ФГ БОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования)

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы
по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400
«Управление и информатика в технических системах», 140400
«Электропривод и автоматика промышленных установок
и технологических комплексов», «Электромеханика», 110800
«Электрификация и автоматизация сельского
хозяйства» очной формы обучения

Составители: А.А. Катрахова, Е.М. Васильев,
В.С. Купцов, Е.В. Купцов

Tfkp-Oper.doc 440 К байт 14.09.2013 уч.-изд. 3.1 л.

(название файла) (объем файла) (дата) (объем издания)

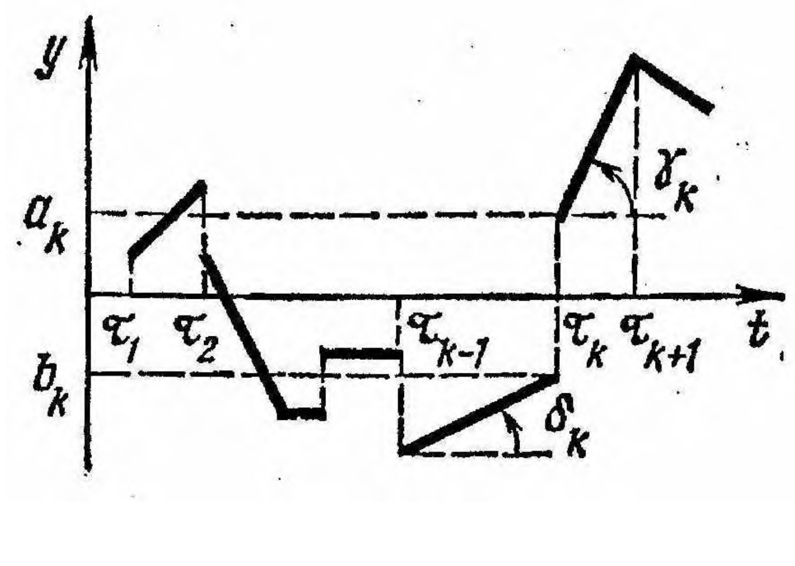
ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет »

Кафедра высшей математики и физико-математического моделирования

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы
по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400 «Управление и информатика в технических системах», 140400 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», «Электромеханика», 110800 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения



Воронеж 2013

Составители: канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук Е.М. Васильев, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, асп. Е.В. Купцова

УДК 517

Теория функции комплексного переменного и операционного исчисления: методические указания по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400 « Управление и информатика в технических системах», 140400 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», «Электромеханика», 110800 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения / ФГ БОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А.А. Катрахова, Е.М. Васильев, В.С. Купцов, Е.В. Купцова. Воронеж, 2013. 49 с.

Методическое указание содержат теоретический материал, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Tfkp-Oper.doc»

Ил. 7. Библиогр.: 3 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.П. Дубровская

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых задач по теме:“ Функции комплексного переменного и операционное исчисление”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов, рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

Функции комплексного переменного и операционное исчисление являются в настоящее время одними из наиболее важных разделов математического анализа. В данной работе изложены основные понятия из теории функции комплексного переменного и операционного исчисления. Методическое указание содержит большое количество задач для проведения практических и индивидуальных занятий. К задачам даны ответы, большое количество пояснений дает возможность многие примеры выносить на самостоятельную работу.

1. ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.1. Извлечение корня

Корень n*-ой степени из комплексного числа* z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (1)$$

$$\varphi = \arg z, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

1.2. Элементарные функции комплексного переменного

Значения *показательной функции* комплексного переменного $z = x + iy$ вычисляются по формуле

$e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$.

Показательная функция e^{z} обладает следующими свойствами: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, где z_1 и z_2 - любые комплексные числа; $e^{z+2\pi ki} = e^{z}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, т.е. e^{z} является периодической функцией с основным периодом $2\pi i$.

Тригонометрические функции sinz и cosz выражаются через показательную:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Функции $w = \sin z$ и $w = \cos z$ - периодические с действительным периодом 2π и имеют только действительные нули $z = k\pi$ и $z = \pi/2 + k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ соответственно.

Функции tgz и ctgz определяются равенствами

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все известные формулы тригонометрии.

Гиперболические функции shz, chz, thz, cthz определяются равенствами

$$shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad thz = \frac{shz}{chz}, \quad cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Имеют место тождества shz=-isiniz, chz=cosiz.

Логарифмическая функция Lnz, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\mathrm{Lnz} = \ln|z| + i\mathrm{Argz} = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Значение функции, которое получается при k=0, называется *главным значением* и обозначается $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, логарифмическая функция обладает следующими свойствами:

$$Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2, \quad Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2,$$

$$Lnz^n = nLnz + 2\pi ki,\ k = 0,\pm1,\pm2,\ldots,\ Ln\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}Lnz.$$

Функции Arcsinz, Arccosz, Arctgz, Arcctgz определяются как *обратные* к функциям sinz, cosz, tgz, ctgz соответственно.

Так, если $z = \cos\omega$, то ω называется арккосинусом числа z и обозначается ω=Arccosz. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую:

$$Arc\sin z = -iLn(iz + \sqrt{1 - z^2}),\quad Arc\cos z = -iLn(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$Arctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{1+iz}{1-iz},\quad Arcctgz = \frac{i}{2}Ln\frac{z-i}{z+i}.$$

Значения, соответствующие главному значению логарифма, обозначаются теми же символами со строчной буквы (arcsinz, arccosz, arctgz, arcctgz); они называются главными значениями. Общая степенная функция $w = z^{\alpha}$, где α—любое комплексное число, определяется соотношением $z^{\alpha} = e^{\alpha Lnz},\ z \neq 0.$ Эта функция многозначная; значение $z^{\alpha} = e^{\alpha Lnz}$ называется главным значением. Общая показательная функция $w = a^z$, $a \neq 0$ определяется равенством $a^z = e^{zLna}$. Главное значение этой функции $a^z = e^{zLna}$.

1.3. Кривые на комплексной плоскости

Уравнение вида *z=z(t)= x(t)+iy(t)* определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x = x(t),\ y = y(t).$ Исключением параметра ***t*** из этих уравнений получаем уравнение кривой в виде *F (x,y)=0.*

1.4. Дифференцирование функций комплексного переменного, условия Коши — Римана

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области G комплексного переменного z. Пусть точки z и z+Δz принадлежат области *G*. Введем обозначения

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Функция $w = f(z)$, *называется дифференцируемой о точке* $z \in G$, *если отношение* $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ *имеет конечный предел при* $\Delta z \to 0$. *Этот предел называется производной функции* $w = f(z)$ и *обозначается* $f'(z)$ $\left(\textit{или}\ \dfrac{dw}{dz}\right)$, $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$.

Пусть $z = x + iy, \quad w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$, тогда в каждой точке дифференцируемости функции *f(z)* выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (2)$$

называемые *условиями Коши — Римана.* Обратно, если в некоторой точке *(x, y)* выполняются условия Коши — Римана и, кроме того, функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ дифференцируемы как функции двух действительных переменных, то функция $f(z) = u + iv$ является дифференцируемой в точке $z=x+iy$ как функция комплексного переменного z.

Функция $w = f(z)$ *называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция* $w = f(z)$ *называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке* $z \in G$. Производная аналитической функции вычисляется по формулам

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пользуясь условиями Коши—Римана, можно восстановить аналитическую функцию $w = f(z)$, если известна ее действительная часть $u = u(x, y)$ или мнимая часть $v = v(x, y)$

и, кроме того, задано значение $f(z_0)$ функции в некоторой точке z_0. Пусть, например, $u = e^x \cos y,\ f(0) = 1.$ Определить аналитическую функцию *f(z)*. В силу условий (2) имеем

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y. \tag{4}$$

Интегрируя уравнение (4) по переменной *x*, находим мнимую часть

$$\upsilon = e^x \sin y + C(y). \tag{5}$$

Слагаемое *C(y)* представляет собой постоянную (относительно *x)* интегрирования. Дифференцируя (5) по *y* и сопоставляя результат с (3), получаем $C'(y) = 0$, откуда *C (y)=C*. Таким образом, имеем

$$\upsilon = e^x \sin y + C \ и \ f(z) = u + i\upsilon = e^x(\cos y + i\sin y) + C$$

с учетом формулы (1)— $f(z) = e^z + C.$ Учтем дополнительное условие *f(0)* ==1, откуда С=0; итак, $f(z) = e^z$.

1.5. Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена и непрерывна в области *G*, а Г — кусочно-гладкая кривая, лежащая в G; $z = x + iy, \quad f(z) = u + i\upsilon, \quad где \quad u = u(x,y), \quad \upsilon = \upsilon(x,y)$ -действительные функции переменных *x* и *y*. Вычисление интеграла от функции $w = f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению криволинейных интегралов по координатам:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma u dx - \upsilon dy + i\int_\Gamma \upsilon dx + u dy.$$

Если кривая Г задана параметрическими уравнениями

$x=x(t)$, $y= y(t)$, а начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям $t = \alpha$ и $t=\beta$, то

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt, \quad где\ z(t) = x(t) + iy(t).$$

Если $w = f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области G, то интеграл не зависит от пути интегрирования (зависит только от начальной и конечной точек). В этом случае для вычисления интеграла применяется *формула Ньютона — Лейбница*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1).$$

где $\Phi(z)$ —какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т. е, $\Phi'(z) = f(z)$ в области G, Если функция $w = f(z)$ является аналитической в области G, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром Г, и на самом контуре, то

$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$ (Теорема Коши) и для любой внутренней точки

$$z_0 \in G \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz \qquad \textit{(интегральная формула Коши)}$$

1.6. Ряд Лорана

Функция $w = f(z)$, однозначная н аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, разлагается в этом кольце *в ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k, \quad (6)$$

коэффициенты находятся по формулам

$$C_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (7)$$

Здесь Г—произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри заданного кольца. Разложение в ряд Лорана единственно. В формуле (6) ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} C_k (z - z_0)^k \quad и \quad \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$$

называются соответственно *гласной частью ряда Лорана* и *правильной частью ряда Лорана*. На практике для нахождения коэффициентов C_k, если это возможно, используют готовые разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

Для примера разложим в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 0$ функцию $f(z) = z^3 e^{1/z}$. Функция $z^3 e^{1/z}$ аналитична в кольце 0 < | z | < ∞, следовательно, разложима в нем в ряд Лорана. Воспользуемся разложением показательной функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$ и положим $x = 1/z$, тогда

$$f(z) = z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \ldots + \frac{1}{z^k k!} + \ldots \right) =$$

$$= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{z 4!} + \ldots + \frac{1}{z^{k-3} k!} + \ldots$$

В силу единственности ряда Лорана полученное разложение функции *f(z)* по степеням z является рядом Лорана для функции $f(z) = z^3 e^{1/z}$ в кольце 0 < | z | < ∞.

1.7. Изолированные особые точки однозначной аналитической функции

Точка z_0 *называется изолированной особой точкой функции* $w = f(z)$, *если f (z)- однозначная и аналитическая функция в круговом кольце* $0 < |z - z_0| < d$, *кроме самой точки*

z_0. Функцию $w = f(z)$ в окрестности точки z_0 можно разложить в ряд Лорана(6), сходящийся в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$. При этом возможны три различных случая, когда ряд Лорана:

1) не содержит членов **с** отрицательными степенями разности $z - z_0$, $\quad$ *т.е.* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$. В этом случае z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $w = f(z)$;

2) содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности

$$(z - z_0), \quad т.е.\ f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} C_k (z - z_0)^k, \ причем\ C_{-n} \neq 0.$$

В этом случае z_0 называется *полюсом* порядка n функции $w = f(z)$;

3) содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $z - z_0$, $\quad$ *т.е.* $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$.

В этом случае z_0 называется *существенно особой точкой* функции $w = f(z)$. При определении характера изолированной особой точки используются следующие утверждения.

1. Для того чтобы точка z_0 являлась устранимой особой точкой аналитической функции $w = f(z)$, необходимо и достаточно существование предела

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = C_0, \quad причем\ |C_0| < \infty.$$

Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом аналитической функции $w = f(z)$, необходимо и достаточно существование предела $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

2. Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n аналитической функции *f(z),* необходимо и достаточно, что-

бы функцию *f(z)* можно было представить в виде $f(z)=\varphi(z)/(z-z_0)^n$, *где* $\varphi(z)$ —функция аналитическая в точке z_0, причем $\varphi(z)\neq 0$. .Пусть z_0 —изолированная особая точка функции $f(z)=\lambda(z)/\mu(z)$, *где* $\lambda(z)$ *и* $\mu(z)$ —функции аналитические в точке z_0. Если числитель $\lambda(z)$ и все производные до *к*—1 порядка включительно в точке z_0 равны нулю, $\lambda^{(k)}(z_0)\neq 0$, знаменатель $\mu(z)$ и все производные до *l-1* порядка включительно также равны нулю в точке z_0, $\mu^{(l)}(z_0)\neq 0$, то при *l>k* точка z_0 является полюсом порядка *n=l—k* аналитической функции *f(z)*. (Если $l\leq k$, то точка z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции f(z).) В частном случае, при *k=0, l = 1* имеем: если $\lambda(z_0)\neq 0$, $\mu(z_0)=0$, $\mu'(z_0)\neq 0$, *то* z_0 — полюс первого порядка функции *f(z)*.

3. Пусть при $z\to z_0$ аналитическая функция $w=f(z)$ не имеет пределов ни конечного, ни бесконечного. Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $w=f(z)$.

1.8. Вычеты

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $w=f(z)$. *Вычетом функции* $f(z)$ в *точке* z_0 называется число, обозначаемое символом $res_{z_0} f(z)$ и определяемое равенством

$$res_{z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz \qquad (8)$$

(другие обозначения: $res f(z_0)$, $res\left[f(z), z_0\right]$). Замкнутый контур интегрирования γ лежит в области аналитичности функции $f(z)$ и не содержит внутри других особых точек функции $f(z)$, кроме z_0. Сопоставление формул (7) и (8) показывает, что вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$res_{z_0} f(z) = C_{-1}. \qquad (9)$$

Вычет в устранимой особой точке равен нулю. Вычет функции $f(z)$ в полюсе n-го порядка вычисляется по формуле

$$res_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z - z_0)^n];$$

при n=1

$$res_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} [f(z)(z - z_0)].$$

Если функция $w = f(z)$ в окрестности точки z_0 представляется как частное двух аналитических функций, $f(z) = \lambda(z)/\mu(z)$, причем $\lambda(z_0) \neq 0$, $\mu(z_0)$, $\mu'(z_0) \neq 0$ (в этом случае z_0 — полюс первого порядка функции $f(z)$), то

$$res_{z_0} f(z) = \lambda(z_0)/\mu'(z_0).$$

Если точка z_0 есть существенно особая точка функции $w = f(z)$, то вычет вычисляется по формуле (9).

Основная теорема Коши о вычетах.

Если функция $w = f(z)$ является аналитической на границе Г области G и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, , то

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f(z). \qquad (10)$$

1.9. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций

Пусть $R(x)$ — рациональная функция, $R(x) = P_k(x)/Q_l(x)$, где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ - многочлены степеней

k и l соответственно. Если $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $l \geq k+2$, т.е. степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{m} res_{z_m} R(z),$$

здесь сумма вычетов функции $R(z) = P_k(z)/Q_l(z)$ берется по всем полюсам z_m, расположенным в верхней полуплоскости Im z>0.

1.10. Вычисление несобственных интегралов специального вида

Пусть $R(x)$ — рациональная функция, $R(x) = P_k(x)/Q_l(x)$, где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ - многочлены степеней k и l соответственно. Если $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $l \geq k+1$ (т. е. R(x) – правильная рациональная дробь), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx = \mathrm{Re}\left\{ 2\pi i \sum_{m} res_{z_m} R(z)e^{i\lambda z} \right\}, \quad \lambda > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx = \mathrm{Im}\left\{ 2\pi i \sum_{m} res_{z_m} R(z)e^{i\lambda z} \right\}, \quad \lambda > 0.$$

где сумма вычетов функции $R(z)e^{i\lambda z}$ берется по всем полюсам z_m, расположенным в верхней полуплоскости Im z>0.

1.11. Вычисление определенных интегралов специального вида

Пусть R —рациональная функция *cos t* и *sin t*, непрерывная внутри промежутка интегрирования. Полагаем $z = e^{it}$, тогда

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad dt = \frac{dz}{iz};$$

имеем

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint_{|z|=1} F(z)dz. \qquad (11)$$

где путь интегрирования—окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Контурный интеграл в правой части равенства (11) вычисляется по формуле (10), где сумма вычетов функции $F(z)$ берется по всем особым точкам, лежащим в области $|z| < 1$.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

2.1. Преобразование Лапласа и его свойства

Функцией-оригиналом называется функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям: 1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t; 2) для всех отрицательных t $f(t)=0$; 3) $f(t)$ возрастает не быстрое показательной функции, т. е. существуют такие постоянные M и σ_0,что для всех t $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$.

Изображением функции f(t) по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = \sigma + i\tau$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt;$$

обозначение: $f(t) \div F(p)$.

Для любой функции-оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией выполняются свойства:

1^0. Линейность: для любых комплексных постоянных C_1 *и* C_2

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div {}_1 F_1(p) + C_2 F_2(p).$$

2^0. Формула подобия: для любого постоянного ω>0

$$f(\omega t) \risingdotseq \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$$

3^0. Дифференцирование оригинала: *если функции* $f(t),\ f'(t),\ \ldots,\ f^{(n)}(t)$ *являются функциями-оригиналами, то*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

……………………………………………………………………

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Величина $f^{(k)}(0),\ k = 0,1,\ldots,n-1,$ понимается как $\lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t).$

4^0. Дифференцирование изображения: $F'(p) \risingdotseq -tf(t).$

5^0. Интегрирование оригинала: $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}.$

6^0. Интегрирование изображения: *если* $\dfrac{f(t)}{t}$ *является функцией-оригиналом, то*

$$\int\limits_p^{\infty} F(p)dp \risingdotseq \frac{f(t)}{t}.$$

7^0. Формула смещения: *для любого комплексного λ*

$$f(t)e^{-\lambda t} \risingdotseq F(p+\lambda).$$

8^0. Формула запаздывания: $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p),\ \tau > 0.$

9^0. Формула умножения изображений:

$$F_1(p)F_2(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau. \qquad (12)$$

Интеграл в (12) называется сверткой функций $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$ и обозначается символом $f_1 * f_2$.

Отыскание оригинала по изображению.

Для нахождения оригинала f(t) по известному изображению F(p) наиболее широко применяются следующие приемы:

1) если *F(p)* есть правильная рациональная дробь, то ее разлагают на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства 1^0 - 9^0 преобразования Лапласа; используют *формулу разложения,* согласно которой при некоторых достаточно общих условиях оригиналом

2) для *F(p)* служит функция $f(t) = \sum_k res\left[F(p)\, e^{pt}, p_k\right]$,

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции *F(p).*

2.2. Формулы соответствия

Широко применяются следующие табличные соотношения:

$$1 \div 1/p;\ e^{at} \div 1/(p-a);\ \sin\omega t \div \omega/(p^2+\omega^2);\ \cos\omega t \div p/(p^2+\omega^2);$$

$$sh\,\omega t \div \omega/(p^2-\omega^2);\ ch\,\omega t \div p/(p^2-\omega^2);\ t^n \div n!/p^{n+1}.$$

Левые части операционных соотношений предполагаются помноженными на функцию

$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ которая для сокращения записи, как правило, опускается.

2.3. Изображение кусочно-линейной функции

Примерный вид графика кусочно-линейной (полигональной) функции представлен на рис.1. Введём следующие

обозначения: τ_k - точки разрыва функций *f(t)* или $f'(t)$; $\alpha_k = a_k - b_k$ - скачки функций в узлах «стыка»;
$\beta_k = tg\gamma_k - tg\delta_k$ - скачки производной $f'(t)$ в узлах «стыка».

Изображение полигональной функции имеет вид

$$F(p) = \sum_k e^{-p\tau_k}\left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2}\right)$$

2.4. Задача Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

Решение линейных дифференциальных уравнений операционным методом предполагает три этапа: 1) переход от исходных функций к их изображениям по Лапласу, при этом дифференциальное уравнение преобразуется в алгебраическое относительно изображения искомой функции; 2) решение полученного алгебраического уравнения; 3) получение искомого решения по его изображению.

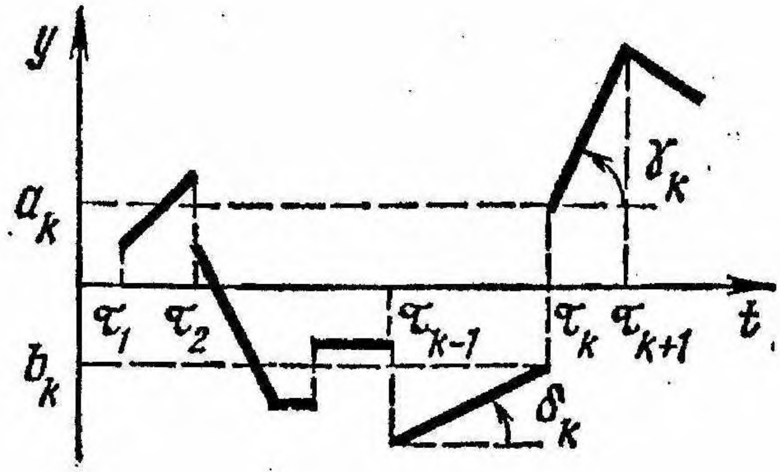


Рис. 1

Решим Задачу Коши для дифференциального уравнения

$$x' - x = 1 \qquad (13)$$

при начальном условии x(0)=1.

Операционный метод решения такой задачи состоит в том, что искомую функцию и правую часть дифференциального уравнения считаем оригиналами и переходим от уравнения, связывающего оригиналы, к уравнению, связывающему их изображения. Для этого воспользуемся формулой дифференцирования оригинала $x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p) - 1.$ Применяя свойство линейности, перейдём в уравнении (13) от оригинала к изображениям: $\left[pX(p) - 1\right] - X(p) = 1/p.$ Решим полученное уже не дифференциальное, а алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения *X(p)*: $X(p) = 2/(p-1) - 1/p.$ Осталось по неизвестному изображению *X(p)* найти соответствующий ему оригинал *x(t)*. Используя свойство линейности преобразования Лапласа и табличные операционные соотношения (см. п. 1.13), получаем $x(t) = 2e^t - 1.$ Это и есть искомое решение задачи Коши. Аналогично решаются системы линейных дифференциальных уравнений.

2.5. Формула Дюамеля

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$L\{x(t)\} = a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t) \qquad (14)$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \qquad (15)$$

(Заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями можно свести к задаче с нулевыми условиями.). Допустим, что известно решение уравнения $L\{x(t)\} = 1$ (с той же левой частью и правой частью, равной единице) при условиях (15). Обозначим его $x_1(t)$. Тогда решение *x(t)* задачи (14)-(15) можно выразить через $x_1(t)$ *и* $f(t)$ с помощью одной из формул:

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau)\,d\tau, \quad x(t) = \int_0^t x_1'(t-\tau) f(\tau)\,d\tau,$$

$$x(t)=f(0)x_1(t)+\int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)d\tau,\quad x(t)=f(0)x_1(t)+\int_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau)d\tau.$$

Каждое из этих выражений называют *формулой (или интегралом) Дюамеля.*

Метод решения дифференциальных уравнений, основанный на формуле Дюамеля, применяют, как правило, в тех случаях, когда возникают трудности при нахождении изображения *F(p)* правой части *f(t)* уравнения (14), а также при необходимости многократного решения задачи (14)-(15) для различных функций *f(t)*

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1 . (см п. 1.1.)

Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$

Решение:

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n разных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$\varphi=\arg(z)$; k=0, 1 ,…, n-1; $z\neq 0$

Подставляя в эту формулу различные значения k, найдем все значения корня

$\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$:

$\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-2i$, $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}=2+i2\sqrt{3}$

$\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}+2i$, $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}=-2-i2\sqrt{3}$

Ответ:

$$\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}=\left\{2\sqrt{3}-2i;2+i2\sqrt{3};-2\sqrt{3}+2i;-2-i2\sqrt{3}\right\}$$

Задача 2 (см п.1.2.)

Представить в алгебраической форме: $\operatorname{sh}\left(2-\pi i\right)$

Решение:

Перейдем от гиперболического синуса к тригонометрическому: $\operatorname{sh}\left(2-\pi i\right)$= -i $\sin\left(2i+\pi\right)=-i\cdot\sin\left(\pi+2i\right)$

Используем формулу синуса суммы:

$$i\cdot\sin\left(\pi+2i\right)=-i\left[\sin\left(\pi\right)\cos\left(2i\right)+\cos\left(\pi\right)\sin\left(2i\right)\right].$$

Представим тригонометрические функции с мнимыми Аргументами в виде показательных:

$$-i\left[\sin\left(\pi\right)\cos\left(2i\right)+\cos\left(\pi\right)\sin\left(2i\right)\right]=$$

$$=-i\cdot 0\cdot\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}-i\cdot\left(-1\right)\cdot\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i}=\left(\frac{e^{-2}-e^{2}}{2}\right)$$

Ответ: $\operatorname{sh}\left(2-\pi i\right)=\left(\dfrac{e^{-2}-e^{2}}{2}\right)$

Задача 3 (см п.1.2.)

Представить в алгебраической форме:

$$Arctg\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)$$

Решение:

Функция Arctg является многозначной и в общем виде определяется следующим образом:

Arctg z= $-\dfrac{i}{2}Ln\dfrac{1+iz}{1-iz}$

Подставим вместо z значение $\dfrac{3\sqrt{3}+8i}{7}$:

$$Arctg\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)=-\frac{i}{2}Ln\frac{1+\frac{-8+i3\sqrt{3}}{7}}{1-\frac{-8+i3\sqrt{3}}{7}}=$$

$$=-\frac{i}{2}Ln\frac{7-8+i3\sqrt{3}}{7+8-i3\sqrt{3}}=-\frac{i}{2}Ln\frac{-1+i3\sqrt{3}}{15-i3\sqrt{3}}=$$

$$=-\frac{i}{2}Ln\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-i3\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}\right)$$

Логарифмическая функция Ln(z), где $z\neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем:

$$Ln\ z=\ln|z|+iArgz=\ln|z|+i\left(\arg z+2\pi k\right),$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Подставим это выражение в полученное выше:

$$-\frac{i}{2}Ln\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-i3\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}\right)=$$

$$=-\frac{i}{2}\left[\ln\left|-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-i3\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}\right|+i\left(\arg\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-i3\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}\right)+2\pi k\right)\right]=$$

$$=-\frac{i}{2}\ln\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\arg\left(-3\frac{5+i\sqrt{3}}{1+i3\sqrt{3}}\right)+2\pi k\right)\approx$$

$$\approx \frac{i}{2}\cdot 1{,}009+\frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right), k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Ответ: $Arctg\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)\approx$

$$\approx \frac{i}{2}\cdot 1{,}009+\frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right), k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами:

$|z-1|<1,\ \arg z\le\frac{\pi}{4},\ \arg(z-1)>\frac{\pi}{4}$

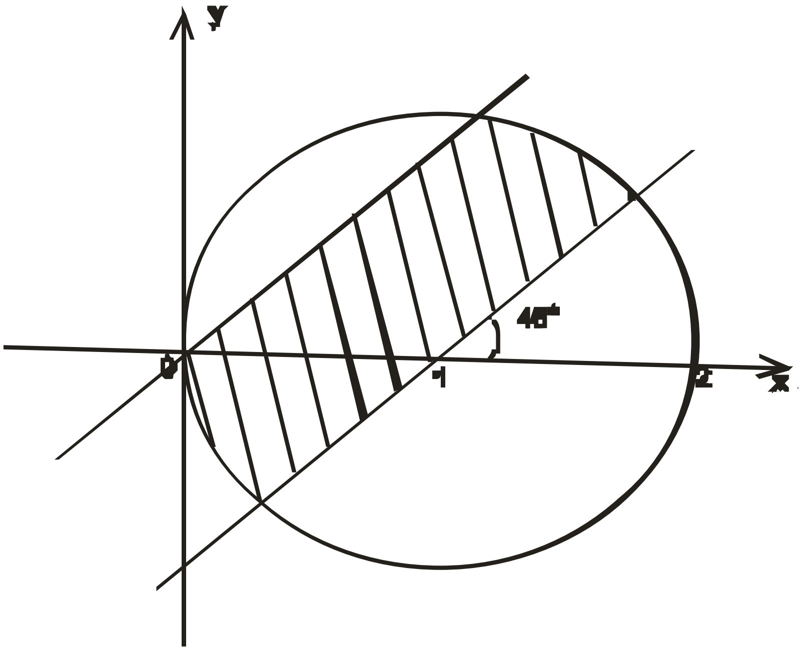


Рис. 2

Задача 5 (см п.1.5.)

Определить вид кривой:

$z=t^2+2t+5+i\left(t^2+2t+1\right)$

Решение:

Уравнение вида $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид $x = x(t), y = y(t)$. В нашем случае:

$x(t) = t^2 + 2t + 5; y(t) = t^2 + 2t = 1$

Выразим параметр t через x и y:

$$x = t^2 + 2t + 5 \Rightarrow x - 4 = (t+1)^2 \Rightarrow t = \sqrt{x-4} - 1$$

$$y = t^2 + 2t + 1 \Rightarrow y = (t+1)^2 \Rightarrow t + \sqrt{y} - 1$$

Получим уравнение кривой в виде $F(x, y) = 0$:

$$\sqrt{x-4} - 1 = \sqrt{y} - 1 \Rightarrow x - 4 = y \Rightarrow x - y - 4 = 0.$$

Ответ: $x - y - 4 = 0$

Задача 6 (См. п. 1.4)

Проверить, что u является действительной частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f (x) по известной действительной части u (x,y) и значению f (z_0):u = -2xy-2y, f (0) = i

Решение:

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по следующей формуле:

$$f'(z) = \frac{du}{dx} - i\frac{du}{dy}.$$

Найдём производную аналитической функции:
$f'(z) = f'(x + iy) = -2y + 2ix + 2i = 2(ix – y) + 2i = 2i(x + iy) + 2i = 2iz + 2i$. Т.к. производная существует, то u является действительной частью аналитической функции. Теперь, зная производную аналитической функции f (z), можно найти производную с точностью до константы:

$$f(z) = \int (2iz + 2i)dz = iz^2 + 2iz + C$$

Определим константу C: $f(0) = i0^2 + 2i \cdot 0 + C = i \Rightarrow C = i$

Итак, аналитическая функция f (z) выглядит следующим образом: $f(z) = iz^2 + 2iz + i$

Ответ: $f(z) = iz^2 + 2iz + i$

Задача 7 (см п.1.5)

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой: $\int\limits_{ABC}(\sin z + z^5)\,dz$; ABC – ломаная:

$$z_A = 0; z_B = 1; z_C = 2i$$

Решение:

Покажем кривую, по которой должно проходить интегрирование:

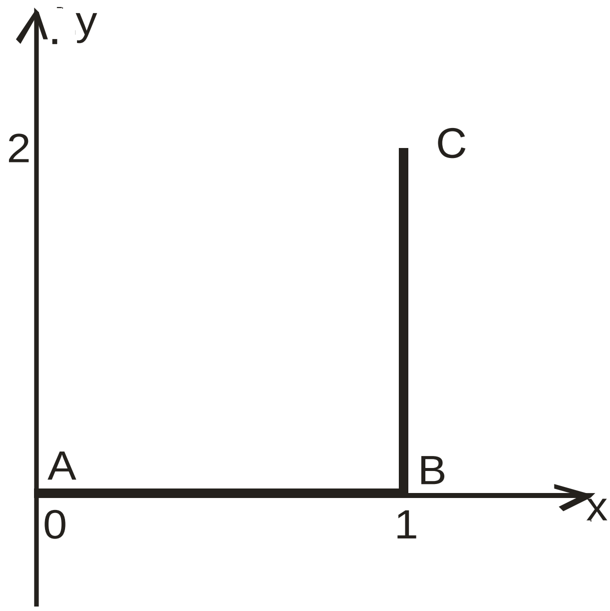


Рис. 3

Проверим исходную функцию на аналитичность. Для этого перейдем от функции f(z) к функции $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, где $z = x + iy$:

$$f(z)=\sin(x+iy)+(x+iy)^5=\frac{1}{2i}\left(e^{ix-y}-e^{-ix+y}\right)+x^5+5ix^4y-$$

$$-10x^3y^2-10ix^2y^3+5xy^4-iy^5=$$

$$=\underbrace{\frac{\sin x}{2}\left(e^{-y}+e^{y}\right)+x^5-10x^3y^2+5xy^4}_{u(x,y)}+$$

$$+i\cdot\underbrace{\left(\frac{\cos x}{2}\left(e^{y}-e^{-y}\right)+5x^4y-10x^2y^3-y^5\right)}_{v(x,y)}$$

Проверим, выполняются ли условия Коши – Римана:

$$\frac{du}{dx}=\frac{e^{-y}}{2}\left(\left(e^{2y+1}\right)\cos x+10e^{y}\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right)\right)=\frac{dv}{dy};$$

$$\frac{du}{dy}=-\frac{e^{-y}}{2}\left(\left(1-e^{2y}\right)\sin x+40xye^{y}\left(x^2-y^2\right)\right)=-\frac{dv}{dy};$$

Условия Коши – Римана выполняются, следовательно, функция является аналитической. Тогда результат от пути интегрирования не зависит:

$$\int_{ABC}\left(\sin z+z^5\right)dz=$$

$$=\int_0^{2i}\left(\sin z+z^5\right)dz=-\cos z+\frac{z^6}{2}\Big|_0^{2i}=-ch2-\frac{29}{3}$$

Ответ: $\int_{ABC}\left(\sin z+z^5\right)dz=-ch2-\frac{29}{3}$

Задача 8 (см п.1.6)

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z. $f(z)=\frac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$

Решение:

$$\frac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}=\frac{6(z+24)}{-z^2(z+6)(z-12)}=-\frac{6}{z^2}\cdot\frac{z+24}{(z+6)(z-12)}$$

Представим один из множителей, как сумму двух простых слагаемых:

$$\frac{z+24}{(z+6)(z-12)}=\frac{A}{z+6}+\frac{B}{z-12}=$$

$$=\frac{Az-12A+Bz+6B}{(z+6)(z-12)}\Rightarrow\ \{A=-1;D=2\ \}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{z+24}{(z+6)(z-12)}=\frac{-1}{z+6}+\frac{2}{z-12}$$

Отсюда f (z) примет следующий вид:

f (z) = $\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+6}-\frac{2}{z-12}\right)$. Особые точки: z = 0; z = -6; z = 12

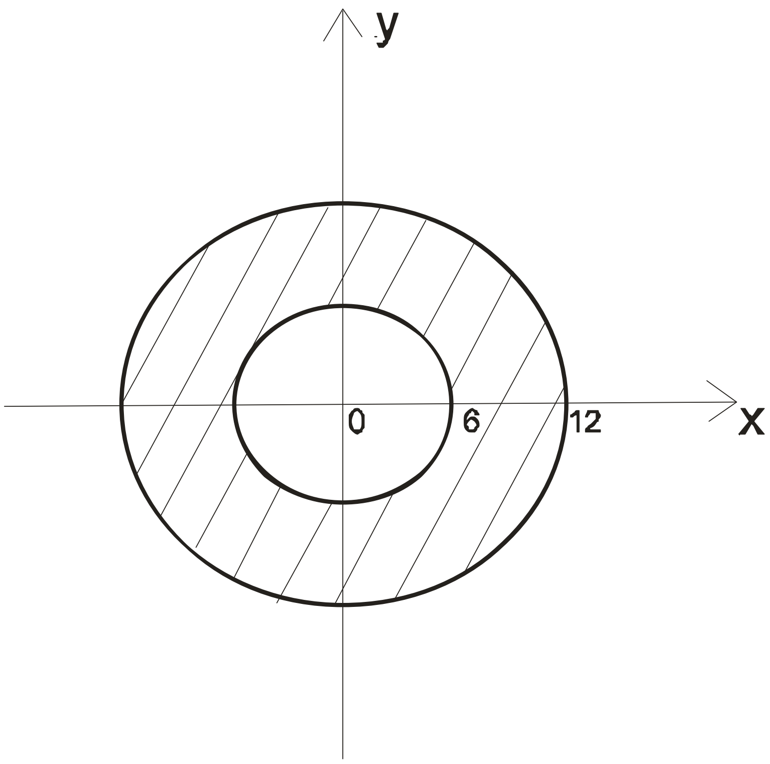


Рис. 4

Рассмотрим область $|z|<6$:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+6}-\frac{2}{z-12}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{6}\right)}+\frac{1}{1-\frac{z}{12}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{6}+\frac{z^2}{36}-\frac{z^3}{216}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{12}+\frac{z^2}{144}+\frac{z^3}{1728}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}-\frac{z}{216}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}+\frac{z}{1728}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $6<|z|<12$:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+6}-\frac{2}{z-12}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{6}{\left(1+\frac{6}{z}\right)}+\frac{1}{1-\frac{z}{12}}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{6}{z}-\frac{36}{z^2}+\frac{216}{z^3}-\frac{1296}{z^4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{z}{12}+\frac{z^2}{144}+\frac{z^3}{1728}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}+\frac{z}{1728}+\ldots\right)$$

Рассмотрим область $|z|>12$:

$$f(z)=\frac{6}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+6}-\frac{2}{z-12}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\frac{6}{z\left(1+\frac{6}{z}\right)}+\frac{1}{z\left(1-\frac{12}{z}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(\frac{6}{z}-\frac{36}{z^2}+\frac{216}{z^3}-\frac{1296}{z^4}+\dots\right)-\left(\frac{12}{z}+\frac{144}{z^2}+\frac{1728}{z^3}+\frac{20736}{z^4}+\dots\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+\dots\right)+\left(\frac{12}{z^3}+\frac{144}{z^4}+\frac{1728}{z^5}+\frac{20736}{z^6}+\dots\right)$$

$|z|<6:$

$$f(z)=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}-\frac{z}{216}+\dots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}+\frac{z}{1728}+\dots\right)$$

$6<|z|<12:$

$$f(z)=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+\dots\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{12z}+\frac{1}{144}+\frac{z}{1728}+\dots\right)$$

$|z|>12:$

$$f(z)=\left(\frac{6}{z^3}-\frac{36}{z^4}+\frac{216}{z^5}-\frac{1296}{z^6}+\dots\right)+\left(\frac{12}{z^3}+\frac{144}{z^4}+\frac{1728}{z^5}+\frac{20736}{z^6}+\dots\right)$$

Задача 9 (см п.1.6).

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z-z_0.

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+4},\ z_0=3+2i$$

Решение:
Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+4}=\frac{1}{z-2i}+\frac{1}{z+2i}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}-\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}-\frac{z^3}{a^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{(z-z_0)+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{(z-z_0)+3+4i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3+4i)^{n+1}}$$

Таким образом: $f(z)=\dfrac{1}{z-2i}+\dfrac{1}{z+2i}=$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^n}{(3+4i)^{n+1}}=$$

$$=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{(3+4i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

Ответ: $f(z)=(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{1}{3^{n+1}}+\dfrac{1}{(3+4i)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$

Задача 10 (см п.1.6.)

Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

$$f(z) = z\cdot\sin\pi\frac{z-1}{z-2},\ z_0 = 2$$

Решение:

Перейдем к новой переменной $z' = z - z_0$

$$z' = z-2; z\cdot\sin\frac{z-1}{z-2} = (z'+2)\sin\frac{z'+1}{z'} = (z'+2)\left[\sin1\cos\frac{1}{z'} + \cos1\sin\frac{1}{z'}\right] =$$

$$= z'\sin1\cos\frac{1}{z'} + z'\cos1\sin\frac{1}{z'} + 2\sin i\cos\frac{1}{z'} + 2\cos1\sin\frac{1}{z'} = f(z')$$

Теперь нам остается найти разложение получившейся функции от z' в окрестности точки $z_0 = 0$. Для этого следует использовать табличные разложения в ряд Тейлора:

$$f(z') =$$

$$= z'\sin1\cos\frac{1}{z'} + z'\cos1\sin\frac{1}{z'} + 2\sin i\cos\frac{1}{z'} + 2\cos1\sin\frac{1}{z'} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!z'^2} + \frac{1}{4!z'^4} - \ldots\right)z'\sin1 + \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{3!z'^3} + \frac{1}{5!z'^5} - \ldots\right)z'\cos1 +$$

$$+ 2\left(1 - \frac{1}{2!z'^2} + \frac{1}{4!z'^4} - \ldots\right)\sin1 + 2\left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{3!z'^3} + \frac{1}{5!z'^5} - \ldots\right)\cos1 =$$

$$= z'\sin1 + \cos1 + 2\sin1 + \frac{2!2\cos1 + 5!2\sin1}{21z'} - \frac{2!\cos1 + 3!2\sin1}{2!3!z'^2} -$$

$$- \frac{4!2\cos1 + 3!\sin1}{3!4!z'^3} + \frac{4!\cos1 + 5!2\sin1}{4!5!z'^4} + \ldots$$

Произведем обратную замену переменной и, таким образом, получим разложение исходной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$:

$$f(z')=$$

$$=z'\sin 1+\cos 1+2\sin 1+\frac{2!2\cos 1+5!2\sin 1}{21z'}-\frac{2!\cos 1+3!2\sin 1}{2!3!\,z'^2}-\ .$$

$$-\frac{2!\cos 1+3!2\sin 1}{2!3!\,z'^2}-\frac{4!2\cos 1+3!\sin 1}{3!4!\,z'^3}+\frac{4!\cos 1+5!2\sin 1}{4!5!\,z'^4}+\ldots$$

Ответ: $f(z')=z'\sin 1+\cos 1+2\sin 1+\dfrac{2!2\cos 1+5!2\sin 1}{21z'}-$

$$-\frac{2!\cos 1+3!2\sin 1}{2!3!\,z'^2}-\frac{4!2\cos 1+3!\sin 1}{3!4!\,z'^3}+\frac{4!\cos 1+5!2\sin 1}{4!5!\,z'^4}+\ldots$$

Задача 11 (См. п. 1.7)

Определить тип особой точки f = 0 для данной функции:

f (z) = $\dfrac{\sin z^4-z^4}{shz-z-z^3/6}$

Решение:

Разложим числитель и знаменатель в ряды Лорана в окрестности точки z = 0:

$$f(z)=\frac{\sin z^4-z^4}{shz-z-z^3/6}=$$

$$=\frac{-z^4+z^4-\frac{z^{12}}{3!}+\frac{z^{20}}{5!}-\frac{z^{28}}{7!}+\ldots}{-z^3/6-z+z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\ldots}=\frac{-\frac{z^{12}}{3!}+\frac{z^{20}}{5!}-\frac{z^{20}}{7!}+\ldots}{\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}+\ldots}=$$

$$=\frac{-\frac{z^7}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}-\frac{z^{23}}{7!}+\ldots}{\frac{1}{5!}+\frac{z^2}{7!}+\frac{z^4}{9!}+\ldots}$$

Представим эту функцию, как отношение функций g (z) и h (z):

$$f(z) = \frac{-\frac{z^7}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - \frac{z^{23}}{7!} + \ldots}{\frac{1}{5!} + \frac{z^2}{7!} + \frac{z^4}{9!} + \ldots} = \frac{g(z)}{h(z)};$$

$$g(z) = -\frac{z^7}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - \frac{z^{23}}{7!} + \ldots; \qquad h(z) = \frac{1}{5!} + \frac{z^2}{7!} + \frac{z^4}{9!} + \ldots$$

Для каждой из функций найдём порядок производной, не обращающейся в 0 при z = 0. Поскольку рассматриваемые функции представляют собой обычные степенные многочлены, то несложно увидеть, что $g^{VII}(0) \neq 0$ и $h(0) \neq 0$.

Так как порядок производной, не образующейся в ноль при z = 0 выше для функции, находящейся в знаменателе, то точка z = 0 является полюсом функции. Порядок этого полюса находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль при z = 0 для функций g (z) и h (z). В данном случае, это 7 – 0 = 7.

Ответ: Точка z = 0 является полюсом 7-го порядка для заданной функции.

Задача 12 (См. п. 1.7)

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}.$$

Решение:

Изолированными особыми точками являются z = i, z = -i, z = ½, z = - ½. Запишем данную функцию в виде отношения

g (z) и h (z): $f(z) = \frac{cos\pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}$;g (z) = cos πz;

h (z) = $(4z^2 - 1)(z^2 + 1)$.

Для каждой из функций найдём порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = i$, $z = -i$, $z = ½$, $z = -½$:

$g(1/2) = 0$, $g(-1/2) = 0$, $g(i) \neq 0$, $g(-i) \neq 0$;

$g'(z) = -\pi \sin \pi z$, $g'(1/2) \neq 0$, $g'(-1/2) \neq 0$;

$h(1/2) = 0$, $h(-1/2) = 0$, $h(i) = 0$, $h(-i) = 0$;

$h'(z) = 16z^3 + 6z$;

$h'(1/2) \neq 0$, $h'(-1/2) \neq 0$, $h'(i) \neq 0$, $h'(-i) \neq 0$.

При $z = ½$ и $z = -½$ порядок ненулевой производной для функции, стоящей в знаменателе, равен порядку ненулевой производной для функции, стоящей в числителе. Таким образом, можно сделать вывод, что $z = ½$ и $z = -½$ являются устранимыми особыми точками. Так как порядок производной, не обращающейся в ноль при $z = i$ и $z = -i$ выше для функции, находящейся в знаменателе, то точки $z = i$ и $z = -i$ являются полюсами функции. Порядок этих полюсов находится, как разница между порядками производных, не обращающихся в ноль. В данном случае, это $1 – 0 = 1$.

Ответ: Точки $z = ½$ и $z = -½$ являются устранимыми особыми точками. Точки $z = i$ и $z = -i$ являются полюсами 1-го порядка.

Задача 13 (см п.1.7. и 1.8.)

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cos z}\, dz$$

Решение:

Найдем особые точки функции f(z):

$$z = 0$$

$$z = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

В рассматриваемую область попадают точки $z=0, z=\frac{\pi}{2}, z=-\frac{\pi}{2}$. Точка $z_1=0$ является простым нулем.

Найдем вычет в этой точке:

$$res_{z_1} f(z)=\lim_{z\to 0}\left[\frac{f(z)}{z-0}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2 z}{z^2\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z^2\cos z}=1$$

Точка $z_2=\frac{\pi}{2}$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$res_{z_2} f(z)=\lim_{z\to \pi/2}\left[f(z)\left(z-\pi/2\right)\right]=\lim_{z\to \pi/2}\frac{\left(z-\pi/2\right)\sin^2 z}{z\cos z}=\left\{\begin{matrix} t=z-\pi/2 \\ z=t+\pi/2 \end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\sin^2(t+\frac{\pi}{2})}{(t+\frac{\pi}{2})\cos(t+\frac{\pi}{2})}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2 t}{-(t+\frac{\pi}{2})\sin t}=\lim_{z\to 0}\frac{t\cos^2 t}{-(t+\frac{\pi}{2})t}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 t}{-(t+\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

Точка $z_3=-\frac{\pi}{2}$ является простым полюсом. Найдем вычет в этой точке:

$$res_{z_3} f(z)=\lim_{z\to -\pi/2}\left[f(z)\left(z+\pi/2\right)\right]=\lim_{z\to -\pi/2}\frac{\left(z+\pi/2\right)\sin^2 z}{z\cos z}=$$

$$=\left\{\begin{matrix} t=z+\pi/2 \\ z=t-\pi/2\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{t\sin^2(t-\frac{\pi}{2})}{(t-\frac{\pi}{2})\cos(t-\frac{\pi}{2})}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2 t}{(t-\frac{\pi}{2})\sin t}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{t\cos^2 t}{(t-\frac{\pi}{2})t}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 t}{(t-\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

Отсюда следующий результат:

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz=2\pi i\sum_{i=1} res_z f(z)=2\pi\left(1-\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right)=2i(\pi-4)$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz=2i(\pi-4)$

Задача 14 (См. п. 1.7 и 1.8)

Вычислить интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2}\underbrace{z^3\cos\frac{2i}{z}}_{f(z)}dz$$

Решение:

У этой функции одна особая точка: z = 0. Используем разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки (т.е. по степеням z), чтобы определить её тип:

$$z^3\cos\frac{2i}{z}=$$

$$=z^3\left(1+\frac{4}{2!z^2}+\frac{16}{4!z^4}+\frac{64}{6!z^6}+\dots\right)=z^3+\frac{4z}{2!}+\frac{16}{4!z}+\frac{64}{6!z^3}+\dots$$

Главная часть получившегося ряда содержит бесконечное число членов, из чего следует, что это – существенная особая точка. Точка вычет в этой точке находится как коэффициент при минус первой степени в лорановском разложении f (z) в окрестностях точки z = 0:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = C_{-1} = \frac{16}{4!} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_n} f(z).$$

В данном случае:

$$\oint_{|z|=2} z^5 \sin\frac{i}{z^2}dz = 2\pi i \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi i}{3}.$$

Ответ: $\oint_{|z|=2} z^2 \sin\frac{i}{z^2}dz = \frac{4\pi i}{3}.$

Задача 15(см. п 1.7 и 1.8)

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=0,2} \underbrace{\frac{ch2z - \cos 2z}{z^2 \sin 8z}}_{f(z)}dz$$

Решение: Особые точки этой функции $z = \frac{\pi k}{8}$. Однако в контур попадает только $z = 0$. Определим тип этой особой точки:

$$f(z) = \frac{ch2z - \cos 2z}{z^2 \sin 8z} = \frac{g(z)}{h(z)}; g(z) = ch2z - \cos 2z;$$

$$h(z) = z^2 \sin 8z$$

Определим порядки производных, ненулевых при $z = 0$.

Мы уже неоднократно использовали этот прием, поэтому на сей раз опустим детальное и громоздкое вычисление производных и скажем только, что в результате этих действий мы определили, что $z=0$ представляет собой простой полюс.

Тогда можно рассчитать вычет в этой точке следующим образом:

$$\underset{z\to 0}{res} f(z)=\lim_{z\to 0}\left[f(z)z\right]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{ch2z-\cos 2z}{z\sin 8z}\right)=\begin{Bmatrix}\textit{используем}\\ \textit{правило}\\ \textit{Лопиталя}\end{Bmatrix}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{2sh2z+2\sin 2z}{\sin 8z+8z\cos 8z}\right)=\begin{Bmatrix}\textit{используем}\\ \textit{правило}\\ \textit{Лопиталя}\end{Bmatrix}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{4ch2z+4\cos 2z}{16\cos 8z-64z\sin 8z}\right)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=0,2}\frac{ch2z-\cos 2z}{z^2\sin 8z}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{z_0}{res} f(z)=2\pi i\frac{1}{2}=\pi i$$

Ответ: $\displaystyle\oint_{|z|=0,2}\frac{ch2z-\cos 2z}{z^2\sin 8z}dz=\pi i$

Задача 16 (см. п.1.7 и 1.8)

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z-3|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-3}+\frac{2ch\frac{\pi iz}{2}}{(z-2)^2 z}\right)dz$$

Разобьём этот интеграл на сумму двух интегралов:

$$\oint\limits_{|z-3|=2} \underbrace{z\cos\frac{1}{z-3}}_{f_1(z)} dz + \oint\limits_{|z-3|=2} \underbrace{\frac{2ch\frac{\pi i z}{2}}{(z-2)^2 z}}_{f_2(z)} dz$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\oint\limits_{|z-3|=2} \underbrace{z\cos\frac{1}{z-3}}_{f_1(z)} dz$$

Перейдем к новой переменной:

$$\left.\begin{cases} t = z-3 \\ z = t+3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad z\cos\frac{1}{z-3} = (t+3)\cos\frac{1}{t}$$

Единственной особой точкой этой функции является $t=0$. Чтобы определить её тип, разложим функцию в ряд Лорана:

$$(t-3)\cos\frac{1}{t} = (t+3)(1-\frac{1}{2!t^2}+\frac{1}{4!t^4+}-\frac{1}{6!t^6}+\frac{1}{8!t^8}\ldots) =$$

$$= (t-\frac{1}{2!t}+\frac{1}{4!t^3}-\frac{1}{6!t^5}+\ldots)+(3-\frac{3}{2!t^2}+\frac{3}{4!t^4}-\frac{3}{6!t^6}+\ldots) =$$

$$= t+3-\frac{1}{2!t}-\frac{3}{2!t^2}+\frac{1}{4!t^3}-\frac{3}{4!t^4}-\frac{1}{6!t^5}-\frac{3}{6!t^6}+\ldots$$

Отчетливо видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество членов, из чего следует, что $t=0$ является существенной особой точкой. Тогда вычет в ней находится следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{t=0}\left[(t+3)\cos\frac{1}{t}\right] = C_{-1} = -\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$\oint\limits_{|z-3|=2} z\cos\frac{1}{z-3}dz = \oint\limits_{|t|=2}(t+3)\cos\frac{1}{t}dz =$$

$$=2\pi i \underset{t=0}{res}[(t+3)\cos\frac{1}{t}] = 2\pi i \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

Используем вычеты для взятия второго интеграла:

$$\oint\limits_{|z-3|=2} \frac{4ch\frac{\pi iz}{2}}{(z-2)^2 z} dz$$

У подынтегральной функции есть две особые точки: $z=0$ и $z=2$. При этом точка $z=0$ не охвачена контуром, по которому проходит интегрирование, и не рассматривается. Точка $z=2$ является полюсом второго порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\underset{z\to 2}{res} f_2(z) = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-2)^2 \times 4ch\frac{\pi iz}{2}}{(z-2)^2 z}\right] = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left[\frac{4ch\frac{\pi z}{2}}{z}\right] =$$

$$=\lim_{z\to 2}\left[\frac{-2\pi}{z}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) - \frac{4}{z^2}\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right] = 1$$

Таким образам:

$$\oint\limits_{|z-3|=2} \frac{4ch\frac{\pi iz}{2}}{(z-2)^2 z} dz = 2\pi i \times \underset{z=2}{res} f_2(z) = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$$

Найдем исходный интеграл как сумму интегралов, составляющих его:

$$\oint\limits_{|z-3|=2} \left(z\cos\frac{1}{z-3} + \frac{4ch\frac{\pi iz}{2}}{(z-2)^2 z}\right)dz = \oint\limits_{|z-3|=2} z\cos\frac{1}{z-3}dz +$$

$$+\oint\limits_{|z-3|=2} \frac{4ch\frac{\pi iz}{2}}{(z-2)^2 z} dz = -\pi i + 2\pi i = \pi i$$

Ответ: $\oint\limits_{|z-3|=2} \left(z\cos\frac{1}{z-3} + \frac{4ch\frac{\pi iz}{2}}{(z-2)^2 z}\right)dz = \pi i$

Задача 17 (см.п.1,7; 1,8; 1,11)

Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t + 3}$$

Решение:

Интеграл такого вида может быть преобразован в контурный, используя следующие выражения:

$$z = e^{n};\ \cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}); \sin t = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}); dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и получим:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t + 3} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz/iz}{\frac{\sqrt{2}}{i}(z - \frac{1}{z}) + 3} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{2}(z^2 - 1) + 3iz} =$$

$$= \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{2}(z + i\sqrt{2})(z + i/\sqrt{2})}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки: $z = -i\sqrt{2}; z = -i/\sqrt{2};$ Точка $-i\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования. Точка $-i/\sqrt{2}$ является простыми полюсом. Вычислим в этой точке вычет:

$$\underset{z=-i/\sqrt{2}}{res} f(z) = \lim_{z\to -i/\sqrt{2}}[f(z)(z+i/\sqrt{2})] = \lim_{z=-i/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2(z+i\sqrt{2})}} =$$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}(-i/\sqrt{2}+i\sqrt{2})} = -i$. По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{2}(z+i\sqrt{2})(z+i/\sqrt{2})} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \underset{z_0}{res} f(z) = 2\pi i(-1) = 2\pi$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t+3} = 2\pi$

Задача 18 (см.п. 1,7; 1,8; 1,11)

Вычислить интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos t)^2}$$

Решение:

Интеграл такого вида может быть преобразован в интеграл по контуру, используя следующие выражения:

$$z = e^n; \cos t = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}); \sin t = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}); dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z)dz$$

Воспользуемся этими данными и перейдем к интегралу по контуру :

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos t)^2}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2}=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i(2\sqrt{3}z+\sqrt{2}(z^2+1))^2}=$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{4zdz}{i[\sqrt{3}(z-\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}})(z+\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}})]^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки: $z=(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}; z=(-1-\sqrt{3}/\sqrt{2};$ Точка $z=(-1-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ не попадает в область, ограниченную контуром интегрирования. Точка $z=(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ является полюсом второго порядка. Вычислим в этой точке вычет:

$$\mathop{res}_{z=(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}} f(z)=\lim_{z\to(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}}\frac{d}{dz}[f(z)(z-(1-\sqrt{3})/\sqrt{2})^2]=$$

$$=\lim_{z\to(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}}\frac{d}{dz}\frac{4z}{i[\sqrt{2}(z+(1+\sqrt{3})/\sqrt{2})]^2}=$$

$$=\frac{2}{i}\lim_{z\to(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z+(1-\sqrt{3})/\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{2}{i}\lim_{z\to(1-\sqrt{3})/\sqrt{2}}[-2\frac{z\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}{(z\sqrt{2}+1+\sqrt{3})^2}]=-\frac{4}{i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3})^2}=$$

$$=-\frac{4}{i}\cdot\frac{-2\sqrt{3}}{2^2}=\frac{\sqrt{3}}{i}$$

По основной теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{z=1}\frac{4zdz}{i[\sqrt{3}(z-\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}})(z+\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}})]^2}=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathop{res}_{z_0} f(z)=2\pi i\cdot(\frac{\sqrt{3}}{i})=2\sqrt{3}\pi$$

Ответ: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos t)^2}=2\sqrt{3}\pi$.

Задача 19 (см.п. 1,7; 1,8; 1,9)

Вычислить интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx$$

Решение:

Известно, что если функция рациональная, а ее числитель и знаменатель представляют собой многочлены, причем степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то можно применить следующую формулу:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{m} \underset{z_m}{res} R(z)$. Сумма вычетов берется по всем полюсам полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$

Преобразуем исходный материал:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2+2}{(z^2+3)(z^2+4)}dz$$

Особые точки:

$z = 2i \quad (\operatorname{Im} z > 0); \qquad z = -2i \quad (\operatorname{Im} z < 0);$

$z = i\sqrt{3} \quad (\operatorname{Im} z > 0); \qquad z = -i\sqrt{3} \quad (\operatorname{Im} z < 0);$

Точки $z = 2i$ и $z = i\sqrt{3}$ являются простыми полюсами и вычеты в них вычисляются следующим образом:

$$\underset{z=2i}{res} f(z) = \lim_{z\to 2i}[f(z)(z-2i)] = \lim_{z\to 2i} \frac{z^2+2}{(z+2i)(z^2+3)} = -\frac{i}{2}$$

$$\underset{z=i\sqrt{3}}{res} f(z) = \lim_{z\to i\sqrt{3}}[f(z)(z-i\sqrt{3})] = \lim_{z\to i\sqrt{3}} \frac{x^2+5}{(z+i\sqrt{3})(z^2+4)} = \frac{i}{2\sqrt{3}} \text{ и}$$

используем приведенную в начале задачи формулу:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx = 2\pi i\left(\frac{i}{2\sqrt{3}} - \frac{i}{2}\right) = 2\pi i \frac{i(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1).$$

Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)$

Задача 20 (см.п. 1,7; 1,8; 1,10)

Вычислить интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$$

Решение:

Для вычисления интегралов такого вида применяется специальная формула:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos\lambda x dx=\mathrm{Re}\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_0}{rez}R(z)e^{i\lambda z}\},\lambda>0$$

Исходная функция полностью удовлетворяет условиям применения данной формулы.

Найдем z_m:

$$\left(x^2+1\right)^2=0\Rightarrow\ z_{1.2}=\pm i$$

Сумма вычетов берется по верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Из этого следует: $z_m=\{i\}$

Эта особая точка является полюсом второго порядка. Найдем в ней вычет для каждой из функций:

1) $$\underset{z=i}{rez}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}e^{2iz}]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[\frac{1}{(z+i)^2}e^{2iz}]=$$
$$=\frac{-4+2iz}{(z+1)^3}e^{2iz}=-\frac{3}{4}ie^{-2}$$

2) $$\underset{z=i}{rez}\,R(z)e^{i\lambda z}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}e^{iz}]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[\frac{1}{(z+i)^2}e^{iz}]=$$
$$=\frac{-3+iz}{(z+1)^3}e^{iz}=-\frac{1}{2}ie^{-1}$$

Используем записанную ранее формулу и найдем интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx=\mathrm{Re}\{2\pi i\sum_{m}\underset{z_m}{rez}R(z)e^{i\lambda z}\}=\pi(\frac{3}{2}e^{-2}-e^{-1})$$

Ответ: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx=\pi\left(\frac{3}{2}e^{-2}-e^{-1}\right)$

Задача 21

Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, заданной графически (рис. 5).

Решение: Найдем аналитическое выражение для $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<t_1\\ A, & t_1<t<t_2\\ B, & t_2<t<t_3\\ C, & t>t_3\end{cases}\quad \text{или}\quad f(t)=\begin{cases}0, & t<t_1\\ A\eta(t-t_1), & t_1<t<t_2\\ B\eta(t-t_2), & t_2<t<t_3\\ C\eta(t-t_3), & t>t_3\end{cases}.$$

Для всех $t\geq 0$ получим

$$f(t)=A\eta(t-t_1)-A\eta(t-t_2)+B\eta(t-t_2)-B\eta(t-t_3)+C\eta(t-t_3)=$$

$$=A\eta(t-t_1)-(A-B)\eta(t-t_2)+(C-B)\eta(t-t_3).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания, находим искомое изображение:

$$F(p)=\frac{A}{p}e^{-t_1p}-\frac{A-B}{p}e^{-t_2p}+\frac{C-B}{p}e^{-t_3p}.$$

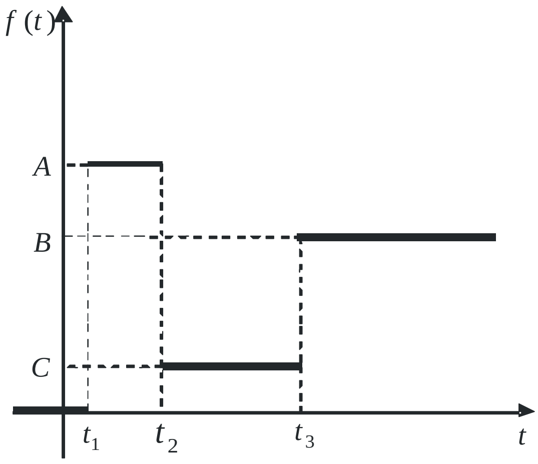


Рис. 5

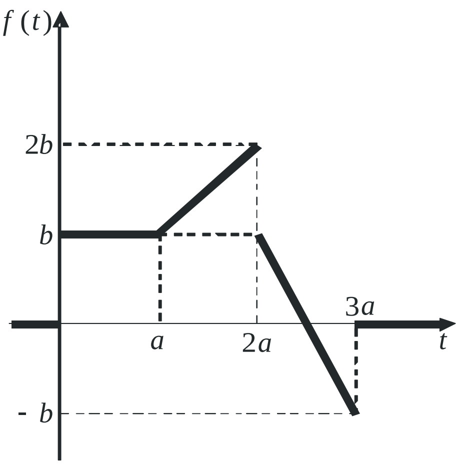


Рис. 6

Ответ: $F(p)=\dfrac{A}{p}e^{-t_1p}-\dfrac{A-B}{p}e^{-t_2p}+\dfrac{C-B}{p}e^{-t_3p}.$

Задача 22

Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, заданной графически (рис. 6).

Решение: Найдем аналитическое выражение для

$$f(t): f(t)=\begin{cases} b\cdot h(t), & 0<t<a \\ \dfrac{b}{a}t\cdot h(t-a), & a<t<2a \\ -2\dfrac{b}{a}(t-2{,}5a)\cdot h(t-2a), & 2a<t<3a \\ 0, & t>3a \end{cases}$$

Для всех $t \geq 0$ получим

$$f(t)=bh(t)-bh(t-a)+\frac{b}{a}th(t-a)-\frac{b}{a}th(t-2a)-$$

$$-2\frac{b}{a}(t-2{,}5a)h(t-2a)+2\frac{b}{a}(t-2{,}5a)h(t-3a)=$$

$$=bh(t)+\frac{b}{a}(t-a)h(t-a)-\frac{b}{a}(3t-5a)h(t-2a)+$$

$$+2\frac{b}{a}(t-2{,}5a)h(t-3a)=bh(t)+\frac{b}{a}(t-a)h(t-a)-$$

$$-3\frac{b}{a}(t-2a)h(t-2a)-bh(t-2a)+$$

$$+2\frac{b}{a}(t-3a)h(t-3a)+bh(t-3a).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания , находим искомое изображение:

$$F(p)=\frac{b}{p}+\frac{b}{ap^2}e^{-ap}-\frac{3b}{ap^2}e^{-2ap}-\frac{b}{p}e^{-2ap}+\frac{2b}{ap^2}e^{-3ap}+\frac{b}{p}e^{-3ap}=$$

$$=\frac{b}{p}+\frac{b}{ap^2}e^{-ap}-\left(1+\frac{3}{ap}\right)\frac{b}{p}e^{-2ap}+\left(1+\frac{2}{ap}\right)\frac{b}{p}e^{-3ap}.$$

Ответ:

$$F(p)=\frac{b}{p}+\frac{b}{ap^2}e^{-ap}-\left(1+\frac{3}{ap}\right)\frac{b}{p}e^{-2ap}+\left(1+\frac{2}{ap}\right)\frac{b}{p}e^{-3ap}.$$

Задача 23

Найти изображение $F(p)$ периодической функции $f(t)$, заданной графически (рис. 7).

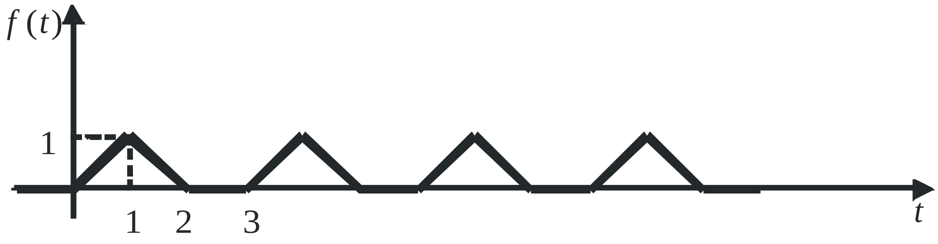


Рис. 7

Решение: Из рисунка видно, что период функции $T=3$. Найдем аналитическое выражение для $f(t)$ на отрезке $[0,T]$:

$$f(t)=\begin{cases} t, & 0<t<1 \\ 2-t, & 1<t<2 \\ 0, & 2<t<3 \end{cases}$$

Для нахождения изображения периодической функции воспользуемся формулой

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pT}f(t)dt.$$

Для данной функции получим

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-3p}}\left[\int_0^1 te^{-pt}dt+\int_1^2(2-t)e^{-pt}dt+\int_2^3 0\cdot e^{-pt}dt\right].$$

Третий интеграл равен нулю, а первые два интегрируем по частям и получаем

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-3p}}\left[-\frac{te^{-pt}}{p}\Bigg|_0^1+\int_0^1\frac{e^{-pt}}{p}dt--\frac{(2-t)e^{-pt}}{p}\Bigg|_1^2-\int_1^2\frac{e^{-pt}}{p}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-3p}}\times\frac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{p^2}=\frac{1-e^{-p}}{p^2\left(1+e^{-p}+e^{-2p}\right)}.$$

Ответ: $F(p)=\dfrac{1}{1-e^{-3p}}\times\dfrac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{p^2}=\dfrac{1-e^{-p}}{p^2\left(1+e^{-p}+e^{-2p}\right)}.$

Задача 24. (См. п. 1.12 и 1.15)

На материальную точку массы m действует сила сопротивления R = kv, пропорциональная скорости. Какое расстояние пройдёт точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость v_0 ? k = m, v_0 = 7 м/с.

Решение: Исходя из второго закона Ньютона: am=-kv, $\ddot{x}m+kx=0$. Начальные условия: $x(0)=v_0=7$, x (0) = 0. Подставим значения k: $\ddot{x}m+mx=0$. Сократим все выражения на m: $\ddot{x}+x=0$

Перейдём к изображениям функций:

p^2 X (p) – px (0) – x (0) –pX(p) – x (0) = 0,

p (p+1)X (p) – 7 = 0, p (p+1)X (p) = 7

X (p) = $\dfrac{7}{p(p+1)}=\dfrac{7}{p}-\dfrac{7}{p+1}$

По такому изображению легко найти оригинал:

x (t)=7 – 7 e^{-t}.

Ответ: x (t)= 7 – 7 e^{-t}.

Задача 25 (см. п. 1.12, 2.1-2.5)

Найти решение задачи Коши

$$y''+4y'+4y=\frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2},\ y(0)=0;\ y'(0)=0$$

Решение: Вначале решим вспомогательную задачу

$$y''+4y'+4y=1;$$

$$y_1(0)=0; y'_1(0)=0$$

Если $y_1(t)$ соответствует изображение $Y_1(P)$, то переходят от оригиналов функций к их изображениям, получим

$$(p^2+4p+4)\times Y_1(p)=\frac{1}{p}; Y_1(p)=\frac{1}{p(p^2+4p+4)}=\frac{1}{p(p+2)^2}$$

Разложим дробь на простые дроби, получим

$$Y_1(p)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(p+2)^2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{p+2}$$

По таблице оригиналов .

Найдем $y_1(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t\times e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$

Используя формулу Дюамеля, получим искомое решение

$$y(t)=\int_0^t \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t\times e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}\right)'_t dt=\frac{1}{4}e^{-2t}(2t-\ln(1+2t))$$

Ответ:

$$y(t)=\frac{1}{4}e^{-2t}(2t-\ln(1+2t))$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам самостоятельно изучать теоретические вопросы вышеуказанных тем курса математики, а также предоставят студентам широкие возможности для самостоятельного изучения и практической части .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Краснов М.А. / Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.А.Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко М., 1981. С. 147-204.
2. Данко Д.Е. / Высшая математика в упражнениях и задачах / Д.Е. Данко, А.Г.Попов, Т.Я. Кожевникова М., 1986. Т.2. С.305-316.
3. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики / В.Ф.Чудесенко - М., 1983. С.33-37.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы
по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400
«Управление и информатика в технических системах», 140400
«Электропривод и автоматика промышленных установок
и технологических комплексов», «Электромеханика», 110800
«Электрификация и автоматизация сельского
хозяйства» очной формы обучения

Составители: Катрахова Алла Анатольевна,
Васильев Евгений Михайлович
Купцов Валерий Семенович,
Купцова Екатерина Валериевна

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.09. 2013.
Уч.-изд. л. 3,0. «С»

ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14