

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический
университет»

Кафедра компьютерных интеллектуальных технологий
проектирования

301-2014

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по дисциплине
«Модели и методы анализа проектных решений»
для студентов направления подготовки бакалавров
230100 «Информатика и вычислительная техника»
(профиль «Системы автоматизированного проектирования
в машиностроении») очной и заочной форм обучения



Воронеж 2014

Составитель канд. техн. наук О.В. Собенина

УДК 681.3

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Модели и методы анализа проектных решений» для студентов направления подготовки бакалавров 230100 «Информатика и вычислительная техника» (профиль «Системы автоматизированного проектирования в машиностроении») очной и заочной форм обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. О.В. Собенина. Воронеж, 2014. 39 с.

Методические указания содержат необходимые для выполнения практических занятий теоретические сведения, примеры выполнения заданий.

Предназначены для студентов 4 курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе Word и содержатся в файле «МиМАПР Практические занятия.doc».

Ил. 20. Библиогр.: 5 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Горбунов

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. М.И. Чижов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

© ФГБОУ ВПО
«Воронежский государственный
технический университет», 2014

ВВЕДЕНИЕ

Проектирование технического объекта связано с созданием, преобразованиями и представлением в принятой форме образа этого объекта. Образ объекта или его составных частей может создаваться в воображении человека в результате творческого процесса или генерироваться по некоторым алгоритмам в процессе взаимодействия человека и ЭВМ. В любом случае проектирование начинается при наличии задания на проектирование, которое отражает потребности общества в получении некоторого технического изделия. Это задание представляется в виде тех или иных документов и является исходным (первичным) описанием объекта. Результатом проектирования, как правило, служит полный комплект документации, содержащий достаточные сведения для изготовления объекта в заданных условиях. Эта документация представляет собой окончательное описание объекта.

Проектирование — процесс, заключающийся в преобразовании исходного описания объекта в окончательное описание на основе выполнения комплекса работ исследовательского, расчетного и конструкторского характера.

Современный инженер обязан представлять особую роль математических моделей и анализа проектных решений при проектировании технических объектов. Создание и сопровождение программно-методических комплексов проектирования невозможно без четкого осмысления методов и алгоритмов реализуемых в них.

Математическое обеспечение автоматизированного проектирования включает в себя математические модели объектов проектирования, методы и алгоритмы выполнения проектных процедур.

Математические модели на *микроуровне*, называемым распределенными, представлены дифференциальными уравнениями в частных производных вместе с краевыми условиями. Проектирование многих технических объектов связано с

необходимостью анализа непрерывных физических процессов, математическим описанием которых являются дифференциальные уравнения в частных производных.

Точное решение краевых задач удается получить лишь для немногих частных случаев. Поэтому общий способ их решения, в том числе и в САПР, заключается в использовании различных приближенных моделей. В настоящее время наиболее широкое распространение получили модели на основе интегральных уравнений и модели на основе метода сеток.

Сущность метода сеток состоит в аппроксимации искомой непрерывной функции совокупностью приближенных значений, рассчитанных в некоторых точках области — узлах. Совокупность узлов, соединенных определенным образом, образует сетку. Сетка, в свою очередь, является дискретной моделью области определения искомой функции.

Применение метода сеток позволяет свести дифференциальную краевую задачу к системе нелинейных в общем случае алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений функций.

В общем случае алгоритм метода сеток состоит из трех этапов.

Этап 1. Построение сетки в заданной области (дискретизация задачи).

Этап 2. Получение системы алгебраических уравнений относительно узловых значений (алгебраизация задачи).

Этап 3. Решение полученной системы алгебраических уравнений.

Наиболее часто в составе САПР используются два метода сеток:

- 1) метод конечных разностей (МКР);
- 2) метод конечных элементов (МКЭ).

Эти методы отличаются друг от друга на этапах 1 и 2 алгоритма. На этапе 3 методы практически идентичны.

1. АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Теоретическая часть

Пусть непрерывная функция $\varphi(x)$, определенная на отрезке, описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\varphi}{dx} + A\varphi = 0, \quad (1)$$

где A — константа; задано также граничное условие $\varphi(0) = 1$ и при дискретизации области была построена сетка с постоянным шагом h .

Заменим дифференциальный оператор $L_\varphi = \frac{d\varphi}{dx}$ разностным:

$$L_{h+} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}, \quad (2)$$

где L_{h+} — правая разностная производная.

Подставив (2) в (1), получим разностное уравнение

$$[\varphi(x+h) - \varphi(x)]/h + A\varphi(x) = 0. \quad (3)$$

Умножив (3) на h и полагая последовательность $x = 0, h, 2h, \dots$, перейдем к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi(h) + (Ah - 1)\varphi(0) &= 0; \\ \varphi(2h) + (Ah - 1)\varphi(h) &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ \varphi(Nh) + (Ah - 1)\varphi(Nh-1) &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

Решая (4) относительно сеточной функции, найдем таблицу значений, аппроксимирующую решение краевой задачи (1). При уменьшении шага h сетка становится все «гуще», а таблица значений сеточной функции — все подробнее. При

неограниченном стремлении шага к нулю можно было бы получить значение искомой функции в каждой точке области. Но, в реальных случаях степень приближения к точному решению ограничивается рядом факторов, важнейшим из которых является размерность результирующей системы уравнений (4).

Для аппроксимации дифференциального оператора разностным кроме (2) часто пользуются выражением:

$$L_{h^-} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h}, \quad (5)$$

где L_{h^-} — левая разностная производная.

Для аппроксимации L_φ можно воспользоваться любой линейной комбинацией (2), (5), т.е. $L_{h^\sigma} = \sigma L_{h^+} + (1-\sigma)L_{h^-}$, где σ — любая вещественная константа.

При $\sigma = 0,5$ дифференциальный оператор L_φ аппроксимируется центральной разностной производной.

$$L_{h^0} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (2), получим другой разностный аналог краевой задачи (1):

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{(2h) + A\varphi(x)} = 0. \quad (7)$$

При переходе от дифференциальной краевой задачи к разностной необходимо также аппроксимировать граничные условия. В (1) граничные условия при использовании (2) можно аппроксимировать точно:

$$\varphi(0) = 1. \quad (8)$$

Совокупность разностного уравнения и разностных краевых условий называется *разностной схемой краевой задачи*.

Уравнения (3) и (8) являются разностной схемой краевой задачи (1).

На рис. 1 приведены примеры шаблонов, наиболее часто использующихся при аппроксимации дифференциальных операторов $d\varphi/dx$ и $d\varphi/dy$ для функции $\varphi = \varphi(x, y)$ в двухмерной области.

Шаблон типа «крест» (рис. 1, а) соответствует аппроксимации:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx \frac{\varphi(x + h_x, y) - \varphi(x - h_x, y)}{2h_x},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \approx \frac{\varphi(x, y + h_y) - \varphi(x, y - h_y)}{2h_y},$$

где h_x и h_y - шаги сетки в направлениях x и y .

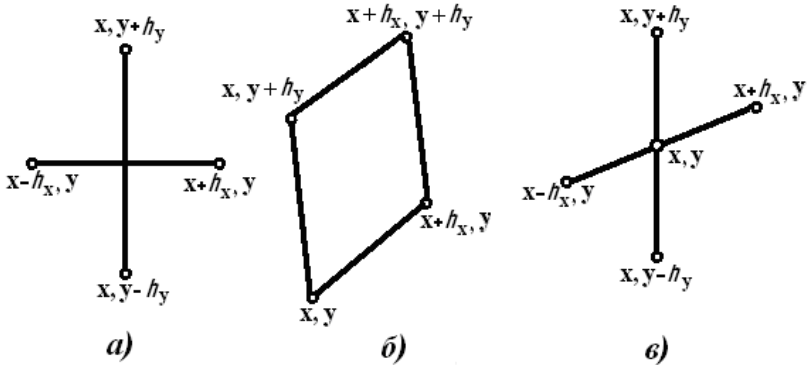


Рис. 1. Примеры шаблонов в двухмерной области

Четырехточечный шаблон (рис. 1, б) соответствует аппроксимации:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx 0,5 \frac{\varphi(x + h_x, y) - \varphi(x, y)}{h_x} + 0,5 \frac{\varphi(x + h_x, y + h_y) - \varphi(x, y + h_y)}{h_x},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \approx 0,5 \frac{\varphi(x, y + h_y) - \varphi(x, y)}{h_y} + 0,5 \frac{\varphi(x + h_x, y + h_y) - \varphi(x + h_x, y)}{h_y}.$$

Примеры устойчивых разностных схем для решения краевой задачи с краевыми условиями первого рода

Температурное поле в сплошной среде описывается уравнением теплопроводности

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q = 0. \quad (9)$$

Область определения искомой непрерывной функции $T(x, y)$ является прямоугольник, приведенный на рис. 2. Для решения задачи используется равномерная по направлениям осей x и y сетка шагами h_x и h_y соответственно. Для произвольного внутреннего узла (x, y) вторые производные по координатам аппроксимируется разностными аналогами P_x и P_y с помощью пятиточечного шаблона (рис. 1, в):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx P_x = \frac{1}{h_x} \left[\frac{T(x+h_x, y) - T(x, y)}{h_x} - \frac{T(x, y) - T(x-h_x, y)}{h_x} \right];$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx P_y = \frac{1}{h_y} \left[\frac{T(x, y+h_y) - T(x, y)}{h_y} - \frac{T(x, y) - T(x, y-h_y)}{h_y} \right].$$

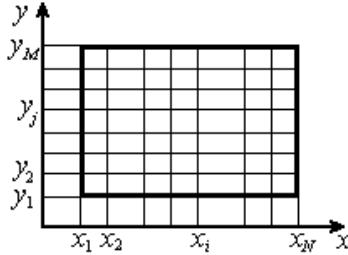


Рис. 2. Построение сетки в двухмерной области

Введя обозначения $T(x+h_x, y) = T_{i+1,j}$; $T(x, y-h_y) = T_{i,j-1}$ и т. д., можно записать в более компактной форме:

$$P_x = \left[\frac{(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j})}{h_x^2} \right];$$

$$P_y = \left[\frac{(T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1})}{h_y^2} \right] \quad (10)$$

Подставив (10) в (9) и считая $\lambda_x = \lambda_y = I$, получим разностное уравнение:

$$P_x + P_y + Q(ih_x, jh_y) = 0. \quad (11)$$

Прямолинейные границы, области позволяют в данном случае точно аппроксимировать краевые условия:

$$T_{i,j}^{ep} = T(ih_x, jh_y), \quad (12)$$

где точки ih_x и ih_y принадлежат границе области.

Разностная схема (11), (12) устойчива и аппроксимирует исходную краевую задачу (9) со вторым порядком точности относительно шага. Кроме того, она регулярна по направлениям осей x и y , что позволяет создавать быстродействующие алгоритмы решения результирующей системы алгебраических уравнений.

Практические задания

1. Для уравнения $\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} + \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} = 0$ при $\rho C_P = 1$ и $\lambda_x = 1$, описывающего одномерный случай конвективного переноса теплоты, постройте разностный аналог, воспользовавшись равномерной сеткой $t^n = n\tau$ при $n=0, 1, 2, \dots, x_m = mh, \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где τ — постоянный шаг сетки по времени; h — постоянный шаг сетки по координате. При аппроксимации частных производных используйте шаблоны, приведенные на рис. 3.

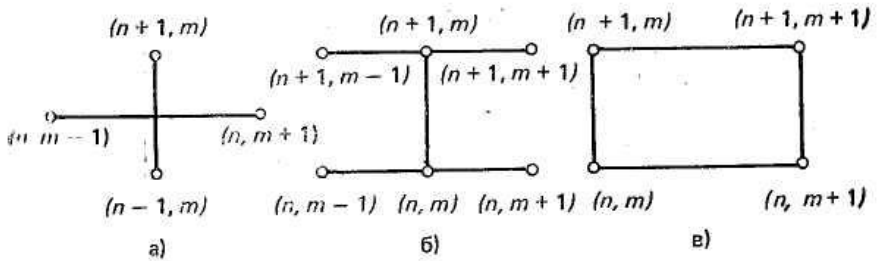


Рис. 3

2. Для уравнения $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, при $\rho C_p = 1$ и

$\lambda_x = 1$, описывающего нестационарное одномерное распределение теплоты, постройте разностный аналог, воспользовавшись равномерной сеткой из задачи 1. При аппроксимации частных производных используйте шаблоны, приведенные на рис. 4, а-в.

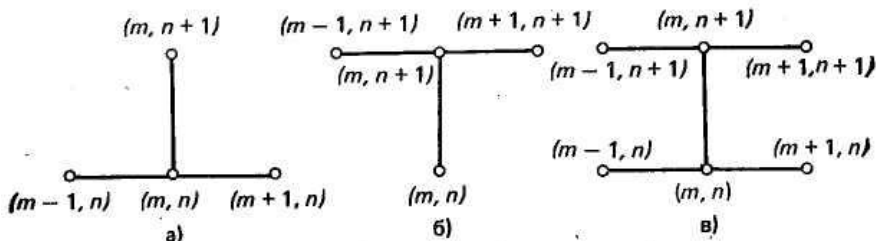


Рис. 4

2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОГИБА БАЛКИ

Теоретическая часть

В методе конечных разностей (МКР) на область рассматриваемого тела наносится сетка линий, точки пересечения которых называются *узлами*. В случае стержня или балки сетка будет одномерной и узлы будут располагаться на их оси. Неизвестными в узлах считаются значения функций, относительно которых справедливы известные дифференциальные уравнения механики деформируемого твердого тела.

Производные в дифференциальных уравнениях аппроксимируются приближенными алгебраическими формулами. Эти формулы называются *конечно-разностными* и неизвестными в них являются значения функций в узлах. Замена производных в дифференциальном уравнении конечно-разностными

формулами приводит к системе линейных алгебраических уравнений.

Граничные условия, содержащие производные, с помощью конечно-разностных формул также заменяются алгебраическими уравнениями. Решение системы линейных алгебраических уравнений позволяет найти распределение напряжений в теле и изменения его размеров и формы.

Основная идея *метода конечных разностей (метода сеток)* для приближенного численного решения краевой задачи для двухмерного дифференциального уравнения в частных производных состоит в том, что

1) на плоскости в области A , в которой ищется решение, строится *сеточная область* A_s (рис. 5), состоящая из одинаковых ячеек размером s (s – шаг сетки) и являющаяся приближением данной области A ;

2) заданное дифференциальное уравнение в частных производных заменяется в узлах сетки A_s соответствующим конечно-разностным уравнением;

3) с учетом граничных условий устанавливаются значения искомого решения в граничных узлах области A_s .

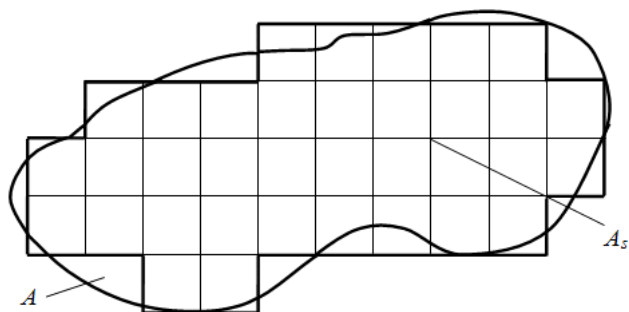


Рис. 5. Построение сеточной области

Решая полученную систему конечно-разностных алгебраических уравнений, получим значения искомой функции в

узлах сетки A_s , т.е. приближенное численное решение краевой задачи. Выбор сеточной области A_s зависит от конкретной задачи, но всегда надо стремиться к тому, чтобы контур сеточной области A_s наилучшим образом аппроксимировал контур области A .

Поясним метод конечных разностей на примере балки (рис. 6). Разобьем длину балки на несколько одинаковых участков с шагом a и обозначим через v_i прогиб в i -й точке на границе участков. Значения прогиба в соседних точках будут соответственно: v_{i+1} , v_{i+2} , v_{i-1} , v_{i-2} и т.д.

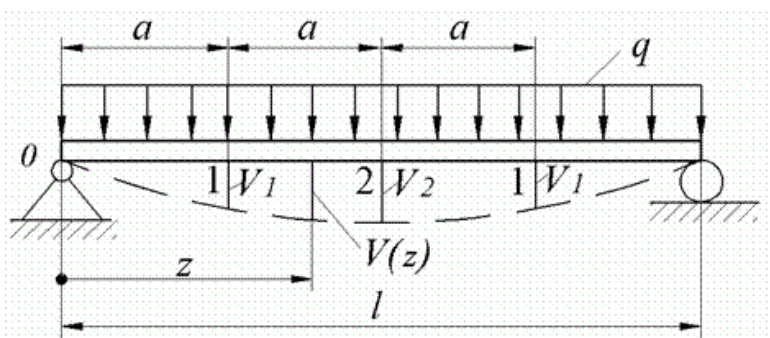


Рис. 6. Метод конечных разностей на примере балки

Из теории изгиба бруса известны следующие дифференциальные уравнения, связывающие между собой прогиб, изгибающий момент и интенсивность распределенной нагрузки:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{M}{EI_x}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = -q. \quad (13)$$

Аппроксимацию производной второго порядка проведем по формуле:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{a^2}. \quad (14)$$

Заменяя вторые производные, согласно равенству (14), получим уравнения изгиба балки в конечных разностях:

$$v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} = -\frac{M_i}{EI_x} a^2, \quad (15)$$

$$M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} = -q_i a^2. \quad (16)$$

Практическая часть

Задача. Вычислить изгибающий момент и прогиб балки, изображенной на рис. 6.

Решение. Возьмём число участков, равное четырем, тогда $a = \frac{l}{4}$. При $q = \text{const}$ и $M = 0$ в точках 1 и 2 получим:

$$M_2 - 2M_1 + M_0 = -\frac{ql^2}{16},$$

$$M_1 - 2M_2 + M_1 = -\frac{ql^2}{16}.$$

Из этих уравнений найдем

$$M_1 = \frac{3}{32} ql^2, \quad M_2 = \frac{1}{8} ql^2.$$

Полученные значения совпадают с точными значениями изгибающего момента при $z = \frac{l}{4}$ и $z = \frac{l}{2}$.

Приняв во внимание, что при $z=0$, $v=0$, получим

$$v_2 - 2v_1 + 0 = -\frac{3}{32} \frac{ql^2}{EI_x} \frac{l^2}{16}, \quad v_1 - 2v_2 + v_1 = -\frac{1}{8} \frac{ql^2}{EI_x} \frac{l^2}{16}.$$

Решение этой системы уравнений дает следующие значения перемещений:

$$v_1 = \frac{5}{32 \cdot 16} \frac{ql^4}{EI_x}, \quad v_2 = \frac{7}{32 \cdot 16} \frac{ql^4}{EI_x} = v_{max}.$$

Полученное значение максимального прогиба отличается от точного значения $v_{max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_x}$ приблизительно на 5%. Более точный результат можно получить, разбив длину балки на большее число участков.

Практическое задание

Решить задачу методом конечных разностей для уравнения: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

с начальными условиями

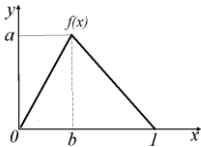
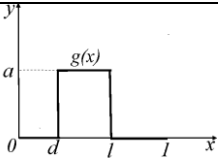
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

и граничными условиями $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

Вычисления выполнить с шагом h по x равным 0.1, с шагом τ по t равным 0.04, провести вычисления для 16 временных слоев с получением результатов на каждом шаге.

Исходные данные приведены в таблице ниже:

$f(x)$	$g(x)$	a	b	c	d	l
		7.0	0.35	-2.1	0.35	0.75

3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОГИБА ПЛАСТИНЫ

Теоретическая часть

При расчете пластин по методу конечных разностей плоскость пластины покрывают сеткой пересекающихся линий. Для простоты возьмем ортогональную сетку с одинаковым шагом по обоим направлениям (рис. 7).

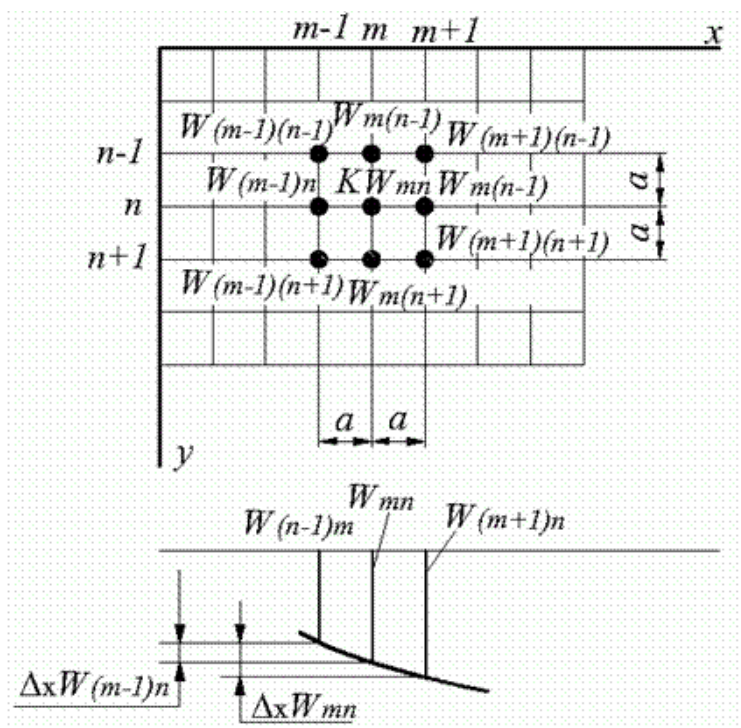


Рис. 7. Расчет пластины методом конечных разностей

Рассмотрим некоторую точку K , расположенную на пересечении линий, обозначенных символами m и n . Значения прогиба пластины w в этой точке, а также в соседних узловых точках будем обозначать так, как указано на рис. 7.

Если края пластины прямолинейные и закреплены шарнирно, то в этом случае уравнения теории изгиба пластин преобразуются следующим образом. Введя обозначение

$$\frac{M_x + M_y}{I + \mu} = M. \quad (17)$$

Получают систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p. \quad (19)$$

Эта система двух уравнений (18) и (19) второго порядка эквивалентна одному уравнению четвертого порядка.

Заменив вторые производные их приближенными выражениями

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Delta_{xx}(w_{mn}),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Delta_{yy}(w_{mn}),$$

придем к следующим уравнениям:

$$\Delta_{xx}(w) + \Delta_{yy}(w) = -\frac{M}{D} a^2, \quad (20)$$

$$\Delta_{xx}(M) + \Delta_{yy}(M) = -pa^2. \quad (21)$$

В таком виде уравнения удобны для расчета пластин с прямолинейными шарнирно опертыми краями, так как в этом

случае на контуре $w=0$, $M_n=0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$ и, следова-

тельно, $M=0$.

Практическая часть

Задача. Определить значения изгибающих моментов и прогибов для квадратной пластины с шарнирно опертыми краями, нагруженной равномерным давлением (рис. 8).

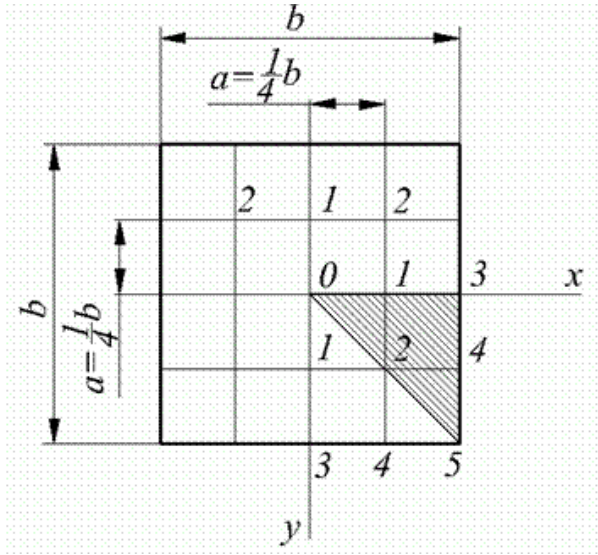


Рис. 8.

Решение. Длину стороны пластины обозначим через b , шаг сетки a возьмем равным $\frac{1}{4}b$. Ввиду симметрии достаточно рассмотреть одну восьмую часть квадрата, которая на рис. 8 заштрихована.

Применим уравнение (21) поочередно к точкам 0,1,2:

$$\Delta_{xx}(M_0) + \Delta_{yy}(M_0) = -pa^2,$$

$$\Delta_{xx}(M_1) + \Delta_{yy}(M_1) = -pa^2,$$

$$\Delta_{xx}(M_2) + \Delta_{yy}(M_2) = -pa^2.$$

Подставив значения вторых разностей, получим:
в точке 0

$$M_1 - 2M_0 + M_1 + M_1 - 2M_0 + M_1 = 4M_1 - 4M_0 = -\frac{pb^2}{16},$$

в точке 1

$$M_3 - 2M_1 + M_0 + M_2 - 2M_1 + M_2 = M_0 - 4M_1 + 2M_2 = -\frac{pb^2}{16},$$

в точке 2

$$M_4 - 2M_2 + M_1 + M_1 - 2M_2 + M_4 = 2M_1 - 4M_2 = -\frac{pb^2}{16}.$$

Так как в точках 3,4,5, $M=0$, то получим систему

$$4M_1 - 4M_0 = -\frac{pb^2}{16},$$

$$M_0 - 4M_1 + 2M_2 = -\frac{pb^2}{16},$$

$$2M_1 - 4M_2 = -\frac{pb^2}{16}.$$

Решение этой системы уравнений дает

$$M_0 = \frac{9}{2} \cdot \frac{pb^2}{64}; \quad M_1 = \frac{7}{2} \cdot \frac{pb^2}{64}; \quad M_2 = \frac{11}{4} \cdot \frac{pb^2}{64}.$$

Зная теперь функцию в узловых точках, применим уравнение (20) к тем же точкам 0, 1, 2:

$$\Delta_{xx}(w_0) + \Delta_{yy}(w_0) = -\frac{9}{2} \frac{pb^2}{64D} a^2,$$

$$\Delta_{xx}(w_1) + \Delta_{yy}(w_1) = -\frac{7}{2} \frac{pb^2}{64D} a^2,$$

$$\Delta_{xx}(w_2) + \Delta_{yy}(w_2) = -\frac{11}{4} \frac{pb^2}{64D} a^2.$$

После подстановки значений вторых разностей с учетом того, что $w_3=0$, $w_4=0$ и $w_5=0$, получим

$$4w_1 - 4w_0 = -\frac{9}{2} \cdot \frac{pb^4}{64 \cdot 16D},$$

$$w_0 + 2w_2 - 4w_1 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{pb^4}{64 \cdot 16D},$$

$$2w_1 - 4w_2 = -\frac{11}{4} \cdot \frac{pb^4}{64 \cdot 16D},$$

откуда

$$w_0 = \frac{66 pb^4}{16^2 \cdot 64D}, \quad w_1 = \frac{48 pb^4}{16^2 \cdot 64D}, \quad w_2 = \frac{35 pb^4}{16^2 \cdot 64D}.$$

Вычисленный прогиб в центре пластины

$$w_0 = \frac{66 pb^4}{12^2 \cdot 64D} = 0,00403 \frac{pb^4}{D}$$

отличается от точного значения $w_0 = 0,00406 \frac{pb^4}{D}$ меньше, чем на 1%.

Подсчитаем изгибающие моменты. В центре пластины по условию симметрии $M_{x0} = M_{y0} = \frac{M_0(1 + \mu)}{64 \cdot 2}$, следовательно,

$$M_{x0} = \frac{9}{2} \cdot \frac{pb^2(1 + 0,3)}{64 \cdot 2} = 0,0457 pb^2.$$

Точное же значение момента $M_{x0} = 0,0459 pb^2$. Погрешность составляет 4,5%. Для повышения точности решения следует взять более мелкую сетку.

При исследовании изгиба сложных пластин наряду с теоретическими методами широко применяют экспериментальные

методы исследования. К числу наиболее эффективных экспериментальных методов следует отнести метод муаровых полос, получивший развитие за последние годы. Сущность метода в том, что сетку параллельных линий, отраженную от зеркальной поверхности пластины, фотографируют дважды на одну и ту же пластинку, один раз до и второй раз после деформации.

Практическое задание

Составьте неявную и явную разностные схемы для уравнения $\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t}$ при $\rho C_P = 1$ и $\lambda_x = \lambda_y = 1$, описывающего двумерное нестационарное распределение теплоты в плоской пластине.

4. РАЗБИЕНИЕ ОБЛАСТИ НА КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Теоретическая часть

Процесс дискретизации задачи разделен на два этапа: разбиение области на элементы и нумерация элементов и узлов. Последний этап логически совершенно прост, но усложняется в связи с возможностью повысить эффективность вычислений.

Разбиение области на элементы - важный этап в МКЭ. От качества разбиения во многом зависит точность получаемых результатов. Например, разбиение на двумерные элементы, близкие по форме к равносторонним треугольникам, обеспечивает лучшие результаты по сравнению с разбиением на вытянутые по форме треугольные элементы. Возможность легко варьировать размерами элементов - важное свойство МКЭ (последнее позволяет без труда учитывать концентрацию напря-

жений, температурные градиенты, различные свойства материала изучаемого объекта и т. д.).

Разбиение области на элементы обычно начинают от ее границы с целью наиболее точной аппроксимации формы границы, затем производится разбиение внутренних областей. Часто разбиение области на элементы производят в несколько этапов. Сначала область разбивают на достаточно крупные подобласти (подконструкции), границы между которыми проходят там, где изменяются свойства материала, геометрия, приложенная нагрузка и пр. Затем каждая подобласть разбивается на элементы. Резкого изменения размеров конечных элементов на границах подобластей стараются избегать. На рис. 9. приведен пример разбиения двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами.

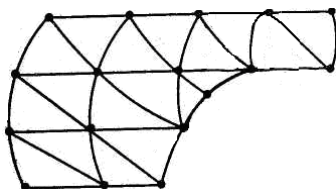


Рис. 9. Разбиение двумерной области на треугольные конечные элементы с криволинейными границами

Дискретизация одномерной области тривиальна, так как сводится только к делению отрезка на более короткие участки. Разбиение двумерной области на треугольники выделено потому, что этот элемент простейший из двумерных элементов в смысле аналитической формализации. Требование простоты элемента связано с тем, что при моделировании области должно быть использовано большое количество элементов.

При разбиении двумерной области на элементы сначала область делят на четырехугольные и треугольные подобласти, которые потом разделяют на треугольники. Наиболее просто можно разбить треугольную область на элементы, если вы-

брать определенное число узлов вдоль каждой стороны, соединить соответствующие узлы прямыми линиями и точки пересечения этих линий считать узлами. Узлы на сторонах треугольника не обязательно располагать на равных расстояниях. Варьирование расстояния между узлами позволяет изменять размеры элементов. Если на стороне треугольной области выбрать n узлов, то число треугольных элементов в результате разбиения области равно $(n-1)^2$.

Четырехугольные области обычно разбивают на элементы, соединяя узлы на противоположных сторонах. Пересечения линий определяют внутренние узлы. Четырехугольные элементы могут быть разбиты на треугольные проведением диагонали меньшей длины. Число узлов на смежных сторонах четырехугольника может быть различным, но на противоположных сторонах должно быть одинаковым. Расстояние между узлами может варьироваться, чтобы получать элементы различных размеров. Если на смежных сторонах четырехугольника выбрано n и m узлов, то будет $2(n-1)(m-1)$ треугольных элементов.

Четырехугольная и треугольная подобласти могут иметь общую границу. Число узлов на этой границе должно быть одинаковым для обеих подобластей и относительное положение узлов должно совпадать. Это требование необходимо для сохранения непрерывности рассматриваемых величин вдоль общей границы элементов.

Нумерация узлов элементов (глобальная нумерация узлов) — следующая процедура этапа выделения конечных элементов. Порядок нумерации имеет в данном случае существенное значение, так как влияет на эффективность последующих вычислений.

Матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений, к которой приводит МКЭ, - сильно разреженная матрица ленточной структуры. Ненулевые элементы такой матрицы располагаются параллельно главной диагонали (рис. 10).

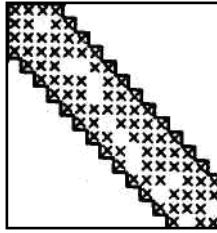


Рис. 10. Матрица ленточной структуры

Целое число L , представляющее собой наибольшую разность между номерами ненулевых элементов в строке, называется *шириной полосы*. Чем меньше ширина полосы, тем меньший объем оперативной памяти требуется для хранения матрицы при реализации МКЭ в САПР и тем меньше затраты машинного времени на решение результирующей системы уравнений. Ширина полосы зависит от числа степеней свободы узлов и способа нумерации последних.

Под *числом степеней свободы* понимают количество неизвестных функций, определяемых в каждом узле. Так, например, для двухмерных задач гидравлики в каждом узле определяют три переменные: давление и составляющие скорости по осям X и Y .

При нумерации узлов предпочтителен способ, обеспечивающий минимальную разность между номерами узлов в каждом отдельном элементе. Если максимальную разность между номерами узлов для отдельного элемента обозначить N , а число степеней свободы — M , то ширина полосы

$$L = (N + 1)M. \quad (22)$$

В некоторых случаях уменьшение числа N может быть достигнуто последовательной нумерацией узлов при движении в направлении наименьшего размера рассматриваемой области.

На рис. 11 приведены два различных способа нумерации узлов произвольной области, разбитой на конечные элементы.

При первом способе (рис. 11, *a*) $N = 14$, при втором (рис. 11, *б*) $N = 5$. Ширина полосы для представленных способов при одной степени свободы в узле получается равной соответственно 15 и 6; при двух степенях свободы — 30 и 12. Рациональная нумерация в случае рис. 11, *б* сокращает необходимый объем памяти почти в три раза по сравнению со случаем рис. 11, *a*.

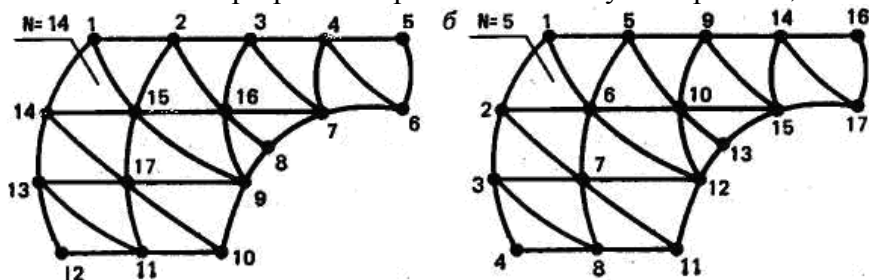


Рис. 11. Способы нумерации узлов при разбиении двумерной области на конечные элементы

Практические задания

1. Пронумеруйте узлы конечных элементов в области, приведенной на рис. 12, так, чтобы обеспечить минимальную ширину полосы в матрице коэффициентов результирующей системы уравнений.

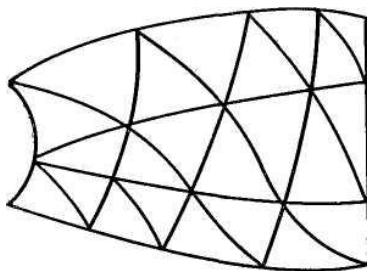


Рис. 12

2. Разбейте треугольную область на 16 элементов, пронумеруйте узлы и вычислите ширину полосы ленты при условии наличия двух степеней свободы в каждом узле.

3. Разбейте четырехугольник на 24 элемента, используя пять узлов вдоль одной пары сторон и четыре узла вдоль другой пары. Пронумеруйте узлы так, чтобы получить минимальное значение величины N – максимальная по элементам величина наибольшей разности между номерами узлов в отдельном элементе.

4. Разбейте прямоугольный треугольник примерно на 60 элементов, предварительно выделив две треугольные и одну четырехугольную подобласти. Поместите наименьшие по размерам элементы вблизи прямого угла. Пронумеруйте узлы конечных элементов так, чтобы обеспечить минимальную ширину полосы в матрице коэффициентов результирующей системы уравнений.

5. РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Теоретическая часть

В МКЭ исходная область определения функции разбивается с помощью сетки, в общем случае неравномерной, на отдельные подобласти — *конечные элементы*. Искомая непрерывная функция аппроксимируется кусочно–непрерывной, определенной на множестве конечных элементов. Аппроксимация может задаваться произвольным образом, но чаще всего для этих целей используются полиномы, которые подбираются так, чтобы обеспечить непрерывность искомой функции в узлах на границах элементов.

Аналогичный подход может быть и в случае двух– трехмерных областей определения искомой функции.

Для двумерных областей наиболее часто используются элементы в форме треугольников и четырехугольников. При этом элементы могут иметь как прямо-, так и криволинейные границы, что позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать границу любой формы.

Для трехмерных областей наиболее подходят элементы в форме тетраэдра и параллелепипеда, которые также могут иметь, прямолинейные и криволинейные границы.

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырех этапов:

Этап 1. *Выделение конечных элементов* (разбиение заданной области на конечные элементы).

Этап 2. *Определение аппроксимирующей функции* для каждого элемента (определение функции элемента). На данном этапе значение непрерывной функции $\varphi^{(e)}$ в произвольной точке e -го конечного элемента аппроксимируется полиномом

$$\varphi^{(e)} = A^{(e)}R + A_0,$$

где $A^{(e)}$ — вектор-строка коэффициентов полинома; A_0 — свободный член; $R = (x, y, z)$ — вектор координат в рассматриваемой точке.

Задача этапа заключается в определении неизвестного вектора $A^{(e)}$ и свободного члена A_0 . Для этого, используя условие непрерывности функции в узлах, коэффициенты полинома выражают через *вектор $\Phi^{(e)}$ узловых значений функции* и координаты узлов и, проделав эквивалентные преобразования, получают

$$\varphi^{(e)} = N^{(e)}\Phi^{(e)}, \quad (23)$$

где $N^{(e)}$ — матрица-строка, элементы которой называют *функциями формы* конечного элемента.

Функции формы легко вычисляются в каждой точке конечного элемента через координаты самой точки и координаты узлов элемента.

Этап 3. *Объединение конечных элементов в ансамбль.* На этом этапе уравнения (23), относящиеся к отдельным эле-

ментам, объединяются в ансамбль, т. е. в систему алгебраических уравнений:

$$\varphi = N\Phi. \quad (24)$$

Система (24) является моделью искомой непрерывной функции.

Этап 4. Определение вектора узловых значений функции.

Практическая часть

Задача 1. Получите выражение для функций формы одномерного симплекс-элемента представляющего собой отрезок, приведенный на рисунке ниже. Интерполяционный полином для элемента имеет вид $\varphi = a_1 + a_2x$ (рис. 13).

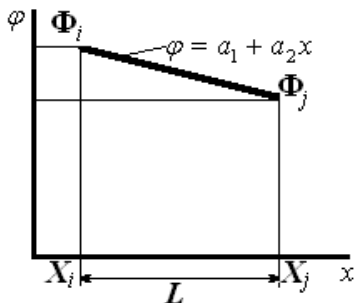


Рис. 13

Коэффициенты a_1 и a_2 определяются через узловые значения функции Φ_i и Φ_j в соответствии с условием непрерывности:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi_i \text{ при } x = X_i \\ \varphi &= \Phi_j \text{ при } x = X_j \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив (25) в интерполяционный полином элемента, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= a_1 + a_2 X_i; \\ \Phi_j &= a_1 + a_2 X_j \end{aligned}$$

решая, которую определим a_1 и a_2 :

$$a_1 = \Phi_i - a_2 X_i; \quad L = X_j - X_i;$$

$$\Phi_j = \Phi_i - a_2 X_i + a_2 X_j$$

$$a_2 = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{X_j - X_i} = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L}$$

$$a_1 = \Phi_i - \left(\frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \right) X_i = \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L}$$

$$\text{т.е. } a_1 = (\Phi_i X_j - \Phi_j X_i) / L; \quad a_2 = (\Phi_j - \Phi_i) / L$$

Подставив вычисленные значения коэффициентов аппроксимирующего полинома в интерполяционный полином элемента, получим

$$\varphi = \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L} + \left(\frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \right) x$$

Проведем эквивалентные преобразования правой части:

$$\varphi = \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L} + \left(\frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \right) x = \Phi_i \frac{X_j - x}{L} + \Phi_j \frac{x - X_i}{L}$$

Члены полученного уравнения, заключенные в скобки, являются функциями формы одномерного симплекс-элемента:

$$N_i = (X_j - x) / L; \quad N_j = (x - X_i) / L$$

Т.е. $\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j$ или в матричной форме $\varphi = N \Phi$,

где $N = [N_i, N_j]$ - матрица-строка; $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix}$ - вектор-столбец.

Задача 2. Составьте ансамбль конечных элементов в задаче нахождения поля температур в стержне. Кусочно-элементная модель области приведена на рис. 14, а функция

отдельного элемента определяется уравнением $\varphi = N\Phi$, где

$N = [N_i, N_j]$ - матрица-строка; $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix}$ - вектор-столбец.

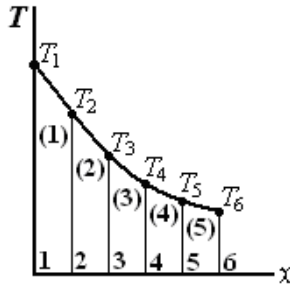


Рис. 14

Можно написать соответствие между произвольными номерами i, j и глобальными номерами узлов рассматриваемой дискретной модели для

- элемента 1: $i = 1, j = 2$,
- элемента 2: $i = 2, j = 3$,
- элемента 3: $i = 3, j = 4$,
- элемента 4: $i = 4, j = 5$,
- элемента 5: $i = 5, j = 6$.

Подставив значения номеров узлов в основное уравнение задачи, получим:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2 \\ \varphi^{(2)} &= N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3 \\ \varphi^{(3)} &= N_3^{(3)}T_3 + N_4^{(3)}T_4 \\ \varphi^{(4)} &= N_4^{(4)}T_4 + N_5^{(4)}T_5 \\ \varphi^{(5)} &= N_5^{(5)}T_5 + N_6^{(5)}T_6 \end{aligned}$$

где верхние индексы в скобках относятся к номеру элемента.

Задача 3. Для аппроксимации распределения температуры в стрержне с помощью одномерного симплекс-элемента было установлено, что температура в узлах i и j равна 120 и 90°C соответственно (рис. 15). Определите температуру в точке на расстоянии 4 см от начала координат и градиент температуры внутри элемента. Узлы i и j расположены на расстоянии $1,5$ и 6 см от начала координат.

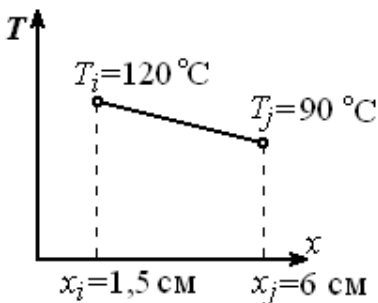


Рис. 15

Решение. Температура (t) внутри одномерного симплекс-элемента определяется соотношением

$$t = \left(\frac{X_j - x}{L}\right)T_i + \left(\frac{x - X_i}{L}\right)T_j.$$

Данные элемента:

$$X_i = 1,5 \text{ см}, \quad T_i = 120^\circ\text{C}.$$

$$X_j = 6,0 \text{ см}, \quad T_j = 90^\circ\text{C}.$$

$$x = 4,0 \text{ см}, \quad L = X_j - X_i = 4,5 \text{ см}.$$

Подставляя исходные данные в формулу для температуры, получим

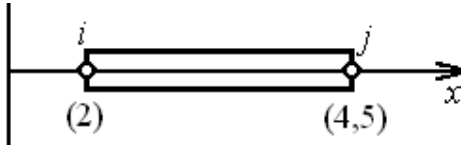
$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{6,0 - 4,0}{4,5}\right) \cdot 120 + \left(\frac{4,0 - 1,5}{4,5}\right) \cdot 90 = \frac{2 \cdot 120}{4,5} + \frac{2,5 \cdot 90}{4,5} = \\ &= 53,33 + 50 = 103,33^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Для градиента температур получим

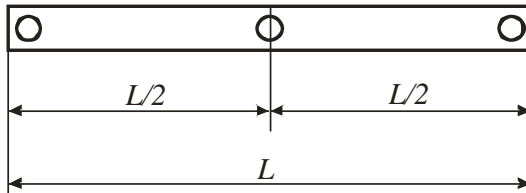
$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{1}{L}T_i + \frac{1}{L}T_j = \frac{1}{L}(T_j - T_i) = \frac{90 - 120}{4,5} = \frac{-30}{4,5} = -6,67 \frac{^\circ\text{C}}{\text{см}}.$$

Практические задания

1. Вычислите функцию формы для элемента, представленного на рисунке ниже. Узловые координаты указаны в круглых скобках.

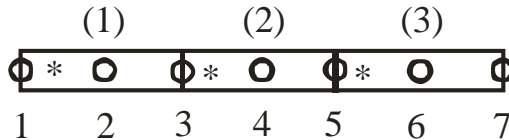


2. Получите выражение для функции формы одномерного квадратичного элемента (элемента с одним внутренним узлом), изображенного на рисунке ниже. Интерполяционный полином для элемента имеет вид $\varphi = a_1 + a_2x + a_3x^2$.



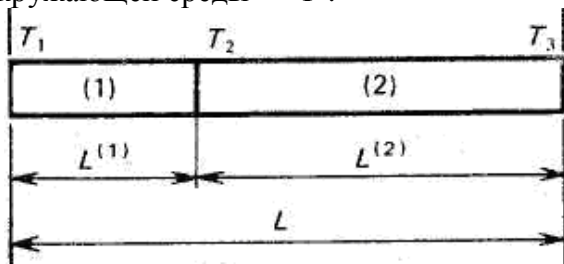
3. Составьте уравнения ансамбля конечных элементов для области, приведенной на рисунке ниже. Отправной узел для каждого элемента помечен звездочкой.

- а) В каждом узле определена одна степень свободы.
- б) В каждом узле определена векторная величина, имеющая три степени свободы.



4. Запишите систему уравнений для определения узловых температур в одномерном однородном стержне длиной L с постоянной площадью сечения S . Конечно-элементная модель

стержня приведена на рисунке. Левый конец стержня жестко закреплен, и к нему подводится тепловой поток заданной интенсивности q . Правый свободный конец стержня теплоизолирован, а вдоль боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен. Коэффициент теплообмена — α , температура окружающей среды — T_* .



6. РЕШЕНИЕ ДВУХМЕРНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Теоретическая часть

Двухмерный симплекс–элемент представляет собой плоский треугольник с прямолинейными сторонами.

Интерполяционный полином, аппроксимирующий непрерывную функцию φ внутри треугольного симплекс–элемента имеет вид

$$\varphi = a_1 + a_2x + a_3y. \quad (26)$$

Чтобы получить выражения для функций формы элемента, необходимо пронумеровать узлы треугольника. Обозначим их номерами i, j, k , начиная с произвольно выбранного узла, двигаясь при этом против часовой стрелки (рис. 16). Узловые значения Φ_i, Φ_j, Φ_k будем по-прежнему считать известными.

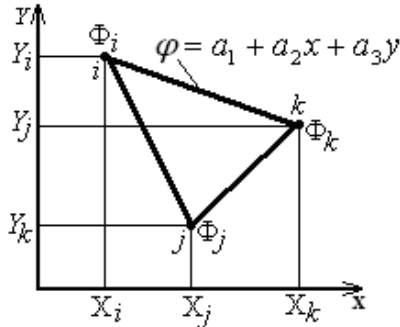


Рис. 16. Функция двухмерного симплекс-элемента

Используя условие непрерывности искомой функции в узлах аналогично предыдущему случаю, составим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 \Phi_i &= a_1 + a_2 X_i + a_3 Y_i; \\
 \Phi_j &= a_1 + a_2 X_j + a_3 Y_j; \\
 \Phi_k &= a_1 + a_2 X_k + a_3 Y_k.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

решая которую относительно неизвестных коэффициентов полинома, получим:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (0,5/S[(X_j Y_k - X_k Y_j)\Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k)\Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i)\Phi_k]); \\
 a_2 &= (0,5/S)[(Y_j - Y_k)\Phi_i + (Y_k - Y_i)\Phi_j + (Y_i - Y_j)\Phi_k]; \\
 a_3 &= (0,5/S)[(X_k - X_j)\Phi_i + (X_i - X_k)\Phi_j + (X_j - X_i)\Phi_k].
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

где S — площадь элемента, вычисляемая по формуле

$$S = 0,5[X_i(Y_j - Y_k) + X_j(Y_k - Y_i) + X_k(Y_i - Y_j)].$$

Подставим (28) в (27), проделаем аналогичные преобразования, получим

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k;
 \tag{29}$$

$$N_i = (0,5/S)(a_i + b_i x + c_i y),$$

где $N_j = (0,5/S)(a_j + b_j x + c_j y),$ (30)

$$N_k = (0,5/S)(a_k + b_k x + c_k y);$$

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j, & a_j &= (X_k Y_i - Y_k X_i), \\ \text{и} \quad b_i &= Y_j - Y_k, & b_j &= Y_k - Y_i, \\ c_i &= X_k - X_j, & c_j &= X_i - X_k, \\ a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i, \\ b_k &= Y_i - Y_j, \\ c_k &= X_j - X_i. \end{aligned}$$

Определитель системы (27) связан с площадью треугольника S соотношением

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2S.$$

Вычисляя значения функций формы N_i, N_j, N_k нетрудно убедиться, что они равны 1 в узлах с соответствующими номерами и 0 в остальных узлах элемента.

Практическая часть

Задача 1. Получить соотношение, определяющее элемент с вершинами в точках $(0;0), (4;0,5), (2;5)$, и вычислить значение давления в точке B с координатами $(2;1,5)$, если заданы узловые значения $P_i=50 \text{ Н/см}^2, P_j=32 \text{ Н/см}^2, P_k=48 \text{ Н/см}^2$.

Решение. Давление p внутри элемента определяется по формуле $p = N_i P_i + N_j P_j + N_k P_k,$

где

$$\begin{aligned} N_i &= (0,5/S)(a_i + b_i x + c_i y), \\ N_j &= (0,5/S)(a_j + b_j x + c_j y), \\ N_k &= (0,5/S)(a_k + b_k x + c_k y). \end{aligned}$$

Подставив значения координат узлов, получим

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 0,5 = 19,$$

$$b_i = Y_j - Y_k = 0,5 - 5 = -4,5,$$

$$c_i = X_k - X_j = 2 - 4 = -2,$$

$$a_j = (X_k Y_i - Y_k X_i) = 2 \cdot 0 - 0 \cdot 5 = 0,$$

$$b_j = Y_k - Y_i = 5 - 0 = 5,$$

$$c_j = X_i - X_k = 0 - 2 = -2,$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i = 0 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0 = 0,$$

$$b_k = Y_i - Y_j = 0 - 0,5 = -0,5,$$

$$c_k = X_j - X_i = 4 - 0 = 4.$$

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0,5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19.$$

После подстановки констант в функции формы выражение для p примет вид

$$p = \frac{1}{19} \left((19 - 4,5x - 2y)P_i + (5x - 2y)P_j + (-0,5x + 4y)P_k \right)$$

Значение давления p в точке B с координатами $(2; 1,5)$ равно

$$p = \frac{1}{19} \left((19 - 4,5 \cdot 2 - 2 \cdot 1,5) \cdot 50 + (5 \cdot 2 - 2 \cdot 1,5) \cdot 32 + (-0,5 \cdot 2 + 4 \cdot 1,5) \cdot 48 \right) = \frac{1}{19} (7 \cdot 50 + 7 \cdot 32 + 5 \cdot 48) = 42,84 \text{ Н / см}^2.$$

Практические задания

1. Вычислите функцию формы для элемента, представленного на рис. 17. Узловые координаты указаны в круглых скобках.

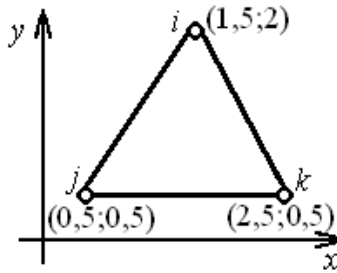


Рис. 17

2. Получите выражения для функций формы двухмерного четырехугольного мультиплекс-элемента, приведенного на рис. 18. Интерполяционный полином для элемента имеет вид $\varphi = a_1 + a_2x + a_3y + a_4yx$.

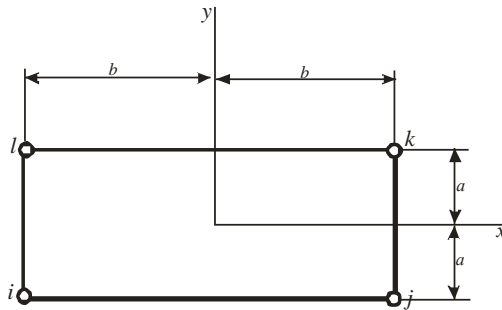


Рис. 18

3. Вычислите значения функций формы во внутренней точке A с координатами $x=2$, $y=2,5$ двухмерного симплекс-элемента при следующих значениях координат узлов: $x_i=1$; $y_i=2$; $x_j=4$; $y_j=1$; $x_k=3$; $y_k=4$. Определите значение температуры во внутренней точке A при следующих узловых значениях непрерывной функции T : $T_i = 15^\circ C$; $T_j = 20^\circ C$; $T_k = 40^\circ C$.

4. Составьте уравнения ансамбля конечных элементов для области, приведенной на рис. 19, в сокращенной и расширенной формах. Отправной узел для каждого элемента помечен звездочкой.

а) Каждый узел имеет одну степень свободы.

б) В каждом узле определена векторная величина, имеющая две степени свободы.

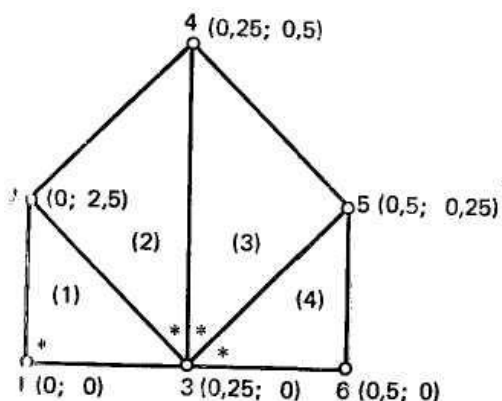


Рис. 19

5. Вычислите матрицы жесткости отдельных конечных элементов в задаче о кручении стержня. Координаты узлов элементов приведены на рис. 20.

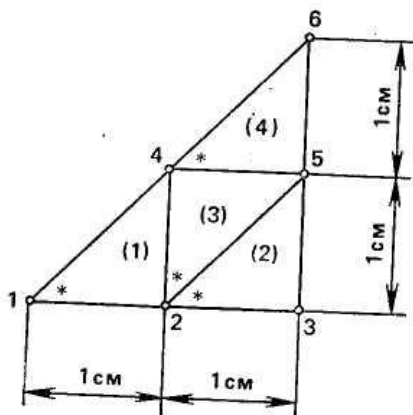


Рис. 20

7. РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Теоретическая часть

Трехмерный симплекс-элемент представляет собой тетраэдр. Четыре его узла обозначены индексами i, j, k, l причем обход узлов i, j, k осуществляется против часовой стрелки. Узел l расположен в вершине, находящейся вне плоскости узлов i, j, k .

Интерполяционный полином для тетраэдра имеет вид

$$\varphi = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \quad (31)$$

Коэффициенты полинома (1) можно определить из условий в узлах конечного элемента

$$\begin{aligned} \Phi_i &= a_1 + a_2X_i + a_3Y_i + a_4Z_i, \\ \Phi_j &= a_1 + a_2X_j + a_3Y_j + a_4Z_j, \\ \Phi_k &= a_1 + a_2X_k + a_3Y_k + a_4Z_k, \\ \Phi_l &= a_1 + a_2X_l + a_3Y_l + a_4Z_l. \end{aligned} \quad (32)$$

Эта система уравнений может быть решена с помощью правила Крамера. Такой алгоритм требует вычисления пяти определителей. Проще провести вычисления на ЭВМ.

Систему уравнений (32) запишем в матричной форме

$$[\Phi]^T = [C] \cdot [a], \quad (33)$$

где $[\Phi]^T = [\Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l]$, $[a]^T = [a_1 a_2 a_3 a_4]$,

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix}.$$

Строка коэффициентов $[a]$ может быть получена обращением матрицы $[C]$ и последующим умножением (33) на $[C]^{-1}$:

$$[a] = [C]^{-1} \cdot [\Phi]. \quad (34)$$

Так как

$$\varphi = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z = [1 \ x \ y \ z] \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix},$$

то, используя (34), получим $\varphi = [1 \ x \ y \ z] \cdot [C]^{-1} \cdot [\Phi]$.

Замечание. Определитель матрицы $[C]$ равен шести объемам тетраэдра.

Практическая часть

Задача. Даны координаты вершин тетраэдра: $(1,2,1)$, $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(1,0,3)$. Определить функции формы трехмерного конечного элемента, используя процедуру обращения матрицы.

Решение. По значениям координат узлов составим матрицу

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ей соответствует обратная матрица

$$[C]^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Запишем интерполяционный полином

$$\varphi = [1 \ x \ y \ z] \cdot [C]^{-1} \cdot [\Phi].$$

Так как $\varphi = [N] \cdot [\Phi]$, функции формы представляются произведением вида $N = [I \ x \ y \ z] \cdot [C]^{-1}$.

После подстановки $[C]^{-1}$ получим

$$[N] = \frac{1}{6} [I \ x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

или

$$[N] = \left[\frac{y}{2}, \frac{1}{6}(6 - 3x - y - z), \frac{1}{6}(3x - y - z), \frac{1}{6}(-y + 2z) \right].$$

Таким образом, функции формы элемента имеют вид

$$N_i = \frac{y}{2}, \quad N_j = \frac{6 - 3x - y - z}{6},$$

$$N_k = \frac{3x - y - z}{6}, \quad N_l = \frac{-y + 2z}{6}.$$

Практические задания

1. Определить функции формы трехмерного конечного элемента, используя процедуру обращения матрицы. Координаты вершин тетраэдра $(0,1,1)$, $(2,0,0)$, $(1,0,3)$, $(2,2,1)$.

2. Матрица C^{-1} для тетраэдрального элемента с узлами в точках $(0,0,0)$, $(2,1,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,2)$ имеет вид

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Показать, что эта матрица является обратной к матрице C . Определить функции формы этого элемента.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зинкевич, К. Морган. — М.: Мир, 1986. — 318 с.
- 2 Ли К. Основы САПР (CAD/ CAM/ CAE) / К. Ли. — СПб.: Питер, 2004. — 560 с.
- 3 Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования: учеб. для вузов / И.П. Норенков. 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2006. — 448 с.
- 4 Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. М.: Мир, 1979. — 393 с.
- 5 Килина А.А. Модели и методы анализа проектных решений: учеб. пособие / А.А. Килина, Е.Д. Федорков. Воронеж: ВГТУ, 2008. — 228 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	1
1. Аппроксимация дифференциальных операторов	3
2. Метод конечных разностей. Исследование прогиба балки	8
3. Метод конечных разностей. Исследование прогиба пластины	13
4. Разбиение области на конечные элементы	18
5. Решение одномерных задач методом конечных элементов	23
6. Решение двумерных задач методом конечных элементов	30
7. Решение трехмерных задач методом конечных элементов	36
Библиографический список	39

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по дисциплине
«Модели и методы анализа проектных решений»
для студентов направления подготовки бакалавров
230100 «Информатика и вычислительная техника»
(профиль «Системы автоматизированного проектирования
в машиностроении») очной и заочной форм обучения

Составитель
Собенина Ольга Валерьевна

В авторской редакции
Компьютерный набор О.В. Собениной

Подписано к изданию 27.10.2014.
Уч.-изд. л. 2,4. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический
университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14