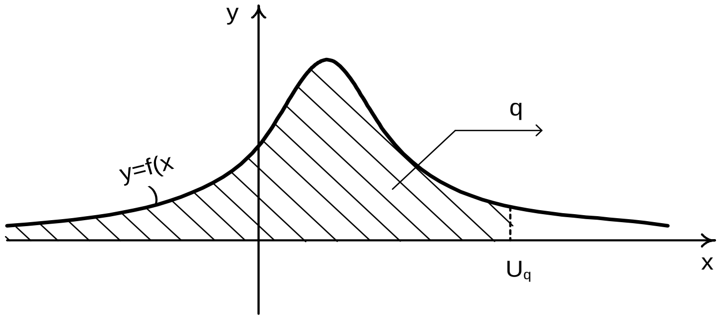
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики и физико-математического моделирования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для организации самостоятельной работы по изучению дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов по направлению подготовки бакалавров 230100 «Информатика и вычислительная техника» (профиль «Системы автоматизированного проектирования») очной формы обучения

Часть 2



Воронеж 2012

Составители: канд. физ.-мат. наук Е.Г. Глушко,
канд. физ.-мат. наук А.П. Дубровская

УДК 517.9

Методические указания для организации самостоятельной работы по изучению дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов по направлению подготовки бакалавров 230100 «Информатика и вычислительная техника» (профиль «Системы автоматизированного проектирования») очной формы обучения. Ч. 2 / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Е.Г. Глушко, А.П. Дубровская. Воронеж, 2012. 54 с.

В методических указаниях содержатся основные теоретические положения по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Приводится большое количество решенных типовых задач, задач для самостоятельного решения.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе MS Word 2003 и содержатся в файле ТВ2.docx.

Библиогр.: 5 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Ломакин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой
д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

Справочный материал и принципы решения задач
Занятие № 6. Законы распределения и числовые характеристики случайных величин

Случайной величиной ξ называется функция $\xi=\xi(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω, удовлетворяющая условию: для любых чисел a,b $(a<b)$ можно посчитать вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (a,b).

Функцией распределения вероятности случайной величины ξ называется функция $F(x)=P(\xi<x)$, $|x|<\infty$.

Функция распределения случайной величины ξ $F(x)$ есть неубывающая функция; $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, $0\le F(x)\le 1$, $P(x_1\le\xi<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$.

Случайные величины, принимающие дискретное множество значений, называются *дискретными случайными величинами*.

Примеры дискретных распределений

1. Биномиальное распределение

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad 0<p<1, \qquad k=0,\dots,n.$$

2. Распределение Пуассона

$$P(\xi=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a}, \qquad a>0, \qquad k=0,1,2,\ \dots\ .$$

3. Геометрическое распределение

$$P(\xi=k)=p(1-p)^{k-1}, \qquad 0<p<1, \qquad k=1,2,\dots\ .$$

Вероятностной характеристикой дискретной СВ является закон распределения.

Законом распределения ДСВ называется перечень значений, которые принимает эта СВ, и соответствующих им вероятностей.

На практике закон распределения ДСВ задается в виде таблицы, которую называют еще *рядом распределения*.

X	x_1	x_2	…	x_k	…
P(X=x_k)	p_1	p_2	…	p_k	…

Зная закон распределения ДСВ, можно найти функцию распределения с помощью равенства

$$F(x) = \sum_{k\ x_k<x} P(X = x_k).$$

Суммирование в этом равенстве распространяется на все те индексы k, для которых $x_k<x$. Так как $P(X=x_k)=F(x_k+0)-F(x_k)$, $x_k\in\{x_1, x_2,...\}$, то очевидно, что функция распределения имеет скачки при тех значениях x, которые являются ее возможными значениями. Величина скачка в точке $x=x_k$ как раз равна вероятности СВ принятия данного значения.

Для дискретных случайных величин функция распределения кусочно-постоянна, непрерывная слева, имеет разрывы 1 рода в точках $x = x_k$, и величина скачка равна p_k.

Непрерывной называется случайная величина ξ, функцию распределения которой $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Функция $f(x)$ называется *плотностью распределения* вероятностей случайной величины ξ. Всюду в дальнейшем будем считать $f(x)$ непрерывной функцией.

Свойства функции распределения и плотности распределения вероятности непрерывной случайной величины

1) $f(x) \geq 0$.

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ *(условие нормировки).*

3) $f(x) = F'(x)$.

4) $P(x_1 < \xi < x_2) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(x_2) = F(x_1)$.

Примеры непрерывных распределений

1) Равномерное распределение

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0, & x < a, x \geq b \end{cases}$$

2) Нормальное распределение (с параметрами (m, σ^2))

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad |m| < \infty,\ \sigma > 0.$$

Запись $\xi \in N(m, \sigma^2)$ означает, что случайная величина ξ распределена нормально с параметрами m и σ^2.

3) Показательное распределение

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0.$$

4) Распределение Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

5) Распределение Релея

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

6) Гамма-распределение с параметрами $\lambda>0$, $\gamma>0$

$\xi\in\Gamma(\lambda,\gamma)$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{\lambda^{\gamma}x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$$

Здесь $\Gamma(\gamma)$ – гамма-функция.

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$M\xi=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k p_k & \text{для дискретной случайной величины,}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx & \text{для непрерывной случайной величины.}\end{cases}\qquad(1)$$

Говорят, что математическое ожидание у случайной величины существует, если ряд (интеграл) (1) сходится абсолютно.

Дисперсией случайной величины $D\xi$ называется число

$$D\xi=M\left(\xi-M\xi\right)^2.$$

Дисперсия вычисляется по формулам:

$D\xi=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2$ для дискретной случайной величины.

$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - m^2$ для непрерывной случайной величины, где $m = M\xi$.

Пример 1. Изделия испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого изделия пройти испытания равны 0,8 и независимы. Испытания заканчиваются после первого же изделия, не выдержавшего испытания. Вывести формулу для ряда распределения числа испытаний.

Решение. Испытания заканчиваются на *k*-ом изделии, если первые (*k*-1) изделия пройдут испытания, а *k* – изделие не пройдет. Если X – случайное число испытаний, то

$P(X = k) = (1-0{,}8)\cdot(0{,}8)^{k-1} = 0{,}8^{k-1}\cdot 0{,}2$, $k = 1, 2, \ldots$.

ЗРВ будет иметь вид

X	1	2	3	…	k	…
p	$0{,}2$	$0{,}2\cdot 0{,}8$	$0{,}2\cdot 0{,}8^2$		$0{,}2\cdot 0{,}8^{k-1}$	

$\sum\limits_{k=1}^{6} p_k = 1.$

Пример 2. В урне имеется четыре шара с номерами от 1 до 4. Извлекли два шара. Найти закон распределения и функцию распределения СВ X суммы номеров извлеченных шаров.

Решение. Ω={(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)}.

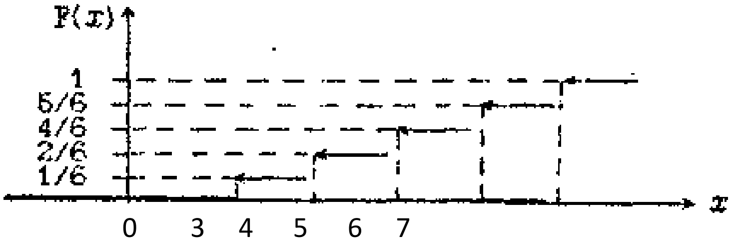
Закон распределения имеет вид

X	3	4	5	6	7
P(X=x_k)	1/6	1/6	2/6	1/6	1/6

$\sum\limits_{k=1}^{6} p_k = 1.$

Функция распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3,\\ 1/6, & 3<x\le 4,\\ 2/6, & 4<x\le 5,\\ 4/6, & 5<x\le 6,\\ 5/6, & 6<x\le 7,\\ 1, & x>7. \end{cases}$

График F(x) имеет вид



Пример 3. Вероятность попадания стрелка при одном выстреле p=0,3. Найти закон распределения для СВ X - числа попаданий при 3 выстрелах.

Решение. Обозначим попадание через Y, непопадание - H. Тогда

Ω={(HHH),(YHH),(HYH),(HHY),(YYH),(YHY),(HYY), (YYY)},

X	0	1	2	3
$P_n(X=k)$	q^3=0,343	C_3^1 pq^2=0,441	$C_3^2\,p^2q$=0,189	p^3=0,227

$$\sum_{k=1}^{3} P(X=k)=1.$$

Пример 4. Случайная величина X распределена по закону, определяемому плотностью распределения вероятностей вида

$$f(x)=\begin{cases} C\cos x, \text{если } -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}, \\ 0, \text{ если } |x|>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти константу C, вычислить $P\left\{|x|<\frac{\pi}{4}\right\}$, m_x, D_x.

Решение. 1. Для нахождения C воспользуемся свойством нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$. Или $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} C\cos x dx=1$, $C\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=1$,

$2C=1$, $C=\frac{1}{2}$.

2. $P\left\{|x|<\frac{\pi}{4}\right\}=P\left\{-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\right\}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x dx=\frac{1}{2}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$

$=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $m_x=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=0.$

4. $D_x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 f(x)dx-(m_x)^2=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx=$

$=x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx=\frac{\pi^2}{4}-2(-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx)=$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Пример 5. Время безотказной работы некоторого узла сложного агрегата – экспоненциальная случайная величина со средним $M = 2$. Для увеличения надежности агрегата узел дублируется – ставят параллельно несколько одинаковых, но функционирующих независимо узлов. Сколько узлов следует запараллелить, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,9, по крайней мере один из них не вышел из строя за 10 часов работы?

Решение. T – случайное время безотказной работы узла – имеет экспоненциальное распределение. Это означает, что

$$P\{T < t\} = F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - \exp\{-\mu \cdot t\}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Известно, что математическое ожидание экспоненциальной случайной величины есть величина, обратная параметру: $M = 1/\mu \Rightarrow \mu = 0,5$. Следовательно, вероятность отказа узла в течение 10 часов будет равна

$$P\{T < 10\} = F_T(10) = 1 - \exp - \{0,5 \cdot 10\} \approx 0,9933.$$

Если запараллелено N идентичных узлов, то событие $A =$ {по крайней мере один из узлов не вышел из строя за 10 часов} является противоположным событию $\bar{A} =$ {все узлы вышли из строя за 10 часов}. Поэтому $P\{A\} = 1 - P\{\bar{A}\}$. Для последней вероятности (в силу независимости отказов запараллеленных узлов) получаем

$$P\{\bar{A}\} = \left(P\{T < 10\}\right)^N.$$

Искомое количество N может теперь быть найдено как наименьшее целое решение неравенства

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(\bar{A})=1-\left(P(T<10)\right)^{N}=1-(0,9933)^{N}\geq 0,9\Rightarrow N\geq 343.$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. Некто имеет в связке пять ключей. При отмыкании замка он последовательно испытывает ключи, пока не подберет нужный. Полагая выбор ключей бесповторным, написать закон распределения числа испытанных ключей. Подсчитать математическое ожидание этой случайной величины и построить ее функцию распределения.

2. На электронное реле воздействует случайное напряжение, имеющее плотность вероятности $f(x)=\dfrac{x}{a^2}\cdot\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, x\geq 0.$ Реле срабатывает всякий раз, когда напряжение на его входе превышает 3В. Какова вероятность срабатывания реле?

3. В кошельке было 5 монет по 10 копеек и три монеты по 50 копеек. Из кошелька вынули наугад четыре монеты. Найдите закон распределения случайной величины X, которая равна сумме вынутых копеек.

4. Время безотказной работы предохранителя имеет показательный закон распределения с функцией плотности вероятности $f(x)=0,002e^{-0,002x}$ при $x\geq 0, f(x)=0$ при $x<0$. Найдите функцию распределения времени безотказной работы. Найдите вероятность того, что предохранитель безотказно проработает 1000 часов.

5. Случайная величина X равна сумме выпавших очков на двух игральных кубиках. Напишите ее закон распределения и найдите ее математическое ожидание.

6. В урне лежат два черных три белых шара. Из этой урны вынимаются один за другим без возвращения шары до тех пор, пока не будет вынут черный шар. Найдите среднее число вынутых при этом шаров.

7. Случайная величина X имеет функцию плотности вероятности $f(x) = 0{,}5\sin x$ при $x \in (0,\pi)$ и $f(x) = 0$ при остальных x. Найдите: а) функцию распределения величины X; б) математическое ожидание этой величины; в) вероятность попадания в интервал $(0, \pi/3)$.

8. Монету бросают до первого выпадения герба, либо до тех пор, пока цифра не выпадет четыре раза подряд. Найдите среднее число бросков монеты.

9. Случайная величина X имеет функцию плотности вероятности $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$ (закон распределения Коши). Какова вероятность того, что при трех независимых наблюдениях этой случайной величины будут наблюдаться значения только из интервала $(-1;1)$?

Ответы

1. $M(X) = 3;$; 2. $\exp(-9/2\sigma^2)$;

3. $P(X = 40) = \dfrac{1}{14}, P(X = 80) = \dfrac{3}{7}, P(X = 120) = \dfrac{3}{7},$

$P(X = 160) = \dfrac{1}{14};$

4. $F(x)=1-e^{-0{,}002x}$ при $x\geq 0,\ F(x)=0$, при $x<0, P=e^{-2}\approx 0{,}17;$

5. $M(\xi)=7;$ 6. 2; 7. а) $F(x)=0$ при $x<0, F(x)=0{,}5(1-\cos x)$ при $x\in(0,\pi), F(x)=1$ при $\pi<x,$ б) $M(\xi)=\pi/2,$ в) $P(0<\xi<\pi/3)=1/4;$ 8. 15/8; 9. 1/8.

Занятие № 7. Нахождение числовых характеристик дискретных случайных величин, принимающих целочисленные значения методом производящей функции. Распределение Пуассона. Нормальное распределение.

Пусть СВ X принимает конечное или счетное число целочисленных значений. В соответствие заданному распределению ставится функцию

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n z^n,$$

которая называется *производящей функцией* для заданного распределения вероятностей.

Тогда математическое ожидание и дисперсия могут быть найдены по формулам

$$\mathrm{M}(\mathrm{X})=\Phi'(1),\mathrm{D}(\mathrm{X})=\Phi''(1)+\mathrm{M}(\mathrm{X})-(\mathrm{M}(\mathrm{X}))^2. \qquad (2)$$

Случайная величина X называется распределенной по закону Пуассона с параметром λ>0, если ее возможные значения равны 0, 1, 2,..., а соответствующие вероятности определяются формулой

$$P(\mathrm{X}=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Закон распределения имеет вид

X	0	1	2	…	k	…
$P(X=k)$	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	…

Для того, чтобы убедиться, что это действительно закон распределения, достаточно проверить, что сумма вероятностей всех возможных значений равна единице:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Распределение Пуассона может быть получено из биномиального распределения путем предельного перехода, когда число испытаний стремится к бесконечности, а вероятность успеха стремится к нулю при условии, что $np=\lambda=\text{const}$, то есть $n\to\infty$, $p\to 0$, $np=\lambda=\text{const}$.

При больших n и малых p формулу Пуассона можно использовать в качестве приближения вместо формулы Бернулли для вероятностей k успехов в n испытаниях $P_n(k) \cong \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} n$.

Распределение Пуассона является приемлемой моделью описания случайного числа появления определенных событий в фиксированном промежутке времени в фиксированной области пространства.

Найдем M(X), D(X) пуассоновского распределения.

Построим производящую функцию этого распределения

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{\lambda(z-1)}.$$

Отсюда

$$\Phi'(z) = \lambda e^{\lambda(z-1)}, \Phi'(1)=\lambda; \Phi''(z) = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}, \Phi''(1)=\lambda^2.$$

Таким образом, $M(X)=\lambda$; $D(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$.

Вывод. В распределении Пуассона математическое ожидание и дисперсия равняются параметру λ.

Непрерывная СВ X называется *распределенной по нормальному (гауссовскому) закону с параметрами* $m \in R$ и σ>0, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathrm{R}.$$

Для краткости говорят, что СВ распределена по закону $\mathrm{N}(m,\sigma)$. Здесь *m*- математическое ожидание, σ^2- дисперсия случайной величины.

График плотности распределения N(*m*,σ) называют *кривой Гаусса*.

Интеграл вида $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$ называется *интегралом Лапласа, интегралом вероятностей, или стандартной функцией ошибок*. Закон распределения в этом случае обозначают N(0,1).

Функция распределения вероятностей нормально распределенной СВ выражается через Φ(*z*) следующим образом:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

В этом случае непрерывная СВ распределена по нормальному закону N(*m*,σ).

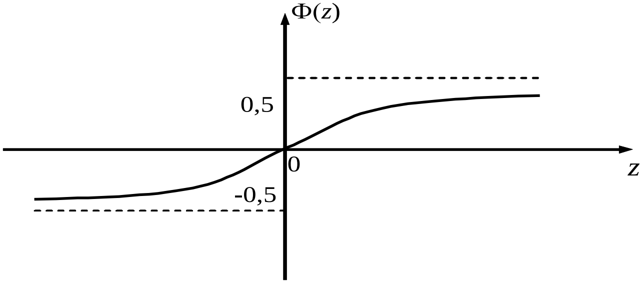
Простейшие свойства интеграла вероятностей

Свойство 1. Φ(0)=0.

Свойство 2. Φ(-z)=-Φ(z), то есть функция Φ(z) нечетная.

Свойство 3. Φ(+∞)=0,5.

График функции имеет вид



Свойство 4. Функция Φ(*z*) очень энергично стремится к своему пределу 0,5 при *z*→∞. Это стремление определяется следующей асимптотической формулой:

$$\Phi(z)=0,5-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^3}+\frac{1\cdot3}{z^5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{z^7}\ldots\right),$$

справедливой при достаточно больших *z*.

Вероятность отклонения случайной величины X от математического ожидания меньше чем на δ равна

$$\mathrm{P}(\left|\mathrm{X}\text{-}\mathrm{M}(\mathrm{X})\right|<\delta)=2\Phi\left[\frac{\delta}{\sigma}\right].$$

Рассмотрим частный случай, когда δ=3σ. Тогда

$$\mathrm{P}(\left|X-M(X)\right|<3\sigma)=2\Phi(3\sigma/\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot0,49865=0,9973$$

Это означает, что с вероятностью 0,997, близкой к единице (практически достоверно), все значения нормально распределенной СВ располагаются на интервале длиной 6σ, симметричном относительно математического ожидания.

Замечание. Часто рассматривают другую функцию:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

где $\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt = 2\Phi\left(z\sqrt{2}\right) - 1$.

Для erf z справедливо erf(-z)=-erf z.

Иногда табулируется функция

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(z) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

Очевидно, что $\Phi(z) = \frac{1}{2} + \Phi_0(z)$.

Пример 1. Найдем числовые характеристики биномиального распределения методом производящей функции:

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (pz)^m q^{n-m} = (pz+q)^n.$$

Таким образом, математическое ожидание и дисперсия в биномиальном (распределении равны соответственно

M(X)=*np*, D(X)=*npq*.

Пример 2. Нахождение числовых характеристик геометрического распределения.

Производящая функция имеет вид

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} z^n = pz \sum_{n=1}^{\infty} (qz)^{n-1}.$$

Так как q<1 и |z|<1, то $\sum_{n=1}^{\infty} (qz)^{n-1}$ есть сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, поэтому

$$\Phi(z) = \frac{pz}{1-qz} = \frac{-\frac{p}{q}(1-qz) + \frac{p}{q}}{1-qz} = -\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\frac{1}{1-qz}.$$

Вычисляем производные

$$\Phi'(z)=\frac{p}{q}\frac{q}{(1-qz)^2}=\frac{p}{(1-qz)^2},\Phi''(z)=\frac{2pq}{(1-qz)^3}.$$

Отсюда $\Phi'(1)=\dfrac{1}{p}$, $\Phi''(1)=\dfrac{2q}{p^2}$, следовательно,

$$\mathrm{M}(\mathrm{X})=\frac{1}{p},\quad \mathrm{D}(\mathrm{X})=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

Таким образом, $\mathrm{M}(\mathrm{X})=\dfrac{1}{p}$, $\mathrm{D}(\mathrm{X})=\dfrac{q}{p^2}$.

Пример 3. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух и не менее двух электроэлементов за год?

Решение.

1) $P_{1000}(2)=\dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=\dfrac{1}{2e}$, так как $\lambda=np=1000\cdot 0,001=1$

2) $P_{1000}(m\geq 2)=1-P(0)-P(1)=1-\dfrac{1}{0!}e^{-1}-\dfrac{1}{1!}e^{-1}=1-\dfrac{2}{e}\approx 0,264.$

Пример 4. Завод отправил на базу 5000 изделий. Вероятность того, что в пути изделие испортится, равно p=0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудет а) ровно три негодных изделия; б) не более трех негодных изделий.

Решение. Используем биномиальное распределение

$$\mathrm{P}_{5000}(3)=\mathrm{C}_{5000}^{3}(0,0002)^3\cdot(0,9998)^{4997}.$$

Очевидно, что с помощью такой формулы вычисление вероятности затруднительно. Для упрощения вычислений естественно заменить (приближенно) биномиальное распределение распределением Пуассона:

$$\lambda_n = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1.$$

Тогда а) $P_{5000}\ 3 \cong \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}\Big|_{\lambda=1} = \frac{1}{6e} \cong 0,06$,

б) $P_{5000}\ m \le 3 = P\ 0 + P\ 1 + P\ 2 + P\ 3 = e^{-1}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) \cong 0,95.$

Пример 5. Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший поток. Математическое ожидание числа вызовов за час равно 30. Найти вероятность того, что за минуту поступит не менее двух вызовов.

Решение. Так как поток заявок представляет собой простейший поток, то число событий потока m, попадающий на любой участок времени τ, распределено по закону Пуассона

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \qquad a = \lambda\tau .$$

В нашем случае $\lambda = 30$, $\tau = \frac{1}{60}$, $a = \lambda\tau = \frac{30}{60} = 0,5$.

Обозначим через A – событие, состоящее в том, что за минуту поступит не менее двух вызовов. Тогда

$$P(A) = 1 - P_0 - P_1 = 1 - \frac{a^0}{0!} e^{-0,5} - \frac{a^1}{1!} e^{-0,5} = 1 - e^{-0,5} - 0,5e^{-0,5} =$$

$0,0902$.

Пример 6. Случайная величина ξ имеет пуассоновское распределение и известно, что ее математическое ожидание m и дисперсия D связаны соотношением $6 - m^2 = 5 \cdot D$. Найти вероятность $P(\xi < 3)$, $M\xi^2$.

Решение. Известно, что математическое ожидание и дисперсия пуассоновского распределения совпадают и равны значению его параметра λ. Условие задачи приводит к уравнению относительно λ:

$$\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0,$$

решениями которого являются числа $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -6$. Последнее значение не может быть параметром пуассоновского распределения в силу положительности параметра. Таким образом, случайная величина ξ имеет ряд распределения

$$P\ \ \xi = n\ \ = e^{-1}\frac{1}{n!},\ n = 0,1,2,\ldots\ .$$

Для искомой вероятности получаем

$$P(\xi < 3) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = e^{-1} + e^{-1}\frac{1}{1!} + e^{-1}\frac{1}{2!} \approx$$

$$0,9197.$$

$$M\xi^2 = D\xi + (M\xi)^2 = 1 + 1 = 2.$$

Пример 7. Размер диаметра втулок подчиняется нормальному распределению с параметром M(X)= 2,5 см, $\sigma = 10^{-2}$ см. В каких границах можно практически достоверно гарантировать размеры диаметра втулок?

Решение. P(|X-M(X)|<δ)=2Φ(δ/σ)=2Φ(δ/0,01)=0,997. По таблице находим δ/0,01=2,98 и δ=0,0298. α=2,5±0,028 (см), 2,4702≤α≤2,5298.

Примеры для самостоятельного решения

1. Случайная величина X –погрешность измерительного прибора распределена по нормальному закону распределения с дисперсией $\sigma^2 = 25 мB^2$. Систематическая погрешность прибора отсутствует. Найдите вероятность того, что при пяти независимых измерениях ошибка измерения хотя бы один раз превзойдет по модулю 10 мВ.

2. Взвешивание производится без систематической ошибки, а случайные ошибки подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ мг. Найдите вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 50 мг.

3. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид $f(x) = \gamma e^{-ax^2+bx-\frac{b^2}{4a}}$. Найти: γ, математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$, вероятность выполнения неравенства $\left|\xi - \frac{b}{2a}\right| < 1$.

4. Случайные ошибки измерения ξ дальности до неподвижной цели подчинены гауссовскому закону с математическим ожиданием $m = a$ и $\sigma = b$.

Определить вероятности того, что:

1) $P\left\{|\xi - m| \le \frac{a+b}{3}\right\}$.

2) при трех независимых измерениях ошибка хотя бы одного измерения не превзойдет по абсолютной величине $\frac{(a+b)}{3}$.

Ответы: 1. $\approx 0,21$; 2. $\approx 0,98$.

Занятия № 8-10. Многомерные случайные величины (случайные векторы).

Вектор $\bar{\xi} = (\xi_1 \xi_2)$, координаты которого есть случайные величины, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, называется *случайным вектором*, а функция $F(x, y) = P\ \xi_1 < x,\ \xi_2 < y$ называется функцией распределения случайного вектора $\bar{\xi}$ или двумерной случайной величины $\bar{\xi}$.

Если координаты вектора $\bar{\xi}$ дискретные случайные величины, то $\bar{\xi}$ называют *дискретным случайным вектором.*

Законом распределения дискретного случайного вектора называется перечень всех возможных значений пар компонент $\{(x_i,y_j)|(x_i,y_j)\in \mathrm{G}(x,y)\}$ и соответствующих каждой паре вероятностей p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j), удовлетворяющих условию $\sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij} = 1,$ где суммирование распространяется на все возможные значения индексов i и j.

Закон распределения двумерного случайного вектора часто задается таблицей вида

X \ Y	x_1	x_2	…	x_i	…
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{i1}	…
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{i2}	…
…	…	…	…	…	…
y_j	p_{1j}	p_{2j}	…	p_{ij}	
…	…	…	…	…	…

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

Зная закон распределения двумерного случайного вектора, можно получить закон распределения его компонент

$$\mathrm{P}\ \ \mathrm{X}=x_i\ \ =\sum_j p_{ij}\ ,\quad \mathrm{P}\ \ \mathrm{Y}=y_j\ \ =\sum_i p_{ij}\quad \text{и ФР}\quad \mathrm{F}\ \ x,y\ \ =\sum_{i,j\in \mathrm{U}} p_{ij}\ ,$$

где множество индексов U определяется следующим образом:

$$\mathrm{U}=\{(i,j)|(\mathrm{X}<x_i,\ \mathrm{Y}<y_j)\}.$$

Если функцию распределения вероятности вектора $\bar{\xi}$ можно представить в виде $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(t,s)dtds$, то случайную величину (ξ_1,ξ_2) называют *непрерывной двумерной случайной величиной*, а $f(x,y)$ – ее *плотностью распределения вероятности.*

Всюду в дальнейшем будем считать, что $f(x,y)$ – непрерывная функция по обоим аргументам.

Свойства функции и плотности распределения вероятности

1) $P(x_1<\xi_1<x_2,\quad y_1<\xi_2<y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$.

2) $0\le F(x,y)\le 1$.

3) $F(-\infty,-\infty)=F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0$.

4) $F(+\infty,+\infty)=1$.

5) $F(x,+\infty)=F_1(x)$, $F(+\infty,y)=F_2(y)$, где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ – функции распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2.

6) $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$.

7) $f(x,y)\ge 0$.

8) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$.

9) $P(\bar{\xi}\in D)=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$.

10) $f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$, $f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$,

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ – плотности распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2.

Условной плотностью распределения случайной величины ξ_1 при условии $\xi_2 = y$ называют отношение плотности совместного распределения $f(x, y)$ системы (ξ_1 , ξ_2) к плотности распределения составляющей ξ_2: $f(x/y) = \dfrac{f(x, y)}{f_2(y)}$.

Аналогично определяют $f(y/x) = \dfrac{f(x, y)}{f_1(x)}$.

Теорема умножения плотностей

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f\left(y/x\right) = f_2(y) \cdot f\left(x/y\right).$$

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 называются *независимыми*, если для любых чисел *x*,*y* случайные события $\xi_1 < x$ и $\xi_2 < y$ независимы.

Случайные события независимы, если выполняется любое из условий:

1) $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$.

2) $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

3) $f(y/x) = f_2(y)$ или $f\left(x/y\right) = f_1(x)$.

Условным математическим ожиданием называют выражение

$M\left(\xi_2/\xi_1 = x_i\right) = \sum_{j=1}^{m} y_j P\left(\xi_2 = y_i/\xi_1 = x_i\right)$ для дискретного случайного вектора

$M\ \xi_2/x\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} yf\ \ y/x\ \ dy$ для непрерывного случайного вектора.

Величина $K_{\xi_1,\xi_2} = \mathrm{cov}\ \ \xi_1, \xi_2\ \ = M\left[\ \xi - M\xi \quad \eta - M\eta\ \right]$ называется *корреляционным моментом (ковариацией)* двух случайных величин ξ_1 и ξ_2.

Если ξ_1, ξ_2 – непрерывная двумерная случайная величина с плотностью распределения $f(x, y)$, то

$$\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_1)(y - m_2)f(x, y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dxdy - m_1 m_2,$$

где $m_1 = M\xi_1,\ m_2 = M\xi_2$.

Для дискретного случайного вектора

$$\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_1)(y_i - m_2)p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - m_1 m_2.$$

Величина $r_{\xi_1\xi_2} = \dfrac{K_{\xi_1\xi_2}}{\sqrt{D_{\xi_1} D_{\xi_2}}}$ называется коэффициентом корреляции случайных величин ξ_1 и ξ_2.

Если $r_{\xi_1\xi_2} = 0$, то случайные величины ξ_1 и ξ_2 называются некоррелированными.

Свойства корреляционного момента и коэффициента корреляции

1) $\left|r_{\xi_1,\xi_2}\right| \le 1$.

2) Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то $r_{\xi,\xi_i} = 0$. Обратное неверно: из некоррелируемости случайных величин не следует их независимость.

3) Если $\xi_2 = a\xi_1 + b$, то $\left| r_{\xi_1 \xi_2} \right| = 1$.

4) $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_1)$.

5) $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D\xi$.

6) $\operatorname{cov}(a\xi_1, b\xi_2) = ab \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

7) $\operatorname{cov}(a\xi_1 + b\xi_2, \xi_3) = a \operatorname{cov}(\xi_1 \xi_3) + b \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_3)$.

Свойства математического ожидания и дисперсии случайного вектора

1) $MC = C$, где C – постоянная.

2) $MC\xi = CM\xi$.

3) $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$.

4) $M(\xi_1 \cdot \xi_2) = M\xi_1 \cdot M\xi_2 + \operatorname{cov}(\xi_1 \xi_2)$.

Если $\operatorname{cov}(\xi_1 \xi_2) = 0$, то $M(\xi_1 \cdot \xi_2) = M\xi_1 \cdot M\xi_2$.

Случайная величина ξ называется *неотрицательной* $(\xi \geq 0)$, если она принимает только неотрицательные значения.

5) Если $\xi \geq 0$, $M\xi \geq 0$.

6) $DC = 0$, где C – постоянная.

7) $DC\xi = C^2 D\xi$.

8) $D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2 + 2\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

Если $\operatorname{cov}(\xi_1 \xi_2) = 0$, то $D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$.

9) $D(\xi + C) = D\xi$. C – постоянная.

10) $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 \geq 0$.

11) $D\xi = M\xi^2 - M\xi^{\ 2} \geq 0 \Rightarrow M\xi^{\ 2} \leq M\xi^2$.

Двумерная случайная величина $\xi_1\xi_2$ называется *распределенной по нормальному закону*, если ее плотность распределения

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2r(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

Здесь $m_1=M\xi_1$, $m_2=M\xi_2$, $\sigma_1^2=D\xi_1$, $\sigma_2^2=D\xi_2$,

r – коэффициент корреляции случайных величин ξ_1 и ξ_2. Для нормальной случайной величины понятия независимости и некоррелируемости эквивалентны.

Двумерная случайная величина распределена равномерно в области D, если ее плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\in D\end{cases}$$

Здесь S – площадь области D.

Пример 1. Дискретная двумерная случайная величина ξ,η распределена по закону, приведенному в таблице

η / ξ	–1	0	2
–1	0,2	0,1	0,3
1	0,1	0,1	0,2

Определить:

1) Законы распределения составляющих ξ и η;

2) Условный закон распределения случайной величины ξ при условии, что $\eta = -1$;

3) $M\ \xi/\eta = -1$;

4) Коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

Решение. Имеем

ξ	–1	1
	0,6	0,4

(*)

η	–1	0	2
	0,3	0,2	0,5

$M\xi = -1\cdot 0,6 + 1\cdot 0,4 = -0,2$, $\quad M\eta = -1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,5 = 0,7$,

$D\xi = (-1)^2 0,6 + 1^2 \cdot 0,4 - (-0,2)^2 = 0,96$,

$D\eta = (-1)^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,5 - (0,7)^2 = 1,81$.

$\xi/\eta = -1$	–1	1
	2/3	1/3

(**)

$$P\ \xi = -1/\eta = -1\ = \frac{P\ \xi = -1, \eta = -1}{P\ \eta = -1} = \frac{0,2}{0,3} = 2/3.$$

$$P\ \xi = 1/\eta = -1\ = \frac{P\ \xi = 1, \eta = -1}{P\ \eta = -1} = \frac{0,1}{0,3} = 1/3.$$

Сравнивая (*) и (**), видим, что ξ, η зависимые случайные величины:

$$M\ \xi/\eta = -1\ = -1\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3};$$

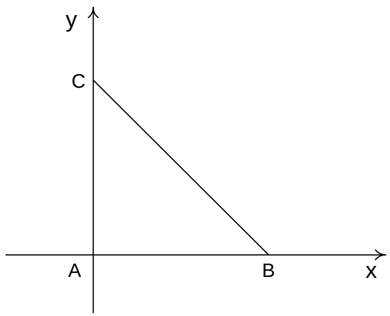
$$K\ \xi,\eta\ = \sum_{i,j} P_{ij} x_i y_i - m_1 \cdot m_2 = (-1)\cdot(-1)\cdot 0,2 + (-1)\cdot 2\cdot 0,3 +$$
$$+1\cdot(-1)\cdot 0,1 + 1\cdot 2\cdot 0,2 + 0,2\cdot 0,7 = 0,2 - 0,6 - 0,1 + 0,4 + 0,14 =$$
$$= 0,04 .$$

$$r_{\xi,\eta} = \frac{K_{\xi,\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{0,04}{\sqrt{0,96}\cdot\sqrt{1,81}} = \frac{0,04}{0,98\cdot 1,345} = \frac{0,04}{1,32} = 0,03.$$

Пример 2. Двумерная случайная величина ξ,η имеет равномерное распределение вероятностей в треугольной области ABC, то есть

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y)\in ABC, \\ 0, & (x,y)\notin ABC. \end{cases}$$

Найти постоянную c, одномерные плотности $f_1(x)$, $f_2(y)$ случайных величин ξ и η, коэффициент корреляции r, условную плотность $f(y/x)$ и условное математическое ожидание $M\ \eta/x\ $.



т. $A(0,0)$, т. $B(1,0)$, т. $C(0,1)$.

1) Постоянную c найдем из условия нормировки

$$1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{ABC} cdxdy=c\cdot S_\Delta=c\cdot 1/2,\quad c=2,$$

где S – площадь треугольника ABC. Обозначим область, ограниченную треугольником ABC через D. Тогда

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

2) Уравнение прямой BC: $y=1-x$. Тогда область D можно задать аналитически следующим образом:

$$D=\begin{Bmatrix} 0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\end{Bmatrix}\quad \text{или}\quad D=\begin{Bmatrix} 0\le y\le 1\\ 0\le x\le 1-y\end{Bmatrix}.$$

3) $$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}2\int\limits_0^{1-x} dy & 0\le x\le 1\\ 0 & x\le 0,\ x>1\end{cases}=\begin{cases}2(1-x), 0<x<1,\\ 0,\quad x<0,\ x>1,\end{cases}$$

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & y<0,\ y>1.\end{cases}$$

$$M\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx=\int\limits_0^1 x\cdot 2(1-x)dx=1/3.$$

$$M\eta=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)dy=\int\limits_0^1 y\cdot 2(1-y)dy=1/3.$$

$$D\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx-m_x^2=\int\limits_0^1 x^2\cdot 2(1-x)dx-\frac{1}{9}=0,055.$$

$$D\eta=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy-m_y^2=0,055.$$

4) $K_{xy} = \iint\limits_D xyf(x,y)dxdy - m_x m_y = 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy - \frac{1}{9} \cong -0,0278$.

$$r = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \cong \frac{-0,0278}{\sqrt{(0,055)^2}} \cong -0,5.$$

5) $f\;\; y/x \;\; = \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & 0<x<1, \quad 0<y<1-x, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$

$$M(\eta/x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)\,dy = \begin{cases} \int\limits_0^{1-x} y\dfrac{1}{1-x}dy, & 0<x<1, \\ 0, & x<0, \;\; x \ge 1. \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{1-x} y\frac{1}{1-x}\,dy = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} = \frac{1-x}{2}.$$

$$M(\eta/x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{2}, & 0<x<1, \\ 0, & x \le 0, \;\; x \ge 1. \end{cases}$$

Пример 3. Случайная точка ξ_1, ξ_2 распределена равномерно внутри круга радиуса R $D = \; x^2 + y^2 \le R^2$. Найти математическое ожидание случайной величины $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$.

Решение. Плотность распределения вероятности

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \le R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 \ge R^2 \end{cases}$$

$$M\eta = \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_D xydxdy = \begin{vmatrix} x=\rho\cos\phi & 0\le\rho\le R \\ y=\rho\sin\phi & 0\le\phi\le 2\pi \\ dxdy=\rho d\rho d\phi & \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{\pi R}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\rho^3\cos\phi\,\sin\phi\,d\rho d\phi\ =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\int\limits_0^R\rho^3 d\rho\cdot\int\limits_0^{2\pi}\cos\phi\sin\phi d\phi = \frac{1}{\pi R^2}\cdot\frac{\rho_4}{4}\Bigg|_0^R\cdot\ \frac{\sin^2\phi}{2}\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\cdot\frac{1}{4}R^4\cdot\ \sin^2 2\pi-\sin^2 0\ \ \frac{1}{2}=0\,.$$

Пример 4. Пара случайных величин ξ и η имеет совместное нормальное распределение с вектором математических ожиданий $\ -2,-1\ $ и ковариационной матрицей K

$$K\ \ \xi,\eta\ \ =\sigma^2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Известно, что $P\ \ \xi-2\eta<3\ \ =0{,}65$. Найти $D\xi,\ \ D\eta$.

Решение. Совместная нормальность пары случайных величин ξ и η обеспечивает нормальность каждой из них и любой их линейной комбинации, в частности величина $\zeta=\xi-2\eta$ нормальна с параметрами

$M\zeta = M\xi-2M\eta=-2-2(-1)=0$, $D\zeta=D\xi+4D\eta-4\operatorname{cov}(\xi,\eta)$.

Подставляя в последнее соотношение элементы ковариационной матрицы:

получим $D\xi=2\sigma^2$, $D\eta=7\sigma^2$, $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=3\sigma^2$,

$$D\zeta=2\sigma^2+4\cdot7\sigma^2-4\cdot3\sigma^2=18\sigma^2.$$

По условию $P(\zeta < 3) = 0,65$, откуда, используя нормальность ζ,

$$F\left(\frac{3}{\sigma\sqrt{18}}\right) = 0,65 \Rightarrow \frac{3}{\sigma\sqrt{18}} = 0,385 \Rightarrow \sigma \approx 1,837.$$

Искомые дисперсии равны, соответственно,

$$D\xi = 2\sigma^2 \approx 6,747, \quad D\eta = 7\sigma^2 \approx 23,622.$$

Пример 5. Случайный вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ имеет вектор математических ожиданий $\bar{m}_1 = (2,1)$ и корреляционную матрицу

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}. \ \eta_1 = 2\xi_1 - \xi_2, \ \ \eta_2 = \xi_1 + 3\xi_2.$$

Вычислить вектор математических ожиданий $\bar{m}_2 = (M\eta_1, M\eta_2)$ случайного вектора $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ и корреляционную матрицу вектора $\bar{\eta}$.

Решение. $M\eta_1 = M(2\xi_1 - \xi_2) = 2M\xi_1 - M\xi_2 = 2\cdot 2 - 1 = 3.$

$M\eta_2 = M(\xi_1 + 3\xi_2) = M\xi_1 + 3M\xi_2 = 2 + 3 = 5$. $\bar{m}_2 = (3,5)$.

$D\eta_1 = D(2\xi_1 - \xi_2) = 4D\xi_1 - 4K(\xi_1\xi_2) + D\xi_2 = 4\cdot 2 - 4\cdot 1 + 4 = 8.$

$D\eta_2 = D(\xi_1 + 3\xi_2) = D\xi_1 + 6K(\xi_1\xi_2) + 9D\xi_2 = 2 + 6\cdot 1 + 9\cdot 4 = 44.$

$K(\eta_1\eta_2) = \operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = \operatorname{cov}(2\xi_1 - \xi_2, \xi_1 + 3\xi_2) =$

$= 2\operatorname{cov}(\xi_1\xi_1) + 6\operatorname{cov}(\xi_1\xi_2) - \operatorname{cov}(\xi_2\xi_1) - 3\operatorname{cov}(\xi_2\xi_1) =$

$= 2D\xi_1 + 5K(\xi_1\xi_2) - 3D\xi_2 = 4 + 5 - 12 = -3.$

Ответ: $K(\eta_1,\eta_2)=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 44 \end{pmatrix}$, $\bar{m}_2=(3,5)$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Дискретные случайные величины X и Y независимы и имеют распределения:

X	2	3
P	0,3	0,7

$У$	4	5
P	0,4	0,6

Найдите закон распределения случайной величины $Z = X + Y$ и ее математическое ожидание.

2. Случайные величины X и Y независимы и каждая имеет показательный закон распределения с плотностью распределения $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$ и $f(x)=0$ при $x<0$. Найдите плотность вероятности суммы этих величин.

3. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 3X - Y + 5$, если $M(X)=3$, $M(Y)=5$, $D(X)=2$, $D(Y)=1$, а случайные величины X и Y независимы.

4. Случайные величины X и Y независимы и обе равномерно распределены на отрезке [0, 2]. Найдите функцию плотности вероятности случайной величины $Z = X + Y$.

5. Пусть X_1 и X_2 - независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ. Найти распределение случайной величины $Y = X_1 - X_2$.

6. Случайные величины X и Y независимы и каждая равномерно распределена на (0, 1). Найдите плотность вероятности случайной величины $Z = Y / X^2$.

7. Каждая из случайных величин X и Y равномерно распределена в интервале $(0,1)$. Полагая величины X и Y независимыми, найдите функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию для каждой из величин $U = \min(X, Y)$ и $V = \max(X, Y)$.

8. Закон распределения двумерной случайной величины задан таблицей

X	1	2	4
$Y = 1$	0,2	0,3	0,1
$Y = 3$	0,05	0,15	0,2

Найдите: а) безусловные законы распределения величин X и Y; б) закон распределения X при условии, что $Y = 1$.

9. Равновозможны все положения случайной точки (X, Y) в треугольнике с вершинами $A(0,0), B(2,0)$ и $C(2,1)$. Найти коэффициент корреляции случайных величин X и Y. Найти линию регрессии Y на X.

10. В примере №8 найдите корреляции между X и Y.

11. По известной функции плотности вероятности $f(x)$ случайной величины X найдите функцию плотности вероятности $g(y)$ случайной величины.

12. Система случайных величин (X_1, X_2) имеет функцию плотности вероятности $f(x_1, x_2) = \dfrac{2}{\pi^2 (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 4)}$. Найдите плотность распределения $g(y_1, y_2)$ двумерной случайной величины (Y_1, Y_2), если $X_1 = tg(Y_1)$, $X_2 = 2tg(Y_2)$, $|Y_1| < \pi / 2$, $|Y_2| < \pi / 2$.

Ответы

1.

Z	6	7	8
P	0,12	0,46	0,42

, $M(Z)=7,3$;

2.

$f(z)=\lambda^2 ze^{-\lambda z}$ при $z\geq 0$ и $f(x)=0$ при $z<0$;

3. $M(Z)=6$, $\sigma(Z)=3$;

4. $f(z)=0,25z$ при $z\in[0,2]$, $f(z)=1-0,25z$ при $z\in[2,4]$, $f(z)=0$ при остальных z; 5. $f(y)=\dfrac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda|x|}$;

6. $f(z)=0$ при $z\leq 0$, $f(z)=1/3$ при $z\in(0,1]$, $f(z)=\dfrac{1}{3z^{1,5}}$ при $1<z$; 7. $F(v)=P(V<v)=0$ при $v\leq 0$, $F(v)=2v-v^2$ при $0<v\leq 1$, $F(v)=1$ при $1<v$, $M(V)=1/3$, $D(V)=1/18$,

$F(u)=P(U<u)=0$ при $u\leq 0$, $F(u)=u^2$ при $0<u\leq 1$,

$F(u)=1$ при $1<u$, $M(U)=2/3$, $D(U)=1/18$;

8.

а

X	1	2	4
P	0,25	0,45	0,3

,

Y	1	3
P	0,6	0,4

; б

X	1	2	4
P	1/3	1/2	1/6

9. $r_{xy}=1/2$, $y=0,5x$; 10. $r_{xy}=0,08$;

11. $g(y)=\dfrac{f(y)}{2\sqrt{y}}$ при $0<y\leq 1$, $g(y)=f(x)$ при $y\leq 0$ и $y>1$;

12. $g(y_1,y_2)=4/\pi^2$ при $|y_1|<\pi/2$, $|y_2|<\pi/2$ и $g(y_1,y_2)=0$ при остальных y_1 и y_2.

Занятие № 11-12. Функции случайных величин

Если X - дискретная СВ, имеющая закон распределения (x_k, p_k) k=1, 2,..., который можно записать в виде табл.1, и Y=φ(X), где φ -неслучайная функция, то Y также является дискретной СВ, причем ее возможные значения $y_k=\varphi(x_k)$.

Таблица 1

X	x_1	x_2	x_3	…	x_k	…
P(X)	p_1	p_2	p_3	…	p_k	…

Если $\varphi(x)$ – монотонная функция, то все значения y_k различны и P(Y=y_k)=P(X=x_k), то есть СВ Y имеет следующий закон распределения (табл.2)

Таблица 2

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_k)$	…
P(Y)	p_1	p_2	…	p_k	…

Если при этом $\varphi(x)$ – немонотонная функция, то среди ее значений $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k, \ldots$ могут быть одинаковые. В этом случае столбцы с равными значениями $\varphi(x_i)$ объединяются в один столбец, а соответствующие вероятности складываются, т. е.

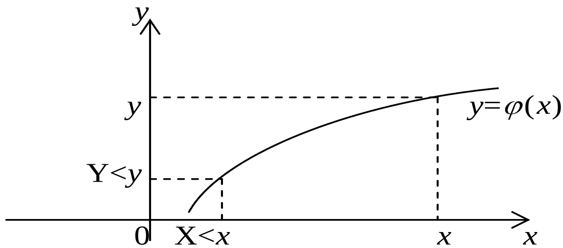
$$P\{Y=y_k\}=\sum_{i:\varphi(x_i)=y_k} P\{X=x_i\}.$$

Если X – непрерывная СВ с ФР F(x) и плотностью вероятности $f(x)$ и Y=$\varphi(x)$, причем $\varphi(x)$ – монотонно возрастающая непрерывно дифференцируемая функция, а $x=\varphi^{-1}(y)$ – обратная функция, то

$F(y)=P(Y<y)=P(\varphi(x)<y)=P(X<\varphi^{-1}(x))=F[\varphi^{-1}(x)]$.

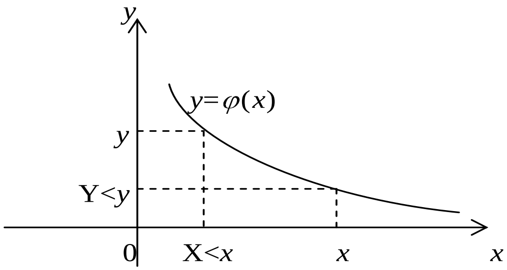
Дифференцируя последнее равенство по y, получаем

$$F'(y) = F'\left[\varphi^{-1}(y)\right]\frac{d}{dy}\left[\varphi^{-1}(y)\right] \quad \text{или} \quad f(y) = f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\frac{d}{dy}\left[\varphi^{-1}(y)\right].$$



Если y=φ(x) - монотонно убывающая функция, то аналогично получаются следующие соотношения:

$F(y)=1-F[\varphi^{-1}(y)]$, $f(y)= -f[\varphi^{-1}(y)]\dfrac{d}{dy}[\varphi^{-1}(y)]$.



Выражения для плотности вероятности СВ Y и для монотонно возрастающей и для монотонно убывающей функции φ(x) можно объединить:

$$f(y) = f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\left|\frac{d}{dy}\left[\varphi^{-1}(y)\right]\right|.$$

Рассмотрим непрерывную случайную величину ξ с плотностью распределения $f(x)$ и случайную величину $\eta = \phi(\xi)$ с плотностью распределения $g(y)$. По определению функция распределения $F_\eta(y)$ случайной величины η равна

$$F_{\eta}(y)=P(\eta<y)=\int\limits_{D} f(x)dx=\left|D=\{x:\phi(x)<y\}\right|=\int\limits_{\phi(x)<y} f(x)dx.$$

Числовые характеристики находятся по формулам:

$$m_y=\begin{cases}\sum\limits_k \varphi(x_k)P(X=x_k), \text{ если } X - \text{ дискретная } CB;\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx, \text{ если } X - \text{ непрерывная } CB.\end{cases}$$

$$D_y=\begin{cases}\sum\limits_k (\varphi(x_k)-m_y)^2 P(X=x_k), \text{ если } X - \text{ дискретная } CB;\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x)-m_y)^2 f(x)dx, \text{ если } X - \text{ непрерывная } CB.\end{cases}$$

Для случайного вектора $\bar{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ с плотностью распределения $f(x,y)$ если $\eta=\phi(\xi_1,\xi_2)$, то

$$M\eta=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(x,y)f(x,y)dxdy.$$

Пример 1. Найти закон распределения СВ. Y=(X-*m*)/σ, если СВ X подчиняется нормальному закону N(*m*,σ).

Решение. В нашем случае Y=(1/σ)X-*m*/σ, т.е. *a*=1/σ, *b*=-*m*/σ. Вспоминая формулу для плотности распределения нормального закона N(*m*,σ) и учитывая формулу (3), получаем

$$f(y)=\frac{1}{m/\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{\left[\sigma(y+m/\sigma)-m\right]^2}{2\sigma^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2},$$

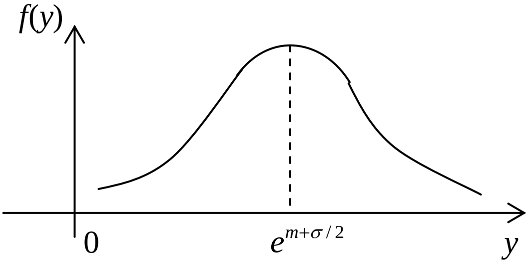
т.е. СВ Y распределена по закону N(0,1).

Отсюда $\mathrm{N}(m,\sigma)\xrightarrow{Y=(X-m)/\sigma}\mathrm{N}(0,1)$

Пример 2. *Логарифмически нормальное распределение*.

СВ X распределена нормально по закону N(m,σ). Найти плотность распределения СВ Y==φ(X); $y=\varphi(x)=e^x$ отсюда $x=\ln y=\varphi^{-1}(y)$ и следовательно,

$$\mathrm{N}(m,\sigma) \to f(x) = 1/\sigma\sqrt{2\pi}\ \mathrm{e}^{-(x-m)/2\sigma}.$$



Функция e^x – монотонно возрастающая всюду, поэтому находим $f(y)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{(\ln y-m)/2\sigma}$.

$$\mathrm{M}(y)=\mathrm{e}^{m+\sigma/2}, \mathrm{D}(y)=\mathrm{e}^{2m+\sigma}(\mathrm{e}^{\sigma}-1).$$

Пример 3. Распределение Пирсона χ_n^2 с n степенями свободы. Пусть $\xi_i \in N(0,1)$ и независимы. Тогда $\chi_n^2=\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$ имеет плотность распределения

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-x/2}, \ x>0\\ \qquad\qquad 0, \qquad x<0,\end{cases}$$

где $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ – Гамма-функция. $M\chi_n^2=n$,

$D\chi_n^2=2n_0$.

Пример 4. Распределение Стьюдента с n степенями свободы $T(n) = u\sqrt{\dfrac{n}{\mathrm{v}}}$, где $u \in N(0,1)$, $\mathrm{v} = \chi_n^2$, u, v – независимые случайные величины, имеет плотность распределения

$$f_n(t) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

$MT_n = 0$, $\qquad DT_n = \dfrac{n}{n-2}$, $\quad n > 2$.

Пример 5. Плотность распределения случайной величины ξ равна $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $\eta = 1/\xi$.

Решение. Решение задачи располагаем в виде двух столбцов; слева будем писать обозначения функций, принятые в общем случае; справа – конкретные функции, соответствующие данному примеру:

$f \;\; x$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi \;\; 1 + x^2}$
$y = \phi \;\; x$ $x = \psi(y)$	$y = 1/x$ $x = 1/y$
$x' = \psi' \;\; y$	$x' = -\dfrac{1}{y^2}$
$x \in \;\; -\infty, +\infty$	$y \in \;\; -\infty, +\infty$
$g \;\; y$	$g \;\; y \;\; = \dfrac{1}{\pi \;\; 1 + 1/y^2} \cdot \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{\pi \;\; 1 + y^2}$.

Пример 6. Бросаются 3 монеты. Пусть $\xi_i = 1$, если $i-$ая монета выпала орлом вверх и $\xi_i = 0$ в противном случае, $i = 1, 2, 3$. Построить ряд распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3$.

Решение.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

Элементарными исходами рассматриваемого случайного эксперимента являются упорядоченные наборы чисел n_1, n_2, n_3 , где n_i либо нуль, либо единица $i = 1, 2, 3$.

2. Определяем множество возможных значений η.

Случайная величина η на элементарном исходе (n_1, n_2, n_3) принимает значение $\eta = n_1 + n_2 - n_3$.

3. Составляем таблицу элементарных исходов и соответствующих им значений η.

n_1	0	1	0	0	1	1	0	1
n_2	0	0	1	0	1	0	1	1
n_3	0	0	0	1	0	1	1	1
η	0	1	1	–1	2	0	0	1

4. Определяем вероятности значений η и строим ее ряд распределения. Всего элементарных исходов $2^3 = 8$. Следовательно, вероятность элементарного исхода равна $1/8$. Имеем

η	–1	0	1	2
p	$1/8$	3/8	3/8	1/8

Примеры для самостоятельного решения.

1. Случайная величина X имеет закон распределения:

X	-1	0	2	3
P	0,1	0,4	0,3	0,2

Найдите закон распределения случайной величины $Y = (X-1)^2$.

2. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a,b]: f(x) = \dfrac{1}{b-a}, 0 < a \le x \le b.$ Найдите плотность распределения случайной величины $Y = X^2$.

3. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x) = \dfrac{1}{\sigma^2}\exp\left(\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right), x \ge 0$ (закон распределения Релея). Найдите плотность вероятности случайной величины $Y = \delta/X$.

4. На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наугад выбирают точку. В выбранной точке проводят касательную к окружности. Найдите функцию распределения длины этой касательной от точки касания до точки ее пересечения с осью Оx.

5. Пусть случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0;1]$. Найдите функцию распределения случайной величины $Y = \ln(1/X)$.

6. Дискретная случайная величина задана распределением

X	1	2	4
P	0,3	0,5	0,2

Найдите математическое ожидание случайной величины $Y = X^2 - X + 1$

7. Пусть X – число выпавших гербов при трех подбрасываниях монеты. Найдите математическое ожидание случайной величины $Y = X^2$.

8. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0;1]$. Найдите математическое ожидание случайной величины $Y = \sin(\pi X)$.

9. Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности вероятности: $f(x) = 0{,}5\sin x$ при $x \in [0,\pi]$ и $f(x) = 0$ при остальных x. Найдите плотность вероятности и математическое ожидание случайной величины $Y = 2X$.

10. Пусть случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение с функцией плотности вероятности $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Найдите функцию плотности вероятности случайной величины $Y = \dfrac{1}{2} X^2$.

11. Случайная величина X имеет функцию плотности вероятности $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0, x \geq 0$. Найдите закон распределения случайной величины $Y = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = 0{,}5x$ при $x \in |0,4|$ и $\varphi(x) \equiv 2$ при $x \in (4,+\infty)$.

12. Две вершины треугольника совпадают с концами диаметра единичного круга, а третья вершина треугольника располагается в случайной точке внутри круга. Полагая равновозможными все положения случайной точки внутри круга, найдите функцию плотности вероятности площади треугольника S и математическое ожидание этой площади.

Ответы.

1.

X	1	4
P	0,7	0,3

2. $g\ \ h\ = \dfrac{1}{2\ \ b-a\ \ \sqrt{y}}, a^2 \le x \le b^2$;

3. $g\ \ y\ = y\cdot \exp\left(\dfrac{-y^2}{2}\right), y \ge 0$; 4. $F\ \ x\ = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arc} tgx$ при $x > 0$,

$F\ \ x\ = 0$ при $x \ge 0$; 5. $F\ \ x\ = 1 - e^{-x}$; 6. 4,4; 7. 3; 8.1/2;

9. $f\ \ y\ = 0.25\sin\ \ y/2$ при $y \in\ 0, 2\pi\ $, $f\ \ y\ = 0$ при остальных y; $M\ \ Y\ = \pi$; 10. $g\ \ x\ = \dfrac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-y}$;

11. $g\ \ y\ = 2\lambda e^{-2\lambda x} + e^{-4\lambda}\delta\ \ y-2$ при $y \in |0, 2|$ и $g\ \ y\ = 0$ при $y > 2$; 12. $f\ \ x\ = \dfrac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}, M\ \ S\ = \dfrac{3}{4\pi}$.

Занятие № 13. Центральная предельная теорема и следствия из нее.

Закон больших чисел. Неравенство Чебышева

Пусть случайная величина ξ имеет конечную дисперсию $D\xi$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство Чебышева

$$P\ \ |\xi - M\xi| \ge \varepsilon\ \ \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \quad \text{или} \quad P\ \ |\xi - M\xi| < \varepsilon\ \ \ge 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева

Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ независимы, существуют $M_{\xi_i} = m_i$, $D\xi_i = \sigma_i^2$ и $D\xi_i \le c$, $i = 1, \ldots, n, \ldots$, c – некоторая постоянная.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum \xi_i - \frac{1}{n}\sum M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

В частности, если все ξ_i имеют одно и то же математическое ожидание и дисперсию $M\xi_i = m,\ D\xi_i = \sigma^2$, то

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum \xi_i - m\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Для биномиального распределения

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{nq^2}.$$

Здесь p – вероятность появления события A в одном испытании, $q = 1 - p$, n – общее число испытаний, m – число испытаний, в которых событие А произошло.

Центральная предельная теорема.

Пусть $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Если дисперсии случайных величин конечны и отличны от нуля, то при допустимых n закон распределения суммы $X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$ сколь угодно близок к нормальному закону распределения. Это означает, что

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dx,$$

где $m = M(X_i)$, $D(X_i) = \sigma^2$.

Следствие 1. Пусть k число появлений события в n независимых опытах, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$. Тогда при достаточно больших n (порядка десятков, сотен и т.д.) имеют место следующие формулы:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right\}, \qquad (1)$$

$$Pn(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (2)$$

Первая формула дает приближенное значение вероятности того, что событие появится k раз в n опытах, и составляет содержание локальной теоремы Муавра-Лапласа. Вторая формула позволяет вычислить вероятность того, что в n независимых опытах событие появится от k_1 до k_2 раз. Эта формула основана на интегральной теореме Муавра-Лапласа. Обе формулы вытекают из того факта, что при большом числе независимых опытов число появлений события имеет (на основании центральной предельной теоремы) закон распределения близок к нормальному: $N(np; npq)$.

Следствие 2. Пусть k/n частота появлений события в n независимых опытах, в каждом из которых вероятность появления события равна $p(0 < p < 1)$. Тогда при достаточно больших n (порядка десятков, сотен и т.д.) имеет место следующая формула:

$$P\ \left|k/n - p\right| < \alpha\ \approx 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{pq/n}}\right). \qquad (3)$$

Пример 1. При изготовлении некоторой детали брак равен 5%. Оценить вероятность того, что при просмотре партии в 2000 штук выявляется отклонение доли бракованных деталей от установленного процента брака меньше чем на 1%.

Решение. Воспользуемся формулой

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Здесь $p=0,05$, $q=1-p=0,95$, $\varepsilon=0,01$, $n=2000$.

Тогда $P\left\{\left|\frac{m}{n}-0,05\right|<0,01\right\}\geq 1-\frac{0,05\cdot 0,95}{2000\cdot(0,01)^2}=0,7625$.

Пример 2. Сколько нужно произвести измерений, чтобы с вероятностью равной 0,95 утверждать, что погрешность средней арифметической результатов этих измерений не превысит 0,1, если $\sigma=2$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\xi_k-m\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{D\xi}{n\varepsilon^2}.$$

Здесь $\sigma=2$, $\varepsilon=0,1$.Имеем $0,95=1-\frac{2^2}{n\cdot(0,1)^2}=1-\frac{400}{n}$,

$\frac{400}{n}=0,05, n=\frac{400}{0,05}=8000$.

Пример 3. Поезда метро идут с интервалами 2 минуты. Каждый из пассажиров независимо от других приходит на платформу в случайный момент времени и ожидает ближайшего поезда. В данный поезд село 75 пассажиров. Какова вероятность того, что их суммарное время ожидания превысило один час?

Решение. Обозначим время ожидания i-го пассажира через X_i. Естественно предположить, что равновозможен приход каждого пассажира в любой момент времени. Это означает, что случайная величина X_i имеет равномерный закон распределения с функцией плотности вероятности $f(x)=1/2$ при $x\in[0,2]$ и $f(x)=0$ при $x\notin[0,2]$. Тогда

$$M(X_i)=\int_0^2 x\frac{1}{2}dx=1 \text{ и } D(X)=\int_0^2 (x-1)^2\frac{1}{2}dx=\frac{1}{3}.$$

Суммарное время ожидания $Y=\sum_{i=1}^{75}X_i$ представляет собой сумму большего числа независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченными дисперсиями. В силу центральной предельной теоремы можно утверждать, что Y имеет закон распределения близкий к нормальному. Нормальный закон распределения определяется математическим ожиданием и дисперсией. Вычислим их:

$$M(Y)=M(\sum_1^{75}X_i)=\sum_1^{75}M(X_i)=75\cdot 1=75.$$

$$D(X)=D(\sum_1^{75}X_i)=\sum_1^{75}D(X_i)=75\cdot\frac{1}{3}=25.$$

В итоге можно утверждать, что случайная величина Y имеет закон распределения близкий к N(75;25). Искомая вероятность может быть вычислена по формуле (2):

$$P(\eta>60)=P(60<\eta<150)=\Phi\left(\frac{150-75}{5}\right)-\Phi\left(\frac{60-75}{5}\right)=$$

$$=\Phi(15)+\Phi(3)=0,5+0,4986=0,9986\approx 1.$$

Пример 4. Регулировка прибора занимает время от 4 до 10 минут. Регулировщику предстоит отрегулировать 50 приборов. Считая для каждого прибора равновозможными все значения времени регулировки в указанных пределах, оценить вероятность того, что регулировщик справиться с работой за шесть часов.

Решение. Пусть ξ_i - время регулировки i-го прибора, а $Y = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{50}$ - время выполнения работы рабочим. требуется найти $P(Y < 360)$. Величина Y является суммой большего числа одинаково распределенных независимых случайных величин, каждая из которых ограничена. По центральной предельной теореме Y имеет закон распределения близкий к нормальному закону распределения. Найдем параметры этого закона, т.е. математическое ожидание и дисперсию величины Y. Так как случайные величины X_i независимы, то

$$M(Y) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_{50});$$

$$D(Y) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_{50}).$$

Вычислим $M(X_i)$ и $D(X_i)$.

По условию все значения случайной величины X_i равновозможны в отрезке $[4,10]$. Поэтому функция плотности вероятности этой случайной величины в указанном отрезке постоянна. Чтобы площадь, заключенная между графиком функции плотности вероятности и осью абсцисс, равнялась единицы, следует положить $f(x) = 1/6$ при $x \in [4,10]$ и $f(x) = 0$ при остальных значениях x. С учетом этого имеем:

$$M(X_i) = \int_4^{10} x \frac{1}{6} dx = 7, \qquad D(X_i) = \int_4^{10} (x-7)^2 \frac{1}{6} dx = 3.$$

Поэтому $M(Y) = 50 \cdot 7 = 250, D(Y) = 50 \cdot 3 = 150, \sigma(Y) = 12,25$.

Итак, $Y \sim N(350;150)$. Для вычисления искомой вероятности воспользуемся формулой и таблицей функции Лапласа:

$$P(Y<360)=P(200<\eta<360)=\Phi\left(\frac{360-350}{12,25}\right)-\Phi\left(\frac{200-350}{12,25}\right)=$$

$$=\Phi(0,82)+\Phi(12,24)==0,294+0,5\approx 0,8.$$

Пример 5. Стрелок в десятку попадает с вероятностью 0,5, в девятку – с вероятностью 0,2, в восьмерку – с вероятностью 0,15, в семерку – с вероятностью 0,1 и в шестерку – с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что при 24 выстрелах стрелок наберет не менее 210 очков?

Решение. Пусть при i-м выстреле стрелок набивает X_i очков. Величины X_i независимы и каждая имеет распределение:

X_i	6	7	8	9	10
P	0,05	0,1	0,15	0,2	0,5

Заметим, что

$$M(X_i)=6\cdot 0,05+7\cdot 0,1+8\cdot 0,15+9\cdot 0,2+10\cdot 0,5=9;$$

$$D(X_i)=(6-9)^2\cdot 0,05+(7-9)^2\cdot 0,1+(8-9)^2\cdot 0,15+$$

$$+(9-9)^2\cdot 0,2+(10-9)^2\cdot 0,5=1,5.$$

Сумма очков $Y=\sum_{i=1}^{24}X_i$, будучи суммой большого числа независимых одинаково распределенных слагаемых с ограниченными дисперсиями, имеет закон распределения близкий к нормальному с параметрами:

$$M(Y)=M\left(\sum_{i=1}^{24}X_i\right)=\sum_{i=1}^{24}M(X_i)=24\cdot 9=216;$$

$$D(Y)=D\left(\sum_{i=1}^{24}X_i\right)=\sum_{i=1}^{24}D(X_i)=24\cdot 1,5=36=\sigma^2.$$

В итоге $Y \sim N(216;36)$. Поэтому

$$P(210 \le Y) = P(210 \le Y \le 240) = \Phi\left(\frac{240-216}{6}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{210-216}{6}\right) == \Phi(4) - \Phi(-1) = \Phi(4) + \Phi(1) =$$

$$= 0,49997 + 0,34134 \approx 0,84.$$

Пример 6. Восемьдесят процентов приборов после сборки нуждаются в регулировке. Какова вероятность того, что среди 400 собранных за смену приборов в регулировке нуждаются: а) не менее 310; б) не более 350; в) от 304 до 336?

Решение. Сборку каждого прибора можно считать независимым испытанием с вероятностью появления события равной $p = 0,8$. Так как число опытов велико, то можно воспользоваться интегральной теоремой Муавра-Лапласа :

а) $$P_{400}(310;400) = \Phi\left(\frac{400-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{310-400\cdot 0,8\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) =$$

$$= \Phi(10) + \Phi(1,25) = = 0,5 + 0,3944 = 0,8944 \approx 0,9;$$

б) $$P_{400}(0;350) = \Phi\left(\frac{350-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{0-400\cdot 0,8\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) =$$

$$= \Phi(3,75) + \Phi(40) = = 0,4999 + 0,5 = 0,9999 \approx 1;$$

в) $$P_{400}(304;336) = \Phi\left(\frac{336-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{304-400\cdot 0,8\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right) =$$

$$= \Phi(2) + \Phi(2) = = 2\Phi(2) = 0,9545.$$

Правило *«Трех сигм»*: для случайной величины X, распределенной по нормальному закону распределения $N(m;\sigma^2)$,

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=0,997\approx 1.$$

Поэтому интервалом практически возможных значений такой случайной величины считают интервал $(m-3\sigma;m+3\sigma)$..

Напомним, что если вероятность события близка к единице, то событие называют *практически достоверным*. Можно быть практически уверенным, что в единичном опыте оно произойдет.

Пример 7. В страховой компании застраховано 10 000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате дорожно-транспортного происшествия равна 0,02. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 24 у.е. страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 1000 у.е. Найдите вероятность того, что по истечении года работы компания потерпит убытки от этого вида страховой деятельности.

Решение. Страховой сбор с 10 000 автовладельцев составляет $24\cdot 10000=240000$ у.е. Компания потерпит убытки, если будет предъявлено более 240 исков по 1000 у.е. каждый. Вероятность поступления страхового иска от каждого автовладельца равна 0,02. Эксплуатация каждого автомобиля в течение страхового срока можно считать независимым испытанием. Так как число испытаний велико $(n=10000)$, то можно воспользоваться интегральной теоремой Муавра-Лапласа.

$$P_{10000}\ \ 240\le k\le 10000\ \ =$$

$$=\Phi\left(\frac{10000-10000\cdot 0,02}{\sqrt{10000\cdot 0,02\cdot 0,98}}\right)-\Phi\left(\frac{240-10000\cdot 0,02}{\sqrt{10000\cdot 0,02\cdot 0,98}}\right)=$$

$$=\Phi(700)-\Phi(2,86)=0,5-0,4979=0,0021.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Монету подбросили 900 раз. Герб выпал 403 раза. Можно ли считать, что подбрасывали симметричную монету?
2. В условиях примера 7 найдите вероятность того, что страховая фирма получит доход менее 60 000 у.е.
3. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, утверждать, что частота выпадения гербы попадает в интервал (0,4;0,6)? Получить оценку числа бросков монеты: а) по неравенству Чебышева; б) с использованием следствия 10.2 из центральной предельной теоремы.
4. Время безотказной работы предохранителя X имеет показательный закон распределения (функция распределения $F(x)=1-e^{-\lambda x}, M(X)=1/\lambda, D(X)=1/\lambda^2$) с параметром $\lambda=0,01$ отказов в час. Перегоревший предохранитель практически мгновенно заменяется новым. Какова вероятность того, что 20 предохранителей хватит на 2500 часов работы?
5. При дальней радиосвязи из-за помех 10% сигналов искажаются и принимаются неверно. Найдите вероятность того, что при передаче 50 сигналов ошибок в приеме будет не более трех.
6. Вероятность поражения цели стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 75 раз; б) от 70 до 90 раз; в) не более 82 раз.
7. Сорок процентов жителей нашего города поддерживают некоторое мероприятие. Для изучения общественного мнения было опрошено 400 взятых наугад жителей. Какова вероятность того, что больше половины из опрошенных выскажутся в поддержку мероприятия?

8.Наблюдается простейший поток событий интенсивности μ (интервалы X_i между событиями независимы и имеют показательное распределение с функцией плотности вероятности $f(x) = \mu e^{-\mu x}$). Оцените вероятность того, что первые 100 событий потока произойдут в интервале времени от 90/ μ до 100/ μ.(Указание: $M(X_i) = 1\mu$, $D(X_i) = 1\mu^2$.)

9. Длительность телефонного разговора случайна. Известно, что у данного абонента средняя длительность разговора равна 4 мин, а среднее квадратическое отклонение длительности разговора равна 2 мин. Оцените вероятность того, что длительность 50 разговоров превысит 3 часа.

10. В крупной партии изделий 1% изделий обладает скрытыми дефектами. Оценить вероятно того, что среди взятых наугад 400 окажется не более k изделий со скрытыми дефектами. Ответ для $k = 4, k = 6, k = 8$.

11. Известно, что 5% студентов носят очки. На первый курс данного факультета принято 250 студентов. Какова вероятность того, что среди них не менее 15 носят очки?

12. Игральный кубик подбрасывают 15 раз. Оцените вероятность того, что суммарное число выпавших очков превысит 50.

Ответы: 1.Нет; 2. 0,92; 3. а) больше 250, б) больше 68; 4. 0,13; 5. 0,16; 6. а) $\approx$0,89, б) $\approx$0,99, в) $\approx$0,69; 7. $\approx$0,02; 8. $\approx$0,68; 9. 0,92; 10. 0,5, 0,86, 0,998; 11. 0,24; 12. 0,96.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Теория вероятностей: Учеб. Для вузов / А.В. Печенкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.-М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.-456 с.

2. Петрушко И.М. Курс высшей математики. Теория вероятностей: Лекции и практические занятия/ И.М. Петрушко, В.И. Афанасьев, А.А, Бободжанов, В.Г. Крупин.-М.: Издательство МЭИ, 2004.-304 с.

3. Дубровская А.П. Курс теории вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие/ А.П. Дубровская, Е.Г. Глушко.- Воронеж: ВГТУ, 2004. 161 с.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике/ В.Е. Гмурман. -М: Высш. шк., 1997.-400 с.

5. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. Пособ./ Под ред. А.В. Ефимова. М.: Наука, 1990. 428 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для организации самостоятельной работы
по изучению дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика»
для студентов по направлению подготовки бакалавров 230100 «Информатика и вычислительная техника»
(профиль «Системы автоматизированного проектирования»)
очной формы обучения
Часть 2

Составители:
Глушко Елена Георгиевна
Дубровская Алевтина Петровна

В авторской редакции

Компьютерный набор Е.Г. Глушко

Подписано к изданию 29. 06. 2012.
Уч.-изд.л. 3,3.

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14