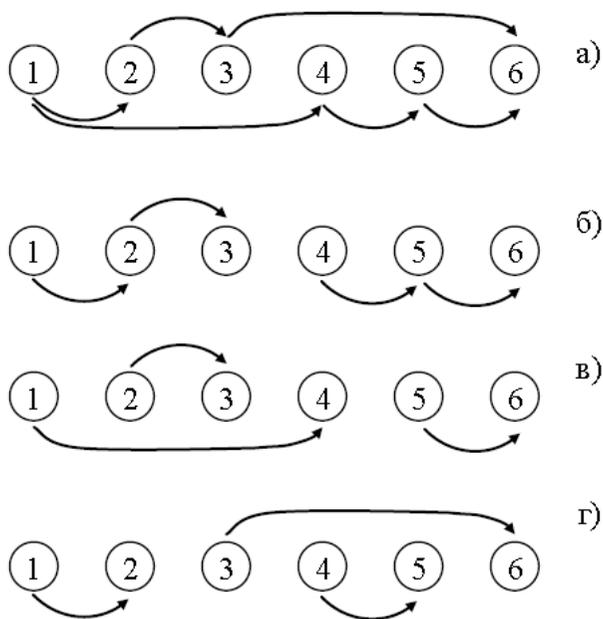


Рис. 5.3. Полный (а) и сокращённые (б,в,г) варианты объединения компонент

5.3. Минимизация по карте Карно (диаграмме Вейча)

Порядок минимизации булевых функций с помощью карты Карно, или диаграммы Вейча, тесно связан со способом её построения и заполнения, поэтому целесообразно совместное изложение этих процедур на примере.

1. Берётся булева функция в произвольной форме – аналитической или табличной. Например:

$$y(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3.$$

2. Все переменные разбиваются на две примерно равные группы: $x_1 x_2$ и x_3 или, для четырёх переменных, $x_1 x_2$ и $x_3 x_4$.

3. Составляется прямоугольная таблица следующим образом: в верхней строке записываются значения переменных первой группы в порядке, обеспечивающем в ячейках изменение только одной переменной; в левом столбце записываются значения переменных второй группы в аналогичном порядке; на пересечении строк и столбцов записываются значения булевой функции для соответствующей каждому пересечению комбинации значений переменных (табл. 5.7.).

Таблица 5.7

Карта Карно
для функции

$$y = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3.$$

x_3	$x_1 x_2$			
	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Для того чтобы обеспечить упомянутый порядок смены значений переменных, удобно пользоваться геометрическим представлением области определения булевой функции в виде

так называемых булева квадрата и булева куба (рис. 5.4а,б.).

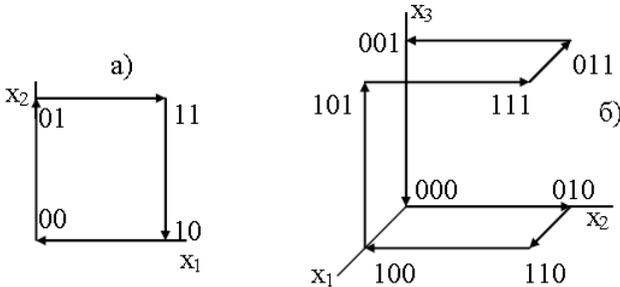


Рис. 5.4. Иллюстрация областей определения булевых функций двух (а) и трёх (б) переменных

Обход квадрата или куба в любом выбранном направлении обеспечивает на каждом шаге изменение значения только одной координаты-переменной, при этом единственным правилом обхода вершин является условие его завершения в начальной вершине. Это условие соответствует условию замыкания левого края карты с правым и верхнего края с нижним, то есть даёт возможность считать поле карты (в табл. 5.7 это поле очерчено двойными линиями) непрерывным во всех направлениях. Можно сказать, что карта скручена в тор.

Заполнение поля карты значениями функции в случае задания последней таблицей заключается в непосредственном переписывании этих значений из таблицы в карту. Использование таблицы является здесь наиболее надёжным и универсальным приёмом (напомним, что речь идёт о ручном заполнении карты). Если функция задана в дизъюнктивной форме, то карту заполняют единицами в тех ячейках, которые соответствуют единичным компонентам. Для рассматриваемого примера функции $y(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3$ получаем:

$$x_1 x_2 = 1 \text{ при } x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 1 \text{ и любых значениях } x_3;$$

$$\bar{x}_1 x_3 = 1 \text{ при } x_1 = 0 \text{ и } x_3 = 1 \text{ и любых значениях } x_2;$$

$\bar{x}_2 x_3 = 1$ при $x_2=0$ и $x_3=1$ и любых значениях x_1 .

При таком способе формирования карты все ячейки, не заполненные единицами, заполняются нулями.

Если функция задана в конъюнктивной форме, то карту целесообразнее заполнять нулями в тех ячейках, которые соответствуют нулевым компонентам. В этом случае в ячейки, не заполненные нулями, вносятся единицы.

4. Как можно большее 2^n количество смежных строк и/или столбцов связывают между собой, например, обводят так, как это показано в табл. 5.7.

5. Каждая полученная группа единиц соответствует в алгебраической записи единичным значениям только тех переменных, которые не изменялись в этой группе. Эти переменные выписываются как конъюнктивные компоненты дизъюнктивной формы. Из табл. 5.7 получаем результат минимизации:

$$y(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_3.$$

Эта заключительная процедура минимизации наглядно показывает, что теоретической основой карты Карно остаётся то же правило склейки, которое использовалось в методе Квайна: $x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1$. Действительно, например, группе из двух единиц в табл. 5.7 соответствуют комбинации переменных, которые склеиваются по x_3 :

$$x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) = x_1 x_2.$$

Кроме того, становится понятным оговоренное выше особое требование чередования значений переменных – именно такой порядок занесения их в карту обеспечивает возможность склейки по указанному правилу любых двух смежных ячеек. Остановимся на некоторых особых случаях применения карты Карно.

1. Поскольку карта непрерывна, то при необходимости связывать можно единицы, расположенные на краях её прямоугольного поля.

2. Если единица осталась несвязанной, то в записи ей соответствует полная дизъюнктивная группа.

Случаи 1 и 2 отражены на карте в табл. 5.8, из которой выписывается результат минимизации: $y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3$.

Таблица 5.8

Карта Карно
для функции
 $y = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee$
 $\vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

x_3	$x_1 x_2$			
	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0

3. Если в карте существуют несколько вариантов связывания единиц, то следует руководствоваться очевидным соображением: чем меньше получится групп, тем проще будет запись булевой функции. В качестве примера рассмотрим два варианта формирования групп единиц для одной и той же функции (табл. 5.9, 5.10).

Таблица 5.9

Карта Карно
с тупиковой формой

x_3	$x_1 x_2$			
	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	1	1	0

Таблица 5.10

Карта Карно
с минимальной формой

x_3	x_1x_2			
	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	1	1	0

Результат минимизации по карте в табл. 5.9

$$y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3.$$

Результат минимизации по карте в табл. 5.10

$$y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3$$

очевидно является лучшим.

4. Карта Карно может быть использована для минимизации конъюнктивных нормальных форм булевых функций. Например, из карты, представленной в табл. 5.11, можно выписать как группы ДНФ (пунктирные линии)

$$y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 =$$

$$= \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \vee x_3), \text{ так и группы КНФ (сплошные линии)}$$

$$y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \vee x_3).$$

Таблица 5.11

Карта Карно,
иллюстрирующая
минимизацию с ДНФ и
КНФ

x_3	x_1x_2			
	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	0	0	1

Результаты минимизации для ДНФ и КНФ эквивалентны.

5. Для функций с числом переменных $n > 4$ способ объединения единиц в группы существенно отличается от вышеизложенного (могут объединяться не только рядом расположенные единицы), что усложняет пользование картой. В связи с этим карта Карно теряет свои преимущества по сравнению с аналитическим методом Квайна и при $n > 4$ практически не используется.

Рассмотрим пример, содержащий рассмотренные выше этапы разработки комбинационного логического устройства.

Техническое задание: разработать логическое устройство, вырабатывающее сигнал A аварийного состояния котла в следующих ситуациях:

одновременное появление сигнала D датчика недопустимого давления и сигнала T датчика недопустимой температуры;

одновременное появление сигнала T датчика недопустимой температуры и сигнала H датчика недопустимого уровня воды;

появление сигнала H датчика недопустимого уровня воды при отсутствии сигналов D и T .

Из технического задания следует, что на вход устройства поступает три сигнала: T , D , H , а выходом является один сигнал A . Опишем работу этого устройства булевой функцией A от трёх переменных $A(T,D,H)$ и зададим её таблицей (табл. 5.12).

Таблица заполняется непосредственно по условиям технического задания, из которого следует, что $A=1$, если:

одновременно $T=1$ и $D=1$ независимо от сигнала H (две нижние строки табл. 5.12);

одновременно $T=1$ и $H=1$ независимо от сигнала D (третья снизу строка табл. 5.12);

$H=1$ при $T=0$ и $D=0$ (сверху вторая строка табл. 5.12).

Таблица 5.12
Функция состояния
котла

T	D	H	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Для всех других комбинаций T , D и H функция равно нулю.

Количество единичных и нулевых значений функции одинаково, поэтому при выборе формы алгебраического описания можно использовать как СДНФ, так и СКНФ:

$$A(T,D,H) = \bar{T} \bar{D} H \vee T \bar{D} H \vee T D \bar{H} \vee T D H - \text{СДНФ};$$

$$A(T,D,H) = (T \vee D \vee H)(T \vee \bar{D} \vee H)(T \vee \bar{D} \vee \bar{H})(\bar{T} \vee D \vee H) - \text{СКНФ}.$$

Минимизируем СДНФ аналитически:

$$A(T,D,H) = \bar{T} \bar{D} H \vee T \bar{D} H \vee T D \bar{H} \vee T D H,$$



$$A(T,D,H) = \bar{D} H \vee T H \vee T D.$$

Анализ использованных взаимосвязей в СДНФ показывает, что склейка между вторым и четвертым её элементами избыточна и полученная в результате запись является тупиковой. Уберём лишнюю склейку:

$$A(T,D,H) = \bar{T} \bar{D} H \vee T \bar{D} H \vee T D \bar{H} \vee T D H,$$



$$A(T,D,H) = \bar{D} H \vee T D.$$

Получена минимальная форма искомой булевой функции. Проверим результат минимизации с помощью карты Карно (табл. 5.13):

Таблица 5.13
Карта Карно,
иллюстрирующая
минимизацию функции
состояния котла

H	TD			
	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

$A(T,D,H) = \overline{D}H \vee TD$, результат идентичен.

Минимизация в КНФ: $A(T,D,H) = (D \vee H)(T \vee \overline{D})$, – приводит к форме, одинаковой по сложности с ДНФ.

Задачи для самостоятельного решения

В соответствии с техническим заданием разработать логическое устройство:

описать работу устройства в выбранной системе булевых функций;

минимизировать функцию;

составить модель;

убедиться в соответствии модели исходному заданию.

1. Разработать схему управления подвижной платформы с двумя независимыми ведущими электродвигателями-колесами. Органы управления: кнопки – “Вперед”, “Назад”, “Вращение по часовой стрелке”, “Вращение против часовой стрелки”.

2. Разработать схему управления электродвигателем объекта. Цель управления – выставить объект в центре рабочего участка движения. Движение возможно при наличии сигнала готовности внешнего прибора. Положение объекта относи-

тельно центра определяется датчиками “Слева” и “Справа”. Останов происходит при отсутствии сигналов с обоих датчиков. Орган управления – ключ “Пуск”.

3. Разработать схему правления подвижной платформы с тремя независимыми ведущими электродвигателями-колесами. Органы управления: кнопки “Вперёд”, “Назад”, “Вращение”.

4. Разработать схему включения-выключения светильника, предусматривающую три независимых пункта управления. На каждом пункте установлен переключатель на два положения: перевод любого переключателя из одного положения в другое вызывает изменение состояния светильника.

5. Разработать схему управления подвижной платформы с четырьмя независимыми ведущими электродвигателями-колесами. Органы управления: кнопки “Вперед”, “Вращение по часовой стрелке”, “Вращение против часовой стрелки”.

6. Разработать схему управления входным семафором, работающим по следующему правилу:

“Красный свет” – все пути заняты или скорость подхода недопустима высока;

“Желтый свет” – свободный путь есть, но стрелка на этот путь ещё не переключена, скорость подхода в норме;

“Зеленый свет” – стрелка переключена на свободный путь, скорость подхода в норме.

7. Пульт телеуправления подвижным объектом предусматривает подачу команд “Вперед”, “Назад”, “Вправо”, “Влево”, “Стоп” тремя одновременно работающими независимыми операторами. Разработать схему, обеспечивающую прохождение любой из этих команд только тогда, когда она подана по крайней мере двумя операторами.

8. Разработать логическую схему распознавания цифр почтового индекса.

9. Разработать логическую схему управления автоматической мышью, находящей выход из лабиринта. Движение

мышь осуществляется от двигателей, связанных с колесами. Необходимые датчики выбираются разработчиком.

5.4. Синтез логических устройств с памятью (последовательностные устройства)

Понятие об автоматах

Автомат – математическая модель системы или устройства, которое может изменять свои дискретно заданные состояния в дискретные моменты времени.

Такая модель включает в себя пять характеристик устройства:

$$A = \langle X, Y, Z, \varphi, \psi \rangle,$$

где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – множество входных сигналов;

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ – множество выходных сигналов;

$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ – множество состояний устройства.

Причём в зависимости от входного сигнала $x(t)$, поступившего в автомат в начале такта времени с номером t , и от того, в каком состоянии находился автомат в предшествующем такте $z(t-1)$, он переходит в другое состояние $z(t)$ в соответствии с некоторой функцией перехода φ : $z(t) = \varphi[z(t-1), x(t)]$ и изменяет при этом свой выходной сигнал $y(t)$ в соответствии с некоторой функцией выхода ψ : $y(t) = \psi[z(t-1), x(t)]$, где t – текущий номер такта (дискреты) времени T (рис. 5.5).

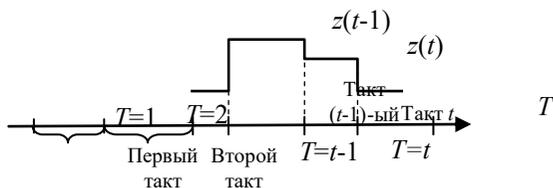


Рис. 5.5. Иллюстрация смены состояний автомата во времени

Из определения автомата выделим три интересующих нас свойства:

автомат может изменять своё состояние только в моменты прихода входного сигнала. Между этими моментами его состояние не изменяется;

все возможные состояния автомата заранее известны, и он под действием входного сигнала может перейти только в одно из этих состояний;

переход автомата в то или иное конкретное состояние $z(t)$, а также его выходной сигнал $y(t)$ зависят не только от входного сигнала $x(t)$, но и от того, в каком состоянии автомат находился в предшествующий такт времени $z(t-1)$, то есть зависят от прошлого. Это свойство автомата принято называть памятью.

Простейшим, широко известным устройством с памятью является триггер, который не только может сохранять своё состояние после снятия входного сигнала, но способен по разному реагировать на один и тот же входной сигнал в зависимости от своего предшествующего состояния.

Рассмотренные ранее булевы функции использовались для описания комбинационных устройств – частного вида автоматов – автоматов без памяти. Выходной сигнал комбинационного устройства определяется текущей комбинацией входных сигналов и не зависит от предшествующих сигналов и состояний устройства. Это обстоятельство отражено в записи булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – не содержащей времени. Отсюда следует, что если ввести в булевы функции дополнительную переменную – номер t такта времени, то хорошо разработанный аппарат булевой алгебры сможет быть применён для анализа и синтеза логических устройств с памятью.

Способы задания автоматов с памятью

Рассмотрим табличный и аналитический способы задания автоматов с памятью на примере описания устройства с

одним входом $x=\{0;1\}$ и одним выходом $y=\{0;1\}$, выполняющего следующую функцию:

если на смену входному сигналу $x(t-1)=0$ приходит сигнал $x(t)=1$, то выходной сигнал $y(t)$ изменяет своё значение, то есть $y(t) = -y(t-1)$; во всех остальных случаях выходной сигнал $y(t)$ не изменяется. Временная диаграмма этой функции представлена на рис. 5.6.

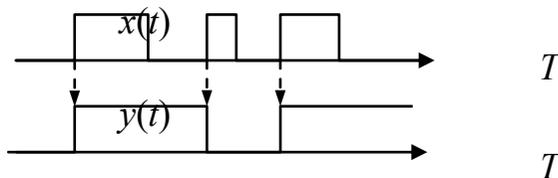


Рис. 5.6 . Временная диаграмма работы логического устройства с памятью

Из его описания необходимо учитывать не только текущие сигналы $x(t)$, $y(t)$, но и предшествующие им значения: $x(t-1)$, $y(t-1)$. Таким образом, предстоит составить булеву функцию вида $y(t)=\psi(x(t-1),x(t),y(t-1))$.

Вид этой функции полностью совпадает с общим видом функции выхода $y(t) = \psi[z(t-1),x(t)]$, из которого следует, что предшествующее состояние автомата определяется двумя величинами $z(t-1)=\{x(t-1)y(t-1)\}$. Отметим, что полное академическое описание автомата подразумевает задание всех пяти указанных ранее характеристик. В прикладных задачах, как правило, ограничиваются заданием функции выхода. Для рассматриваемого примера функция $y(t)=\psi(x(t-1),x(t),y(t-1))$ представлена в табл. 5.14.

Таблица 5.14
Табличное задание
автомата с памятью

$x(t-1)$	$x(t)$	$y(t-1)$	$y(t)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

В соответствии с данным выше описанием функционирования устройства выходной сигнал изменяет своё значение только при смене нулевого значения $x(t-1)=0$ на $x(t)=1$. Таких ситуаций в таблице всего две (см. первый и второй столбцы табл. 5.14). Во всех остальных строках таблицы $y(t)=y(t-1)$.

Для аналитического задания автомата воспользуемся полученной таблицей и из неё выпишем, например, уже известным нам способом СДНФ, но с тем отличием, что теперь в алгебраической записи обязательно следует указывать номер такта, в котором берётся значение той или иной переменной или функции:

$$y(t) = \overline{x(t-1)} \overline{x(t)} y(t-1) \vee \overline{x(t-1)} x(t) y(t-1) \vee x(t-1) \overline{x(t)} y(t-1) \vee x(t-1) x(t) y(t-1) \vee x(t-1) x(t) y(t-1)$$

Минимизируем полученное выражение методом Квайна:

$$y(t) = \overline{x(t)} y(t-1) \vee \overline{x(t-1)} x(t) y(t-1) \vee x(t-1) y(t-1)$$

Булева функция готова для реализации, однако заметим, что эта функция описывает процесс функционирования типового Т-триггера, который на практике обычно реализуется не самостоятельно, а на основе JK- или D-триггеров.

Рассмотрим более оригинальный пример логического устройства с памятью.

Техническое задание:

Пусковое устройство имеет два входа в виде кнопок:

B – для включения; O – для останова; и один выход S , который включает электродвигатель.

Нажатие (даже кратковременное) на кнопку B переводит выход в состояние 1 (или оставляет в этом состоянии, если он в нём уже находился).

Нажатие (даже кратковременное) на кнопку O переводит выход в состояние 0 (или оставляет в этом состоянии, если он в нём уже находился).

При нажатии на обе кнопки B и O одновременно доминирующее влияние оказывает кнопка O .

Из описания работы устройства следует, что реакция $S(t)$ автомата на сигналы B и O зависит от текущего сигнала $B(t)$ или $O(t)$ и его предшествующего состояния $S(t-1)$. Таким образом, булеву функцию необходимо формировать в виде

$$S(t) = \psi[B(t), O(t), S(t-1)].$$

Таблица 5.15

Табличное задание
устройства

$B(t)$	$O(t)$	$S(t-1)$	$S(t)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Табличная форма этой функции представлена в табл. 5.15, заполнение которой осуществляется в соответствии с содержанием технического задания:

при $O(t)=1$ автомат из любого состояния и независимо от значения $B(t)$ переходит в состояние $S(t)=0$;

при $B(t)=1$ автомат переходит в состояние $S(t)=1$, только если $O(t)=0$;

при одновременной подаче $O(t)=0$ и $B(t)=0$ (обе кнопки опущены) состояние автомата не изменяется.

Количество единиц в таблице меньше, чем нулей, поэтому для аналитической записи функции выберем СДНФ:

$$S(t) = \overline{B(t)} \overline{O(t)} S(t-1) \vee B(t) \overline{O(t)} S(t-1) \vee B(t) \overline{O(t)} S(t-1).$$

Минимизируем методом Квайна:

$$S(t) = \overline{O(t)} S(t-1) \vee B(t) \overline{O(t)} = \overline{O(t)} (S(t-1) \vee B(t)).$$

Проверим минимизацию по карте Карно (табл. 5.16):

Таблица 5.16
Карта Карно
для функции пускового
устройства

$S(t-1)$	$B(t)O(t)$			
	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	0	0	1

$$S(t) = \overline{O(t)} S(t-1) \vee B(t) \overline{O(t)} = \overline{O(t)} (S(t-1) \vee B(t)).$$

Результаты совпадают.

Построенная по найденной функции электрическая схема пускового устройства показана на рис. 5.7.

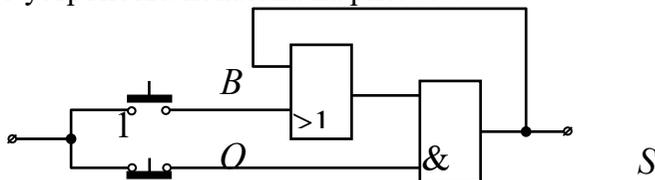


Рис. 5.7. Электрическая схема синтезированного пускового устройства с памятью

Рассмотрим ещё одно распространённое пусковое устройство, исключаящее возникновение так называемого “дребезга” при защитном отключении электрической цепи из-за перегрузки по току.

Всем электрикам известно явление, возникающее при включении неисправной цепи с коротким замыканием при помощи магнитного пускателя: после нажатия кнопки пуска силовые контакты замыкаются и немедленно срабатывает защита, отключая цепь. Если быстро не отпустить кнопку, ярмо пускателя вибрирует, контакты замыкаются-размыкаются, что в конечном итоге приводит к выходу пускателя из строя. Чтобы избежать данного явления, принимаются определенные меры, которые нам следует разработать при решении задачи.

Итак, на содержательном уровне задача ставится следующим образом: необходимо разработать такую схему запуска, которая в случае неисправности включаемой цепи (короткое замыкание) предотвратит возникновение дребезга, то есть повторное включение цепи должно быть возможно лишь после отпускания кнопки пуска.

Детализируем техническое задание:

Пусковое устройство имеет три входа, – два входа в виде кнопок:

B – для включения цепи; O – для отключения цепи;

третий вход для сигнала D с датчика тока в цепи:

$D=1$, если ток в цепи превышает допустимое значение;

$D=0$, если значение тока в цепи допустимое;

один выход S , сигнал с которого включает ($S=1$) или отключает ($S=0$) некоторую электрическую цепь.

При $D=0$ устройство выполняет обычные функции пуска и отключения, рассмотренные в предыдущем примере:

нажатие (даже кратковременное) на кнопку B переводит выход в состояние $S=1$ (или оставляет в этом состоянии, если он в нём уже находился);

нажатие (даже кратковременное) на кнопку O переводит выход в состояние $S=0$ (или оставляет в этом состоянии, если он в нём уже находился);

при нажатии на обе кнопки B и O одновременно доминирующее влияние оказывает кнопка O .

Если при включённой цепи, то есть при $S=1$, появляется сигнал $D=1$, то цепь отключается ($S=0$) при любом положении кнопок B и O , и сигнал с датчика тока обесточенной цепи принимает значение $D=0$. Цепь может включиться вновь только при отпущенной кнопке O и переводе кнопки B из отпущенного состояния в нажатое. Очевидно, что предписываемая функция защиты от дребезга неразрывно связана с защитой цепи от перегрузки по току.

Из приведённого описания работы устройства следует, что реакция $S(t)$ автомата на сигналы B , O и D зависит от текущего сигнала $B(t)$ или $O(t)$ и предшествующих состояний $S(t-1)$, $B(t-1)$, $D(t-1)$. В частности, зависимость текущего состояния $S(t)$ от сигнала $D(t-1)$ в предшествующий такт времени следует интерпретировать как последовательную во времени цепочку событий: появление сигнала $D=1$ при $S=1$ и последующее через очень малое время Δt , отключение цепи $S=0$, приводящее, в свою очередь, к $D=0$. По своему физическому содержанию одновременное существование событий $S=0$ и $D=1$ невозможно (рис. 5.8).

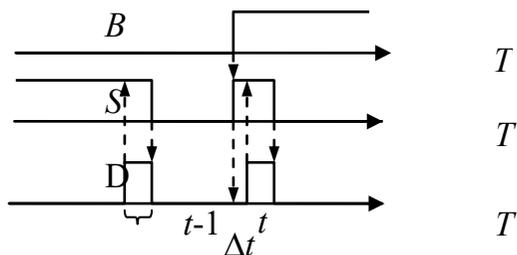


Рис. 5.8. Фрагмент временной диаграммы работы пускового устройства с функцией антидребезгового защитного отключения

Таким образом, булеву функцию необходимо формировать в виде $S(t)=\psi[B(t-1),B(t),O(t), D(t-1),S(t-1)]$.

Табличная форма этой функции представлена в табл. 5.17 из $2^5=32$ строк, заполнение которой осуществляется в соответствии с содержанием технического задания: исключаются из рассмотрения строки с несовместными сочетаниями $S(t-1)=0$ и $D(t-1)=1$ (строки в таблице выделены);

Таблица 5.17

Табличное задание пускового устройства с функцией антигидребезгового защитного отключения при перегрузке по току

7	0	0	1	1	0	0
8	0	0	1	1	1	0
9	0	1	0	0	0	1
10	0	1	0	0	1	
11	0	1	0	1	0	1
12	0	1	0	1	1	0
13	0	1	1	0	0	0
14	0	1	1	0	1	
15	0	1	1	1	0	0
16	0	1	1	1	1	0
17	1	0	0	0	0	0
18	1	0	0	0	1	
19	1	0	0	1	0	1
20	1	0	0	1	1	0
21	1	0	1	0	0	0
22	1	0	1	0	1	
23	1	0	1	1	0	0
24	1	0	1	1	1	0
25	1	1	0	0	0	0
26	1	1	0	0	1	
27	1	1	0	1	0	1
28	1	1	0	1	1	0

Продолжение табл. 5.17

№	$B(t-1)$	$B(t)$	$O(t)$	$S(t-1)$	$D(t-1)$	$S(t)$
29	1	1	1	0	0	0
30	1	1	1	0	1	
31	1	1	1	1	0	0
32	1	1	1	1	1	0

при $O(t)=1$ автомат из любого состояния переходит в состояние $S(t) = 0$ (строки 5,7,8,13,15,16,21,23,24,29,31,3), табл. 5.18);

Таблица 5.18

Переходы автомата при $O(t)=1$

№	$B(t-1)$	$B(t)$	$O(t)$	$S(t-1)$	$D(t-1)$	$S(t)$
5	0	0	1	0	0	0
7	0	0	1	1	0	0
8	0	0	1	1	1	0
13	0	1	1	0	0	0
15	0	1	1	1	0	0
16	0	1	1	1	1	0
21	1	0	1	0	0	0
23	1	0	1	1	0	0
24	1	0	1	1	1	0
29	1	1	1	0	0	0
31	1	1	1	1	0	0
32	1	1	1	1	1	0

при нажатии на кнопку B , то есть при $B(t-1)=0$ и $B(t)=1$ автомат переходит из $S(t)=0$ в состоянии $S(t)=1$ или остаётся в $S=1$, только если $O(t)=0$ и $D(t-1)=0$ (строки 9,11 табл. 5.19);

Таблица 5.19

Переходы автомата при нажатии на кнопку включения

№	$B(t-1)$	$B(t)$	$O(t)$	$S(t-1)$	$D(t-1)$	$S(t)$
9	0	1	0	0	0	1
11	0	1	0	1	0	1

при удержании кнопки B , то есть при $B(t-1)=1$ и $B(t)=1$ автомат остаётся в состоянии $S(t)=1$, только если $O(t)=0$ и $D(t-1)=0$ (строка 27); однако, если автомат не был включён

($S(t-1)=0$), то удержание кнопки B не приводит к его включению (строка 25, табл. 5.20);

Таблица 5.20

Переходы автомата при удержании кнопки B

№	$B(t-1)$	$B(t)$	$O(t)$	$S(t-1)$	$D(t-1)$	$S(t)$
25	1	1	0	0	0	0
27	1	1	0	1	0	1

при одновременной подаче $O(t)=0$ и $B(t)=0$ (обе кнопки отпущены) и предшествующем отсутствии сигнала с датчика $D(t-1) = 0$ состояние автомата не изменяется (строки 1,3,17,19, табл. 5.21);

Таблица 5.21

Состояния автомата при одновременном нажатии $B(t)$ и $O(t)$

№	$B(t-1)$	$B(t)$	$O(t)$	$S(t-1)$	$D(t-1)$	$S(t)$
1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	1
17	1	0	0	0	0	0
19	1	0	0	1	0	1

оставшиеся случаи, соответствующие появлению сигнала с датчика $D(t-1)=1$, независимо от положения кнопок B и O переводят автомат в выключенное состояние $S(t)=0$ (строки 4,12,20,28, табл. 5.22).

Таблица 5.22

Переходы автомата в выключенное состояние

№	$B(t-1)$	$B(t)$	$O(t)$	$S(t-1)$	$D(t-1)$	$S(t)$
4	0	0	0	1	1	0
12	0	1	0	1	1	0
20	1	0	0	1	1	0
28	1	1	0	1	1	0

Приведённый способ заполнения таблицы путём построчного анализа всех 2^n возможных ситуаций обеспечивает низкую вероятность возникновения ошибок в ходе этого анализа, но достаточно трудоёмок. В то же время нетрудно увидеть, что количество включённых состояний автомата $S=1$ не-

велико, и целесообразно направленно формировать таблицу только из таких состояний. Проиллюстрируем этот приём на данной задаче:

автомат включается или остаётся включённым $S(t)=1$ только при отсутствии сигнала с датчика $D(t-1)=0$ (столбец для $D(t-1)$ в табл. 5.23, число строк в которой пока не определено, заполняем нулями);

автомат включается или остаётся включённым $S(t)=1$ только при отпущенной кнопке O , то есть при $O(t)=0$ (столбец для $O(t)$ в табл. 5.23 заполняем нулями);

при указанных $D(t-1)=0$ и $O(t)=0$ автомат остаётся включённым, если:

кнопка B не нажата, то есть $B(t-1)=0$ и $B(t)=0$;

на кнопку B нажали, то есть $B(t-1)=0$ и $B(t)=1$;

кнопка B удерживается в нажатом состоянии, то есть $B(t-1)=1$ и $B(t)=1$;

ранее удерживаемая нажатой кнопка B отпускается, то есть $B(t-1)=1$ и $B(t)=0$; (вносим эти случаи в строки 1,2,3,4, табл. 5.23);

Таблица 5.23

Результат направленного формирования таблицы состояний пускового устройства с функцией антидребезгового защитного отключения

№	$B(t-1)$	$B(t)$	$O(t)$	$S(t-1)$	$D(t-1)$	$S(t)$
1	0	0	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0	1
3	1	1	0	1	0	1
4	1	0	0	1	0	1
5	0	1	0	0	0	1

при указанных $D(t-1)=0$ и $O(t)=0$ автомат включается, то есть переходит из состояния $S(t-1)=0$ в состояние $S(t)=1$ только в единственном случае: при нажатии кнопки B , то есть при переходе от $B(t-1)=0$ к $B(t)=1$ (вносим этот случай в строку 5 табл. 5.23).

Сопоставление табл. 5.17 (строки 3,9,11,19,27, в которых $S(t)=1$), и табл. 5.23 подтверждает их совпадение.

Поскольку количество единиц в таблице состояний автомата меньше, чем нулей, для аналитической записи функции состояния $S(t)$ выберем СДНФ:

$$\begin{aligned} S(t) = & \overline{B(t-1)} \overline{B(t)} \overline{O(t)} S(t-1) \overline{D(t-1)} \vee \\ & \vee \overline{B(t-1)} B(t) \overline{O(t)} S(t-1) \overline{D(t-1)} \vee \\ & \vee B(t-1) B(t) \overline{O(t)} S(t-1) \overline{D(t-1)} \vee \\ & \vee B(t-1) \overline{B(t)} \overline{O(t)} S(t-1) \overline{D(t-1)} \vee \\ & \vee \overline{B(t-1)} B(t) \overline{O(t)} \overline{S(t)} \overline{D(t-1)}. \end{aligned}$$

Минимизируем методом Квайна, склеивая из полученной полной СДНФ пары элементов 1-2, 2-5, 3-4:

$$\begin{aligned} S(t) = & \overline{B(t-1)} \overline{O(t)} S(t-1) \overline{D(t-1)} \vee \\ & \vee \overline{B(t-1)} B(t) \overline{O(t)} \overline{D(t-1)} \vee \\ & \vee B(t-1) \overline{O(t)} S(t-1) \overline{D(t-1)}. \end{aligned}$$

Применяя повторную склейку, получаем

$$S(t) = \overline{O(t)} S(t-1) \overline{D(t-1)} \vee \overline{B(t-1)} B(t) \overline{O(t)} \overline{D(t-1)}.$$

И окончательно:

$$S(t) = \overline{O(t)} \cdot \overline{D(t-1)} \cdot [S(t-1) \vee \overline{B(t-1)} \cdot B(t)].$$

Построенная по найденной $S(t)$ электрическая схема пускового устройства с функцией антидребезгового защитного отключения показана на рис. 5.9.

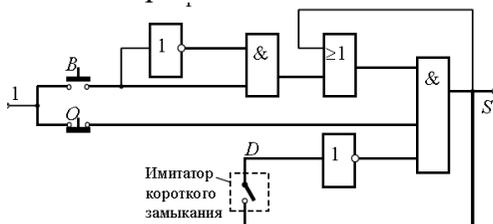


Рис. 5.9

Задачи для самостоятельного решения

В соответствии с техническим заданием разработать логическое устройство:

описать работу устройства в выбранной системе булевых функций;

минимизировать функцию;

составить модель;

убедиться в соответствии модели исходному заданию.

1. Разработать схему управления электродвигателем объекта, совершающего возвратно-поступательные движения на рабочем участке. Цель движения – выставить объект в центральной зоне рабочего участка. Реверс двигателя совершается при наезде на левый или на правый датчики конца рабочего участка. Останов происходит по сигналу датчика положения в центральной зоне. Орган управления: тумблер “Пуск”.

2. Разработать устройство с двумя входами A и B и одним выходом C . При наличии сигнала B выход C повторяет сигнал A . При отсутствии сигнала B сигнал C на выходе сохраняет своё последнее значение, которое было на нём в момент исчезновения сигнала B .

3. Разработать устройство сравнения быстроты реакции испытуемых, которые нажимают соответственно на кнопки A и B при появлении сигнала C . При нажатой кнопке A или B сигнал C не появляется. Если первой будет нажата кнопка A , то высветится только индикатор BA ; если первой будет нажата кнопка B , то высветится индикатор BB .

4. Разработать устройство с двумя входами A и B и одним выходом C . При отсутствии входных сигналов $C=1$. Появление сигнала A при отсутствии B приводит к $C=0$. Появление сигнала B при отсутствии A приводит к $C=1$. Одновременное присутствие сигналов A и B выходной сигнал не изменяет.

5. Разработать устройство с двумя входами A и B и одним выходом C . При отсутствии входных сигналов выходной сигнал не изменяется. Появление сигнала A при отсутствии B

приводит к $C=1$. Появление сигнала B при отсутствии A приводит к $C=0$. Одновременное появление сигналов A и B приводит к переключению значения выходного сигнала.

6. Разработать устройство, обеспечивающее замыкание электрической цепи только при последовательном нажатии и отпуске сначала кнопки A , а затем кнопки B и размыкание цепи при нажатии, даже кратковременном, на кнопку C .

7. Разработать логическое устройство поиска одномерного экстремума путём совершения пробного и последующего рабочего шагов в соответствии со знаком изменения функции цели в результате каждого из них. Пробный и рабочий шаги могут быть совмещены.

8. Разработать устройство, выполняющее функции счётчика с суммирующим и вычитающим входами и двоичным выходом в диапазоне чисел $\pm 15_{10}$.

9. Разработать упрощённую схему управления лифтом, обладающего функцией остановки по требованию попутных пассажиров, находящихся на этажах. Степень упрощения и перечень необходимых датчиков определяется разработчиком.

10. Разработать схему управления черепашкой Уолтера, умеющей объезжать препятствия.

11. Разработать логическое устройство, сохраняющее на своём выходе у значение входного сигнала x_1 ($y = x_1$), существовавшего в момент нарастающего перепада (фронта) второго входного сигнала x_2 . Во всех остальных комбинациях входных сигналов x_1 и x_2 выходной сигнал не изменяется.

12. Разработать схему, на выходе которой устанавливается логическая единица $y=1$, если на вход x_1 поступает низкий потенциал $x_1=0$, а на вход x_2 – высокий потенциал $x_2=1$; устанавливается логический ноль $y=0$, если $x_1=1$ и $x_2=0$. Если оба входные сигнала одинаковы, то выходной сигнал своего значения не изменяет.

13. Разработать логическую схему, замыкающую электрическую цепь только после нажатия и отпущения кнопок A и

B в последовательности A, A, B, A . Размыкание цепи происходит при последующем однократном нажатии на любую из этих кнопок.

14. Разработать коммутатор, подключающий входную цепь к одному из исправных электронных блоков, выходы которых объединены с целью резервирования. Определение исправности каждого блока осуществляется сравнением логических значений сигналов на его входе и выходе по некоторому алгоритму диагностики, выбираемому разработчиком.

15. Разработать запоминающее устройство для трёхкнопочного номеронабирателя. Предусмотреть сброс памяти.

6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Граф - это совокупность точек и линий, соединяющих эти точки. Графы имеют различные свойства. Необходимо изучать их, чем и занимается эта теория. Граф определяет отношения между множествами объектов.

Теория графов имеет прикладной характер и является аппаратом для множества. Это связано с дискретным размещением объектов. Теория графов применяется для проектирования и исследования сетей связи, электрических цепей, потока сигналов и теории обратной связи, блок-схем программ, исследования автоматов и т. д.

6.1. Основные понятия и определения теории графов

Пусть имеется конечное множество X , элементы которого называем вершинами, и множество V , состоящее из пар элементов (x_i, x_j) множества X . Упорядоченная пара множеств $G=(X, V)$ будет называться графом.

Вершины графа будем изображать точками, а пары элементов, соединяющие вершины графа, линиями.

Для графа существует порядок следования по линиям графа, и такой граф называется ориентированным или оргграфом, а для дуги (x_i, x_j) x_i – начальная вершина, а x_j – конечная. Дуга – это направленный отрезок.

Оргграф задают парой $G=(X, \Gamma)$, где X – множество вершин, Γ – неоднозначное отображение в G дуга (x_i, x_j) . $\Gamma^{-1}(x_j)$ – множество вершин $x_j \in X$, для которых в графе G существует дуга (x_j, x_i) . Если в графе не существует порядок следования при образовании пары (x_i, x_j) , то граф называют неориентированным или неоргграфом, а пару (x_i, x_j) – ребром. Количество вершин графа называется его порядком.

Например, на рис. 6.1 изображен ориентированный граф $G=(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_3)\})$, а на рис. 6.2 – неориентированный граф.

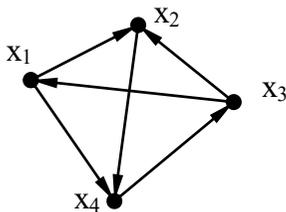


Рис. 6.1

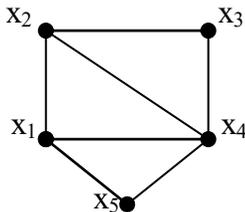


Рис. 6.2

Путем в графе G будет называться последовательность дуг (при этом конец предыдущей дуги совпадает с началом следующей). Для неоргграфа это называется цепью.

Если цепь имеет вершины x_1, \dots, x_k , то обозначаем ее $[x_1, \dots, x_k]$. Для графа (рис. 6.3) дуги $(x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_3)$ образуют путь $[x_1, x_2, x_4, x_3]$. Для графа (рис. 6.2) цепью будет $[x_2, x_3, x_5, x_4]$. Цепь, где начальная и конечная вершина совпадают, называется контуром или циклом. Для графа рис. 6.2) циклом будет $[x_2, x_3, x_5, x_1, x_2]$. Простым циклом графа называется цикл, в котором все вершины различны, а начальная и конечная вершины совпадают. Так для графа (рис. 6.2)

цикл $[x_2, x_3, x_5, x_1, x_2]$ будет простым, а цикл $[x_2, x_3, x_4, x_5, x_3, x_1, x_2]$ не будет простым.

Петля - это дуга, где начальная и конечная вершины совпадают.

Граф, полученный из орграфа заменой каждой дуги на ребро, будет основанием орграфа. Рассмотрим граф рис. 6.3 б основанием графа будет граф рис. 6.3 а.

Вершины x_i и x_j называются смежными, если существует соединяющее их ребро (x_i, x_j) , и вершины называются инцидентными этому ребру, а ребро - инцидентным этим вершинам. Два различных ребра будут смежными, если они имеют одну общую вершину. Вершины x_1 и x_4 смежны (рис. 6.3), ребро (x_1, x_4) инцидентно x_1 и x_4 , а вершины x_1 и x_4 инцидентны дуге (x_1, x_4) . Ребра (x_1, x_3) , (x_3, x_4) смежны (рис. 6.2).

Смежность - это отношение между однородными элементами графа, а инцидентность есть отношение между разнородными элементами.



Рис. 6.3

Множество вершин графа G , смежных с некоторой вершиной x , называется окружением вершины x и обозначается через $N_G(x)$ или $N(x)$. В неориентированном графе число ребер, инцидентных данной вершине x_i , определяется как степень или валентность вершины x_i и имеет обозначение $d(x_i)$.

Вершина графа, для которой степень 0, будет называться изолированной.

Вершина со степенью 1 называется висячей. Для неорграфа (рис. 6.2) $d(x_1)=3$, $d(x_3)=4$.

Количество дуг, выходящих из вершины x_i ориентированного графа, называется полустепенью исхода вершины x_i и обозначается $d^-(x_i)$.

Число дуг, входящих в вершину x_i ориентированного графа, называется полустепенью $d^-(x_i)$ входа вершины x_i .

Для орграфа (рис. 6.3 а) $d^-(x_1) = 2$, $d^+(x_1) = 1$.

Лемма о рукопожатиях:

Сумма степеней вершин графа G равна $2m$, где m – число ребер графа G .

Подграфом графа $G=(X, V)$ будет граф $G'=(X', V')$, для которого $X' \subseteq X$, $V' \subseteq V$, причем ребро (x_i, x_j) содержится в V' в том случае, если x_i и x_j содержатся в X' . Одним из подграфов графа, изображенного на рис. 6.1, будет граф (рис. 6.4).

Если все вершины графа $G=(X, V)$ имеются в подграфе $G'=(X', V')$, то G' будет называться остовным подграфом.

Пусть имеем X' – подмножество вершин X графа $G=(X, V)$, то граф $G'=(X', V')$ является порожденным подграфом графа G на множестве вершин X' , если V' является таким подмножеством V , что ребро (x_i, x_j) входит в V' тогда, когда x_i и x_j входят в X' . На графе показан порожденный подграф (рис. 6.5) на множестве вершин $\{x_1, x_3, x_5\}$ неориентированного графа (рис. 6.2).



Рис. 6.4

Рис. 6.5

6.2. Типы графов

Граф G называется *полным*, если две его вершины смежны. Полный граф K_n порядка n , число ребер равно $n(n-1)/2$.

Граф O_n порядка n называется *пустым*, если в нем не имеется ребер.

Граф, у которого нет вершин, называется *ноль-графом*.

Граф, имеющий только одну вершину, называется *тривиальным*.

Примерами графов будут графы *пяти платоновых тел: тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра* (рис. 6.6).

Граф называется *двудольным*, если имеется разбиение множества его вершин на две части (*доли*), что концы каждого ребра будут принадлежать разным частям и при этом любые две вершины, входящие в разные доли смежны. Это граф будем называть *полным двудольным*. Для полного двудольного графа $K_{p,q}$ имеет доли из p и из q вершин. Если $p=1$, то получим *звезду $K_{1,q}$, k -дольный и полный k -дольный* графы. Звезда $K_{1,5}$ и полный двудольный граф $K_{3,3}$ имеются на рис. 6.7. Также как и двудольным графам определяются *k -дольный и полный k -дольный* графы для $k=3,4, \dots$. На рис. 6.8 приведен трехдольный граф.

Два графа G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение между множествами их вершин (с сохраняющейся смежностью). Это отображение называется *изоморфизмом*.

Два орграфа *изоморфны*, если существует *изоморфизм* между их основаниями, сохраняющий порядок вершин на каждой дуге.

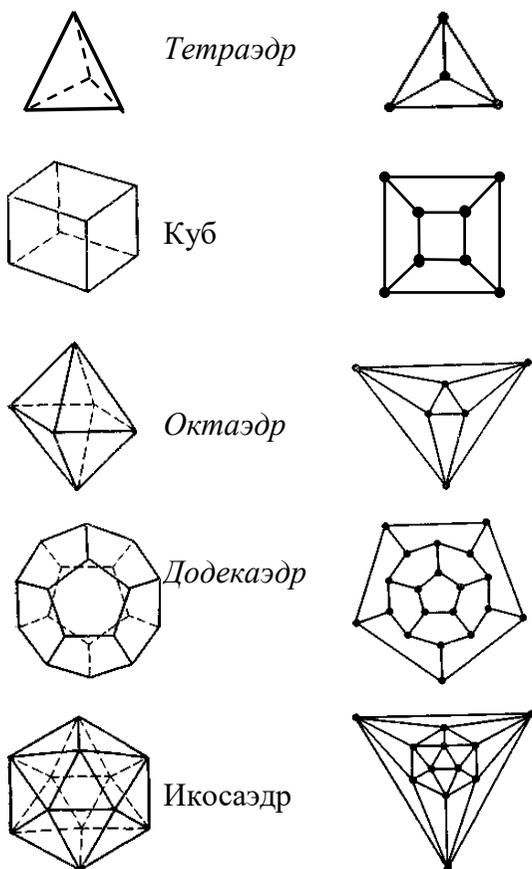


Рис. 6.6

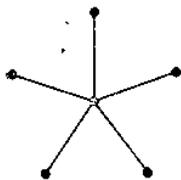


Рис. 6.7

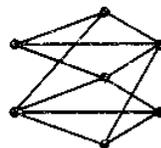
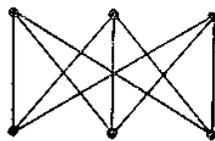


Рис. 6.8

Три графа рис. 6.9 изоморфны. Графы (рис. 6.10) не изоморфны.

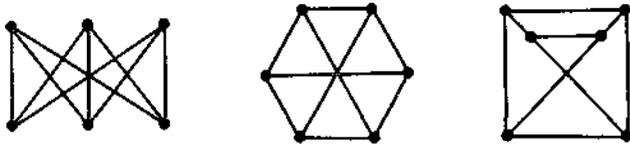


Рис. 6.9

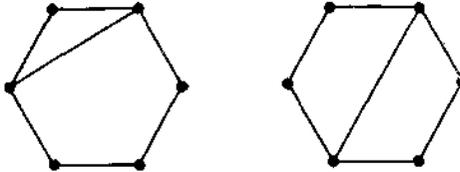


Рис. 6.10

Отношение изоморфизма графов имеет эквивалентность.

Граф порядка n будет называться *помеченным*, если для его вершин имеются метки, т. е. номера $1, 2, \dots, n$. Равенство помеченных графов $G_1=(X, V_1)$ и $G_2=(X, V_2)$ одного и того же порядка $G_1=G_2$ тогда, когда $V_1=V_2$.

На рис. 6.11 изображены помеченные графы.

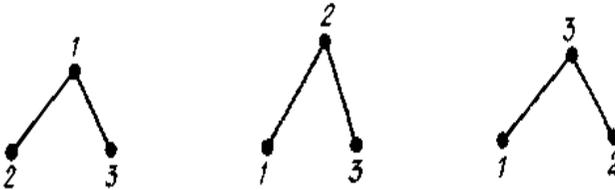


Рис. 6.11

Граф называется мультиграфом, если некоторые вершины графа соединены более чем одним ребром, а ребра – кратными. Мультиграф не допускает петель.

Граф, не имеющий петель и кратных ребер, называется простым.

Граф $G=(X, V)$ называется *симметрическим*, если в V для дуги (x_i, x_j) существует противоположно ориентированная

дуга (x_j, x_i) . Граф определяется как антисимметрически, если каждая пара смежных вершин соединена в одном направлении и нет петель.

Граф, имеющий у всех вершин одну и ту же степень, называется регулярным, или однородным, графом. Если степень каждой вершины равна r , то граф называется регулярным (однородным) степени r . На рис. 6.9 изображены регулярные графы степени 3.

Граф можно изобразить на плоскости таким образом, чтобы два ребра не пересекались в точках, отличных от вершин. Такой граф будем называть планарным графом.

Реберным графом $L(G)$ простого графа G называется граф, вершины которого взаимно однозначно сопоставлены ребрам графа G , и две вершины в $L(G)$ смежны тогда, когда соответствующие им ребра смежны в G .

Орграф G' называется обратным к данному орграфу G , если он имеет те же вершины (как в G), а дуга (x_i, x_j) принадлежит G' тогда, когда дуга (x_j, x_i) принадлежит G .

6.3. Матричные представления графов

Структура графа определяется матрицей смежности. Матрицей смежности графа $G=(X,V)$, $|X|=n$ называется квадратная матрица $A=(a_{ij})_{n \times n}$ с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица смежности неориентированного графа симметрична. Если имеются кратные ребра, то a_{ij} - есть количество ребер с вершинами x_i и x_j . Для орграфа a_{ij} - это количество дуг (x_i, x_j) .

Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности получаются друг из друга транспонированием.

По матрице смежности граф можно восстановить однозначно с точностью до изоморфизма.

Матрицей инцидентности графа $G=(X, V)$, $|X|=n$, $|V|=m$ называется матрица $B=(b_{ij})_{n \times m}$.

1. Если G - ориентированный граф, то

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ - начальная вершина дуги } v_j; \\ -1, & \text{если вершина } x_i \text{ - конечная вершина дуги } v_j; \\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } v_j; \end{cases}$$

2. Если G - неориентированный граф, то

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } v_j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

6.4. Операции над графами

Рассмотрим операции над графами.

Бинарные операции.

1. Объединение графов. Рассмотрим графы $G=(X_1, V_1)$ и $G=(X_2, V_2)$. Объединение графов G_1 и G_2 , обозначаемое как $G_1 \cup G_2$, представляет собой граф $G_3=(X_1 \cup X_2, V_1 \cup V_2)$, в котором множество его вершин будет объединением X_1 и X_2 множество ребер – объединением V_1 и V_2 .

2. Пересечение графов G_1 и G_2 . $G_1 \cap G_2$ - это граф $G_3=(X_1 \cap X_2, V_1 \cap V_2)$. При этом у графа G_3 множество вершин состоит из вершин, входящих одновременно в графы G_1 и G_2 , а множество ребер графа G_3 состоит только из ребер, входящих одновременно в графы G_1 и G_2 .

3. Кольцевой суммой $G_1 \oplus G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $G_3=(X_1 \cup X_2, V_1 \oplus V_2)$, где $V_1 \oplus V_2=(V_1 \setminus V_2) \cup (V_2 \setminus V_1)$.

4. Соединением графов G_1+G_2 называется граф $G_3 = (X_1 \cup X_2, V_1 \cup V_2 \cup \{(x_i, x_j) \mid x_i \in X_1, x_j \in X_2, x_i \neq x_j\})$.

5. Произведением $G_1 \times G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $G_3 = (X_1 \times X_2, V)$, в котором $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in V$ тогда, когда $x_1 = x_2$ и $(y_1, y_2) \in V_2$, или $y_1 = y_2$ и $(x_1, x_2) \in V_1$.

Все вышеуказанные операции справедливы для ориентированных и неориентированных графов.

Унарные операции

1.

1. При удалении вершины из графа удаляются и все инцидентные ей ребра (дуги). Пусть $G=(X, V)$ – граф и $x \in X$. Удалить вершину x из графа G – это значит построить новый граф $G' = (X', V')$, в котором $X' = X \setminus \{x\}$ и V' получается из V удалением всех ребер, инцидентных вершине x .

2. Пусть $G=(X, V)$ – граф. Удалить ребро (дугу) v – это значит построить новый граф $G' = (X', V')$, в котором $X' = X$ и $V' = V \setminus \{x\}$. При удалении ребра (дуги) его концевые вершины не удаляются. Операцией, являющейся обратной к удалению ребра, будет добавление ребра.

3. Говорят, что вершины x_i и x_j в графе G отождествляются (сливаются), если они заменяются такой новой вершиной x_k , что все ребра (дуги) графа, инцидентные x_i и x_j , становятся инцидентными новой вершине x_k .

4. Стягивание ребра (дуги). Это операция удаления ребра и отождествление его концевых вершин. Граф G_1 будет стягиваемым к графу G_2 , если граф G_2 может быть получен из G_1 в результате некоторой последовательности стягиваний ребер.

5. Пусть $G=(X, V)$ – граф и $v=(x, y) \in V$. Подразбиение ребра v – это построение нового графа $G' = (X', V')$, $X' = X \cup \{z\}$ (т. е. z – новая вершина) и $V' = (V \setminus \{v\}) \cup \{(x, z), (z, y)\}$. Эта операция означает «внесение в ребро новой вершины».

Граф $\bar{G}=(X,\bar{V})$ будет дополнением простого графа, если ребро (x_i, x_j) входит в \bar{V} , но не входит в V или две вершины смежны в \bar{G} тогда, когда они не смежны в G .

Если $G'=(X',V')$ будет подграфом графа $G=(X,V)$, то граф G будет называться дополнением графа G' графа G .

6.5. Метрические характеристики графа

Пусть $G=(X,U)$ - связный граф, а x_i, x_j - две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего маршрута, соединяющего вершины x_i, x_j (пути x_i и x_j), называется *расстоянием* между вершинами x_i, x_j и обозначается $d(x_i, x_j)$, если вершины x_i и x_j не соединены маршрутом (путем). Для расстояния $d(x_i, x_j)$ имеются аксиомы метрики:

- 1) $d(x_i, x_j)=0$;
- 2) $d(x_i, x_j) \geq 0$;
- 3) $d(x_i, x_j)=0$; тогда и только тогда, когда $x_i=x_j$;
- 4) $d(x_i, x_j)=d(x_j, x_i)$ для симметрических графов;
- 5) $d(x_i, x_j)+d(x_j, x_k) \geq d(x_i, x_k)$.

Расстояние для графа G определяется матрицей расстояний. *Матрицей расстояний* графа с n вершинами называется квадратная матрица D порядка n с элементами:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i = x_j; \\ d(x_i, x_j), & \text{если } x_i \neq x_j. \end{cases}$$

Для вершины x_j величина $e(x_i)=\max d(x_i, x_j)$ называется *эксцентриситетом* вершины x_i .

Максимальный среди эксцентриситетов вершин называется *диаметром* графа G и обозначается $\text{diam}(G)$:

$$\text{diam}(G)=\max e(x_i)=\max \max d(x_i, x_j) \quad x_i, x_j \in X.$$

Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа называется его *радиусом* и обозначается через $r(G)$:

$$r(G)=\min e(x_i)=\min \max d(x_i, x_j) \quad x_i, x_j \in X.$$

Вершина, имеющая минимальный эксцентриситет, называется *центром* графа. Для вершины x_i число

$$P(x_i) = \sum_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

называется *передаточным числом*.

Вершина графа, которой соответствует минимальное передаточное число

$$\max P(x_i) = \max \sum_{x_j \in X} d(x_i, x_j) \quad x_i, x_j \in X.$$

называется *медианой* графа. Центров и медиан в графе может быть несколько.

6.6. Достижимость и связность

Пусть в графе существует путь, от вершины x_i к вершине x_j , то в этом случае вершина x_j *достижима* из вершины x_i .

Если пары вершин неориентированного графа имеет цепь соединяющая их, то такой граф называется *связный*. Неориентированный граф называется *несвязным*. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если для двух различных вершин x_i и x_j существует путь, соединяющий x_i с x_j . Любые две вершины такого графа взаимно достижимы.

Ориентированный граф называется *односторонне связным* или *односторонним*, если для двух различных вершин x_i и x_j существует путь из x_i в x_j или из x_j в x_i .

Ориентированный граф называют *слабо связным*, если для двух вершин графа существует маршрут, соединяющий их.

В противном случае орграф называется *несвязным*.

Граф на рис. 6.12 а будет сильно связным. Граф на рис. 6.12 б, не является сильно связным (из x_5 в x_2 нет пути), но является односторонне связным. Граф, изображенный на рис. 6.12 в, не является ни сильным, ни односторонним, т. к. в нем не существует путей от x_5 к x_2 и от x_2 к x_5 . Он будет слабо связный. Граф, приведенный на рис. 6.12 г, будет несвязным.

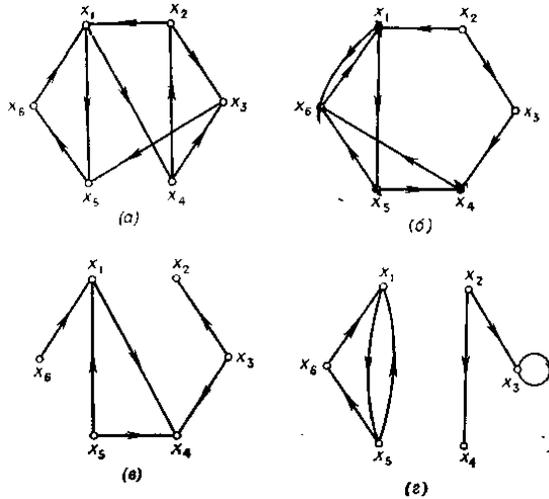


Рис. 6.12. Сильно связный граф (а), односторонне связный граф (б), слабо связный граф (в), несвязный граф (г)

Пусть имеется свойство P . Максимальным подграфом графа G относительно свойства P будет называться порожденный подграф (X_S) графа G , обладающий этим свойством и такой, что не существует другого порожденного подграфа (X_H) , у которого $X_S \subset X_H$ и который также обладает свойством P .

В графе G (рис. 6.12 б) подграф $(\{x_1, x_4, x_5, x_6\})$ является сильной компонентой графа G . С , а подграфы $(\{x_1, x_6\})$ и $(\{x_1, x_5, x_6\})$ не будут сильными компонентами, т.к. они содержатся в графе $(\{x_1, x_4, x_5, x_6\})$ и они не максимальные.

В графе, показанном на рис. 6.12 в подграф $(\{x_1, x_4, x_5\})$ будет односторонней компонентой. В графе на рис. 6.12 г оба подграфа $(\{x_1, x_5, x_6\})$ и $(\{x_2, x_3, x_4\})$ будут слабыми компонентами. У этого графа только две такие компоненты.

Односторонние компоненты графа могут иметь общие вершины. При этом сильная компонента должна содержаться по крайней мере в одной односторонней компоненте, а одно-

сторонняя компонента содержится в некоторой слабой компоненте данного графа G .

Максимальный связный подграф неориентированного графа G называется *компонентой связности*.

Максимальный сильно связный подграф ориентированного графа G называется *сильной компонентой связности* (СК). Имеется два вида связности – вершинная связность и реберная связность. *Число вершинной связности* – это наименьшее число вершин, удаление которых (вместе с инцидентными ребрами) приводит к несвязному графу. *Число реберной связности* – это наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.

6.7. Определение сильных компонент графа

Орграф называется *сильно связным*, если любые две его вершины взаимно достижимы, *односторонне связным*, если для двух вершин одна достижима из другой, и *слабо связным*, если связным является лежащий в его основе неорграф.

Сильной компонентой орграфа называется его максимальный сильно связный подграф, подграф, не содержащийся ни в каком другом сильно связном подграфе этого графа.

Для определения сильных компонент графа необходимо:

1. Построить матрицу достижимости графа. Матрицей достижимости графа с n вершинами называется квадратная матрица R порядка n , элементы которой определяются следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_j \text{ достижима из } x_i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2. Построить матрицу контрдостижимости графа. Матрицей контрдостижимости графа с n вершинами называется

квадратная матрица Q порядка n , элементы которой определяются следующим образом:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i = x_j; \\ d(x_i, x_j), & x_i \neq x_j. \end{cases}$$

$$r_{ii} = 1, \quad q_{ii} = 1 \forall i.$$

Матрицу контрдостижимости можно определить по матрице достижимости следующим образом:

3. Построить матрицу сильной связности графа. Матрицей сильной связности орграфа с n вершинами называется квадратная матрица S порядка n , элементы которой определяются следующим образом:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ взаимно достижимы;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицу сильной связности можно определить так:

$$R=Q^T, \quad S=R * Q,$$

где $R * Q$ - операция поэлементного умножения матриц.

4. По матрице сильной связности выделить сильные компоненты графа. Если вершины x_i и x_j принадлежат одной сильной компоненте орграфа, то $s_{ij} = 1$. При этом строки (столбцы), соответствующие этим вершинам в матрице S , одинаковы. Рассмотрим задачи.

Задача 1. Определить метрические характеристики графа

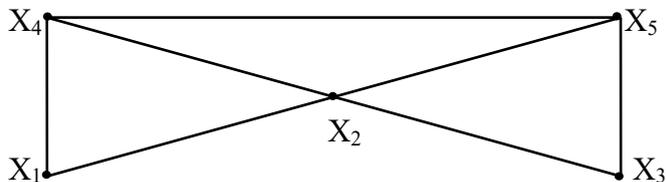


Рис. 6.13

Решение. Метрические характеристики определяются следующим образом:

$$D = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e(x_1) = 2 & P(x_1) = 6 \\ e(x_2) = 1 & P(x_2) = 4 \\ e(x_3) = 2 & P(x_3) = 6 \\ e(x_4) = 2 & P(x_4) = 5 \\ e(x_5) = 2 & P(x_5) = 5. \end{matrix} \end{matrix}$$

Радиус графа равен 1, диаметр равен 2. Центр графа – вершина x_2 ; Медиана графа – вершина x_2 .

Задача 2.

Найти сильные компоненты графа

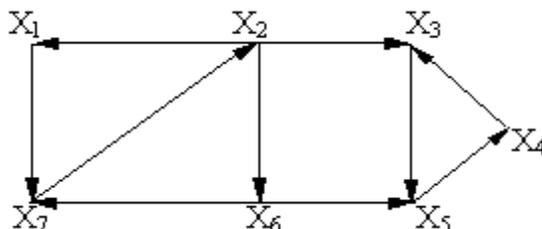


Рис. 6.14

Решение.

Для данного графа матрицы R , Q и S имеют вид:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$S = R * Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

В соответствии с матрицей S сильные компоненты графа: x_1, x_2, x_6, x_7 – первая сильная компонента; x_3, x_4, x_5 – вторая сильная компонента.

Задача 3. Найти кратчайшие пути на графе методом динамического программирования (алгоритм Беллмана-Форда).

```

Программа для решения.
uses crt;
const nv=6;n=4;k=1;m=100;
w:array[1..nv,1..nv] of integer=
    ((0,5,m,m,m,9),
    (5,0,7,m,9,m),
    (m,7,0,5,m,10),
    (m,m,5,0,2,m),
    (m,9,m,2,0,11),
    (9,m,10,m,11,0));

var
    mv: array[1..nv] of integer;
P:array[1..nv,1..nv] of integer;
    i,j,r,b,z,d:integer;
C:array[1..nv,1..nv] of integer;

begin
    clrscr;
    for i:=1 to nv do begin
        for j:=1 to nv do
            write(' ',w[i,j]:5);
        writeln;
    end;
    writeln;

    for i:=1 to nv do P[1,i]:=w[i,k];
        for z:=2 to nv-1 do
            for i:=1 to nv do begin
                d:=2*m;
                for j:=1 to nv do begin
                    r:=w[i,j]+P[z-1,j];
                    if r<d then begin
d:=r; b:=j;end;

                end;
                P[z,i]:=d; C[z,i]:=b;

```

```

                                end;
mv[1]:=n; mv[nv]:=k;
z:=nv-1;
    while z>1 do begin
mv[nv-z+1]:=C[z,mv[nv-z]];
z:=z-1;
    end;

for i:=1 to nv do write(' ',mv[i]);
writeln; writeln;
for i:=1 to nv do write(' ',P[nv-1,i]);
readln;
end.

```

6.8. Применение теории графов для анализа устройств автоматики

Рассмотрим T-триггер – автомат Мили.

Из аналитического описания T-триггера, следует, что $z(t) = \{x(t), y(t)\}$, то есть можно составить одну таблицу для $z(t)$, значения которой будут одновременно содержать как $z(t)$ так и $y(t)$, табл. 6.1.

Таблица 6.1

Таблица состояний T-триггера $z(t) = \{x(t), y(t)\}$

$x(t)$	$z(t-1) = \{x(t-1), y(t-1)\}$			
	00	01	10	11
0	00	01	00	01
1	11	10	10	11

Из таблицы видно, что если триггер находился, например, в состоянии $z(t-1) = \{00\}$ и на вход поступил сигнал $x(t) = 1$, то триггер перейдёт в состояние $z(t) = \{11\}$, которому соответствуют $x(t) = 1$ и $y(t) = 1$.

Граф Т-триггера, соответствующий его состояниям, показан на рис. 6.15.

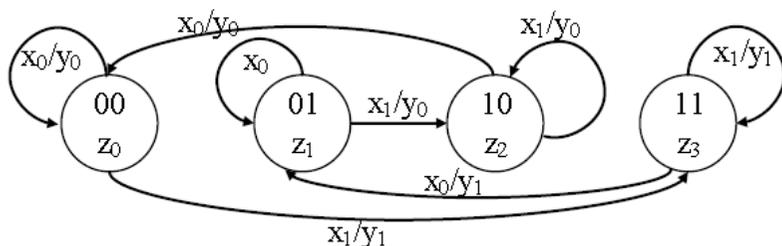


Рис. 6.15. Графическое описание Т-триггера как автомата

Пусть задан автомат и его исходное состояние, тогда можно сформулировать три задачи его анализа.

1. Для известной последовательности входных сигналов найти соответствующую последовательность состояний автомата и его выходных сигналов.

2. Для данной последовательности выходных сигналов или состояний автомата найти соответствующую последовательность входных сигналов.

3. Найти последовательность входных сигналов, безусловно переводящую автомат из произвольного состояния в заданное.

Рассмотрим методы решения этих задач на примере логического устройства с памятью, представленного на рис. 6.16.

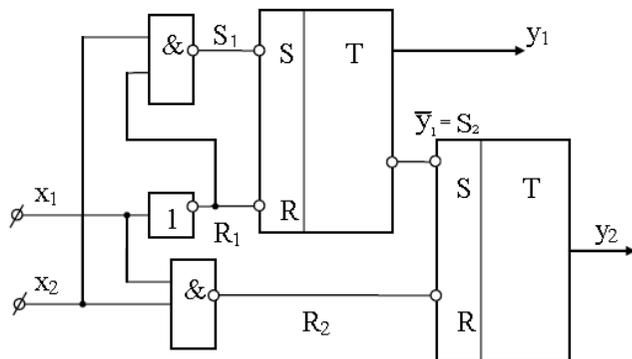


Рис. 6.16. Схема электрическая принципиальная логического устройства с памятью

Для описания автомата необходимо описать все его компоненты. Внутренняя структура используемого RS-триггера с инверсными входами представлена на рис. 6.17, а сокращённая и полная таблицы его состояний в табл. 6.2 и 6.3.

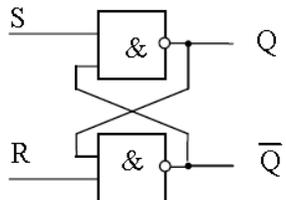


Рис. 6.17. Внутренняя структура RS-триггера с инверсными входами

Таблица 6.2

Сокращённая таблица состояний RS-триггера

$S(t)R(t)$	$Q(t-1)$	
	0	1
00	1	1
01	1	1
10	0	0
11	0	1

Сокращённая таблица состояний неудобна для составления аналитического описания работы RS-триггера. Составим полную таблицу истинности всех входных и выходных сигналов триггера (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Таблица истинности сигналов RS-триггера

$S(t)$	$R(t)$	$Q(t-1)$	$Q(t)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

В соответствии с табл. 6.3 выпишем СДНФ для сигнала $Q(t)$:

$$Q(t) = \bar{S}(t)\bar{R}(t)\bar{Q}(t-1) \vee \bar{S}(t)\bar{R}(t)Q(t-1) \vee \bar{S}(t)R(t)\bar{Q}(t-1) \vee \bar{S}(t)R(t)Q(t-1) \vee S(t)R(t)Q(t-1);$$

или после минимизации

$$Q(t) = \bar{S}(t)\bar{R}(t) \vee \bar{S}(t)\bar{Q}(t-1) \vee \bar{S}(t)Q(t-1) \vee \bar{S}(t)R(t) \vee R(t)Q(t-1) = \\ = \bar{S}(t) \vee R(t)Q(t-1).$$

Перейдём к описанию автомата в виде последовательно связанной цепочки уравнений, позволяющих после соответствующей подстановки получить значение любого сигнала:

$$y_1(t) = \bar{S}_1(t) \vee R_1(t)y_1(t-1);$$

$$y_2(t) = \bar{S}_2(t) \vee R_2(t)y_2(t-1) = y_1(t) \vee R_2(t)y_2(t-1);$$

$$S_1(t) = \overline{R_1(t)x_1(t)};$$

$$R_1(t) = \bar{x}_1(t); R_2(t) = \overline{x_1(t)x_2(t)}.$$

После подстановки получим выражения для выходных сигналов:

$$y_1(t) = \bar{x}_1(t)[x_2(t) \vee y_1(t-1)];$$

$$y_2(t) = \bar{x}_1(t)[x_2(t) \vee y_1(t-1)] \vee y_2(t-1)\overline{x_1(t)x_2(t)}.$$

Из выражений для y_1 и y_2 следует, что

$$z(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}; y(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}; x(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}.$$

Поскольку $y(t) = z(t)$, то анализируемое устройство является автоматом Мура.

Составим полную таблицу состояний (табл. 6.4).

Таблица 6.4

Таблица состояний устройства $z(t)=\{y_1(t),y_2(t)\}$

$x(t) =$ $=\{x_1(t),x_2(t)\}$	$z(t-1) = \{y_1(t-1),y_2(t-1)\}$		
	$z_0=00$	$z_1=01$	$z_2=11$
$x_0=00$	00	01	11
$x_1=01$	11	11	11
$x_2=10$	00	01	01
$x_3=11$	00	00	00

Состояние $z_3=\{10\}$ в устройстве никогда не возникает.
Граф автомата представлен на рис. 6.18.

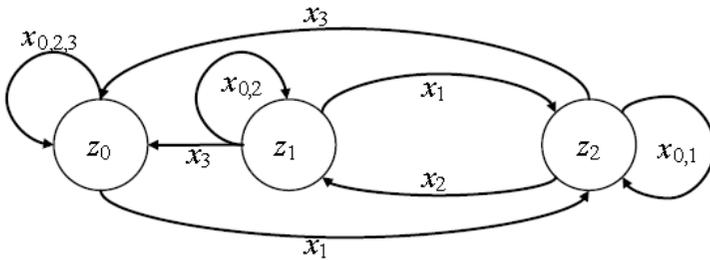


Рис. 6.18. Граф логического устройства

Пользуясь полученными выше описаниями автомата, составим матрицу переходов (табл. 6.5).

Таблица 6.5

Матрица переходов логического устройства

$z(t-1)$	$z(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}$		
	$z_0=00$	$z_1=01$	$z_2=11$
$z_0=00$	$x_0 \vee x_2 \vee x_3$	-	x_1
$z_1=01$	x_3	$x_0 \vee x_2$	x_1
$z_2=11$	x_3	x_2	$x_0 \vee x_1$

Перейдём к анализу автомата.

Первая задача анализа: задана последовательность входных сигналов, то есть входное событие, например

$$x = x_0 x_1 x_2 x_0 x_1 x_3,$$

и исходное состояние автомата z_0 .

По графу (рис. 6.18) или матрице переходов (табл. 6.5) определяем последовательность выходных состояний:

$$z = z_0 z_0 z_2 z_1 z_1 z_2 z_0.$$

Вторая задача: пусть задана требуемая последовательность состояний: $z = z_0 z_2 z_2 z_1 z_1 z_0$, найти соответствующее входное событие.

С помощью графа получаем: $x = x_1 \cdot (x_0 \vee x_1) \cdot x_2 \cdot (x_0 \vee x_2) \cdot x_3$.

Третья задача анализа: найти входные события, безусловно переводящие автомат в заданное состояние z_0 , z_1 или z_2 из произвольного состояния.

Воспользуемся матрицей переходов (табл. 6.5).

В состояние z_0 можно перейти из любого состояния, подав на вход автомата сигнал x_3 . В этом можно убедиться и на графе (рис. 6.18).

Аналогично в состояние z_2 можно перейти из любого состояния, подав на вход автомата сигнал x_1 .

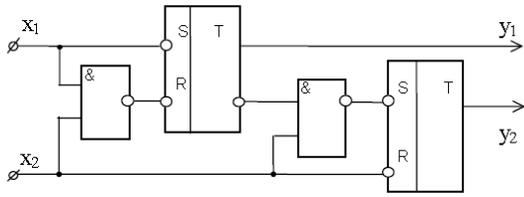
Состояние z_1 недоступно непосредственно из z_0 , однако в z_1 с помощью сигнала x_2 можно прийти из состояния z_2 , которое, в свою очередь, всегда доступно из любого состояния по команде x_1 . Таким образом, безусловный переход в состояние z_1 возможен в результате подачи на вход автомата последовательности $x = x_1 x_2$. Анализ графа подтверждает полученный результат.

Отметим, что задача безусловного перехода не всегда имеет решение в полном объёме.

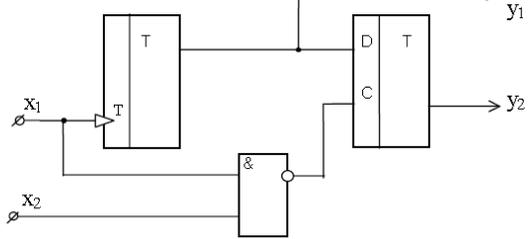
Задачи для самостоятельного решения

Описать электрическую схему устройства графом и провести анализ работы схемы.

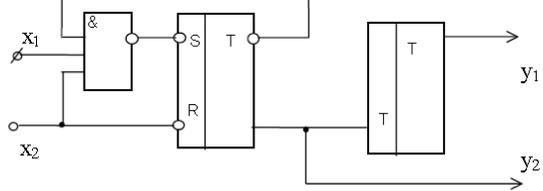
Вариант 1



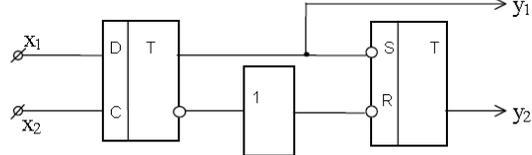
Вариант 2

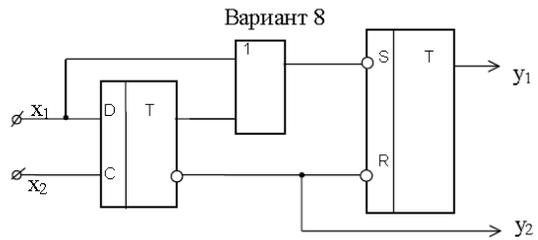
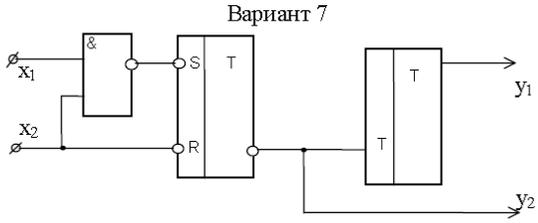
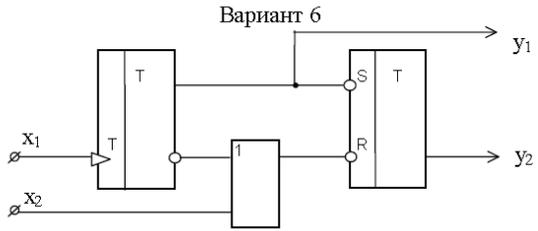
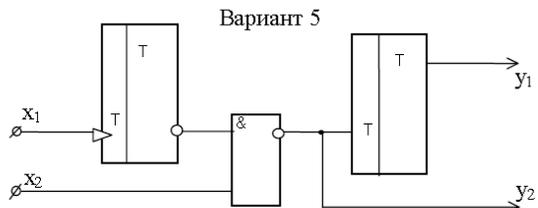


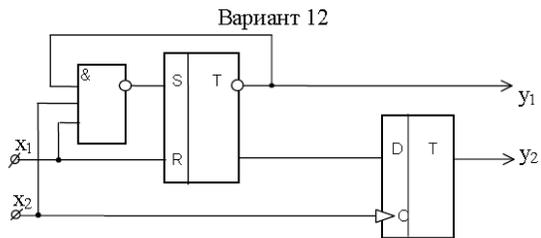
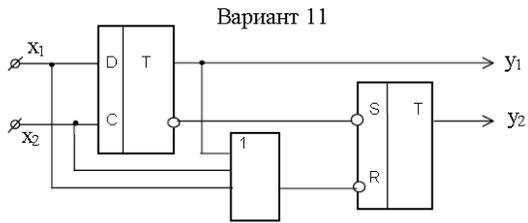
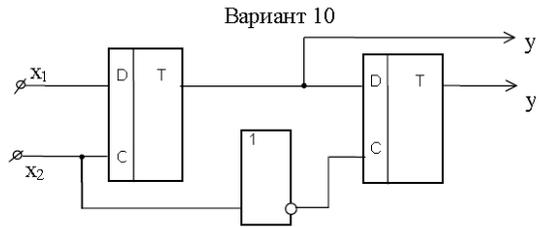
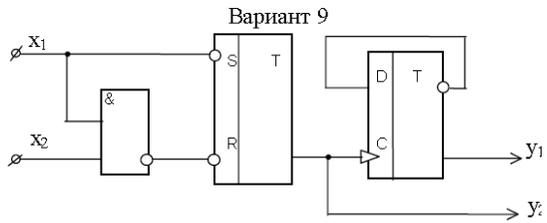
Вариант 3



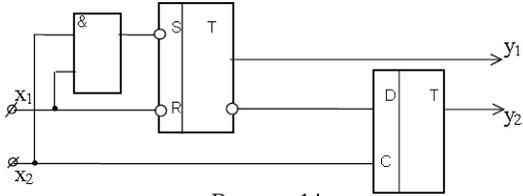
Вариант 4



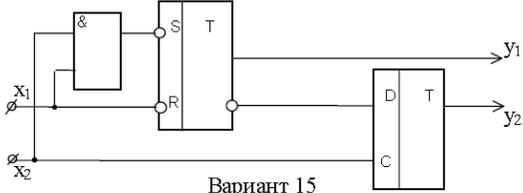




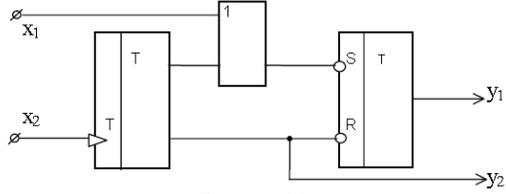
Вариант 13



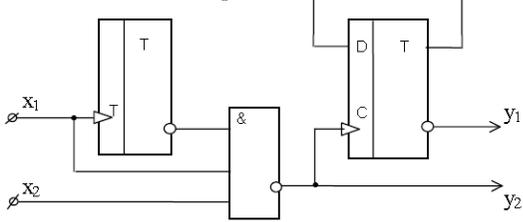
Вариант 14

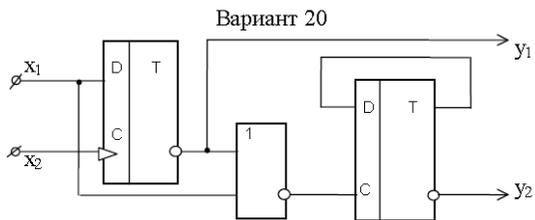
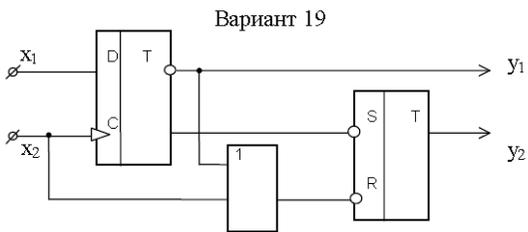
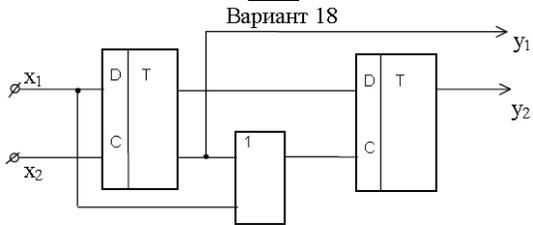
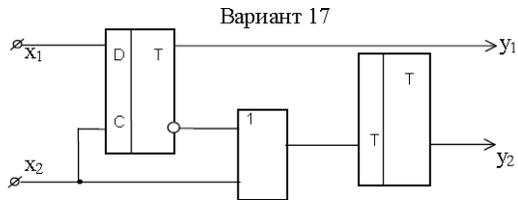


Вариант 15



Вариант 16





ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем пособии рассмотрен теоретический материал и задачи уравнений математической физики, элементов вариационного исчисления и дискретной математики, а также задачи электротехники и оптимального управления.

Данная работа, которая содержит четкое и краткое изложение теории, большое количество задач и разобранных примеров, существенно восполнит имеющиеся пробелы в учебной литературе по вышеуказанным разделам математики для бакалавров инженерно-технических специальностей вузов.

Издание рекомендуется для работы на практических и лабораторных занятиях, при подготовке к контрольным и курсовым работам, а также при выполнении типовых расчетов и при составлении комплексных заданий, аттестационных контрольных заданий по указанным темам. Считаем, что данное пособие поможет более глубокому и полному усвоению студентами учебного материала по данным в пособии разделам и будет соответствовать эффективной организации учебного процесса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2-х т.: Т.2. / Н.С. Пискунов. – М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2006. -544 с.

2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб.пособие для вузов: В 2 ч. Ч.2. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - М.: ИД ОНИКС 21 век; Мир и Образование, 2003. - 304с.

3. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики./ Н. С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. - М.:Высш. шк., 1970. – 712 с.

4. Вентцель Т.Д. Сборник задач по уравнениям с частными производными / Т. Д. Вентцель, А. Ю. Горацкий,

Т. О. Капустина и др.; Под ред. А. С. Шамаева. – 2-е изд.,
испр. – М.: БИНОМ; Лаборатория знаний, 2008. – 158 с.

5. Краснов М.Л. Вариационное исчисление / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. Е. Макаренко. – М.: Наука-2007. 188с.

6. Герасимьяк Р.П. Анализ и синтез крановых электро-механических систем / Р.П. Герасимьяк, В.П. Лещёв. – Одесса: СМЛ, 2008.– 192 с.

7. Ключев В.И. Электропривод и автоматизация общепромышленных механизмов / В.И. Ключев. – М.: Энергия, 1980. – 360 с.

8. Судоплатов С.В. Элементы дискретной математики: Учебник / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. М.: ИНФРА-М, 2002. – 280 с.

9. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах / В.В. Тишин. - СПб.: БХВ-Петербург, 2008.– 352 с.

10. Гаврилов Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие / Г.П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – 3-е изд., перераб. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.

11. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. - СПб.: Лань, 2005. - 400 с.

12. Емеличев В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников. - М.: Наука, 1990. – 384 с.

13. Асеев Г.Г. Дискретная математика/ Г. Г. Асеев, О.М. Абрамов, Д. Э. Ситников –Ростов на Дону: Феникс, 2003. – 142 с.

14. Жуков В.М. Практические задачи по математике / В.М. Жуков. –Ростов на Дону: Феникс, 2012. – 344 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	
1. Основные уравнения математической физики.....	3
1.1. Уравнение колебаний струны.....	3
1.2. Решение задач о колебаниях бесконечной и полуограниченной струны (метод Даламбера).....	6
1.3. Продольные колебания стержня.....	21
1.4. Колебания стержня с одним закрепленным концом.....	24
1.5. Продольный удар груза по стержню.....	26
1.6. Метод Фурье решения задачи о колебаниях конечной струны с закрепленными концами.....	31
1.7. Вынужденные колебания струны с закрепленными концами.....	34
1.8. Общая схема метода разделения переменных (метода Фурье). Задача Штурма - Лиувилля.....	37
1.9. Уравнение колебаний мембраны.....	43
1.10. Решение задачи о радиальных колебаниях круглой мембраны.....	46
1.11. Решение задачи о продольных колебаниях стержня методом Фурье.....	51
1.12. Решение задачи теплопроводности бесконечного и полуограниченного стержня.....	55
1.13. Решение задачи теплопроводности в конечном стержне.....	61
1.14. Решение задачи теплопроводности в однородном шаре.....	63
1.15. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа.....	65
1.16. Общий вид уравнения эллиптического типа.....	66
1.17. Фундаментальные решения. Функция Грина	69
1.18. Условия разрешимости граничных задач	72
1.19. Понятие гармонической функции.....	73
1.20. Задачи Дирихле для круга и шара методом Фурье.....	74
1.21. Задача Дирихле одномерного и двумерного случаев.....	80

2. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	84
2.1. Типы уравнений второго порядка.....	84
2.2. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.....	85
2.3. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.....	87
3. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ.....	93
3.1. Задача Коши.....	93
3.2. Задача Гурса.....	96
3.3. Метод Римана.....	97
4. ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.....	109
4.1. Дифференциальные уравнения свободных электрических колебаний.....	109
4.2. Телеграфное уравнение.....	110
4.3. Интегрирование телеграфного уравнения по методу Римана.....	111
ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ	
1. Основы вариационного исчисления.....	114
1.1. Вариация и ее свойства.....	114
1.2. Уравнение Эйлера.....	118
2. Применение вариационных методов оптимального управления в технических задачах.....	127
ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ	
1. Элементы теории множеств.....	173
1.1. Основные положения теории множеств.....	173
1.2. Операции над множествами и их свойства. Диаграммы Эйлера-Венна.....	175
1.3. Мощность множества.....	178
1.4. Взаимно однозначное соответствие между множествами.....	179
1.5. Счетные и несчетные множества.....	179
2. Элементы теории отношений.....	180
2.1. Бинарные отношения. Свойства отношений.....	180

2.2. Отношение эквивалентности и разбиения	184
2.3. Отношения порядка. Диаграмма Хассе	184
3. Основы математической логики	187
3.1. Составные высказывания	187
3.2. Основные логические операции. Формулы логики	188
3.3. Законы логики. Равносильные преобразования.....	192
4. Булевы функции.	19
4.1. Определения булевых функций и действия с ними... ..	194
4.2. Совершенная дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (СДНФ и СКНФ). Дизъюнктивные нормальные формы	197
4.3. Табличный способ приведения к С ДНФ и к СКНФ..	199
5. Применение комбинационной логики при проектировании автоматических устройств.....	205
5.1. Задача минимизации булевых функций.....	205
5.2. Минимизация методом Квайна	206
5.3. Минимизация по карте Карно (диаграмме Вейча).....	210
5.4. Синтез логических устройств с памятью (последовательностные устройства).....	219
6. Элементы теории графов	234
6.1. Основные понятия и определения теории графов	234
6.2. Типы графов.....	237
6.3. Матричные представления графов	241
6.4. Операции над графами.....	242
6.5. Метрические характеристики графа.	244
6.6. Достижимость и связность	245
6.7. Определение сильных компонент графа	247
6.8. Применение теории графов для анализа устройств автоматики.....	252
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	263
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	263

Учебное издание

Катрахова Алла Анатольевна
Купцов Валерий Семенович
Васильев Евгений Михайлович

СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
К ЗАДАЧАМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ И ТЕОРИИ
УПРАВЛЕНИЯ: КУРС ЛЕКЦИЙ

ЧАСТЬ 2

В авторской редакции

Подписано к изданию 21.09.2018

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14