

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**"ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"**

## **РАСЧЕТ БАЛКИ НА ЖЕСТКОСТЬ**

Методические указания  
к выполнению контрольных  
и расчетно–графических работ по курсу  
"Сопротивление материалов"  
для студентов всех специальностей  
очной и заочной форм обучения

Воронеж 2013

**УДК 624**  
**ББК 30.121**

*Составители*

*А.В. Резунов, А.Н. Синозерский*

Расчет балки на жесткость: метод. указания к выполнению контрольных и расчетно–графических работ по курсу "Сопротивление материалов" для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения / Воронежский ГАСУ; сост.: А.В. Резунов, А.Н. Синозерский. – Воронеж, 2013. – 27 с.

Даются указания по расчету на жесткость простых статически определимых балок. Приводятся примеры, включающие определение прогибов и углов поворота сечений балок с консолью и без, проверку выполнения условия жесткости, подбор сечений балок из хрупкого и пластичного материалов из условия жесткости. Изложено решение этих же задач с помощью ПЭВМ.

Предназначаются для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения.

Ил. 9. Библиогр.: 6 назв.

**УДК 624**  
**ББК 30.121**

*Печатается по решению научно-методического совета  
Воронежского ГАСУ*

**Рецензент – А.Н. Аверин**, канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики Воронежского ГАСУ

## ВВЕДЕНИЕ

Для того, чтобы судить о работе балки, знания одних напряжений в ее сечениях недостаточно. Имеющие запас прочности балки могут оказаться непригодными к эксплуатации из-за недостаточной жесткости.

Рассмотрим деформирование статически определимых балок постоянного сечения, имеющих вертикальную плоскость симметрии и находящихся под действием вертикальных нагрузок, лежащих в этой плоскости [1,2,3]. В этом случае балка испытывает плоский поперечный изгиб.

Ось  $x$  прямоугольной декартовой системы координат направим горизонтально вправо по оси балки, ось  $y$  – вертикально вниз, ось  $z$  – по главной центральной (горизонтальной) оси инерции поперечного сечения.

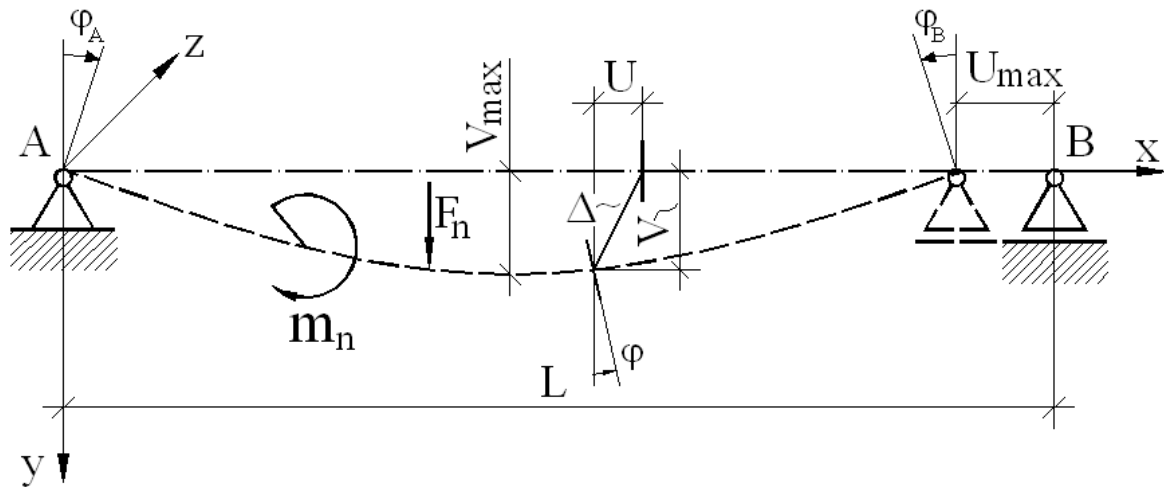


Рис. 1. Перемещения и углы поворота поперечных сечений балки

В результате изгиба ось балки, оставаясь в вертикальной плоскости, становится криволинейной (рис. 1). Поперечные сечения как жесткое целое поворачиваются на некоторый угол  $\varphi$  по отношению к своему первоначальному положению и получают линейные перемещения  $\Delta$ . Составляющая перемещения центра тяжести сечения  $V$  по направлению, перпендикулярному к оси недеформированной балки, называется прогибом. Угол  $\varphi$  называют углом поворота сечения.

Для оценки жесткости балки необходимо уметь находить прогибы  $V(x)$  и углы поворота сечений  $\varphi(x)$  от действия нормативных нагрузок. Проверка жесткости сводится к требованию, по которому наибольший прогиб  $V_{max}$  не должен превышать допустимое значение  $[f]$ , составляющее  $\frac{1}{1000} \div \frac{1}{200}$  часть от длины пролета  $L$  в зависимости от назначения сооружения. Таким образом, условие жесткости имеет вид

$$V_{max} = \max |V(x)| \leq [f]. \quad (1)$$

Отсюда видно, что прогибы обычно малы по сравнению с пролетом балки. Это позволяет находить углы поворота сечений с помощью выражения

$$\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \frac{dV}{dx} \equiv V' \quad (2)$$

и пренебречь горизонтальными перемещениями  $U$  по сравнению с прогибами  $V$  (на рис. 1 горизонтальные перемещения показаны в увеличенном масштабе). Не учитывают и влияние поперечной силы  $Q(x)$  на прогибы  $V$  и углы поворота сечений  $V'$  для балок, высота которых  $h$  меньше  $1/10$  длины пролета  $L$ .

Величины  $V$  и  $V'$  находят, интегрируя приближенное дифференциальное уравнение оси изогнутой балки /1,2,3/

$$E \cdot J \cdot V''(x) = -M(x), \quad (3)$$

где  $E$  – модуль упругости материала;  $J$  – главный момент инерции поперечного сечения балки относительно оси  $z$ ;  $M(x)$  – изгибающий момент от нормативной нагрузки в соответствии с правилом знаков, изложенным в /4/ (для левой отделенной части балки  $M(x) > 0$ , если стремится вращать рассматриваемую часть против хода часовой стрелки, для правой –  $M(x) > 0$  при вращении по ходу часовой стрелки);  $V'' \equiv \frac{d^2V}{dx^2}$ .

## 1. ЗАДАНИЕ

Геометрическая схема балки, нормативные нагрузки, поперечные сечения двутавровой стальной и круглой деревянной балок, модули упругости стали и древесины остаются теми же, что использовались при расчете балки на прочность /4/.

### Требуется:

- изобразить схему балки с действующими на нее нормативными нагрузками;
- на каждом из участков загрузки составить дифференциальное уравнение оси изогнутой балки, проинтегрировать его и найти значения постоянных интегрирования;
- вычислить прогибы стальной и деревянной балок в середине пролета и на концах консолей, проверить выполнение условия жесткости;
- определить углы поворота сечений стальной балки над опорами и на концах консолей;
- выполнить поверочный расчет прогибов стальной балки на ПЭВМ (по желанию студента);
- по полученным данным построить ось изогнутой стальной балки.

## 2. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

### 2.1. Исходные данные

Выписать нормативные нагрузки и найденные ранее /4/ опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$  от расчетной нагрузки, моменты инерции сечений стальной и деревянной балок, модули упругости материалов. Из соотношений  $R_{An} = R_A / \gamma_f$  и  $R_{Bn} = R_B / \gamma_f$ , где  $\gamma_f$  - коэффициент надежности по нагрузке, вычислить опорные реакции от нормативной нагрузки. Используя выражения  $[f] = \frac{L}{200}$  и  $[f_k] = \frac{L_k}{200}$  ( $L$  - расстояние между опорами,  $L_k$  - длина консоли), найти допускаемые прогибы в середине пролета и на конце консоли.

В масштабе 1:50 или 1:100 вычертить геометрическую схему балки с указанием линейных размеров и действующих на балку нормативных нагрузок, включая опорные реакции.

### 2.2. Решение дифференциальных уравнений оси изогнутой балки

Задаться общим для всех участков загрузки началом координат  $x$ ,  $V$  на левом или правом конце балки. На каждом участке составить дифференциальное уравнение (3) оси изогнутой балки

$$E \cdot J \cdot V_i''(x) = -M_i(x), \quad (4)$$

где  $i$  - номер участка,  $E \cdot J$  - изгибная жесткость балки. Интегрируя дифференциальное уравнение (4), получить уравнение тангенсов углов наклона касательной к оси изогнутой балки (тангенсов углов поворота сечений)

$$E \cdot J \cdot V_i'(x) = -\int M_i(x) \cdot dx + C_i, \quad (5)$$

а, интегрируя второй раз, - уравнение прогибов

$$E \cdot J \cdot V_i(x) = -\int \left( \int M_i(x) \cdot dx \right) dx + C_i \cdot x + D_i. \quad (6)$$

Здесь  $C_i$  и  $D_i$  - постоянные интегрирования.

При постоянной жесткости  $E \cdot J$  балки для обеспечения равенства постоянных интегрирования на всех участках загрузки  $C_1 = C_2 = \dots = C_i = \dots = C$  и  $D_1 = D_2 = \dots = D_i = \dots = D$  необходимо руководствоваться следующими правилами /6/:

1. При составлении выражения для изгибающего момента  $M_i(x)$  всегда рассматривать часть балки, расположенную между началом координат и сечением.

2. Распределенную нагрузку, которая заканчивается на границе участков загрузки, продолжать до конца балки с добавлением «компенсирующей»

нагрузки противоположного направления («продленную» и «компенсирующие» нагрузки показывать на чертежах штриховыми линиями).

3. Момент пары сил, приложенной к балке на границе участка с координатой  $x = x_i$ , при включении в выражение для изгибающего момента умножать на множитель  $(x - x_i)^0$ , равный единице.

4. Выражения, содержащие множитель вида  $(x - x_i)^n$ , интегрировать, не раскрывая скобок.

Составив и проинтегрировав в соответствии с этими правилами дифференциальные уравнения оси изогнутой балки на каждом участке, следует проверить равенство постоянных интегрирования, используя условия гладкого и непрерывного сопряжения оси балки на границах между участками ( $x = x_i$ )

$$V'_{i-1}(x_i) = V'_i(x_i), \quad (7)$$

$$V_{i-1}(x_i) = V_i(x_i). \quad (8)$$

Найти значения постоянных интегрирования  $C$  и  $D$  из условий равенства нулю прогибов в опорных сечениях для шарнирно опертой балки или прогиба и угла поворота сечения в защемлении для балки с заделкой.

### 2.3. Определение геометрических характеристик деформаций балок

#### 2.3.1. Стальная двутавровая балка

Из выражений (6) вычислить прогиб балки в середине пролета  $V(L/2)$  и прогиб свободного конца  $V(L_k)$ , если балка с консолью.

Проверить выполнение условий жесткости

$$|V(L/2)| \leq [f] = L/200, \quad (9)$$

$$|V(L_k)| \leq [f_k] = L_k/200. \quad (10)$$

Используя соотношения (5), найти углы поворота сечений над опорами  $\varphi_A \approx \text{tg}\varphi_A = V'(x_A)$ ,  $\varphi_B \approx \text{tg}\varphi_B = V'(x_B)$  и на конце консоли  $\varphi_k \approx \text{tg}\varphi_k = V'(x_k)$  для балки с консолью.

Положительному значению  $V(x)$  соответствует перемещение, направленное вниз; положительному углу  $\varphi$  – поворот сечения по ходу часовой стрелки, если ось  $x$  направлена вправо, или против хода часовой стрелки, если ось  $x$  направлена влево.

#### 2.3.2. Деревянная балка

Определить прогибы характерных сечений с учетом, что они обратно пропорциональны изгибной жесткости балки,

$$V_d(L/2) = V_c(L/2) \cdot \frac{E_c J_c}{E_d J_d}, \quad (11)$$

$$V_d(L_k) = V_c(L_k) \cdot \frac{E_c J_c}{E_d J_d}, \quad (12)$$

где индекс 'c' соответствует стальной балке, а индекс 'd' – деревянной.

Проверить выполнение условий жесткости (9), (10).

#### 2.4. Поверочный расчет прогибов стальной балки на ПЭВМ

По желанию студент может в вычислительном центре ВГАСУ произвести поверочный расчет прогибов двутавровой балки на ПЭВМ по программе "БАЛКА" и представить протокол расчета. Инструкция по работе с программой приводится ниже в п. 3.

#### 2.5. Построение оси изогнутой стальной балки

Используя найденные значения прогибов и углов поворота в характерных сечениях и руководствуясь изложенными выше правилами знаков, изобразить ось изогнутой двутавровой балки.

### 3. ИНСТРУКЦИЯ ПО РАБОТЕ С ПРОГРАММОЙ "БАЛКА"

Программа "БАЛКА", разработанная в виде Delphi приложения, предназначена для расчета на прочность и жесткость статически определимой балки постоянной жесткости, находящейся под действием сосредоточенных и линейно распределенных нагрузок.

Ввод исходных данных выполняется путем редактирования в окне приложения файла шаблона в соответствии с содержащимися в нем комментариями, либо из заранее подготовленного файла. Начало отсчета выбрано на левом конце балки, ось  $x$  направлена вправо. Сосредоточенные силы и распределенные нагрузки считаются положительными, если направлены вниз. Момент пары сил считается положительным, если направлен по часовой стрелке. Вводить следует значения нормативных нагрузок.

Исходные данные расположены в следующем порядке:

- фамилия студента, инициалы, номер группы или специальность;
- тип балки: 0 – шарнирно опертая, 1 – с заделкой;
- длина балки;
- для шарнирно опертой балки координаты опор;
- для балки с заделкой указание на то, левый или правый конец зашпелен;
- коэффициент надежности по нагрузке (используется при расчете балки на прочность);
- число сосредоточенных сил и для каждой силы величина и координата точки приложения;
- число пар сил и для каждой пары сил величина и координата сечения, в котором она действует;

- число распределенных нагрузок и для каждой из них интенсивность нагрузки в начале и в конце участка, на котором она действует, и координаты концов этого участка.
- число сечений для вывода результатов.

Вводить исходные данные можно в любой последовательности. При этом доступны стандартные для WINDOWS сочетания клавиш для редактирования текста. Если какой-либо тип нагрузок отсутствует, например, сосредоточенные силы, то следует положить число этих нагрузок равным единице, а величину и координату точки приложения равными нулю (необходимо для правильной работы программы).

В программе "БАЛКА" можно сначала выполнить подбор сечения двутавровой балки (нормативное сопротивление и коэффициент надежности по материалу вводятся по дополнительному запросу). Затем перейти к нахождению прогибов и углов поворота сечений. При этом следует задать значение модуля упругости. Величина момента инерции сечения либо задается, либо используется момент инерции подобранного ранее двутавра. Подбор сечения можно опустить.

Выходная информация выдается на экран монитора и включает в себя:

- исходные данные;
- значения опорных реакций;
- таблицу значений поперечной силы, изгибающего момента, прогибов и углов поворота сечений на множестве равноотстоящих сечений.
- эпюру прогибов с возможностью получить значения прогибов и углов поворота в любом поперечном сечении балки.

Кроме того, в число расчетных сечений включаются те, в которых действуют сосредоточенные нагрузки. При этом искомые величины находятся непосредственно слева и справа от этих сечений. Для расчета балки на действие нелинейной распределенной нагрузки необходимо заменить нелинейную эпюру полигональной. По желанию пользователя выходные данные можно сохранить в файлах и напечатать.

С содержанием данного раздела можно ознакомиться, выбрав соответствующий пункт главного меню программы.

## 4. ПРИМЕР 1. ДВУХОПОРНАЯ БАЛКА С КОНСОЛЬЮ

### 4.1. Исходные данные

Выполнить расчет на жесткость балки, геометрическая схема которой с нормативной нагрузкой представлена на рис. 2, при следующих значениях исходных параметров:

линейные размеры –  $a = 3.9\text{ м}$ ,  $b = 0.9\text{ м}$ ,  $c = 1.2\text{ м}$ ;

нормативные нагрузки –

$$q_{1n} = 15\text{ кН/м}, \quad q_{2n} = 12.5\text{ кН/м}, \quad F_n = 10\text{ кН}, \quad m_n = 5\text{ кН} \cdot \text{м};$$

опорные реакции от нормативной нагрузки –



$R_{An} = R_A / \gamma_f = 43.68 / 1.2 = 36.40 \text{ кН}$ ,  $R_{Bn} = R_B / \gamma_f = 32.52 / 1.2 = 27.10 \text{ кН}$ ;  
 допустимые прогибы – в пролете  $[f] = L / 200 = (a + b) / 200 = 4.8 / 200 = 0.024 \text{ м}$ ,  
 на конце консоли  $[f_k] = L_k / 200 = c / 200 = 1.2 / 200 = 0.006 \text{ м}$ .

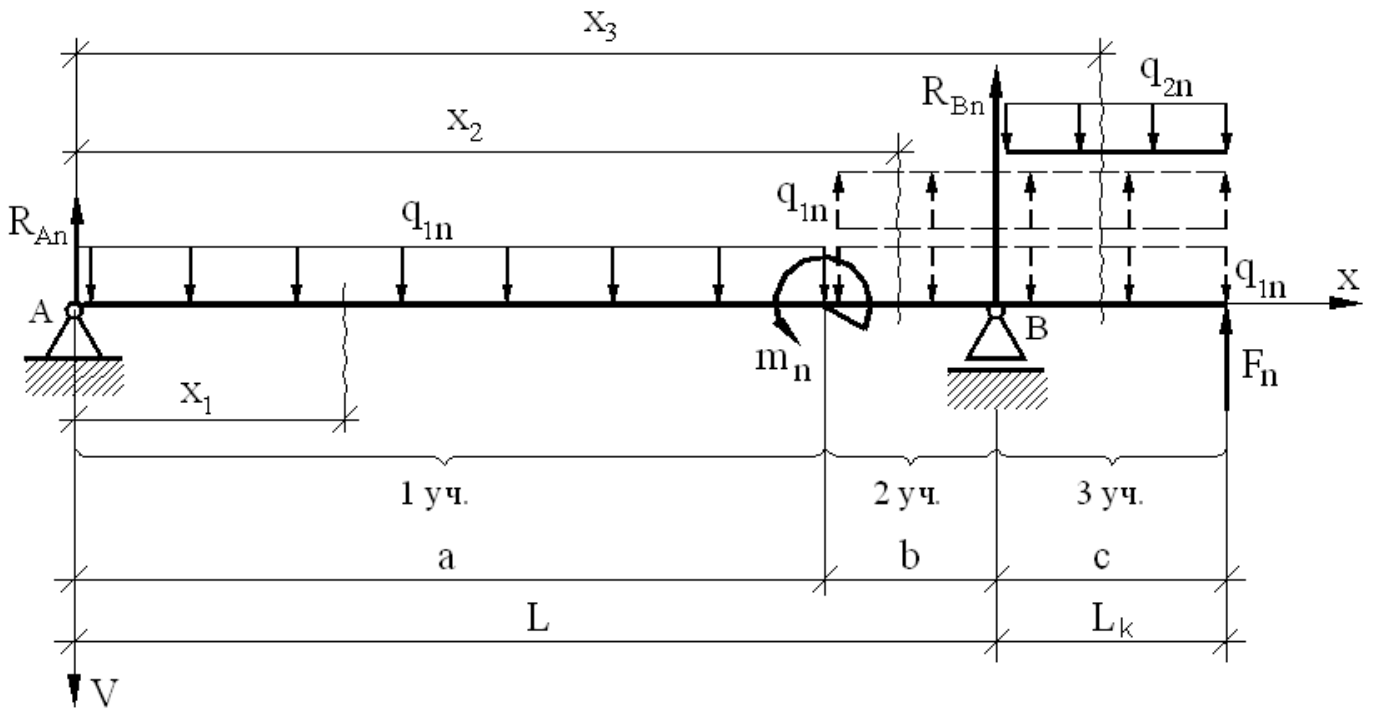


Рис. 2 Расчетная схема балки

Рассмотреть два случая:

- стальная балка из прокатного двутавра № 22 (ГОСТ 8239-89) с моментом инерции  $J = 2.55 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$  и модулем упругости  $E = 200 \text{ ГПа}$ ;
- деревянная балка круглого поперечного сечения с  $J = 6.94 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$  и  $E = 10 \text{ ГПа}$ .

Все данные, кроме допустимых прогибов, взяты из примера в п. 4 методических указаний /4/.

#### 4.2. Составление и решение дифференциальных уравнений оси изогнутой балки

Совместим начало координат осей  $VOx$  с левым концом балки и разобьем ее на три участка 1, 2 и 3 (см. рис. 2).

Первый участок ( $0 \leq x \leq a = 3.9 \text{ м}$ ).

Дифференциальное уравнение оси изогнутой балки имеет вид

$$E \cdot J \cdot V_1''(x) = -R_{An} \cdot x + q_{1n} \cdot \frac{x^2}{2} = -36.4 \cdot x + 7.5 \cdot x^2. \quad (13)$$

Второй участок ( $a = 3.9 \text{ м} \leq x \leq a + b = 4.8 \text{ м}$ ).

$$\begin{aligned}
E \cdot J \cdot V_2''(x) &= -R_{An} \cdot x + q_{1n} \cdot \frac{x^2}{2} - q_{1n} \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + m_n \cdot (x-a)^0 = \\
&= -36.4 \cdot x + 7.5 \cdot x^2 - 7.5 \cdot (x-3.9)^2 + 5 \cdot (x-3.9)^0.
\end{aligned} \quad (14)$$

Здесь для обеспечения равенства постоянных интегрирования распределенная нагрузка интенсивностью  $q_{1n}$  продолжена до конца балки и введена компенсирующая нагрузка обратного направления той же интенсивности  $q_{1n}$ , а момент сосредоточенной пары  $m_n$  умножен на фиктивное плечо  $(x-a)^0 = (x-3.9)^0 = 1$  (см. п. 2.2).

Третий участок ( $a+b=4.8\text{м} \leq x \leq a+b+c=6\text{м}$ ).

$$\begin{aligned}
E \cdot J \cdot V_3''(x) &= -R_{An} \cdot x + q_{1n} \cdot \frac{x^2}{2} - q_{1n} \cdot \frac{(x-a)^2}{2} + m_n \cdot (x-a)^0 - R_{Bn} \cdot (x-a-b) + \\
&+ q_{2n} \cdot \frac{(x-a-b)^2}{2} = -36.4 \cdot x + 7.5 \cdot x^2 - 7.5 \cdot (x-3.9)^2 + 5 \cdot (x-3.9)^0 - \\
&- 27.1 \cdot (x-4.8) + 6.25 \cdot (x-4.8)^2.
\end{aligned} \quad (15)$$

Проинтегрировав дважды дифференциальные уравнения (13) – (15), получим выражения для нахождения углов поворота сечений и прогибов

$$E \cdot J \cdot V_1'(x) = -36.4 \cdot \frac{x^2}{2} + 7.5 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1, \quad (16.1)$$

$$E \cdot J \cdot V_1(x) = -36.4 \cdot \frac{x^3}{6} + 7.5 \cdot \frac{x^4}{12} + C_1 \cdot x + D_1; \quad (16.2)$$

$$E \cdot J \cdot V_2'(x) = -36.4 \cdot \frac{x^2}{2} + 7.5 \cdot \frac{x^3}{3} - 7.5 \cdot \frac{(x-3.9)^3}{3} + 5 \cdot (x-3.9) + C_2, \quad (17.1)$$

$$E \cdot J \cdot V_2(x) = -36.4 \cdot \frac{x^3}{6} + 7.5 \cdot \frac{x^4}{12} - 7.5 \cdot \frac{(x-3.9)^4}{12} + 5 \cdot \frac{(x-3.9)^2}{2} + C_2 \cdot x + D_2, \quad (17.2)$$

$$\begin{aligned}
E \cdot J \cdot V_3'(x) &= -36.4 \cdot \frac{x^2}{2} + 7.5 \cdot \frac{x^3}{3} - 7.5 \cdot \frac{(x-3.9)^3}{3} + 5 \cdot (x-3.9) - 27.1 \cdot \frac{(x-4.8)^2}{2} + \\
&+ 6.25 \cdot \frac{(x-4.8)^3}{3} + C_3,
\end{aligned} \quad (18.1)$$

$$\begin{aligned}
E \cdot J \cdot V_3(x) = & -36.4 \cdot \frac{x^3}{6} + 7.5 \cdot \frac{x^4}{12} - 7.5 \cdot \frac{(x-3.9)^4}{12} + 5 \cdot \frac{(x-3.9)^2}{2} - 27.1 \cdot \frac{(x-4.8)^3}{6} + \\
& + 6.25 \cdot \frac{(x-4.8)^4}{12} + C_3 \cdot x + D_3.
\end{aligned} \tag{18.2}$$

Интегрирование членов, содержащих множители вида  $(x-a)$ , производится без раскрытия скобок в соответствии с правилами, обеспечивающими выравнивание постоянных интегрирования (см. п. 2.2).

Рассмотрев условия (7), (8) гладкого и непрерывного сопряжения оси изогнутой балки на границах участков загрузки, получим

$$\text{для участков 1 и 2: } V_1'(3.9) = V_2'(3.9) \text{ и } V_1(3.9) = V_2(3.9);$$

$$\text{для участков 2 и 3: } V_2'(4.8) = V_3'(4.8) \text{ и } V_2(4.8) = V_3(4.8).$$

Отсюда с использованием соотношений (16.1), (17.1) и (16.2), (17.2) найдем

$$-36.4 \cdot \frac{3.9^2}{2} + 7.5 \cdot \frac{3.9^3}{3} + C_1 = -36.4 \cdot \frac{3.9^2}{2} + 7.5 \cdot \frac{3.9^3}{3} + C_2 \text{ или } C_1 = C_2 = C;$$

$$-36.4 \cdot \frac{3.9^3}{6} + 7.5 \cdot \frac{3.9^4}{12} + C \cdot 3.9 + D_1 = -36.4 \cdot \frac{3.9^3}{6} + 7.5 \cdot \frac{3.9^4}{12} + C \cdot 3.9 + D_2$$

$$\text{или } D_1 = D_2 = D.$$

Аналогично из соотношений (17.1), (18.1) и (17.2), (18.2) следует  $C = C_3$  и  $D = D_3$ . Поскольку  $C_1 = C_2 = C_3 = C$  и  $D_1 = D_2 = D_3 = D$ , то в дальнейшем используем только постоянные  $C$  и  $D$ , которые найдем из условий равенства нулю прогибов в сечениях над опорами.

На опоре А ( $x = 0$ ):

$$V_1(0) = \frac{1}{E \cdot J} \cdot (-36.4 \cdot 0 + 7.5 \cdot 0 + C \cdot 0 + D) = 0 \Rightarrow D = 0;$$

на опоре В ( $x = 4.8$  м):

$$V_2(4.8) = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[ -36.4 \cdot \frac{4.8^3}{6} + 7.5 \cdot \frac{4.8^4}{12} - 7.5 \cdot \frac{(4.8-3.9)^4}{12} + 5 \cdot \frac{(4.8-3.9)^2}{2} + C \cdot 4.8 \right] = 0$$

$$\Rightarrow C \approx (670.92 - 331.78 + 0.41 - 2.03) / 4.8 \approx 70.3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Постоянные интегрирования  $D$  и  $C$  равны соответственно прогибу и углу поворота сечения в начале координат (при  $x=0$ ), умноженным на изгибную жесткость балки  $EJ$ .

### 4.3. Геометрические характеристики деформаций балок

#### 4.3.1. Стальная двутавровая балка

Подставив в уравнение (16.2)  $x = L/2 = (a + b)/2 = 4.8/2 = 2.4$  м, определим прогиб балки в середине полета

$$V_1(2.4) = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left( -36.4 \cdot \frac{2.4^3}{6} + 7.5 \cdot \frac{2.4^4}{12} + 70.3 \cdot 2.4 \right) = \frac{105.6}{2 \cdot 10^8 \cdot 2.55 \cdot 10^{-5}} = 2.07 \cdot 10^{-2} \text{ м} .$$

Подставив полученное значение в условие жесткости (9)

$$|V_1(2.4)| = 2.07 \cdot 10^{-2} \text{ м} < [f] = 2.4 \cdot 10^{-2} \text{ м} ,$$

видим, что оно выполняется. Прогиб свободного конца консоли вычислим из выражения (18.2) при  $x = 6$  м

$$V_3(6) = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left( -36.4 \cdot \frac{6^3}{6} + 7.5 \cdot \frac{6^4}{12} - 7.5 \cdot \frac{(6-3.9)^4}{12} + 5 \cdot \frac{(6-3.9)^2}{2} - 27.1 \cdot \frac{(6-4.8)^3}{6} + 6.25 \cdot \frac{(6-4.8)^4}{12} + 70.3 \cdot 6 \right) = \frac{-86.45}{2 \cdot 10^8 \cdot 2.55 \cdot 10^{-5}} = -1.70 \cdot 10^{-2} \text{ м} .$$

Допустимый прогиб консоли  $[f_k] = 6 \cdot 10^{-3}$  м (см. п. 4.1) меньше полученного значения и, следовательно, критерий (10) не выполняется и жесткость балки не обеспечена. По желанию студента можно сделать перерасчет, подобрав двутавр с постоянным по длине моментом инерции

$$J \geq J_{\text{тр}} = \frac{86.45}{2 \cdot 10^8 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 7.204 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4 .$$

Этому условию удовлетворяет двутавр № 33 по ГОСТ 8239–89 с  $J = 9840 \text{ см}^4 > J_{\text{тр}}$ , для которого

$$|V_1(2.4)| = \frac{105.6}{2 \cdot 10^8 \cdot 9.84 \cdot 10^{-5}} = 5.37 \cdot 10^{-3} \text{ м} < [f] = 2.4 \cdot 10^{-2} \text{ м} ,$$

$$|V_3(6)| = \frac{86.45}{2 \cdot 10^8 \cdot 9.84 \cdot 10^{-5}} = 4.39 \cdot 10^{-3} \text{ м} < [f_k] = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м} ,$$

то есть условие жесткости выполняется. В рассматриваемом примере в дальнейших расчетах используется двутавр №33 с моментом инерции  $J \equiv J_z = 9.84 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$ .

Определим углы поворота сечений:

над опорой А – из выражения (16.1) при  $x = 0$  м

$$\varphi_A = V'_1(0) = \frac{1}{E \cdot J} \cdot (-36.4 \cdot 0 + 7.5 \cdot 0 + 70.3) = \frac{70.3}{2 \cdot 10^8 \cdot 9.84 \cdot 10^{-5}} = 3.57 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

над опорой В – из уравнения (17.1) при  $x = 4.8 \text{ м}$

$$\begin{aligned} \varphi_B = V'_2(4.8) = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[ -36.4 \cdot \frac{4.8^2}{2} + 7.5 \cdot \frac{4.8^3}{3} - 7.5 \cdot \frac{(4.8 - 3.9)^3}{3} + 5 \cdot (4.8 - 3.9) + \right. \\ \left. + 70.3 \right] = \frac{-69.87}{2 \cdot 10^8 \cdot 9.84 \cdot 10^{-5}} = -3.55 \cdot 10^{-3} \text{ рад}; \end{aligned}$$

на конце консоли – из соотношения (18.1) при  $x = 6 \text{ м}$

$$\begin{aligned} \varphi_6 = V'_3(6) = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[ -36.4 \cdot \frac{6^2}{2} + 7.5 \cdot \frac{6^3}{3} - 7.5 \cdot \frac{(6 - 3.9)^3}{3} + 5 \cdot (6 - 3.9) - \right. \\ \left. - 27.1 \cdot \frac{(6 - 4.8)^2}{2} + 6.25 \cdot \frac{(6 - 4.8)^3}{3} + 70.3 \right] = \frac{-73.46}{2 \cdot 10^8 \cdot 9.84 \cdot 10^{-5}} = -3.73 \cdot 10^{-3} \text{ рад}. \end{aligned}$$

#### 4.3.2. Деревянная балка

По формулам (11), (12) вычисляем прогибы и проверяем выполнение условий жесткости (9), (10)

$$|V_d(2.4)| = |V_c(2.4)| \cdot \frac{E_c J_c}{E_d J_d} = 5.37 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2 \cdot 10^8 \cdot 9.84 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^7 \cdot 6.94 \cdot 10^{-4}} = 1.52 \cdot 10^{-2} \text{ м} < [f] = 2.4 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$\begin{aligned} |V_d(6)| = |V_c(6)| \cdot \frac{E_c J_c}{E_d J_d} = 4.39 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2 \cdot 10^8 \cdot 9.84 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^7 \cdot 6.94 \cdot 10^{-4}} = \frac{86.40}{1 \cdot 10^7 \cdot 6.94 \cdot 10^{-4}} = \\ = 1.24 \cdot 10^{-2} \text{ м} > [f_k] = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

Прогиб консоли оказался больше допустимого. Жесткость балки не обеспечена. По желанию студента выполняется перерасчет. Определяется требуемый постоянный по длине момент инерции

$$J_{\text{тр}} = \frac{86.40}{1 \cdot 10^7 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 1.44 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4 = 144000 \text{ см}^4.$$

Так как  $J_{\text{тр}} = n_{\text{тр}} \cdot \frac{\pi \cdot [r]^4}{4}$ , где  $n_{\text{тр}}$  – число балок с наибольшим радиусом  $[r] = 0.15 \text{ м}$  (см. п. 2.5.2 /3/), то

$$n_{\text{тр}} = \frac{4 \cdot J_{\text{тр}}}{\pi \cdot [r]^4} \geq \frac{4 \cdot 1.44 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0.15^4} = 3.6.$$

Принимаем четыре балки ( $n = 4$ ) и находим требуемый радиус

$$r_{\text{тр}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot J_{\text{тр}}}{\pi \cdot n}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 1.44 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi}} = 0.146 \text{ м.}$$

Назначаем  $r = 0.150 \text{ м} > r_{\text{тр}}$ , при котором

$$J = n \cdot \frac{\pi \cdot r^4}{4} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 0.15^4}{4} = 1.59 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4,$$

$$|V(6)| = \frac{86.40}{1 \cdot 10^7 \cdot 1.59 \cdot 10^{-3}} = 5.43 \cdot 10^{-3} \text{ м} < [f_k] = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$|V(2.4)| = 5.37 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2 \cdot 10^8 \cdot 9.84 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^7 \cdot 1.59 \cdot 10^{-3}} = 6.65 \cdot 10^{-3} \text{ м} < [f] = 2.4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

и жесткость балки обеспечена.

### 4.3. Поверочный расчет прогибов стальной балки на ПЭВМ

Ниже приведены результаты расчетов стальной балки из прокатного двутавра № 22 ( $J = 2550 \text{ см}^4$ ) с исходными данными из п. 4.1.

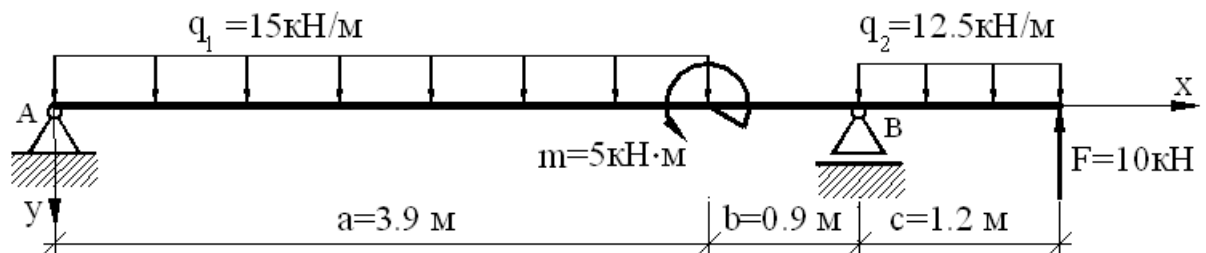


Рис. 7. Расчетная схема балки с нормативными нагрузками

Содержимое соответствующего текстового файла с исходными данными для программы "BALKA" и результаты расчетов по ней.

Петров А.И., 125 гр.

0 // тип балки (0 - шарнирно опертая, 1 - с заделкой)  
 6 // длина балки (м)  
 0 // координата левой опоры (м) (для шарнирно опертой балки)  
 4.8 // координата правой опоры (м) (для шарнирно опертой балки)  
 0 // 0 - заземлен левый; 1 - заземлен правый конец балки  
 1.2 // коэффициент надежности по нагрузке  
 1 // число сосредоточенных сил  
 -10 6 // величина 1-ой силы (кН) и ее координата (м)  
 1 // число пар сил  
 -5 3.9 // величина 1-ой пары (кНм) и ее координата (м)  
 2 // число распределенных нагрузок  
 15 15 0 3.9 // величина 1-ой нагрузки (кН/м) и ее координаты (м)  
 12.5 12.5 4.8 6 // величина 2-ой нагрузки (кН/м) и ее координаты (м)  
 10 // число сечений для вывода результатов

Расчет выполнил: Петров А.И., 125 гр.

Исходные данные.

Тип балки: шарнирно опертая.

Длина балки: 6.00 м.

Координата левой опоры: 0.00 м.

Координата правой опоры: 4.80 м.

Модуль упругости E: 200000 МПа.

Момент инерции поперечного сечения J: 2550 см<sup>4</sup>.

Коэффициент надежности по нагрузке: 1.0

Нормативные нагрузки.

На балку действует 1 сосредоточенная сила.

Величина 1-ой силы: -10.000 кН, ее координата: 6.000 м.

На балку действует 1 пара сил.

Величина 1-ой пары сил: -5.000 кНм, ее координата: 3.900 м.

На балку действуют 2 распределенные нагрузки.

Величина 1-ой нагрузки:

$q_1 = 15.000$  кН/м,  $q_2 = 15.000$  кН/м,

ее координаты:  $x_1 = 0.000$  м,  $x_2 = 3.900$  м.

Величина 2-ой нагрузки:

$q_1 = 12.500$  кН/м,  $q_2 = 12.500$  кН/м,

ее координаты:  $x_1 = 4.800$  м,  $x_2 = 6.000$  м.

Результаты расчетов.

Значения опорных реакций:  $R_a = -36.401$  кН,  $R_b = -27.099$  кН

x, м	Q (x), кН	M(x), кНм	v(x), мм	1000·φ(x), рад
0.000	36.401	0.000	0.000	13.789
0.600	27.401	19.141	8.032	12.610
1.200	18.401	32.881	14.745	9.497
1.800	9.401	41.222	19.169	5.085
2.400	0.401	44.163	20.715	0.010

2.427	0.000	44.168	20.712	-0.222
3.000	-8.599	41.703	19.175	-5.094
3.600	-17.599	33.844	14.723	-9.591
3.900	-22.099	27.889	11.563	-11.413
3.900	-22.099	22.889	11.563	-11.414
4.200	-22.099	16.259	7.957	-12.565
4.800	-22.099	3.000	0.000	-13.698
4.800	5.000	3.000	-0.000	-13.698
5.200	0.000	4.000	-5.534	-13.985
6.000	-10.000	0.000	-16.932	-14.404

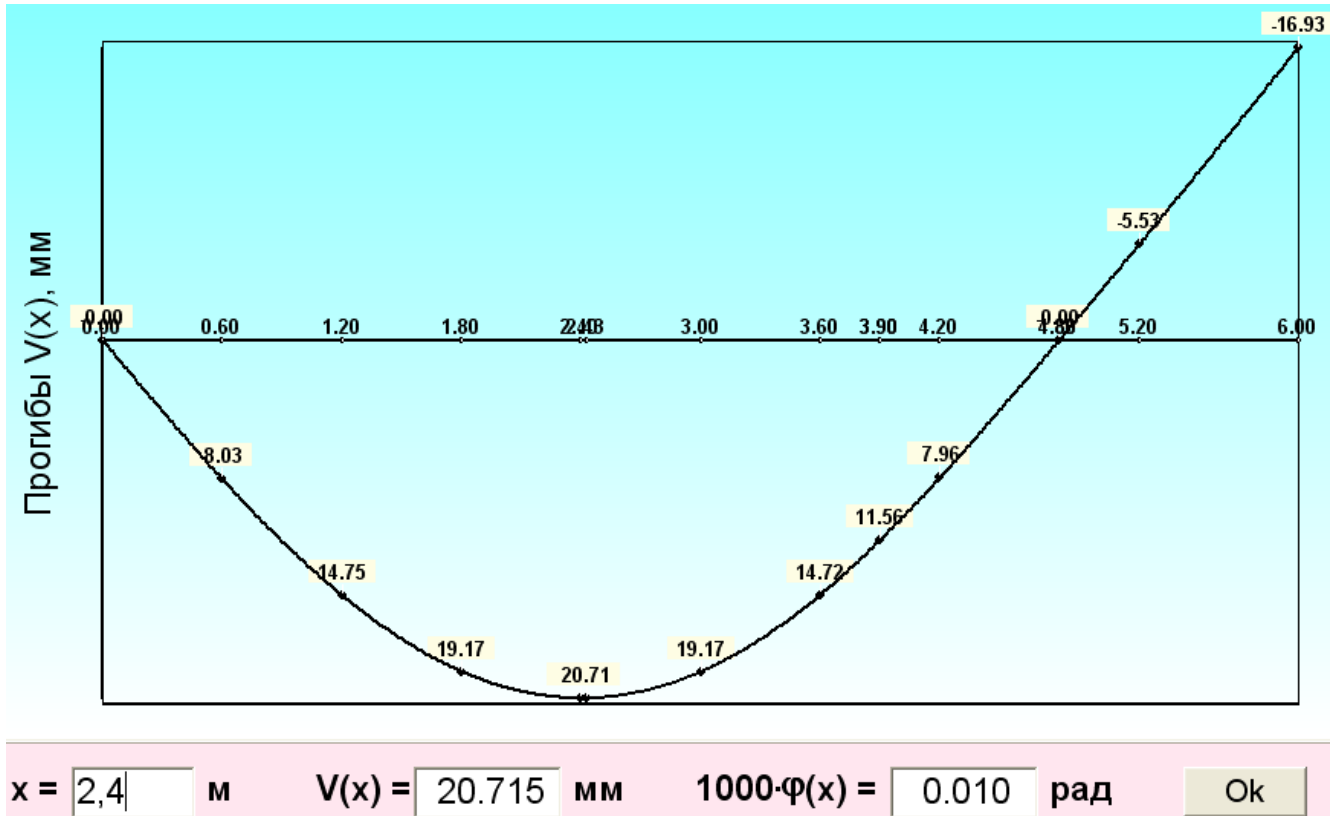


Рис. 3. Эюра прогибов

Отрицательное значение опорных реакций означает, что они направлены в отрицательном направлении оси  $y$ .

В случае использования двутавра №33, что обеспечивает выполнение условий жесткости, результаты будут следующими.

$x$ , м	$Q(x)$ , кН	$M(x)$ , кНм	$v(x)$ , мм	$1000 \cdot \varphi(x)$ , рад
0.000	36.401	0.000	0.000	3.573
0.600	27.401	19.141	2.082	3.268
1.200	18.401	32.881	3.821	2.461
1.800	9.401	41.222	4.968	1.318



2.400	0.401	44.163	5.368	0.002
2.427	0.000	44.168	5.367	-0.058
3.000	-8.599	41.703	4.969	-1.320
3.600	-17.599	33.844	3.815	-2.486
3.900	-22.099	27.889	2.997	-2.958
3.900	-22.099	22.889	2.997	-2.958
4.200	-22.099	16.259	2.062	-3.256
4.800	-22.099	3.000	0.000	-3.550
4.800	5.000	3.000	-0.000	-3.550
5.200	0.000	4.000	-1.434	-3.624
6.000	-10.000	0.000	-4.388	-3.733

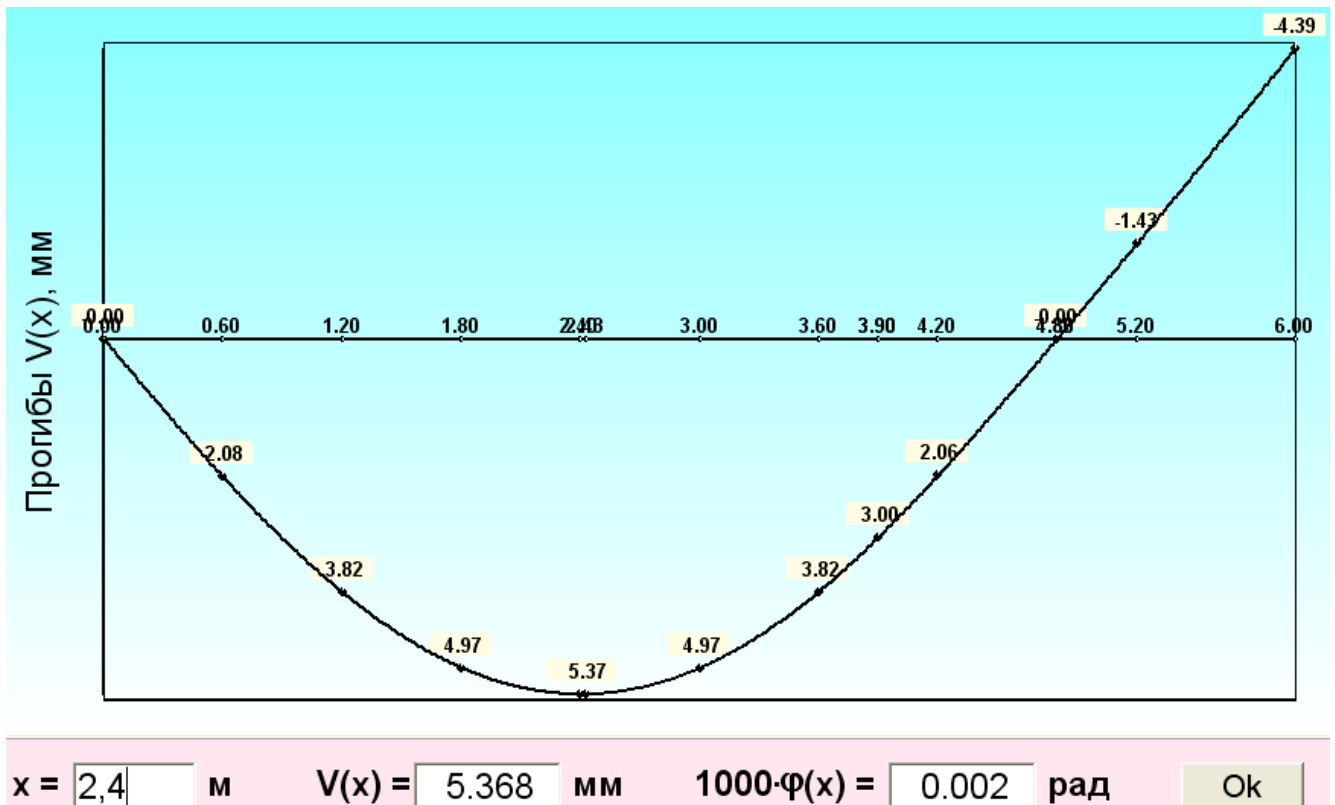
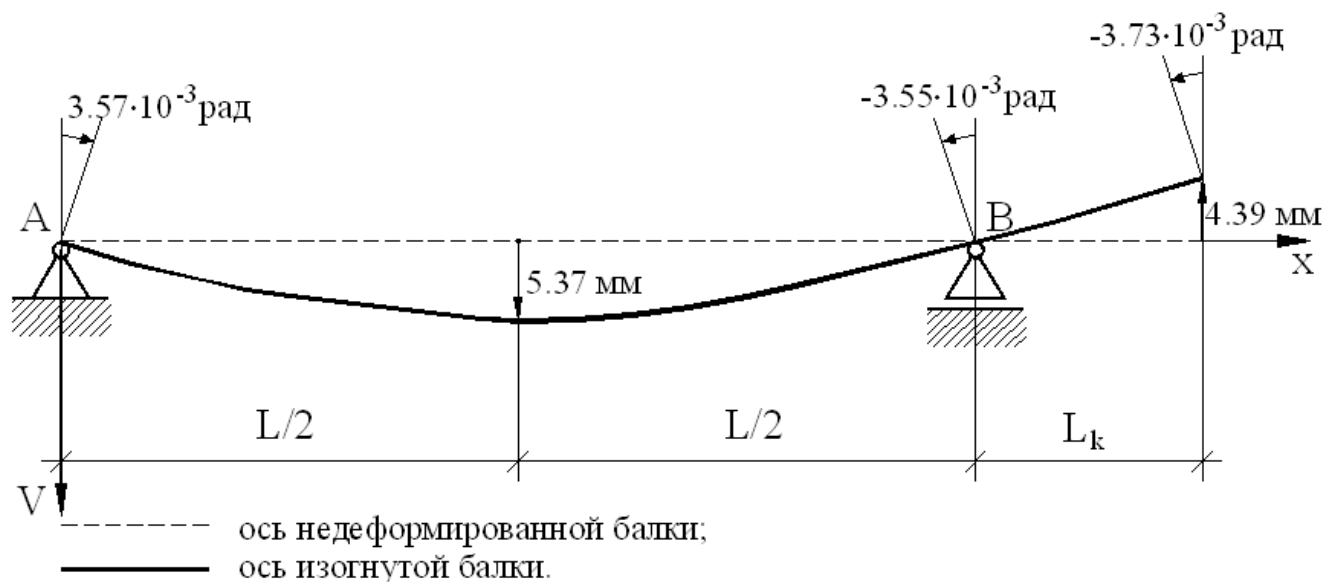


Рис. 4. Эпюра прогибов

Приведенные результаты совпадают с данными, полученными выше с помощью ручного расчета.

#### 4.5. Построение оси изогнутой двутавровой балки

В соответствии с данными о прогибах и углах поворота сечений, полученными в п. 4.3.1, на рис. 5 изображена ось изогнутой стальной балки.

Рис. 5.  $M_{гор.}$  1:60,  $M_{верт.}$  3:2

## 5. ПРИМЕР 2. ШАРНИРНО ОПЕРТАЯ БАЛКА

### 5.1. Исходные данные

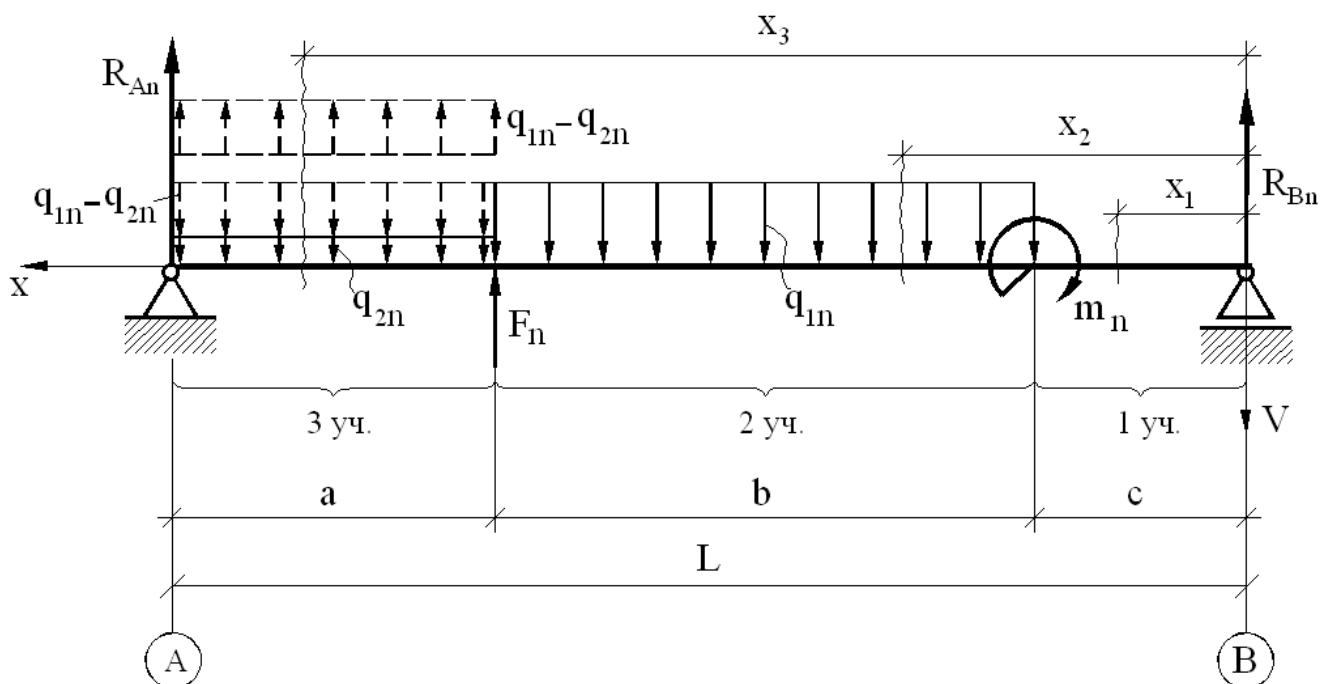


Рис. 6. Расчетная схема балки

Выполнить расчет жесткости балки с расчетной схемой по рис. 6 при следующих значениях исходных параметров:  $a = 2.1\text{ м}$ ,  $b = 3.5\text{ м}$ ,  $c = 1.4\text{ м}$ ,  $q_{1n} = 20\text{ кН/м}$ ,  $q_{2n} = 4\text{ кН/м}$ ,  $F_n = 12\text{ кН}$ ,  $m_n = 2.5\text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $R_{An} = 29.88\text{ кН}$ ,  $R_{Bn} = 36.52\text{ кН}$  (опорные реакции найдены из уравнений равновесия), допустимый прогиб в пролете  $[f] = L/200 = 7/200 = 0.035\text{ м}$ . Рассмотреть стальную

балку из прокатного двутавра № 30 ГОСТ 8239-89 с моментом инерции  $J = 7.08 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$  и модулем упругости  $E = 206 \text{ ГПа}$  и деревянную балку круглого поперечного сечения с  $J = 1.206 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$  и  $E = 11 \text{ ГПа}$ .

## 5.2. Составление и решение дифференциальных уравнений оси изогнутой балки

Зададимся началом координатных осей  $VOx$  на правой опоре (см. рис. б). Руководствуясь правилами уравнивания постоянных интегрирования (см. п. 2.2), составим и проинтегрируем дифференциальное уравнение оси изогнутой балки на участках загрузки.

Участок 1. ( $0 \leq x \leq c = 1.4 \text{ м}$ )

$$E \cdot J \cdot V_1''(x) = -R_{\hat{A}_n} \cdot x = -36.52 \cdot x, \quad (19.1)$$

$$E \cdot J \cdot V_1'(x) = -36.52 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1, \quad (19.2)$$

$$E \cdot J \cdot V_1(x) = -36.52 \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + D_1. \quad (19.3)$$

Участок 2. ( $c = 1.4 \text{ м} \leq x \leq c + b = 4.9 \text{ м}$ )

$$\begin{aligned} E \cdot J \cdot V_2''(x) &= -R_{B_n} \cdot x + m_n \cdot (x - c)^0 + q_{1n} \cdot \frac{(x - c)^2}{2} = \\ &= -36.52 \cdot x + 2.5 \cdot (x - 1.4)^0 + 10 \cdot (x - 1.4)^2, \end{aligned} \quad (20.1)$$

$$E \cdot J \cdot V_2'(x) = -36.52 \cdot \frac{x^2}{2} + 2.5 \cdot (x - 1.4) + 10 \cdot \frac{(x - 1.4)^3}{3} + C_2, \quad (20.2)$$

$$E \cdot J \cdot V_2(x) = -36.52 \cdot \frac{x^3}{6} + 2.5 \cdot \frac{(x - 1.4)^2}{2} + 10 \cdot \frac{(x - 1.4)^4}{12} + C_2 \cdot x + D_2. \quad (20.3)$$

Участок 3. ( $c + b = 4.9 \text{ м} \leq x \leq L = 7 \text{ м}$ )

$$\begin{aligned} E \cdot J \cdot V_3''(x) &= -R_{B_n} \cdot x + m_n \cdot (x - c)^0 + q_{1n} \cdot \frac{(x - 1.4)^2}{3} - (q_{1n} - q_{2n}) \cdot \frac{(x - c - b)^2}{2} + \\ &- F_n \cdot (x - c - b) = -36.52 \cdot x + 2.5 \cdot (x - 1.4)^0 + 10 \cdot (x - 1.4)^2 - \\ &- 8 \cdot (x - 4.9)^2 - 12 \cdot (x - 4.9), \end{aligned} \quad (21.1)$$

$$\begin{aligned} E \cdot J \cdot V_3'(x) &= -36.52 \cdot \frac{x^2}{2} + 2.5 \cdot (x - 1.4) + 10 \cdot \frac{(x - 1.4)^3}{3} - 8 \cdot \frac{(x - 4.9)^3}{3} - \\ &- 12 \cdot \frac{(x - 4.9)^2}{2} + C_3, \end{aligned} \quad (21.2)$$

$$E \cdot J \cdot V_3(x) = -36.52 \cdot \frac{x^3}{6} + 2.5 \cdot \frac{(x - 1.4)^2}{2} + 10 \cdot \frac{(x - 1.4)^4}{12} - 8 \cdot \frac{(x - 4.9)^4}{12} -$$

$$-12 \cdot \frac{(x-4.9)^3}{6} + C_3 \cdot x + D_3. \quad (21.3)$$

Привлекая условия гладкого (7) и непрерывного (8) сопряжения оси изогнутой балки на границах участков

$$1,2 - V_1'(1.4) = V_2'(1.4) \text{ и } V_1(1.4) = V_2(1.4),$$

$$2,3 - V_2'(4.9) = V_3'(4.9) \text{ и } V_2(4.9) = V_3(4.9),$$

получим

из уравнений (19.2), (20.2):

$$-36.52 \cdot \frac{1.4^2}{2} + C_1 = -36.52 \cdot \frac{1.4^2}{2} + 2.5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 = C;$$

из уравнений (19.3), (20.3):

$$\begin{aligned} -36.52 \cdot \frac{1.4^3}{6} + C \cdot 1.4 + D_1 &= -36.52 \cdot \frac{1.4^3}{6} - 2.5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + \tilde{N} \cdot 1.4 + D_2 \\ \Rightarrow D_1 &= D_2 = D; \end{aligned}$$

из уравнений (20.2), (21.2):

$$\begin{aligned} -36.52 \cdot \frac{4.9^2}{2} + 2.5 \cdot (4.9 - 1.4) + 10 \cdot \frac{(4.9 - 1.4)^3}{3} + C &= -36.52 \cdot \frac{4.9^2}{2} + 2.5 \cdot (4.9 - 1.4) + \\ &+ 10 \cdot \frac{(4.9 - 1.4)^3}{3} - 8 \cdot 0 - 12 \cdot 0 + C_3 \Rightarrow C = C_3; \end{aligned}$$

из уравнений (20.3), (21.3):

$$\begin{aligned} -36.52 \cdot \frac{4.9^3}{6} + 2.5 \cdot \frac{(4.9 - 1.4)^2}{2} + 10 \cdot \frac{(4.9 - 1.4)^4}{12} + 4.9 \cdot C + D &= -36.52 \cdot \frac{4.9^3}{6} + \\ + 2.5 \cdot \frac{(4.9 - 1.4)^2}{2} + 10 \cdot \frac{(4.9 - 1.4)^4}{12} - 8 \cdot 0 - 12 \cdot 0 + 4.9 \cdot C + D_3 &\Rightarrow D = D_3. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем  $C_1 = C_2 = C_3 = C$  и  $D_1 = D_2 = D_3 = D$ . Постоянные  $C$  и  $D$  находим из условий на опорах.

Опора В:  $V_1(0) = 0 \Rightarrow E \cdot J \cdot 0 = -36.52 \cdot \frac{0}{6} + C \cdot 0 + D \Rightarrow D = 0;$

Опора А:  $V_3(7) = 0$  и из уравнения (21.3) найдем

$$\begin{aligned} E \cdot J \cdot 0 &= -36.52 \cdot \frac{7^3}{6} + 2.5 \cdot \frac{(7 - 1.4)^2}{2} + 10 \cdot \frac{(7 - 1.4)^4}{12} - 8 \cdot \frac{(7 - 4.9)^4}{6} - \\ &- 12 \cdot \frac{(7 - 4.9)^3}{6} + C \cdot 7 \end{aligned}$$

и  $C = (2087.7 - 39.2 - 819.5 + 12.3 + 18.5) / 7 = 180 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$

### 5.3. Перемещения балок

### 5.3.1. Стальная балка

Подставив  $x = L/2 = (a + b + c)/2 = 3.5$  м в уравнение (20.3), вычислим прогиб балки в середине пролета

$$V_2(3.5) = \frac{1}{E \cdot J} \left( -36.52 \cdot \frac{3.5^3}{6} + 2.5 \cdot \frac{(3.5-1.4)^2}{2} + 10 \cdot \frac{(3.5-1.4)^4}{12} + 180 \cdot 3.5 \right) =$$

$$= \frac{390.8}{206 \cdot 10^6 \cdot 7.08 \cdot 10^{-5}} = 2.68 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Условие жесткости выполняется

$$|V(3.5)| = 2.68 \cdot 10^{-2} \text{ м} < [f] = 3.5 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Углы поворота сечений над опорами будут равны

$$\varphi_A = V_3'(7) = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left( -36.52 \cdot \frac{7^2}{2} + 2.5 \cdot (7-1.4) + 10 \cdot \frac{(7-1.4)^3}{3} - 8 \cdot \frac{(7-4.9)^3}{3} - \right.$$

$$\left. -12 \cdot \frac{(7-4.9)^2}{2} + 180 \right) = \frac{-166.5}{206 \cdot 10^6 \cdot 7.08 \cdot 10^{-5}} = -1.14 \cdot 10^{-2} \text{ рад},$$

$$\varphi_B = V_1'(0) = \frac{1}{E \cdot J} \cdot (-36.52 \cdot 0 + 180) = \frac{180}{206 \cdot 10^6 \cdot 7.08 \cdot 10^{-5}} = 1.23 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

### 5.3.2. Деревянная балка

По формуле (11) находим прогиб в середине пролета

$$V_d(3.5) = V_c(3.5) \cdot \frac{E_c J_c}{E_d J_d} = 2.68 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{206 \cdot 10^6 \cdot 7.08 \cdot 10^{-5}}{11 \cdot 10^6 \cdot 1.206 \cdot 10^{-3}} = 2.95 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

и проверяем выполнение условия жесткости (9)

$$|V(L/2)| = 2.95 \cdot 10^{-2} \text{ м} < [f] = 3.35 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Прогиб оказался меньше допустимого и, следовательно, жесткость деревянной балки обеспечена.

## 5.4. Поверочный расчет прогибов стальной шарнирно опертой балки на ПЭВМ

Ниже приведены результаты расчетов стальной шарнирно опертой балки, рассмотренной в предыдущем разделе, по программе "БАЛКА".

Расчет выполнил: Смирнов О.М., ПГС

### Исходные данные.

Тип балки: шарнирно опертая.

Длина балки: 7.00 м.

Координата левой опоры: 0.00 м.

Координата правой опоры: 7.00 м.

Модуль упругости E: 206000 МПа.

Момент инерции поперечного сечения J: 7080 см<sup>4</sup>.

Коэффициент надежности по нагрузке: 1.0

Нормативные нагрузки.

На балку действует 1 сосредоточенная сила.

Величина 1-ой силы: -12.000 кН, ее координата: 2.100 м.

На балку действует 1 пара сил.

Величина 1-ой пары сил: 2.500 кНм, ее координата: 5.600 м.

На балку действуют 2 распределенные нагрузки.

Величина 1-ой нагрузки:

$q_1 = 4.000$  кН/м,  $q_2 = 4.000$  кН/м,

ее координаты:  $x_1 = 0.000$  м,  $x_2 = 2.100$  м.

Величина 2-ой нагрузки:

$q_1 = 20.000$  кН/м,  $q_2 = 20.000$  кН/м,

ее координаты:  $x_1 = 2.100$  м,  $x_2 = 5.600$  м.

Результаты расчетов.

Значения опорных реакций:  $R_a = -29.883$  кН,  $R_b = -36.517$  кН.

x, м	Q(x), кН	M(x), кНм	v(x), мм	1000·φ(x), рад
0.000	29.883	0.000	0.000	11.409
0.700	27.083	19.938	7.872	10.923
1.400	24.283	37.916	15.079	9.526
2.100	21.483	53.934	21.018	7.314
2.100	33.483	53.934	21.018	7.314
2.800	19.483	72.472	25.115	4.242
3.500	5.483	81.210	26.804	0.514
3.774	0.000	81.962	26.735	-1.021
4.200	-8.517	80.148	25.792	-3.397
4.900	-22.517	69.286	22.115	-7.022
5.600	-36.517	48.624	16.137	-9.891
5.600	-36.517	51.124	16.137	-9.891
6.300	-36.517	25.562	8.498	-11.731
7.000	-36.517	0.000	0.000	-12.345

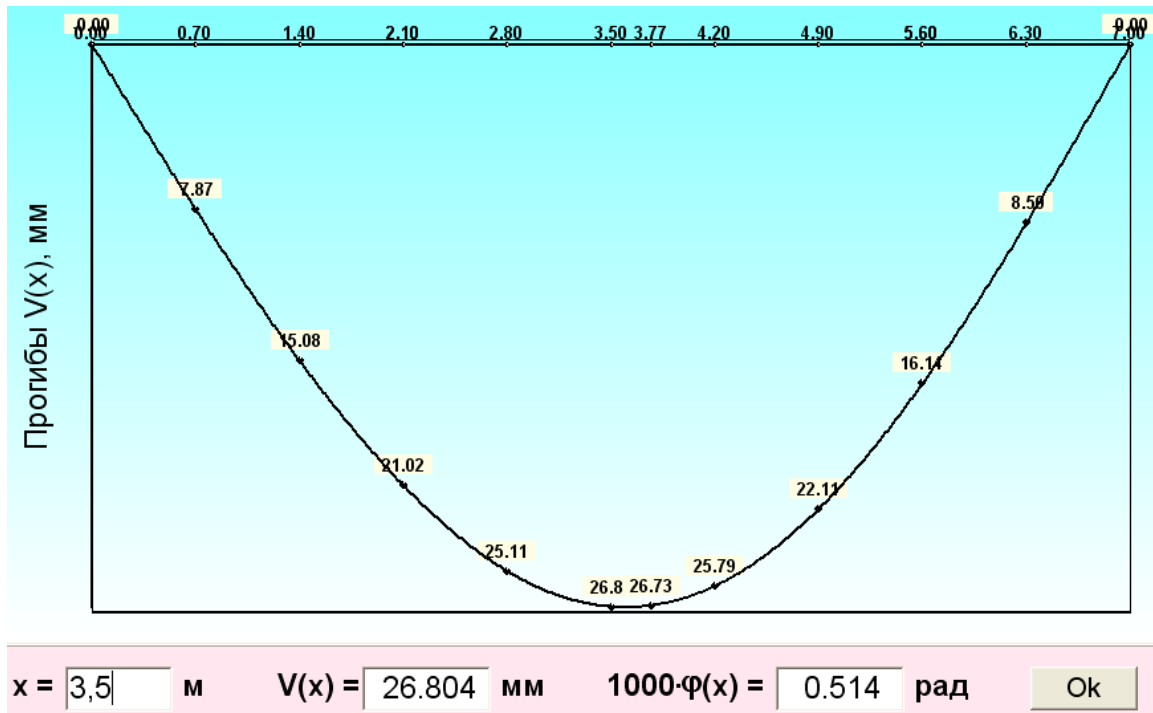
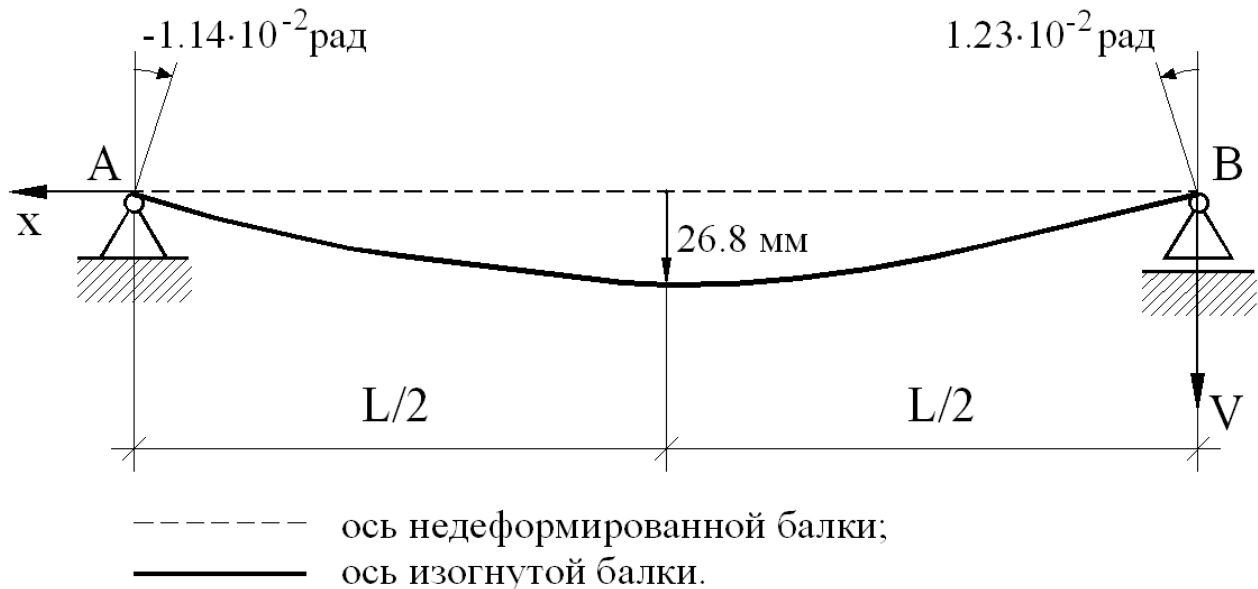


Рис. 7. Эпюра прогибов

### 5.5. Построение оси изогнутой стальной шарнирно опертой балки

По данным о  $V(3.5)$ ,  $V'(0)$ ,  $V'(7)$  п. 5.3.1 и в соответствии с изложенными в п. 2.3.1 правилами знаков для  $V(x)$  и  $V'(x)$  на рис. 8 построена ось изогнутой стальной балки. Отличие в знаках для углов поворота сечений в таблице, рассчитанной на ЭВМ, и на рис. 8 объясняется различным направлением оси  $x$ .

Рис. 8.  $M_{гор.}$  1:70,  $M_{верт.}$  1:3.

## 6. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА БАЛКИ С ЗАДЕЛКОЙ

### 6.1. Постановка задачи

В инженерной практике встречаются статически определимые балки, один конец которых жестко заделан (защемлен), а второй свободен (рис. 9,а). В жесткой заделке равны нулю прогиб и угол поворота сечения

$$V(x_0) = 0, \quad (22)$$

$$V'(x_0) = 0. \quad (23)$$

Проверим, например, выполнение условия жесткости (10) для балки из прокатного двутавра № 27 ГОСТ 8239-89 с моментом инерции  $J = 5.01 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$ , модулем упругости  $E = 206 \text{ ГПа}$  и расчетной схемой по рис. 9,а. Зададим значения нагрузок и геометрических размеров

$$a = 1.6 \text{ м}, \quad b = 2.4 \text{ м}, \quad L_k = a + b = 4.0 \text{ м}; \quad q_n = 7.5 \text{ кН/м}, \quad m_n = 12.4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Опорные реакции, найденные из уравнений равновесия статики, будут равны  $R_{on} = 18 \text{ кН}$ ,  $H_{on} = 0$ ,  $m_{on} = 38 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Допустимый прогиб свободного конца балки примем следующим:

$$[f_k] = \frac{L_k}{250} = \frac{4}{250} = 0.016 \text{ м}.$$

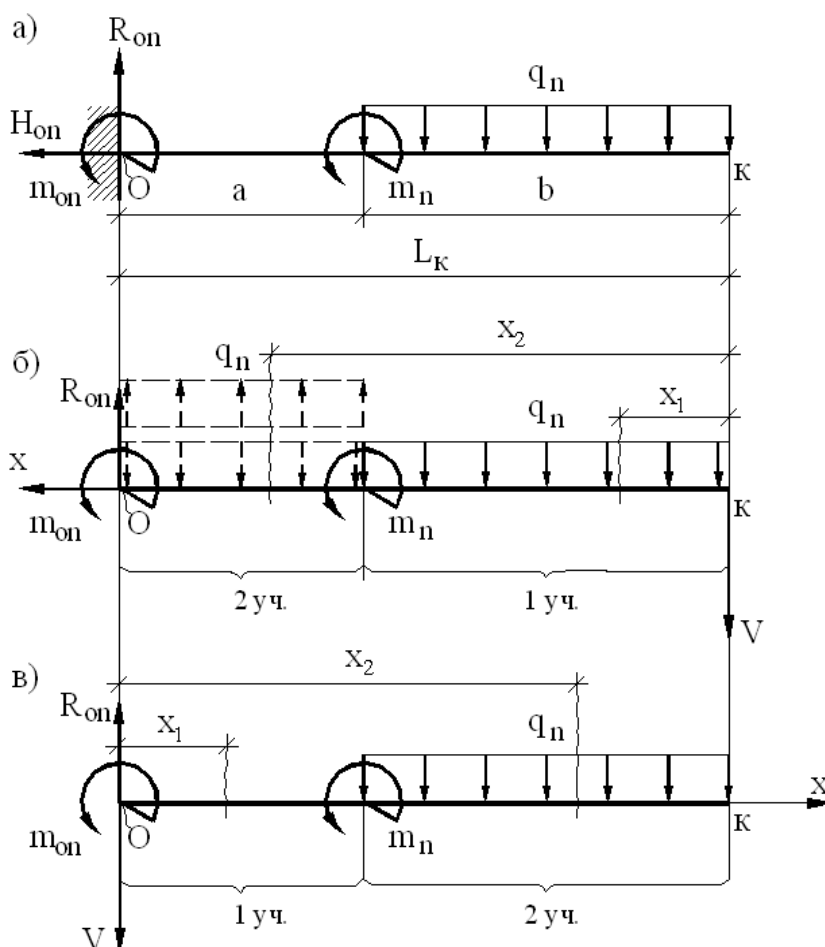




Рис. 9. Расчетная схема балки с заделкой

Если для определения прогибов поместить начало координат на правом конце балки (см. рис. 9,б), то при использовании метода уравнивания постоянных интегрирования следует:

продлить распределенную нагрузку  $q_n$  до опорного сечения и добавить компенсирующую нагрузку противоположного направления;

из условий (22) и (23) при  $x_0 = L_k$  найти постоянные интегрирования  $C$  и  $D$ , которые будут равны  $C = 55.04 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$  и  $D = -158.08 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$  (предлагаем убедиться в этом самостоятельно).

В этом случае значения опорных реакций можно не находить.

При известных опорных реакциях рациональнее, как это сделано ниже, поместить начало отсчета на левом конце балки (см. рис. 9,в). При этом отпадает необходимость преобразовывать распределенную нагрузку, постоянные  $C$  и  $D$ , пропорциональные углу поворота сечения и прогибу при  $x = 0$ , обратятся в нуль.

## 6.2. Проверка условия жесткости

Составляя и решая дифференциальное уравнение оси изогнутой балки на каждом из участков загрузки, получим соответственно:

первый участок ( $0 \leq x \leq a = 1.6 \text{ м}$ )

$$E \cdot J \cdot V_1''(x) = -R_{On} \cdot x + m_{On} = -18 \cdot x + 38, \quad (24.1)$$

$$E \cdot J \cdot V_1'(x) = -18 \cdot \frac{x^2}{2} + 38 \cdot x + C_1, \quad (24.2)$$

$$E \cdot J \cdot V_1(x) = -18 \cdot \frac{x^3}{36} + 38 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + D_1; \quad (24.3)$$

второй участок ( $a = 1.6 \text{ м} \leq x \leq a + b = 4 \text{ м}$ )

$$\begin{aligned} E \cdot J \cdot V_2''(x) &= -R_{On} \cdot x + m_{On} + m_n \cdot (x - a)^0 + q_n \cdot \frac{(x - a)^2}{2} = \\ &= -18 \cdot x + 38 + 12.4 \cdot (x - 1.6)^0 + 7.5 \cdot \frac{(x - 1.6)^2}{2}, \end{aligned} \quad (25.1)$$

$$E \cdot J \cdot V_2'(x) = -18 \cdot \frac{x^2}{2} + 38 \cdot x + 12.4 \cdot (x - 1.6) + 7.5 \cdot \frac{(x - 1.6)^3}{6} + C_2, \quad (25.2)$$

$$E \cdot J \cdot V_2(x) = -18 \cdot \frac{x^3}{6} + 38 \cdot \frac{x^2}{2} + 12.4 \cdot \frac{(x - 1.6)^2}{2} + 7.5 \cdot \frac{(x - 1.6)^4}{24} + C_2 \cdot x + D_2. \quad (25.3)$$

Привлекая условия (7) и (8) гладкого и непрерывного сопряжения оси балки на границе участков

$$V_1'(1.6) = V_2'(1.6) \quad \text{и} \quad V_1(1.6) = V_2(1.6),$$

будем иметь из выражений (21.2), (22.2)

$$-18 \cdot \frac{1.6^2}{2} + 38 \cdot 1.6 + C_1 = -18 \cdot \frac{1.6^2}{2} + 38 \cdot 1.6 + 12.4 \cdot 0 - 7.5 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 = C;$$

из выражений (24.3), (25.3)

$$-18 \cdot \frac{1.6^3}{6} + 3.8 \cdot \frac{1.6^2}{2} + C \cdot 1.6 + D_1 = -18 \cdot \frac{1.6^3}{6} + 3.8 \cdot \frac{1.6^2}{2} + 12.4 \cdot 0 + 7.5 \cdot 0 + C \cdot 1.6 + D_2$$

$$\Rightarrow D_1 = D_2 = D.$$

Постоянные  $C$  и  $D$  находим из условий закрепления (22), (23)

$$V_1'(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{E \cdot J} \cdot (-18 \cdot 0 + 38 \cdot 0 + C) = 0 \Rightarrow C = 0,$$

$$V_1(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{E \cdot J} \cdot (-18 \cdot 0 + 38 \cdot 0 + C \cdot 0 + D) = 0 \Rightarrow D = 0.$$

Подставив  $x = L_k = 4$  м в уравнение (25.3), вычислим прогиб свободного конца балки

$$V_2(4) = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[ -18 \cdot \frac{4^3}{6} + 38 \cdot \frac{4^2}{2} + 12.4 \cdot \frac{(4-1.6)^2}{2} + 7.5 \cdot \frac{(4-1.6)^4}{24} + 0 \cdot 4 + 0 \right] =$$

$$= \frac{158.08}{206 \cdot 10^6 \cdot 5.01 \cdot 10^{-5}} = 1.53 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Условие жесткости (10)

$$|V(L_k)| = |V_2(4)| = 1.53 \cdot 10^{-2} \text{ м} < [f_k] = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

удовлетворяется.

В заключение предлагается самостоятельно выполнить расчет на ПЭВМ и сравнить полученный результат с найденным выше прогибом свободного конца балки.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая шк., 2000. – 560 с.
2. Андреев В.И., Паушкин А.Г., Леонтьев А.И. Техническая механика (для учащихся строительных вузов и факультетов): Учебник. – М.: Издательство АСВ, 2012. – 251 с.
3. Варданян Г.С., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов (с основами строительной механики). – М.: ИНФА-М, 2003. – 480 с.
4. Расчет балки на прочность: Метод. ук. к контрольной работе и задачам по курсу «Сопротивление материалов»/ Сост.: А.В. Резунов, А.Н. Синозерский; Воронежский ГАСУ. – Воронеж: 2013. – 19 с.
5. Вычисление моментов инерции сложных фигур: Метод. ук. к контрольной работе и задачам по курсу "Сопротивление материалов"/ Сост.: А.Н. Синозерский, Г.Е. Габриелян; Воронежский ГАСУ. – Воронеж: 2001. – 25 с.

6. Сборник расчетных работ по сопротивлению материалов на базе персональных ЭВМ: Учеб. пособие/ В.С. Сафронов, А.Н. Синозерский, М.В. Шитикова и др. Под общ. Ред. В.С. Сафронова; Воронеж. гос. арх.-строит. академия, 1995. – 170 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Задание .....	4
2. Рекомендации по выполнению работы.....	5
3. Инструкция по работе с программой БАЛКА .....	7
4. Пример 1. Двухопорная балка с консолью.....	8
5. Пример 2. Шарнирно опертая балка .....	18
6. Особенности расчета балки с заделкой .....	23
Библиографический список .....	26

## РАСЧЕТ БАЛКИ НА ЖЕСТКОСТЬ

### Методические указания

к выполнению контрольных и расчетно–графических работ по курсу  
"Сопротивление материалов"  
для студентов всех специальностей  
очной и заочной форм обучения

СОСТАВИТЕЛИ: доцент, канд. физ.-мат. наук  
Резунов Александр Васильевич,  
профессор ВГАСУ, канд. техн. наук  
Синозерский Александр Николаевич

Подписано в печать 15.11. 2013. Формат 60x84 1/16. Уч.-изд. л. 1,4.  
Усл.-печ. 1,5. Бумага писчая. Тираж 500 экз. Заказ № 504.

---

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии  
издательства учебной литературы и учебно-методических пособий  
Воронежского ГАСУ.  
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84