С.В. Амелин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Воронеж 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

С.В. Амелин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Утверждено учебно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2017

УДК 519.85 (075) + 658.012.122 (075)
ББК 65в641я7
А 615

Амелин С.В. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые, граф. данные (3,02 Мб) / С.В. Амелин. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2017. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) : цв. – Систем. требования : ПК 500 и выше ; 256 Мб ОЗУ ; Windows XP ; SVGA с разрешением 1024x768 ; Adobe Acrobat ; CD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с экрана.

Представлены основные разделы оптимизационного экономико-математического моделирования сложных организационно-экономических систем и процессов, необходимые экономистам и менеджерам для обоснования управленческих решений. При изложении материала используется компьютерно-ориентированный подход.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», специализации «Экономика и организация производства на режимных объектах», дисциплине «Математические методы и модели в экономике».

Табл. 21. Ил. 80. Библиогр.: 9 назв.

Рецензенты: кафедра информационных технологий и математических методов Воронежского государственного университета (зав. кафедрой д-р экон. наук, проф. В.В. Давнис);
канд. экон. наук, доц. Д.М. Шотыло

ВВЕДЕНИЕ

Сложный характер теоретических и практических задач современной рыночной экономики требует использования математических методов в производственно-экономической деятельности для обоснования управленческих решений, призванных обеспечить экономическую безопасность предприятий и организаций, создать условия для их нормального функционирования и развития. Проблемы, с которыми сталкиваются специалисты в различных областях экономики, зависят от множества различных, противоречивых факторов, меняющихся со временем и влияющих на другие проблемы и процессы.

В последнее время математическое моделирование является одним из важнейших методов изучения и анализа экономических объектов и процессов и прогнозирования их развития. Важность использования математических методов в анализе экономических проблем подчеркивается тем, что Нобелевские премии в области экономики получают в основном за успехи в экономико-математическом моделировании.

Экономико-математическое моделирование – это один из эффективных методов описания сложных социально-экономических систем и процессов в целях выработки оптимальных решений.

Математические модели отображают экономические проблемы в абстрактной форме и позволяют учесть большое число различных характеристик исследуемых проблем.

Экономико-математическое моделирование призвано помочь руководителям различного ранга в выработке, обосновании и принятии эффективных, качественных, оптимальных решений в области экономики, организации производства и управления, в инвестиционном проектировании и в финансовой сфере. Это должно повысить надежность функционирования производственно-экономических систем.

Квалифицированные специалисты в различных областях экономической деятельности должны обладать обширными познаниями в сфере экономико-математического моделирования для решения задач оптимального распределения ограниченных ресурсов; выработки эффективных решений в условиях неопределенности, противоречивости ограничений; анализа производственно-экономической информации и прогнозирования развития исследуемых процессов на основе современных компьютерных технологий.

Из всего многообразия оптимизационных экономико-математических методов и моделей наибольшее распространение получили межотраслевые балансы, сетевые методы планирования и управления, теория массового обслуживания, модели управления запасами, теорию игр и статистических решений, математическое программирование. В данном пособии рассмотрим способы построения моделей и их применение для решения экономических задач.

Целью дисциплины "Математические методы и модели в экономике" является подготовка студентов к использованию современной теории и практики экономико-математического моделирования при разработке, принятии и реализации оптимальных управленческих решений в процессе управления предприятием.

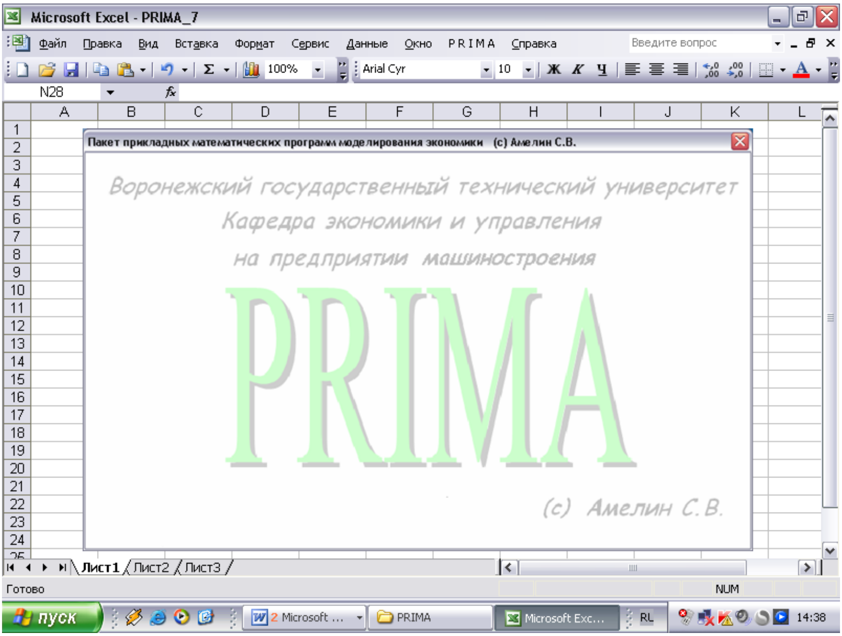
Задачи дисциплины:

- изучение теоретических основ и развитие практических навыков применения методов принятии оптимальных решений в реальных условиях многокритериальности и неполноты информации рыночной экономики, с использованием современных методов экономико-математического моделирования и информационных технологий;

- освоение будущим экономистом комплекса методов поиска и обоснованного выбора наилучших (оптимальных) решений, формирование у него потребности в их повседневном использовании, раскрытие особенности экономико-математических методов и моделей при обосновании решений, принимаемых руководителем производственного коллектива и возможности технических средств в реализации основных технологических этапов их получения;

- развитие у студентов навыков творческого подхода к выбору методов моделирования при анализе производственных ситуаций и выработке своевременных обоснованных оптимальных управленческих решений на современных машиностроительных предприятиях.

Пакет программ прикладного математического моделирования ППП PRIMA в среде Excel для персональных компьютеров разработан Амелиным С.В., д.э.н., профессором кафедры экономики и управления на предприятии машиностроения Воронежского государственного технического университета.



Тема 1. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

В результате изучения данной темы студенты должны:

знать:

- область применения моделей сетевого планирования и управления в экономике;
- основные понятия сетевого планирования и управления;
- методы расчёта параметров моделей сетевого планирования и управления;

уметь:

- формулировать постановку различных задач линейного программирования;
- находить решение задач линейного программирования с помощью графического и симплексного методов;
- давать экономическую интерпретацию полученных результатов решения задач линейного программирования;
- применять методы сетевого планирования и управления для решения практических задач;

владеть:

- математическим аппаратом линейного программирования;
- практическими навыками формулирования и решения задач сетевого планирования и управления, в том числе, с использованием ЭВМ.

Успешное управление фирмой предполагает, что ее руководители и специалисты должны иметь представление о методах календарного планирования выполнения комплекса работ, контроля за ходом и сроками их выполнения и регулирования возникающих отклонений путем перераспределения ресурсов. Для этого следует подробно описать последовательность взаимосвязанных работ, выполнение которых необходимо для достижения поставленной цели.

Объектом управления в системе сетевого планирования и управления (СПУ) является коллектив исполнителей, располагающий определенными материальными и денежными ресурсами и выполняющий комплекс работ, направленный на достижение конечного результата в установленные сроки.

Система СПУ позволяет:

1. Составлять календарный план реализации комплекса работ;
2. Выявлять и мобилизовать резервы времени, трудовые, материальные и денежные ресурсы;
3. Повышать эффективность управления, прогнозируя и предупреждая возможные срывы в ходе выполнения работ;

Система СПУ включает следующие основные этапы:

1. Выявление работ, которые необходимо провести, составление их подробного перечня и установление их последовательности и связи между ними;
2. Построение сетевого графика на основе выявленной очередности выполнения работ;
3. Учет имеющихся ресурсов, установление количественных оценок по каждой работе (например, время выполнения, количество исполнителей);
4. Расчет параметров сетевого графика;
5. Анализ и оптимизация сетевого графика (для ускорения выполнения работ производится необходимое перераспределение ресурсов);
6. Использование сетевого графика как основного инструмента управления ходом работ.

Сетевая модель и ее основные элементы

Сетевая модель – это математическое описание календарного плана выполнения комплекса взаимосвязанных работ. Графическое изображение сетевой модели имеет форму сети и называется сетевым графиком.

Допустим, перед фирмой стоит задача реконструкции помещения. Перечень работ представлен в табл. 1. Сетевой график представлен на рис. 1.

Таблица 1

Данные для планирования работ по реконструкции

Работа	Продолжительность (ч.)	Непосредственно предшествующие работы	Код работы
А. Разработка проекта реконструкции офиса	5	-	1-2
Б. Перевод персонала во временное помещение	3	А	2-5
В. Демонтаж оборудования и отправка во временное помещение	8	А	2-3
Г. Покупка и доставка материалов для ремонта	4	А	2-4
Д. Покупка и доставка нового оборудования	7	Б, В	5-7
Е. Ремонт внутренних помещений	12	В, Г	6-7
Ж. Высыхание краски	10	Е	7-8
З. Ремонт здания с внешней стороны	10	Г	4-9
И. Реализация старого оборудования и монтаж нового	13	Д, Ж	8-9
К. Перевоз персонала в помещение офиса	2	З, И	9-10

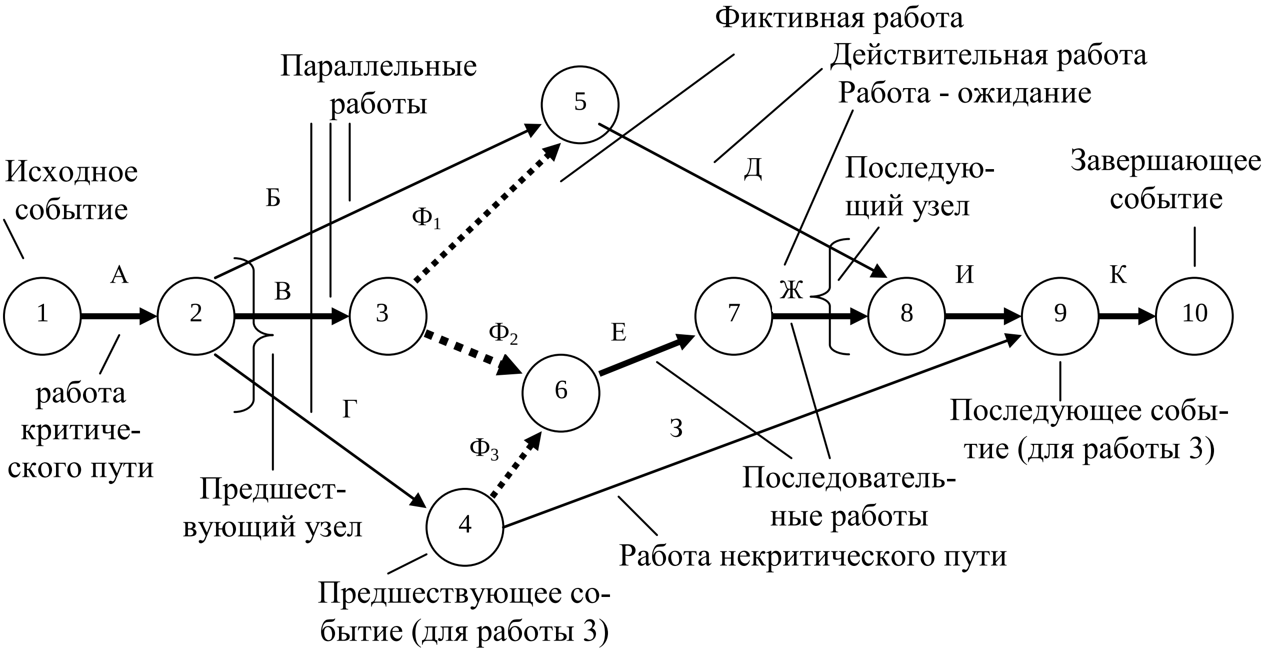


Рис. 1. Сетевой график

Основными элементами сетевой модели являются *событие* и *работа*. *Работа* – это любое действие (процесс или связь), приводящее к определенному результату – событию.

С позиций теории графов сетевая модель представляет собой связный ориентированный граф с вершинами – событиями и направленными дугами (рёбрами) – работами.

Различают следующие виды работ:

1. *Действительная* работа, т.е. протяженный во времени активный процесс, требующий затрат ресурсов.

2. *Ожидание*, т.е. протяженный во времени пассивный процесс, не требующий затрат трудовых ресурсов (твердение бетона, остывание металла, высыхание краски).

3. *Фиктивная* работа (зависимость) – это логическая связь между событиями, не требующая затрат труда, материальных ресурсов и времени.

Эта работа указывает, что возможность выполнения одной работы непосредственно зависит от результатов другой и продолжительность ее равна нулю (рис. 2).

Действительная работа и ожидание изображаются на сетевом графике сплошной стрелкой, а фиктивная – штриховой. Количественные временные оценки ставят над стрелкой, а количество исполнителей – под стрелкой.

В условиях определённости время выполнения работ детерминированное и определяется на основе нормативов.

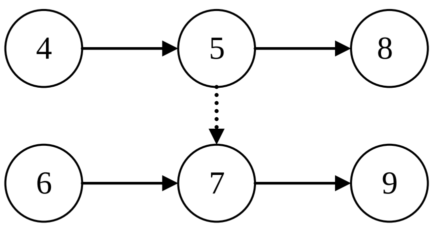


Рис. 2. Фиктивная (логическая) работа (5-7)

Событие – это момент завершения одной или нескольких работ и может быть моментом начала одной или нескольких следующих работ. Событие обозначается кружком, внутри которого ставится номер события (рис. 3).

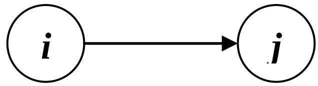


Рис. 3. Обозначение событий

Событие ***i***, с которого начинается работа, называется *предшествующим* данной работе. Событие ***j***, которое является результатом производственной работы, называется *последующим*. Первоначальное событие, отражающее начало выполнения комплекса работ, называется *исходным*. Событие, отражающее конечную цель комплекса работ и не имеющее выходящих из него работ, называется *завершающим*. В сетевом графике обычно только одно начальное событие и одно конечное (завершающее). В *упорядоченном* сетевом графике нумерация событий соответствует порядку очередности их свершения.

Правила построения сетевых графиков

При создании сложного объекта сетевой график строят по частям, а затем их объединяют (сшивают). Построение и объединение осуществляется по следующим правилам:

1. Сеть строится от исходного события к завершающему, направление стрелок – слева направо.

2. Длина и наклон стрелок (в немасштабном графике) значения не имеют, но все они должны быть однонаправлены – от предшествующего события (с меньшим номером) к последующему событию (с большим номером).

3. В сети не должно быть замкнутых контуров, т.е. цепочек работ, возвращающихся к одному из предшествующих событий или соединяющих событие само с собой (рис. 4).

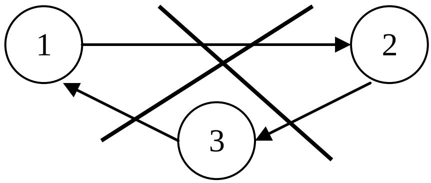


Рис. 4. Замкнутый контур

4. По возможности не следует допускать пересечения стрелок. Иногда, для того чтобы избежать этого, некоторые события и работы смещаются вверх или вниз (рис. 5).

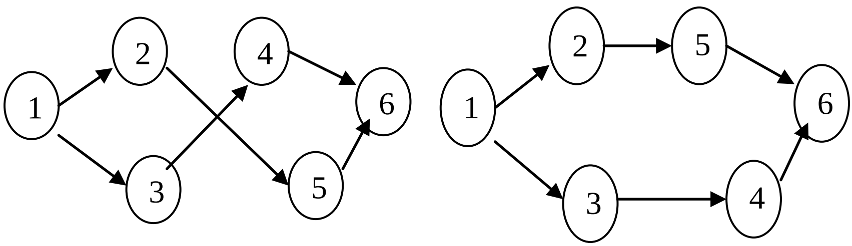


Рис. 5. Вариант “разворачивания” графика

5. Два события могут быть соединены только одной работой. Для изображения параллельных работ вводится промежуточное событие и дополнительная фиктивная работа (рис. 6).

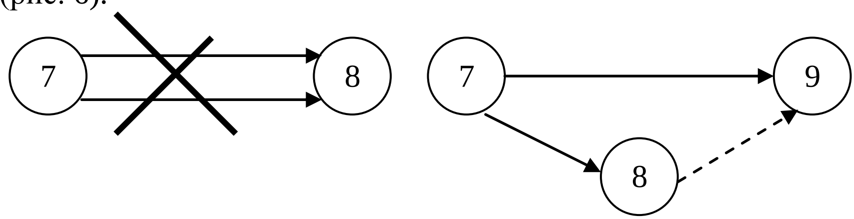


Рис. 6. Введение в график фиктивной работы

6. В сети не должно быть, кроме одного исходного, висячих - хвостовых событий, т.е. событий, в которые не входит ни одна работа (рис. 7).

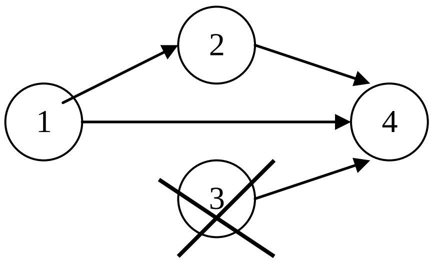


Рис. 7. Хвостовое событие

7. В сети не должно быть, кроме одного завершающего, висячих - тупиковых - событий, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа (рис. 8).

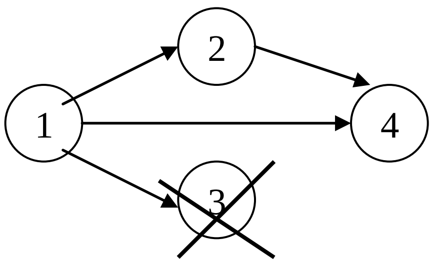


Рис. 8. Тупиковое событие

Понятие пути

Путь – это любая непрерывная последовательность (цепь) работ, приводящая от одного события к другому, в которой последующее событие каждой работы является предшествующим для следующей за ней работы и в которой каждая работа встречается только один раз.

Полный путь – это любой путь сети, начало которого совпадает с исходным событием, а конец – с завершающим. Самый продолжительный из полных путей называется *критическим*. Длительность критического пути определяет время, за которое можно выполнить комплекс работ.

Найдем критический путь для представленной выше сети. Запишем все полные пути и определим их продолжительность.

1) $(1) \xrightarrow{5} (2) \xrightarrow{3} (5) \xrightarrow{7} (8) \xrightarrow{13} (9) \xrightarrow{2} (10)$ 30 ч

2) $(1) \xrightarrow{5} (2) \xrightarrow{8} (3) \xrightarrow{0} (5) \xrightarrow{7} (8) \xrightarrow{13} (9) \xrightarrow{2} (10)$ 35 ч

3) $(1) \xrightarrow{5} (2) \xrightarrow{8} (3) \xrightarrow{0} (6) \xrightarrow{12} (7) \xrightarrow{10} (8) \xrightarrow{13} (9) \xrightarrow{2} (10)$ max 50 ч

4) $(1) \xrightarrow{5} (2) \xrightarrow{4} (4) \xrightarrow{0} (6) \xrightarrow{12} (7) \xrightarrow{10} (8) \xrightarrow{13} (9) \xrightarrow{2} (10)$ 46 ч

5) $(1) \xrightarrow{5} (2) \xrightarrow{4} (4) \xrightarrow{10} (9) \xrightarrow{2} (10)$ 21 ч

Критический путь пройдет через события 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10.

Критический путь выделяется на графике утолщенными стрелками. Для сокращения продолжительности всего комплекса работ в первую очередь стараются уменьшить время выполнения тех работ, которые лежат на критическом пути.

Построение графика Ганта

Сетевой график дает чёткое представление о порядке следования работ, а для того, чтобы определить, какие работы должны выполняться в каждый конкретный момент времени, строят масштабный сетевой график (линейную диаграмму).

График Ганта (масштабный календарный план-график) строится в прямоугольной системе координат. Каждая работа изображается параллельными оси времени отрезками, равными продолжительности работы. Номера предшествующего и последующего событий для каждой работы проставляются на концах отрезка. Отрезки располагаются один под другим, сверху вниз, сначала по возрастанию ***i***, а при одинаковых ***i*** - по возрастанию ***j*** (рис. 9).

Определим резервы времени работ. Например, работа 4 – 9 заканчивается на 19-м часу, а работа 9 – 10 может начаться только на 48-м часу, следовательно, у работы 4 – 9 есть резерв в 29 ч.

Критический путь находим справа налево. Для этого рассмотрим работы (отрезки), конечные события которых совпадают с завершающим событием сети (событием 10). Если даже таких работ несколько, выбираем из них отрезок, правый конец которого лежит правее всех, и этот отрезок выделяем (9-10). Затем находим ту работу, которая заканчивается событием (9). Это событие должно находиться на одной вертикали с левым концом выделенного отрезка. Это работа (8 - 9) и т.д. до работы (1 -2).

Критическим временем будет абсцисса самого правого конца всех отрезков (работ) диаграммы ($t_{кр}$ = 50 ч.).

Работы, расположенные на критическом пути (критические работы), не имеют резерва времени и являются самыми напряженными их всего комплекса работ.

График загрузки исполнителей или потребности в иных ресурсах (рис. 10) отражает суммарное количество ресурса в расчёте на каждый день выполнения работ.

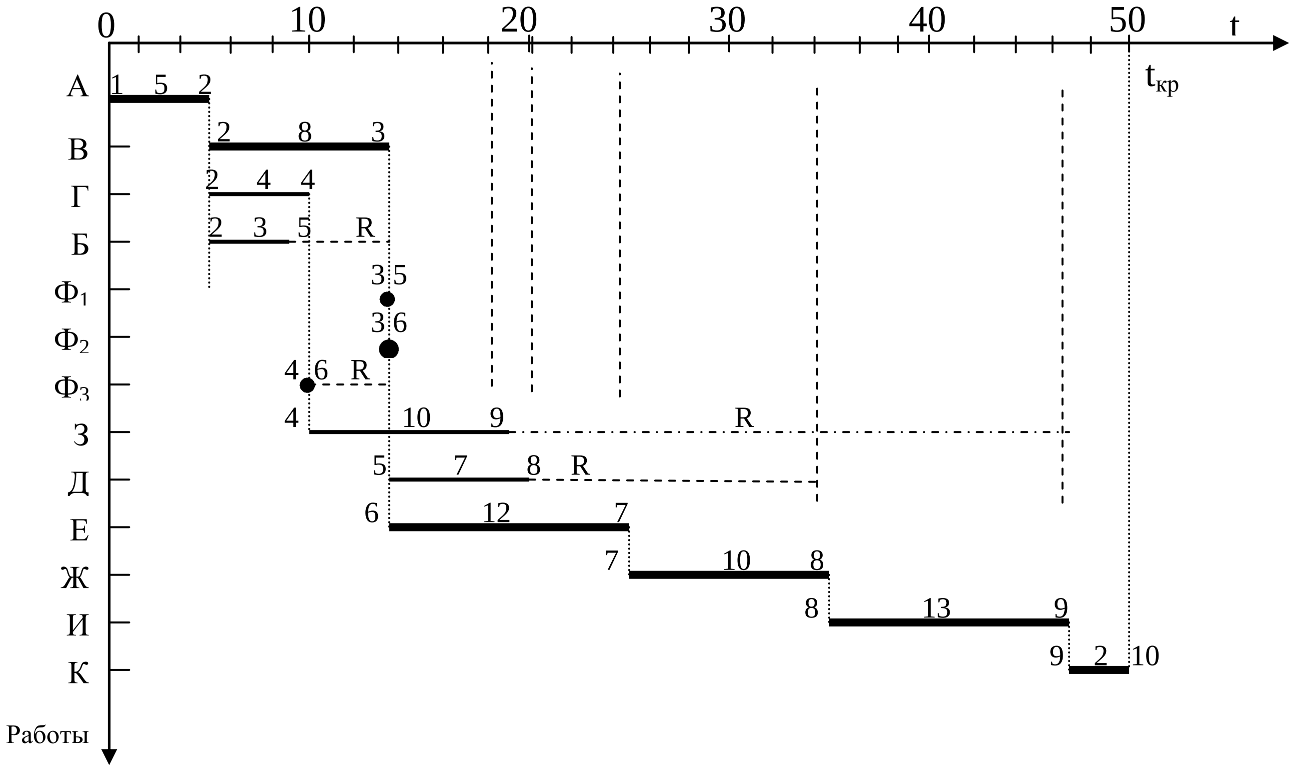


Рис. 9. График Ганта

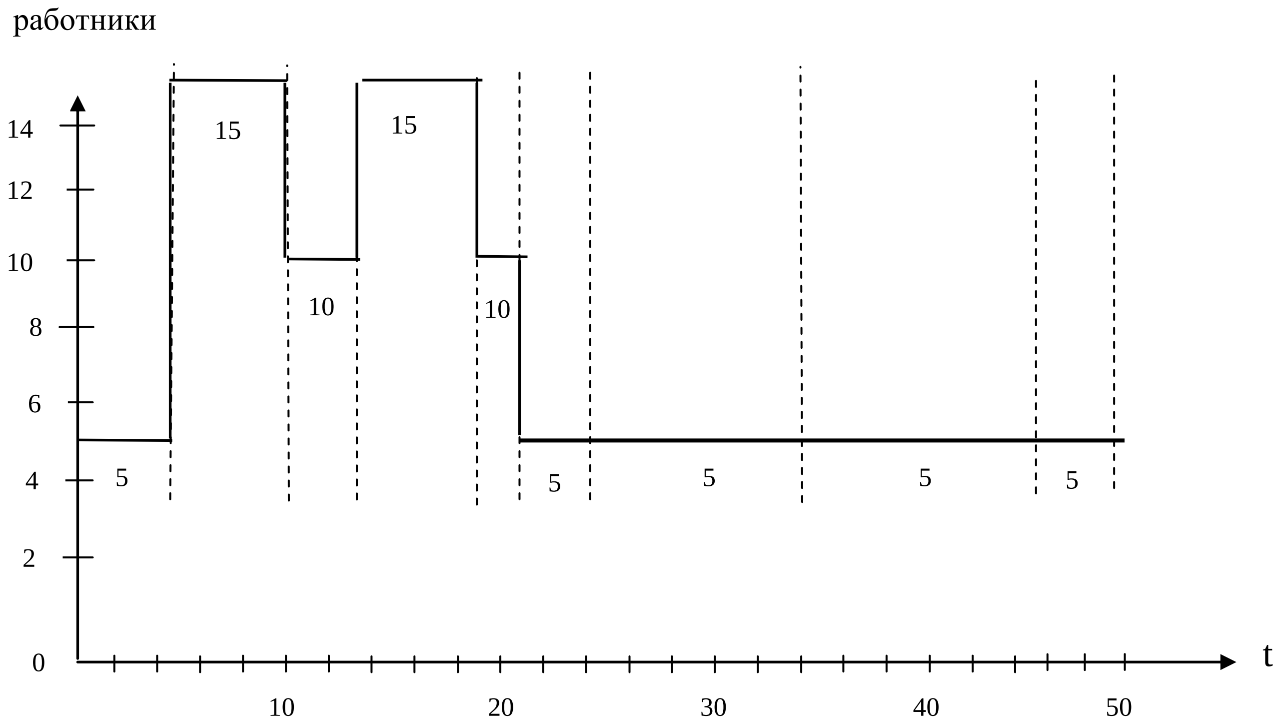


Рис. 10. График загрузки исполнителей (потребности в ресурсах)

Расчет временных параметров событий

Введем обозначения (рис. 11):

i, j – номер события; I - исходное событие; J - завершающее событие;

t_{Pi}, t_{Pj} - ранний срок свершения события;

$t_{Пi}$, $t_{Пj}$ - поздний срок свершения события;

R_j , R_j - резерв времени события;

$t(L_{I,\ j})$ - продолжительность пути от события I до события j;

$t_{КР}$- продолжительность критического пути;

t_{ij} - продолжительность работы.

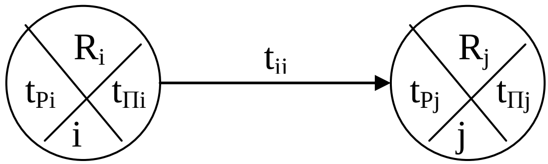


Рис. 11. Временные параметры событий

Расчет *ранних сроков свершения событий* начинается с первого события к последнему (слева направо). Максимальная продолжительность среди путей, ведущих от исходного события до j-го:

$$t_{Pj} = \max_{L} t(L_{Ij}). \tag{1.1}$$

Максимальное время завершения всех k работ, входящих в j-е событие:

$$t_{Pj} = \max_{k} \left(t_{Pi_k} + t_{i_k j} \right). \tag{1.2}$$

Для исходного события ранний срок свершения события $t_{PI} = 0$, для завершающего события $t_{PJ} = t_{КР}$.

Расчет *поздних сроков свершения событий* начинается с последнего события до начального (справа налево). Разность между длительностью критического пути и максимальным из путей, ведущих от i-го события до завершающего:

$$t_{Пi} = t_{КР} - \max_{L} t(L_{iJ}). \tag{1.3}$$

Минимальная разница между поздними сроками свершения последующих событий для всех k работ, выходящих из i-го события и длительностью этих работ:

$$t_{Пi} = \min_{k} \left(t_{j_k} - t_{ij_k} \right). \qquad (1.4)$$

Поздний срок свершения завершающего события

$$t_{ПJ} = t_{PJ} = t_{КР}. \qquad (1.5)$$

Резерв времени события показывает, на какой допустимый период времени можно задержать наступление данного события, не увеличивая при этом срок выполнения всего комплекса работ:

$$R_i = t_{Пi} - t_{Pi}. \qquad (1.6)$$

События критического пути имеют нулевой резерв времени.

Определим временные параметры событий непосредственно на сетевом графике (рис. 12).

Расчет ранних сроков свершения событий начинается слева направо, от первого события до десятого. К раннему сроку свершения предшествующего события (левый сектор) прибавляется продолжительность последующей работы, получаем ранний срок свершения последующего события. Если в событие входят несколько работ, то ранний срок его свершения определяется по максимуму, то есть событие не произойдет, пока не завершатся все эти работы.

Расчет поздних сроков свершения событий начинается справа налево, от десятого события к первому. Из позднего срока свершения последующего события (правый сектор) вычитается продолжительность предшествующей работы, получаем поздний срок свершения предшествующего события. Если из предшествующего события входят несколько работ, то поздний срок его свершения определяется по минимуму, то есть из всех возможных значений позднего срока свершения выбирается минимальное.

Результаты расчета представлены в табл. 2.

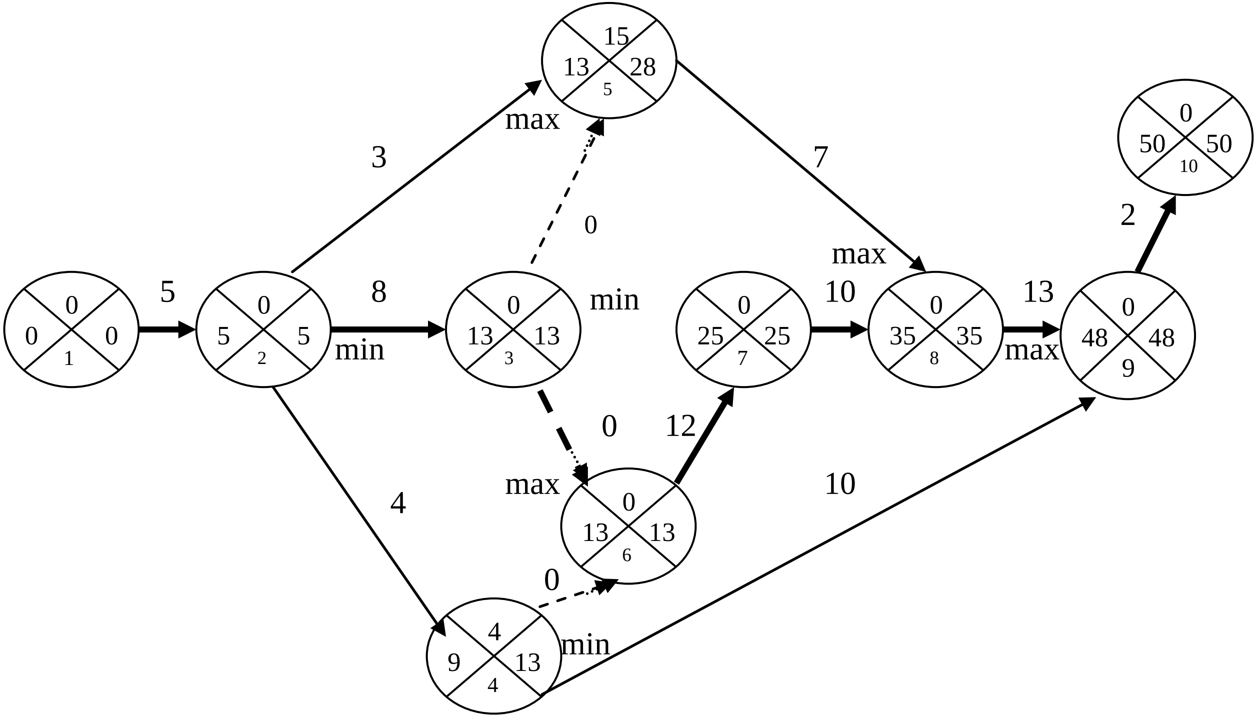


Рис. 12. Расчет временных параметров событий

Таблица 2

Временные параметры событий

№ события	Сроки свершения события		Резерв события (R_i)
	t_{pi}	t_{ni}	
1	0	0	0
2	5	5	0
3	13	13	0
4	9	13	4
5	13	28	15
6	13	13	0
7	25	25	0
8	35	35	0
9	48	48	0
10	50	50	0

Расчет временных параметров работ

Для иллюстрации расчетов рассмотрим следующее графическое построение (рис. 13).

Ранний срок начала работы t_{PHij} совпадает с ранним сроком свершения предшествующего работе события t_{Pi}:

$$t_{PHij} = t_{Pi}. \qquad (1.7)$$

Поздний срок окрнчания работы $t_{\Pi Oij}$ совпадает с поздним сроком свершения последующего за работой события $t_{\Pi j}$:

$$t_{\Pi Oij} = t_{\Pi j}. \qquad (1.8)$$

Ранний срок окончания работы t_{POij}:

$$t_{POij} = t_{Pi} + t_{ij} \qquad (1.9)$$

Поздний срок начала работы $t_{\Pi Hij}$:

$$t_{\Pi Hij} = t_{\Pi j} - t_{ij} \ . \qquad (1.10)$$

Полный резерв времени работы $R_{\Pi ij}$ показывает, насколько можно увеличить время выполнения данной работы или насколько можно передвинуть на более поздний срок начало работы, не изменяя окончательного срока выполнения комплекса работ:

$$R_{\Pi ij} = t_{\Pi j} - t_{Pi} - t_{ij}. \qquad (1.11)$$

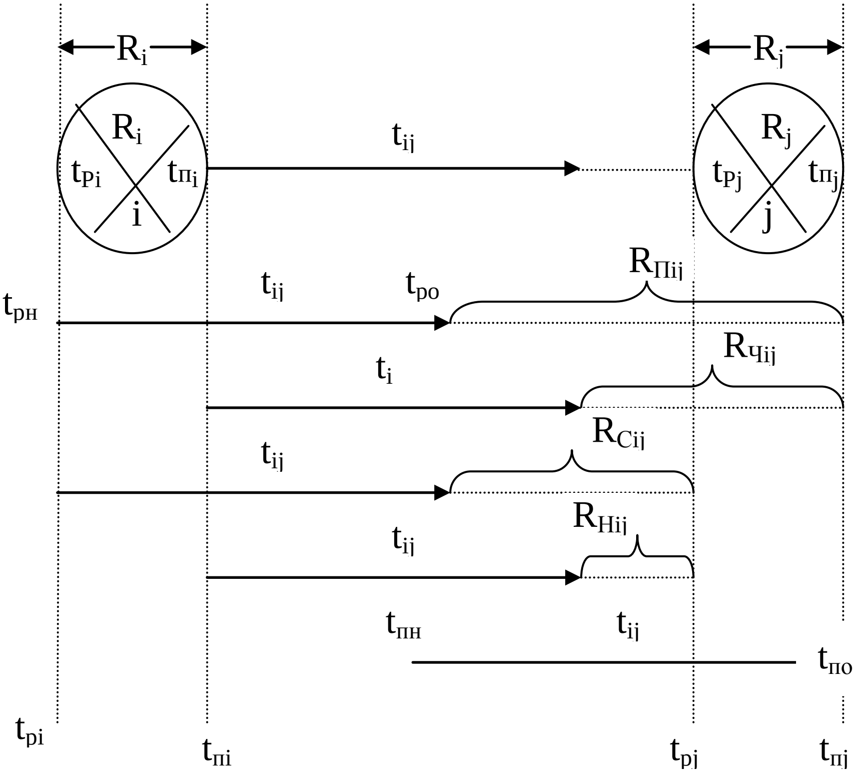


Рис. 13. Временные параметры работ и событий

Частный резерв времени работы ($R_{Чij}$) – это часть полного резерва, на которую можно увеличить время завершения работы, уложившись в допустимо поздний срок ее окончания:

$$R_{Чij} = t_{пj} - t_{пi} - t_{ij}\ , \qquad R_{Чij} = R_{Пij} - R_i\ . \qquad (1.12)$$

Свободный резерв времени работы R_{Cij} – это часть полного резерва, на которую можно увеличить время завершения работы, уложившись в ранний срок свершения ее последующего события:

$$R_{Cij} = t_{Pj} - t_{Pi} - t_{ij}\ , \qquad R_{Cij} = R_{Пij} - R_j\ . \qquad (1.13)$$

Независимый резерв времени работы $R_{Нij}$ – это часть полного резерва, которая используется на увеличение продолжительности только данной работы, при этом все предшествующие работы могут заканчиваться в свои поздние сроки, а все последующие – в ранние:

$$R_{Нij} = t_{Рj} - t_{Пi} - t_{ij}\ , \qquad R_{Нij} = R_{Пij} - R_i - R_j\ . \qquad (1.14)$$

Использование независимого резерва не влияет на величину резерва времени других работ.

Частные случаи при расчете резервов:

1. Если на критическом пути лежит событие i, то из выражения (1.12) следует

$$R_i = 0;\ R_{Пij} = R_{Чij}\ .$$

2. Если на критическом пути лежит событие j, то из выражения (1.13) следует

$$R_j = 0;\ R_{Пij} = R_{Cij}\ .$$

3. Если на критическом пути лежат и событие i и событие j, но сама работа не принадлежит критическому пути, то для этой работы все резервы равны

$$R_i = 0;\ R_j = 0;\ R_{Пij} = R_{Чij} = R_{Cij} = R_{Нij}.$$

Коэффициент загруженности работы $К_З$.

$$К_З = \frac{t_{ij}}{t_{ij} + R_{Пij}}\ . \qquad (1.15)$$

Результаты расчета временных параметров работ представлены в табл. 3.

Таблица 3

Временные параметры работ

Код работы i - j	Длительность работы, t_{ij}	Сроки работы				Резервы времени				Коэф. загруженности, $К_З$
		$t_{рн}$	$t_{ро}$	$t_{пн}$	$t_{по}$	$R_П$	$R_Ч$	$R_С$	$R_Н$	
1 – 2	5	0	5	0	5	0	0	0	0	1
2 – 3	8	5	13	15	13	0	0	0	0	1
2 – 4	4	5	9	9	13	4	4	0	0	0,5
2 – 5	3	5	8	25	28	20	20	5	5	0,13
3 – 5	0	13	13	18	18	15	15	0	0	0
3 – 6	0	13	13	13	13	0	0	0	0	0
4 – 6	0	9	9	13	13	4	0	4	0	0
4 – 9	10	9	19	38	48	29	25	29	25	0,26
5 – 8	7	13	20	18	25	15	0	15	0	0,32
6 – 7	12	13	25	13	25	0	0	0	0	1
7 – 8	10	25	35	25	35	0	0	0	0	1
8 – 9	13	35	48	35	48	0	0	0	0	1
9– 10	2	48	50	48	50	0	0	0	0	1

Для автоматизации расчёта параметров сетевой модели возможно использование программы «Расчёт и оптимизация сетевого графика» из ППП PRIMA. Для этого необходимо ввести коды работ в два смежных столбца Excel, ввести также длительности выполнения работ и количество необходимого ежедневно ресурса, например, трудового – требуемое количество исполнителей (рис. 14).

Результаты расчёта выводятся в табличной форме. Таблица временных параметров работ (рис. 15) содержит информацию о кодах и продолжительности работ, а также расчётные значения полного и свободного резервов работ и коэффициента загрузки работ. Для работ критического пути коэффициент загрузки равен единице. Таблица временных параметров событий (рис. 16) включает расчётные значения ранних и поздних сроков свершения событий, а также резерва времени событий.

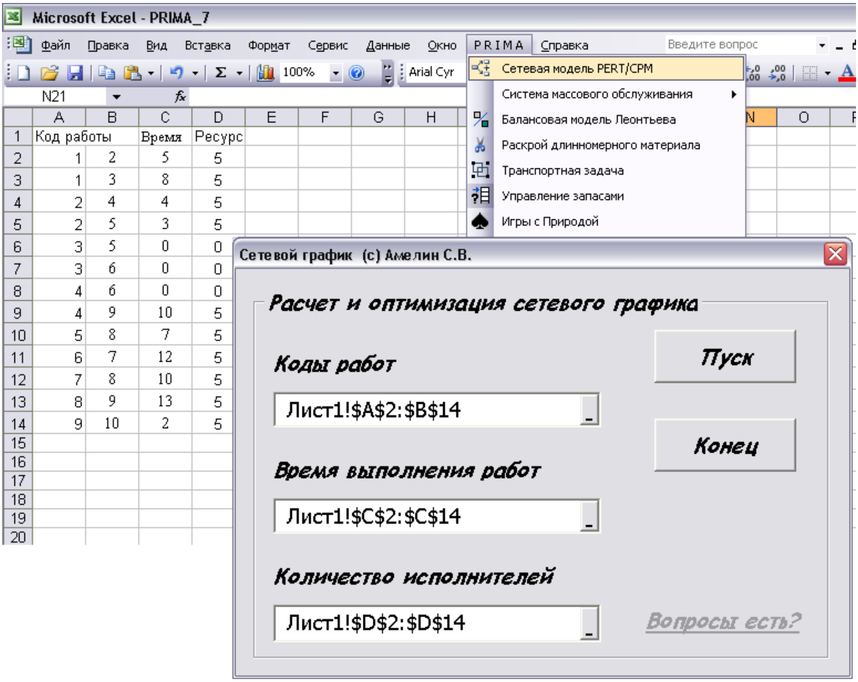


Рис. 14. Ввод исходных данных в диалоговую форму

	E	F	G	H	I	J	K	L
1	РАСЧЕТ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВОГО ГРАФИКА							
2								
3	РАСЧЕТ ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ РАБОТ							
4	КОД РАБОТЫ		ВРЕМЯ	ПОЛНЫЙ	СВОБОДН	РАННЕЕ	КОЭФФИЦИЕНТ	
5	i - j		РАБОТЫ	РЕЗЕРВ	РЕЗЕРВ	НАЧАЛО	ЗАГРУЖЕННОСТИ	
6		1--2	5	0	0	0	1	
7		2--3	8	0	0	5	1	
8		2--4	4	4	0	5	0,5	
9		2--5	3	20	5	5	0,130435	
10		3--5	0	15	0	13	0	
11		3--6	0	0	0	13	0	
12		4--6	0	4	4	9	0	
13		4--9	10	29	29	9	0,25641	
14		5--8	7	15	15	13	0,318182	
15		6--7	12	0	0	13	1	
16		7--8	10	0	0	25	1	
17		8--9	13	0	0	35	1	
18		9--10	2	0	0	48	1	

Рис. 15. Расчёт временных параметров работ

	E	F	G	H	I	J	K	L
20	РАСЧЕТ ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ СОБЫТИЙ							
21	НОМЕР		РАННИЙ СРОК		ПОЗДНИЙ СРОК		РЕЗЕРВ ВРЕМЕНИ	
22	СОБЫТИЯ		НАСТУПЛЕНИЯ		СОБЫТИЯ		СОБЫТИЯ	
23	1		0		0		0	
24	2		5		5		0	
25	3		13		13		0	
26	4		9		13		4	
27	5		13		28		15	
28	6		13		13		0	
29	7		25		25		0	
30	8		35		35		0	
31	9		48		48		0	
32	10		50		50		0	
33								
34	КРИТИЧЕСКИЙ ПУТЬ =50 ДНЕЙ							
35	И ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ СОБЫТИЯ							
36	1-	2-	3-	6-	7-	8-	9-	10-

Рис. 16. Расчёт временных параметров событий

После таблиц выводится длительность критического пути и перечень событий, составляющих критический путь.

Оптимизация сетевого графика заключается в перераспределении исполнителей с менее загруженных работ на работы критического пути (если это возможно). Результатом оптимизации становится сокращение длительности критического пути (рис. 17).

При оптимизации сетевого графика используется следующая система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{T_p}{W_p - x} = t_p + R_n - y \\ \dfrac{T_k}{W_k + x} = t_k - y \end{cases},$$

где $T_р$ – трудоёмкость работы, имеющей резерв времени; $T_к$ – трудоёмкость работы критического пути; $W_р$ – количество исполнителей работы, имеющей резерв; $W_к$ – количество исполнителей работы критического пути; *x* – количество исполнителей, переводимых с работы, имеющей резерв на критический путь; $t_р$ – длительность работы, имеющей резерв времени; $t_к$ – длительность работы критического пути; y – время сокращения длительности критического пути и резерва времени работы; $R_п$ – полный резерв времени работы.

	E	F	G	H	I	J
38	ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВОГО ГРАФИКА					
39						
40	ДЛЯ РАБОТ 2 - 4 и * 2 - 3 *					
41	КОЛИЧЕСТВО ПЕРЕВОДИМЫХ ЛЮДЕЙ					1,666296
42	СОКРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ					1,999667
43						
44	ДЛЯ РАБОТ 2 - 5 и * 2 - 3 *					
45	КОЛИЧЕСТВО ПЕРЕВОДИМЫХ ЛЮДЕЙ					4,224221
46	СОКРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ					3,663591
47						
48	ПОСЛЕ ОПТИМИЗАЦИИ КРИТИЧЕСКИЙ ПУТЬ					
49	СОКРАЩАЕТСЯ НА 5,6632571952345 ДНЕЙ					
50						
51	Данные для эпюры использования ресурсов					
52	День	Ресурс	Ресурс JIT			
53	1	5	5			
54	2	5	5			
55	3	5	5			
56	4	5	5			
57	5	5	5			
58	6	15	5			
59	7	15	5			
60	8	15	5			

Рис. 17. Оптимизация сетевого графика и данные для диаграммы использования ресурсов

Для построения календарного плана-графика выполнения работ – графика Ганта используется таблица временных параметров работ (рис. 18 - 24).

С помощью *Мастера диаграмм* на *шаге 1* необходимо выбрать Линейчатую диаграмму с накоплением, которая позволяет строить горизонтальные отрезки. На *шаге 2* указывается, что исходные данные содержатся в столбцах, после чего нужно переключиться на закладку *Ряд*. Далее следует *Добавить* Ряд 1, содержащий данные о ранних сроках начала работ, а в качестве *Имени* ввести слово: *Обозначения*. Ряд 2 содержит данные о продолжительности работ, а Ряд 3 – о полных резервах работ. На шаге 3 необходимо установить горизонтальные линии сетки, ввести название диаграммы – график Ганта и наименование осей – время и коды работ.

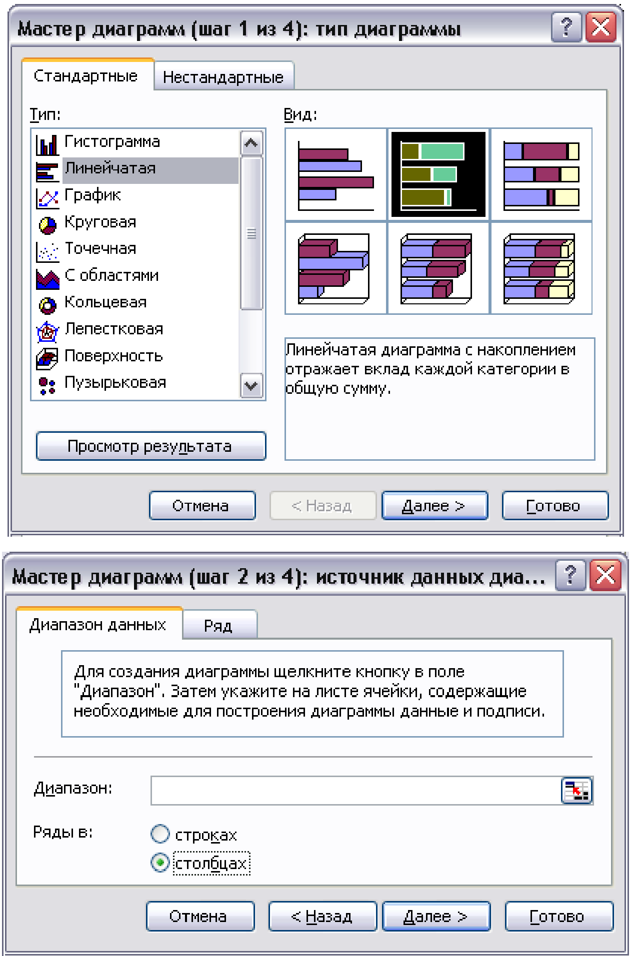
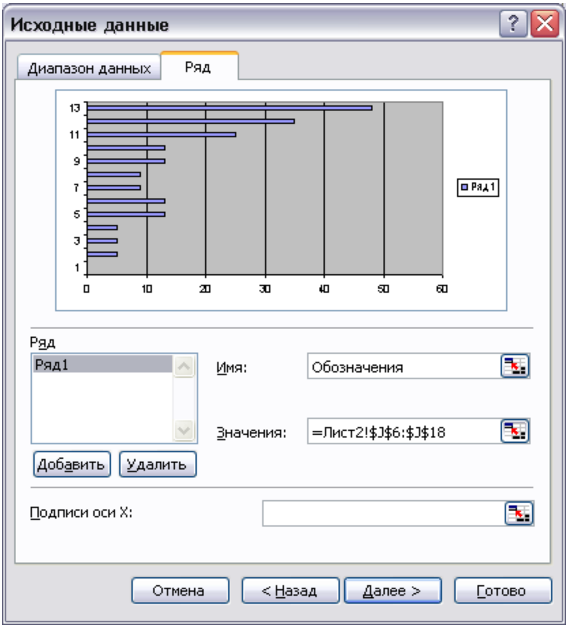


Рис. 18. Построение графика Ганта шаг 1 и шаг 2



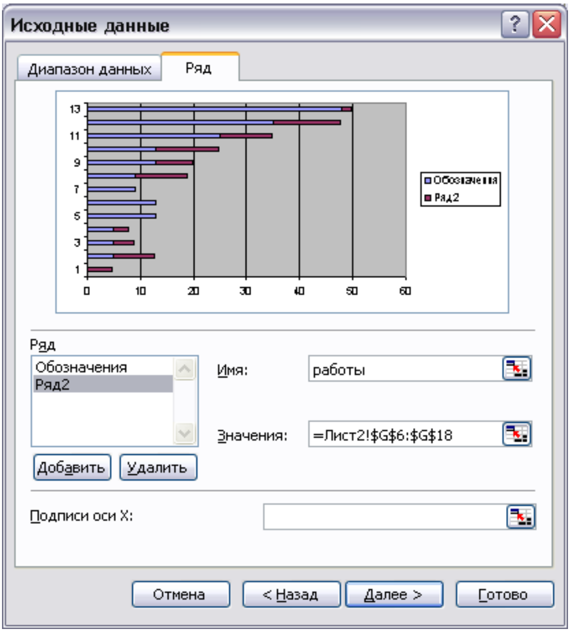


Рис. 19. Построение графика Ганта Ряд 1 и Ряд 2

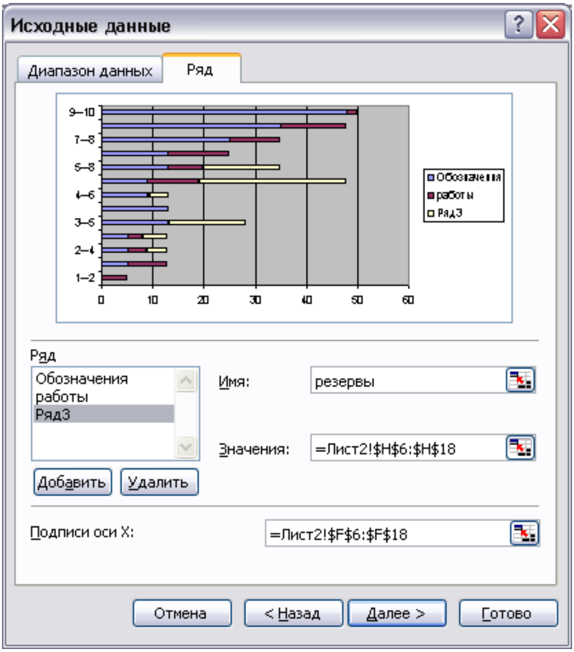


Рис. 20. Построение графика Ганта Ряд 3

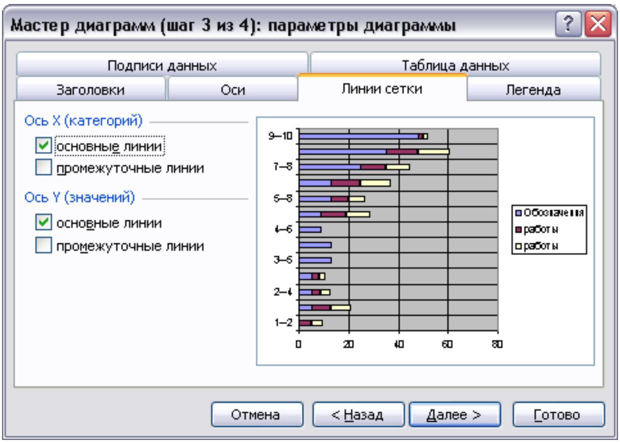


Рис. 21. Построение графика Ганта шаг 3 - Линии сетки

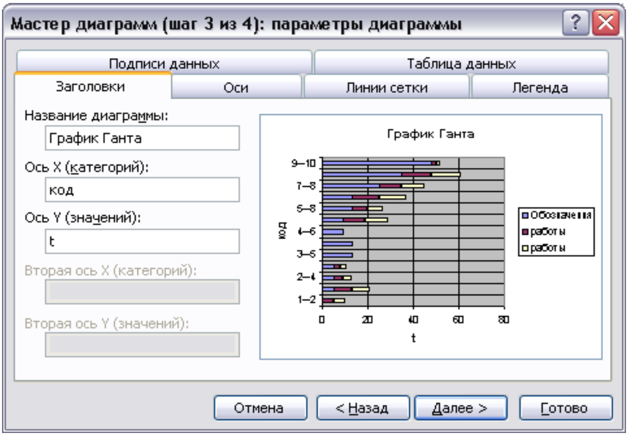


Рис. 22. Построение графика Ганта шаг 3 - Заголовки

После нажатия кнопки *Готово* получаем заготовку графика, которую ещё необходимо отформатировать. Далее, с помощью контекстного меню, вызываемого правой кнопкой мыши следует удалить серый фон диаграммы, установить требуемый размер шрифта надписей и цифр на шкалах, для вывода всех кодов работ установить *Число категорий между подписями делений* равным единице. Также следует установить Обратный порядок категорий для отображения графика Ганта ступенями сверху вниз.

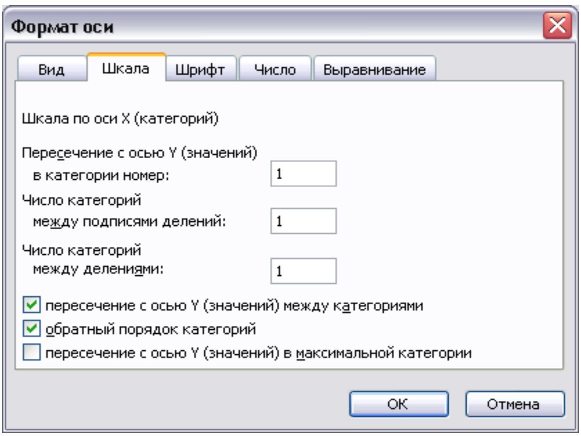


Рис. 23. Форматирование оси с кодами работ

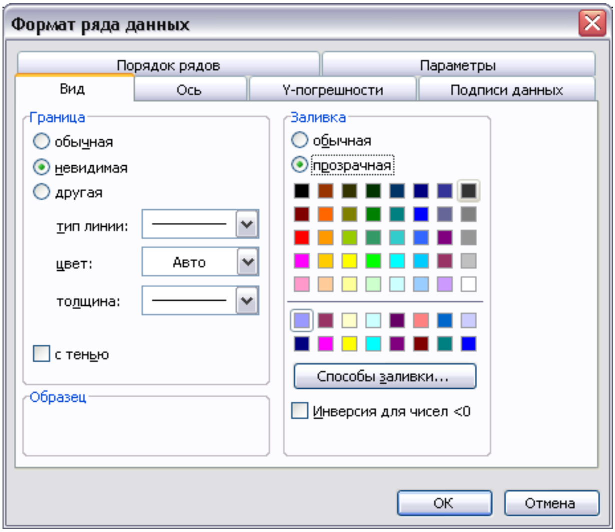


Рис. 24. Построение графика Ганта – удаление лишних линий

Для того чтобы сделать невидимыми синие горизонтальные полосы, соответствующие времени раннего начала работ, следует щелкнуть по любой из них правой кнопкой мыши и вызвать меню *Формат рядов данных*, в котором выбрать закладку *Вид*. Установить *Границу* – невидимую, а *Заливку* – прозрачную.

Для отображения фиктивных работ с нулевой длительностью можно искусственно установить для них после расчёта при построении диаграммы минимальную длительность, например, равную 0,3. Легенда диаграммы и подписи осей легко передвигаются с помощью мыши.

Диаграммы потребности в ресурсах (исполнителях) строятся на основе расчётных *Данных для эпюры использования ресурсов*. Если передвинуть время выполнения работ вправо за счёт имеющихся резервов, то можно сгладить пики потребности в ресурсах. Так, на первом графике (рис. 25), соответствующем ранним срокам начала работ, максимальное требуемое число исполнителей – 15, а если работы начинаются в возможно поздние сроки (just in time – JIT) – 10 человек (рис. 26).

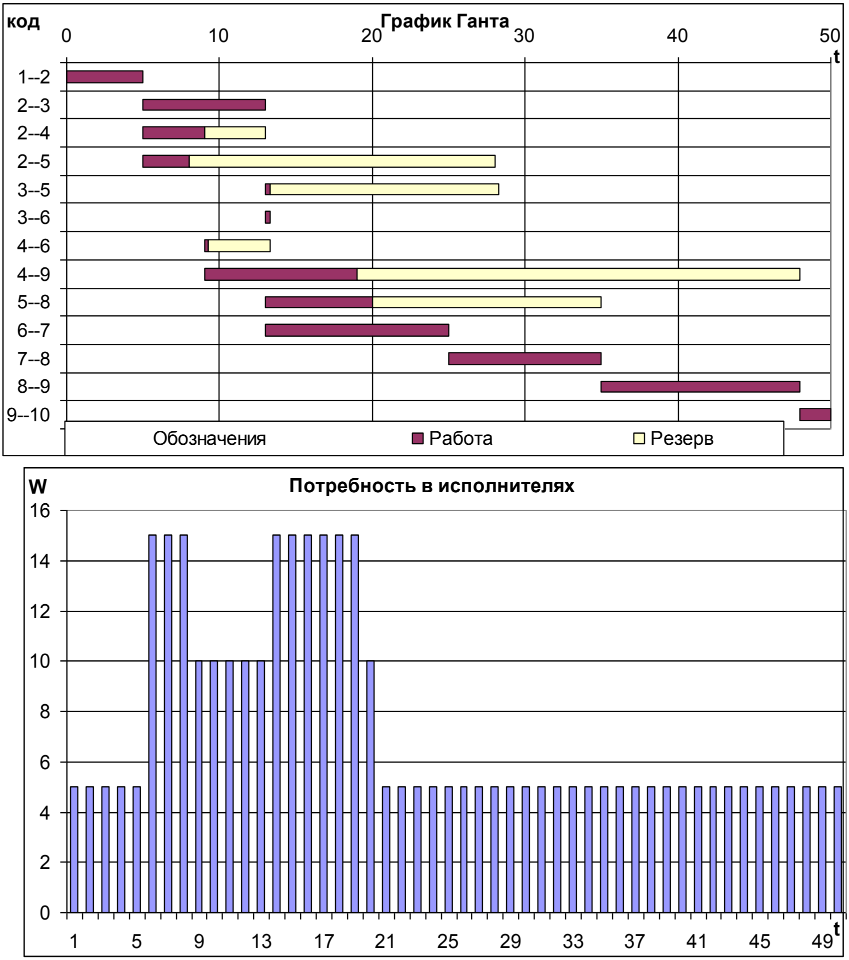
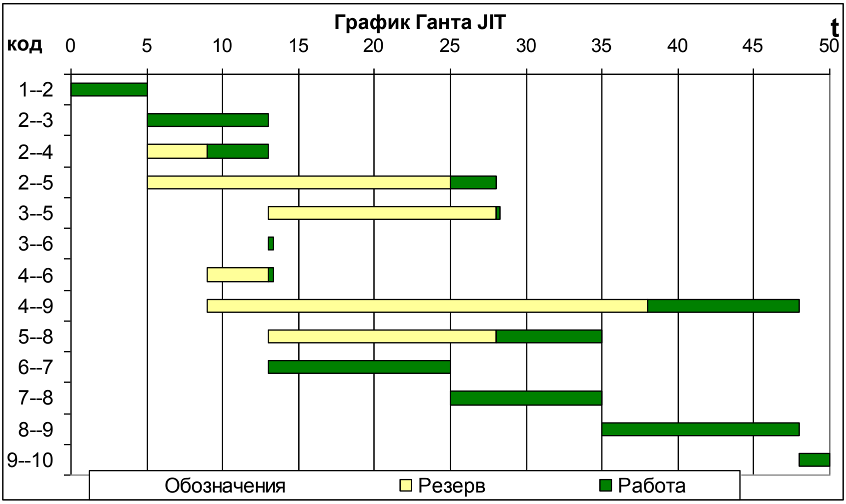


Рис. 25. График Ганта и диаграмма потребности в ресурсах



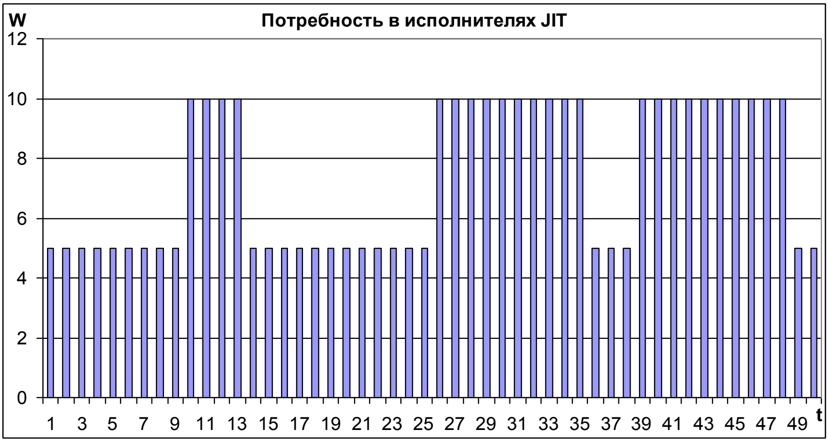


Рис. 26. График Ганта и диаграмма потребности в ресурсах JIT

Сетевое планирование в условиях неопределённости

В случаях, когда время выполнения работ точно не известно, то есть продолжительность работы является случайной (стохастической) величиной, характеризующейся законом β-распределения с числовыми характеристиками – средним значением, или математическим ожиданием продолжительности работы $t_{ож\ ij}$ и дисперсией продолжительности работы σ^2_{ij}.

Для определения средней (ожидаемой) длительности работ на основе экспертного опроса даются три временные характеристики (оценки времени выполнения работ):

1. Оптимистическая (минимальная) оценка t_{oij};
2. Пессимистическая (максимальная) оценка t_{nij};
3. Наиболее вероятная оценка $t_{н.вij}$.

Тогда среднее (ожидаемое) время выполнения работы определяется выражением

$$t_{ожij} = \frac{t_{oij(\min)} + 4t_{н.вij} + t_{nij(\max)}}{6},$$

или, если известны только крайние оценки:

$$t_{ожij} = \frac{3t_{oij(\min)} + 2t_{nij(\max)}}{5}.$$

Определение степени неопределённости выполнения работ, лежащих на критическом пути для первого подхода

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{(t_{ij\max} - t_{ij\min})^2}{6^2},$$

для второго подхода

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{(t_{ij\max} - t_{ij\min})^2}{5^2}.$$

Определение вероятности завершения комплекса работ в заданный директивный срок. Для этого необходимо найти аргумент функции нормального распределения Z по формуле

$$z = \frac{T_{дир} - L_{кр}}{\sqrt{\sum \sigma_{ij\,кр}^2}}$$

где $T_{дир}$ – директивный срок завершения работ; $L_{кр}$ – длительность критического пути; $\Sigma\sigma^2_{ij\ кр}$ – суммарная дисперсия работ, лежащих на критическом пути.

Максимальный срок выполнения всего комплекса работ T при заданном уровне вероятности ***p***

$$T = L_{КР} + z \cdot \sqrt{\sum \sigma^2_{ij\,КР}}\ .$$

Допустим, получены следующие оценки длительности работ (рис. 27), на основании которых рассчитано среднее (ожидаемые) время выполнения работ

$$t_{ож\ 1\text{-}2} = (4 + 4 \cdot 5 + 7)\ /\ 6 = 5{,}167.$$

	A	B	C	D	E	F
1	коды работ		t min	t нв	t max	t ож
2	1	2	4	5	7	5,167
3	2	3	6	8	12	8,333
4	2	4	3	4	6	4,167
5	2	5	2	3	5	3,167
6	3	5	0	0	0	0,000
7	3	6	0	0	0	0,000
8	4	6	0	0	0	0,000
9	4	9	8	10	14	10,333
10	5	8	5	7	11	7,333
11	6	7	10	12	15	12,167
12	7	8	9	10	12	10,167
13	8	9	11	13	17	13,333
14	9	10	1	2	4	2,167

Рис. 27. Расчёт ожидаемой продолжительности работ

Длительность критического пути равна 51,3 дня. Для работ критического пути рассчитаем дисперсии

$$\sigma^2_{1\text{-}2} = (7 - 4)^2\ /\ 6^2 = 0{,}25;$$

$$\sigma^2_{2\text{-}3} = 1;\quad \sigma^2_{6\text{-}7} = 0{,}69;\quad \sigma^2_{7\text{-}8} = 0{,}25;\quad \sigma^2_{8\text{-}9} = 1;\quad \sigma^2_{9\text{-}10} = 0{,}25.$$

При расчёте с помощью программы «Расчёт и оптимизация сетевого графика» из ППП PRIMA, оценки времени выполнения работ t_{min} и t_{max} следует располагать в двух смежных столбцах, а для трёх оценок - значения t_{min} , $t_{нв}$ и t_{max} располагаются в трёх смежных столбцах, адреса которых вводятся в программу в окне *Время выполнения работ*.

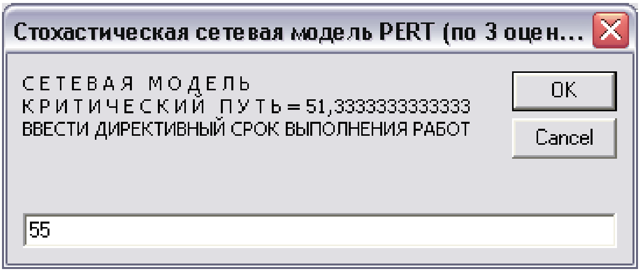


Рис. 28. Ввод директивного срока выполнения работ

Допустим, директивный срок выполнения работ установлен в пределах 55 дней (рис. 28), тогда аргумент функции нормального распределения равен

$Z = (55–51,3) / (0,25+1+0,69+0,25+1+0,25)^{1/2} = 1,976.$

Для определения вероятности завершения комплекса работ в заданный директивный срок используют значения функции нормального распределения P(z):

z	P(z)	z	P(z)	z	P(z)	z	P(z)
0,0	0,50000	1,6	0,94520	-3,0	0,00135	-1,4	0,08076
0,2	0,57926	1,8	0,96407	-2,8	0,00256	-1,2	0,11507
0,4	0,65542	2,0	0,97725	-2,6	0,00466	-1,0	0,15866
0,6	0,72575	2,2	0,98610	-2,4	0,00820	-0,8	0,21186
0,8	0,78814	2,4	0,99180	-2,2	0,01390	-0,6	0,27425
1,0	0,84134	2,6	0,99534	-2,0	0,02275	-0,4	0,34458
1,2	0,88493	2,8	0,99744	-1,8	0,03593	-0,2	0,42074
1,4	0,91924	3,0	0,99865	-1,6	0,05480	0,0	0,50000

Используя таблицу значений функции нормального распределения и метод интерполяции, определяют вероятность выполнения комплекса работ в заданный директивный срок.

$P(z) = 0,964+(1,976–1,8)\cdot(0,977–0,964)/(2,0–1,8) = 0,976.$

Для расчёта вероятности можно использовать функцию НОРМСТРАСП из категории *Статистические* Excel (рис. 29).

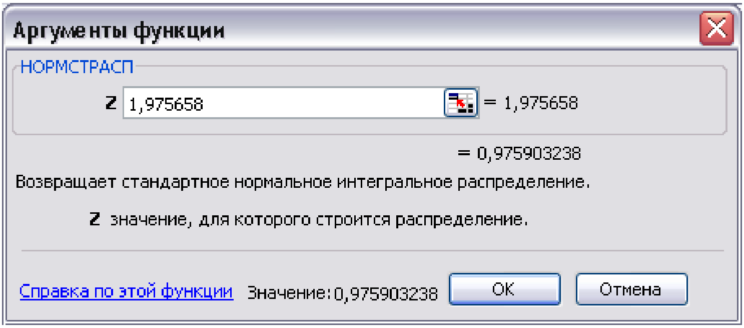


Рис. 29. Расчёт вероятности выполнения всех работ в срок

Максимальный срок выполнения всего комплекса работ T при заданном уровне вероятности p = 0,95. Для получения величины Z можно использовать функцию НОРМСТОБР из категории *Статистические* Excel (рис. 30).

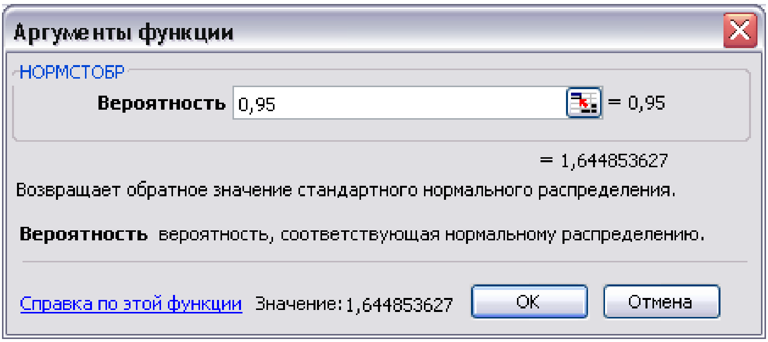


Рис. 30. Расчёт вероятного времени выполнения всех работ

$T = 51{,}3+1{,}645\cdot (0{,}25+1+0{,}69+0{,}25+1+0{,}25)^{1/2} \approx 54{,}35$ дня

Таким образом, с вероятностью 0,95 комплекс работ будет завершен за 54,35 дня.

Сформулируем сетевую модель как оптимизационную задачу линейного программирования. Поздний срок свершения завершающего события сетевого графика соответствует длительности самого продолжительного из полных путей - критического. Однако целью сетевого планирования является окончание комплекса работ в возможно короткие сроки. Отсюда целевая функция задачи линейного программирования заключается в нахождении минимального значения позднего срока завершающего события. В качестве ограничений задачи линейного программирования используем выражение для определения частного резерва времени работ. Тогда разность между поздними сроками свершения последующего события T_j и предшествующего события T_i, минус частный резерв времени работы $Rч_{ij}$ будет равна продолжительности выполнения работы t_{ij}. Поздний срок свершения исходного события (как и его ранний срок свершения) равен нулю. Тогда математическая модель оптимизационной задачи сетевого планирования и управления будет иметь вид:

$$F = T_{10} \rightarrow min$$

$$(T_j - T_i) - R_{чij} = t_{ij}$$

$$T_1 = 0 \quad (i = 1...9;\ j = 1...10).$$

Введём исходные данные для расчёта в электронную таблицу Excel (рис. 31). Строку с адресами A2 : W2 используем как область изменяемых ячеек для размещения искомых переменных (поздних сроков свершения событий и частных резервов времени работ). В соответствующие ячейки поля с адреса A4 по W16 вводим коэффициенты при переменных задачи с соответствующими знаками. Ячейка X2 содержит целевую функцию (=J2), соответствующую позднему сроку свершения завершающего события. В ячейки X4 : X16 введены выражения для левых частей ограничений. Так, ячейка X4 содержит функцию (=СУММПРОИЗВ($A$2:$W$2; A4:W4), которая скопирована в ячейки X5 : X16.

X2 f_x =J2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	Поздние сроки свершения событий										Резервы времени работ (частные)														
2	0	5	13	13	28	13	25	35	48	50	0	0	4	20	15	0	0	25	0	0	0	0	0	50	
3	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	P12	P23	P24	P25	P35	P36	P46	P49	P58	P67	P78	P89	P910		
4	-1	1									-1													5	5
5		-1	1									-1												8	8
6		-1		1									-1											4	4
7		-1			1									-1										3	3
8			-1		1										-1									0	0
9			-1			1										-1								0	0
10				-1		1											-1							0	0
11				-1					1									-1						10	10
12					-1			1											-1					7	7
13						-1	1													-1				12	12
14							-1	1													-1			10	10
15								-1	1													-1		13	13
16									-1	1													-1	2	2

Рис. 31. Решение оптимизационной задачи сетевого планирования

Тема 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В результате изучения данной темы студенты должны:

знать:

- область применения моделей теории массового обслуживания в экономике;
- основные понятия теории массового обслуживания;
- методы решения задач теории массового обслуживания;

уметь:

- формулировать постановку различных задач теории массового обслуживания;
- находить решение задач теории массового обслуживания;
- давать экономическую интерпретацию полученных результатов решения задач теории массового обслуживания;
- применять методы теории массового обслуживания для решения практических задач;

владеть:

- математическим аппаратом теории массового обслуживания;
- практическими навыками формулирования и решения задач теории массового обслуживания, в том числе с помощью ЭВМ.

Основные понятия теории массового обслуживания. Предметом изучения теории массового обслуживания (ТМО) являются процессы, в которых, с одной стороны, возникают запросы на выполнение каких-либо работ или услуг, а с другой стороны – производится удовлетворение этих запросов. Такие процессы реализуются в системах массового обслуживания (СМО).

Та часть СМО, в которой возникают запросы, называется *обслуживаемой* подсистемой, а та часть СМО, которая принимает запросы и удовлетворяет их, называется *обслуживающей* подсистемой.

Каждый отдельный запрос на выполнение какой-либо работы называется *заявкой*, или *требованием*. Часть обслуживаемой подсистемы, которая в любой момент времени может послать только одно требование, называется *источником требования*, или *объектом обслуживания*. *Обслуживанием* называется удовлетворение поступившего в обслуживающую подсистему требования. Часть обслуживающей подсистемы, которая способна в любой заданный момент времени удовлетворять только одно требование, называется *обслуживающим аппаратом*. Обслуживающая подсистема – это совокупность однородных обслуживающих аппаратов (контролеров, наладчиков, рабочих, оборудования).

Прикладные задачи ТМО сводятся к тому, чтобы установить оптимальное соотношение между числом поступающих на обслуживание требований и числом обслуживающих устройств, при котором суммарные расходы на обслуживание и убытки от простоя были бы минимальными.

Поток требований – это последовательность возникающих во времени требований. Различают входящий и выходящий потоки и требований. По характеру потоки требований могут быть регулярными и стохастическими (вероятностными). В большинстве случаев входящий поток неуправляем и зависит от случайных факторов, т.е. и число требований, поступающих в систему в единицу времени, и интервал между требованиями – случайные величины.

Среднее число требований, поступающих в систему обслуживания в единицу времени, называется *интенсивностью поступлений* (λ) и определяется по формуле

$$\lambda = \frac{1}{\overline{T}}, \qquad (2.1)$$

где $\overline{\mathrm{T}}$ - среднее значение интервала между поступлениями очередных требований.

СМО с *простейшими потоками* требований обладают следующими свойствами: стационарностью, ординарностью и отсутствием последействия.

Стационарным называется поток, характер которого с течением времени не меняется. При этом вероятность наступления того или иного числа событий за какой-либо промежуток времени зависит только от длины этого промежутка и не зависит от момента его начала.

Ординарным называется такой поток, в котором в любой момент времени может поступить не более одного требования.

Потоком *без последействия* называется поток, в котором вероятность поступления определенного числа требований после какого-то произвольного времени t не зависит от числа требований, поступивших в систему до этого момента времени.

Если поток требований простейший, то его можно описать количественно с помощью функции Пуассона:

$$P_к(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}, \qquad (2.2)$$

где $P_k(t)$ – вероятность того, что в течение времени t в систему поступит точно k требований на обслуживание (k = 0,1,2 …).

Математически наличие простейшего потока требований можно определить с помощью статистической обработки данных. Одним из признаков закона распределения Пуассона является равенство математического ожидания случайной величины и ее дисперсии

$$\lambda t = \sigma^2, \qquad (2.3)$$

где λt – среднее число требований, поступивших на обслуживание за время t.

Время обслуживания – это период, в течение которого удовлетворяется требование на обслуживание. Время нахождения требования в системе состоит из времени обслуживания и времени ожидания обслуживания. Время обслуживания одного требования – это случайная величина, характеризующаяся законом распределения, который определяется на основе статистических испытаний. На практике чаще всего исходят из гипотезы о показательном законе распределения времени обслуживания, в котором плотность распределения убывает с возрастанием времени.

При показательном законе распределения времени обслуживания функция распределения $F(t)_{обсл}$, представляющая собой вероятность того, что время обслуживания будет меньше заданной величины t, описывается следующим образом:

$$F(t)_{обсл} = 1 - e^{-\nu t}, \qquad (2.4)$$

где ν - параметр системы обслуживания, величина, обратная среднему времени обслуживания, представляет собой интенсивность обслуживания одного требования одним аппаратом:

$$\nu = \frac{1}{\overline{T}_{обсл}}, \qquad (2.5)$$

где $\overline{T}_{обсл}$ - среднее время обслуживания одного требования одним аппаратом.

Параметр системы массового обслуживания α

$$\alpha = \frac{\lambda}{\nu}, \qquad \text{или} \qquad \alpha = \lambda \cdot \overline{T}_{обсл}. \qquad (2.6)$$

Параметр α показывает количество требований, поступающих в систему за среднее время обслуживания одного требования одним аппаратом. Поэтому количество обслуживающих аппаратов n не должно быть меньше α:

$$n \geq \alpha. \qquad (2.7)$$

Если это требование не выполняется, то очередь будет расти и заявки не будут полностью выполнены.

Классификация систем массового обслуживания

Первым признаком, позволяющим классифицировать системы массового обслуживания, является поведение требований, поступивших в обслуживающую систему в тот момент, когда все обслуживающие аппараты заняты. Выделяются следующие типы систем:

а) системы с потерями или отказами (если нет свободного аппарата, заявка покидает систему не обслуженной);

б) системы с ожиданием или без потерь (заявки дожидаются обслуживания в очереди);

в) смешанные системы (заявки присоединяются к очереди, если она не больше определенной длины, или покидают очередь не обслуженными, если закончилось допустимое время ожидания).

Второй признак – все системы массового обслуживания могут быть подразделены в зависимости от количества обслуживающих аппаратов на системы с ограниченным (конечным) и с неограниченным числом обслуживающих аппаратов.

Третий признак – СМО подразделяются по числу требований, которые одновременно могут находиться в обслуживающей системе, на системы с ограниченным и неограниченным потоком требований. В замкнутых системах источники требований находятся внутри системы, а в разомкнутых – вне её.

Четвертый признак – СМО могут подразделяться в зависимости от дисциплины обслуживания на системы с упорядоченной очередью, с неупорядоченным (случайным) выбором из очереди и с приоритетом обслуживания.

Расчёт показателей качества функционирования систем массового обслуживания

Чтобы улучшить работу СМО путем изменения ее организации, необходимо рассчитать показатели качества её функционирования при существующем варианте организации и при других возможных вариантах и на основе этих расчетов принять решение.

А. ***Система обслуживания с потерями (отказами)***

Вероятность того, что в обслуживающей системе находится точно k требований, т.е. занято k обслуживающих аппаратов:

$$\boldsymbol{P_k} = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot \boldsymbol{P_0}, \qquad (2.8)$$

где $\boldsymbol{k}$ – число требований в системе ($\boldsymbol{k}$ = 1, 2, 3, …, $\boldsymbol{n}$); $\boldsymbol{n}$ – число обслуживающих аппаратов; $\boldsymbol{P_0}$ – вероятность того, что в системе нет ни одного требования.

Вероятность того, что все обслуживающие аппараты свободны (простаивают):

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}\right)^{-1}. \qquad (2.9)$$

Вероятность отказа в обслуживании. Отказ происходит в случае, когда все обслуживающие аппараты заняты. Тогда вероятность отказа равна вероятности того, что все аппараты заняты, или вероятности того, что в системе находится ровно n требований:

$$P_{\text{отказа}} = P_n = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}\right)^{-1}. \qquad (2.10)$$

Относительная пропускная способность и вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена

$$Q = P_{обс} = 1 - P_{отк} = 1 - P_n. \qquad (2.11)$$

Абсолютная пропускная способность и интенсивность выходящего потока обслуженных заявок

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot (1 - P_n). \qquad (2.12)$$

Степень загрузки системы характеризуется средним числом занятых обслуживающих аппаратов

$$M = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P_k = \alpha \cdot (1 - P_n). \qquad (2.13)$$

Коэффициент загрузки обслуживающего аппарата

$$K_{заг} = M / n. \qquad (2.14)$$

Пример. В механическом цехе на одном участке работают 3 контролёра. Если деталь поступает в ОТК, когда контролёры заняты, она уходит на склад готовой продукции, не ожидая контроля. Известно, что среднее число деталей, поступающих в ОТК в течение 1 ч. равно 24, а среднее время обслуживания равно 5 мин. Какова вероятность того, что деталь не будет проконтролирована и насколько будут загружены контролёры работой

Решение. n = 3, $\lambda = 24$, $\overline{T}_{обсл} = 5$ мин $= \frac{1}{12}$ ч.,

$$\nu = \frac{1}{\overline{T}_{обсл}} = 12, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{24}{12} = 2, \qquad n \geq \alpha.$$

$$P_{отказа} = \frac{2^3}{2!} \cdot \left(\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{k!}\right)^{-1} = \frac{8}{6} \cdot \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{19}{3}\right)^{-1} = \frac{4}{19} = 0{,}21.$$

Вероятность отказа 0,21 означает, что из 100 деталей в среднем ОТК пройдет 79 деталей и не пройдет 21 деталь.

Определим степень загрузки контролёров

$$M = \sum_{k=0}^{3} k \cdot P_k = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 .$$

Расчеты представлены в следующей табл. 4.

Таблица 4

Число занятых контролеров	$P_k/P_o = \frac{\alpha^k}{k!}$	$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot P_0$	$k \cdot P_k$
0	1	0,16	0
1	2	0,32	0,32
2	2	0,32	0,64
3	4/3	0,21	0,63
Σ	19/3	≈ 1	1,59

$$P_0 = \left(\frac{19}{3}\right)^{-1} = 0{,}16;$$

M = 1,59 означает, что полностью занято более полутора контролёров.

Коэффициент загрузки одного контролёра

$$К_{заг} = \frac{M}{n} = \frac{1{,}59}{3} = 0{,}53,$$

т.е. каждый контролёр в среднем занят более половины дня.

Для автоматизации расчёта характеристик системы массового обслуживания возможно использование программы «Теория массового обслуживания» из ППП PRIMA (рис. 32).

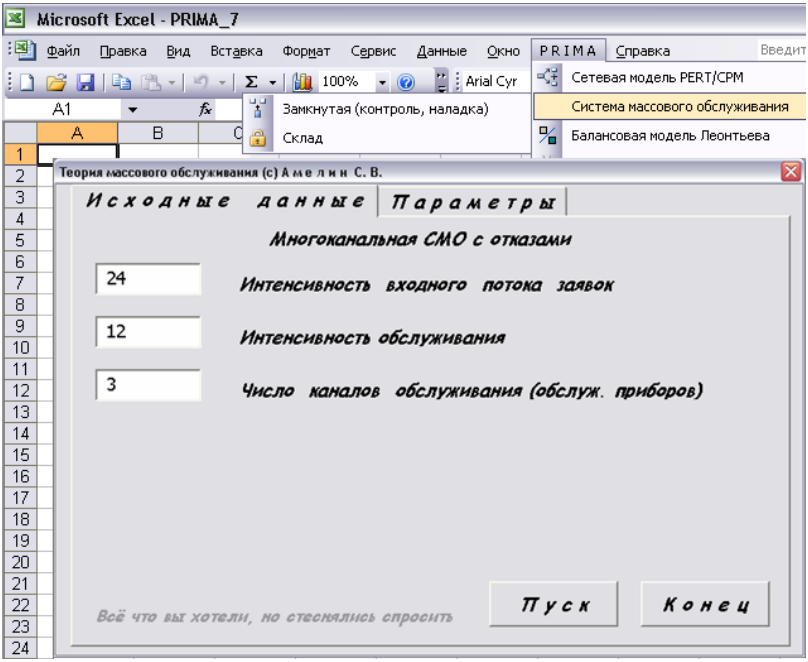


Рис. 32. Ввод исходных данных СМО в диалоговую форму

Выбор модели СМО осуществляется с помощью закладки *Параметры*. Для этого необходимо выделить требуемый вид модели и нажать кнопку *Выбор* (рис. 33). Исходными данными для многоканальной системы массового обслуживания с отказами являются: интенсивность входного потока λ, интенсивность обслуживания ν и число каналов обслуживания n (рис. 32). Результаты расчётов характеристик СМО с отказами в ППП PRIMA представлены на рис. 34.

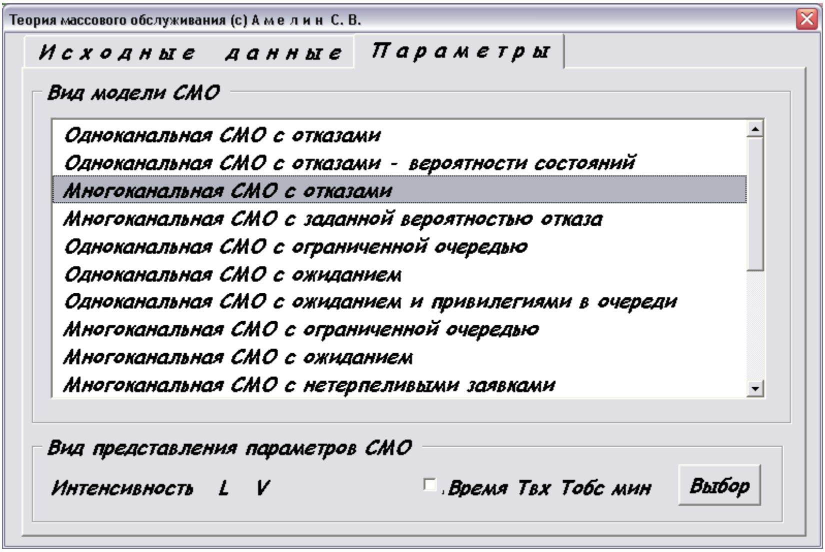


Рис. 33. Выбор модели СМО

	A	B	C	D	E	F
1		Многоканальная СМО с отказами				
2						
3	интенсивность входящего потока заявок 24					
4	интенсивность потока обслуживания заявок 12					
5	число каналов обслуживания				3	
6	вероятности состояний (занятых каналов)					
7		P(0)=	0,1579			
8		P(1)=	0,3158			
9		P(2)=	0,3158			
10		P(3)=	0,2105			
11	среднее число занятых каналов				K =	1,5789
12	коэффициент загрузки канала				kз =	0,5263
13	средн. время пребывания заявки в СМО T=					0,0658
14	абсолютная пропускная способность				A =	18,947
15	относительная пропускная способность Q=					0,7895
16	вероятность отказа				Pот =	0,2105
17	вероятность обслуживания заявки				Pоб =	0,7895

Рис. 34. Результаты расчётов характеристик СМО с отказами

Б. ***Система обслуживания с ожиданием или без потерь (замкнутая система массового обслуживания)***

Вероятность того, что в системе занято k обслуживающих аппаратов при условии, что число требований, находящихся в системе, не превосходит числа обслуживающих аппаратов, т.е. когда очереди нет:

$$P_k = \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \alpha^k \cdot P_0, \qquad (0 \le k \le n), \qquad (2.15)$$

где k– число требований; n – число обслуживающих аппаратов; m – наибольшее возможное число требований, находящихся в обслуживаемой системе одновременно.

Вероятность того, что в системе находится k требований для случая, когда их число больше числа обслуживающих аппаратов, т.е. когда есть очередь:

$$P_k = \frac{m!}{n^{k-n}(m-k)! \cdot n!} \cdot \alpha^k \cdot P_0, \qquad (n < k \le m). \quad (2.16)$$

Вероятность того, что все обслуживающие аппараты свободны:

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \alpha^k + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{m!}{n^{k-n}(m-k)!n!} \cdot \alpha^k\right)^{-1}. \quad (2.17)$$

Введем обозначения для краткой записи (β_{k_1}) и (β_{k_2}), тогда

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \beta_{k_1} + \sum_{k=n+1}^{m} \beta_{k_2}\right)^{-1}. \qquad (2.18)$$

Среднее число требований, ожидающих начала обслуживания, т.е. средняя длина очереди

$$M_1 = \sum_{k=n+1}^{m} (k-n) \cdot P_k. \qquad (2.19)$$

Коэффициент простоя обслуживаемого требования в ожидании обслуживания

$$K_1 = \frac{M_1}{m}. \qquad (2.20)$$

Среднее число требований, находящихся в обслуживающей системе, т.е. в очереди и в обслуживании

$$M_2 = \sum_{k=1}^{m} k \cdot P_k. \tag{2.21}$$

Коэффициент простоя обслуживаемого требования в обслуживающей системе

$$K_2 = \frac{M_2}{m}. \tag{2.22}$$

Среднее число свободных обслуживающих аппаратов

$$M_3 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot P_k. \tag{2.23}$$

Коэффициент простоя обслуживающего аппарата

$$K_3 = \frac{M_3}{n}. \tag{2.24}$$

Пример. Два рабочих обслуживают группу из 9 станков. В среднем каждый станок останавливается один раз в час. Обслуживание одного станка занимает у рабочего в среднем 6 мин. Определить основные характеристики эффективности функционирования системы массового обслуживания.

Решение. n = 2, m = 9, $\lambda = 1$, $\overline{T}_{обсл} = 6$ мин = 0,1 ч.,

$$\nu = \frac{1}{\overline{T}_{обсл}} = 10, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\nu} = 0{,}1.$$

В любой момент времени система находится в одном из своих возможных состояний:

k = 0 – все станки работают, очереди нет;
k = 1 – один станок обслуживается, очереди нет;
k = 2 – два станка обслуживаются, очереди нет;
k = 3 – два станка обслуживаются, один в очереди, остальные работают;

…………………………..………………………………

k = 9 – два станка обслуживаются, семь в очереди на обслуживание, т.е. ни один станок не работает.

Этим состояниям системы соответствуют вероятности:

$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_9$.

Определим значения β_{k_1} для случая, когда очереди нет

$(0 \le k \le 2)$:

$$\beta_0 = \frac{9!}{0!\cdot 9!} \cdot 0{,}1^{\circ} = 1;\ \beta_1 = \frac{9!}{1!\cdot 8!} \cdot 0{,}1^1 = 0{,}9;\ \beta_2 = \frac{9!}{2!\cdot 7!} \cdot 0{,}1^2 = 0{,}36.$$

Определим значения β_{k_2} для случая, когда очередь есть

$(3 \le k \le 9)$:

$$\beta_3 = \frac{9!}{2^1 \cdot 6! \cdot 2!} \cdot 0{,}1^3 = 0{,}126;\ \ldots\ \beta_9 = \frac{9!}{2^7 \cdot 0! \cdot 2!} \cdot 0{,}1^9 = 0{,}0000014175.$$

Вероятность того, что в системе не будет ни одного требования:

$$P_0 = (2{,}43545)^{-1} = 0{,}4106.$$

Среднее число станков, стоящих в очереди:

$$M_1 = \sum_{k=3}^{9}(k-2)\cdot P_k = 0{,}098.$$

Это означает, что в среднем из 9 станков 0,098 простаивают в очереди на обслуживание.

Коэффициент простоя станка в очереди

$$K_1 = \frac{0{,}098}{9} = 0{,}011.$$

Это означает, что в среднем каждый станок 1,1 % времени простаивает в очереди.

Среднее число простаивающих станков (в очереди и обслуживании)

$$M_2 = \sum_{k=1}^{9} k\cdot P_k = 0{,}907.$$

Это означает, что в среднем 95 % рабочего времени 1 станок из 9 не будет работать.

Коэффициент простоя станка в системе обслуживания

$$K_2 = \frac{0{,}907}{9} = 0{,}1008.$$

Это означает, что 10,08 % времени в среднем будет простаивает каждый станок из 9.

Среднее число свободных обслуживающих аппаратов (рабочих)

$$M_3 = \sum_{k=0}^{1}(2-k)\cdot P_k = 1{,}1907.$$

Это означает, что из двух человек в среднем один всегда свободен, а другой свободен в течение 18,6 % времени.

Коэффициент простоя рабочего

$$K_3 = \frac{1{,}1907}{2} = 0{,}595.$$

Это означает, что в среднем каждый рабочий 59,5 % рабочего времени простаивает без работы.

Результаты расчетов представлены в таблице 5.

Для автоматизации расчёта характеристик многоканальной замкнутой системы массового обслуживания возможно использование программы «Теория массового обслуживания» из ППП PRIMA. Выбор вида модели осуществляется в закладке *Параметры* и завершается нажатием кнопки *Выбор* (рис. 35).

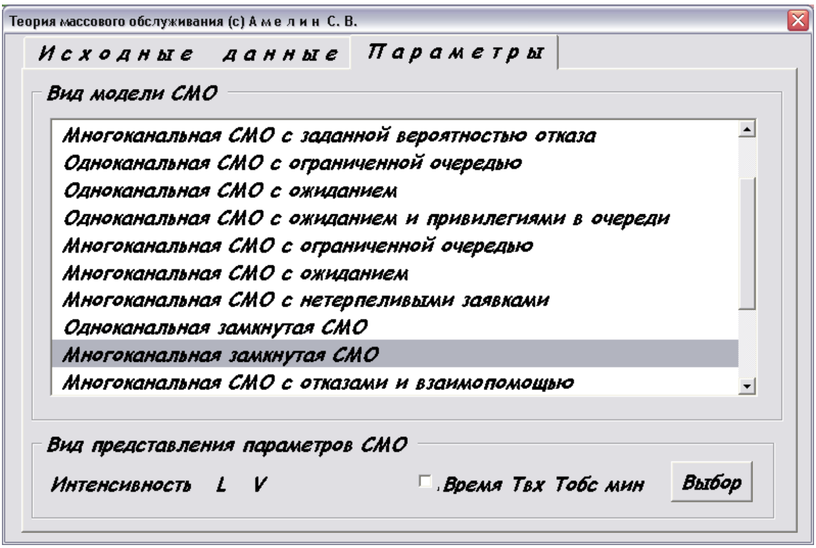


Рис. 35. Выбор модели СМО

Таблица 5

Число требований, k	Число требований, ожидающих обслуживания, k - n	Число свободных рабочих, n - k	β_{k_1} и β_{k_2}	$P_k=\beta_k \cdot P_0$	(k-n) P_k	$k \cdot P_k$	(n-k) P_k
0	-	2	1	0,4106	-	-	0,8212
1	-	1	0,9	0,3695	-	0,3695	0,3695
2	-	-	0,36	0,1478	-	0,2956	-
3	1	-	0,126	0,0517	0,0517	0,1551	-
4	2	-	0,0378	0,0155	0,031	0,062	-
5	3	-	0,00945	0,00388	0,01164	0,0194	-
6	4	-	0,00189	0,000776	0,003104	0,004656	-
7	5	-	0,0002835	0,0001164	0,000582	0,0008148	-
8	6	-	0,0002835	0,0000116	0,0000696	0,0000928	-
9	7	-	0,0000014175	0,0000005	0,0000035	0,0000045	-
Σ	-	-	2,43545	-	0,098	0,907	1,1907

В качестве исходных данных многоканальной замкнутой модели СМО следует ввести интенсивность входного потока требований и интенсивность обслуживания, число каналов обслуживания и число источников требований (максимально возможное число заявок в системе (рис. 36).

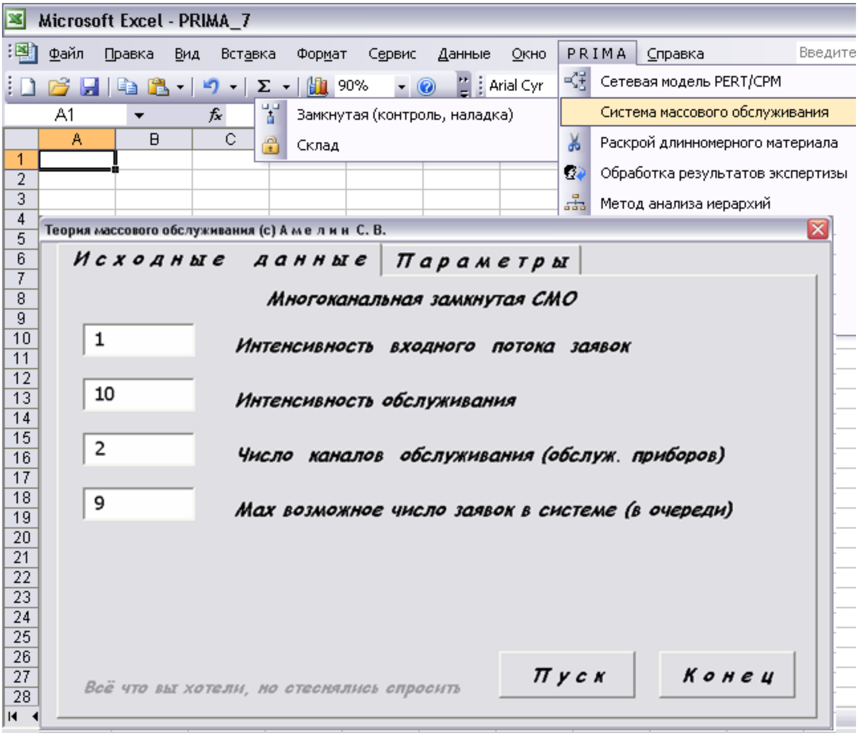


Рис. 36. Ввод исходных данных СМО в диалоговую форму

Результаты расчёта характеристик замкнутой многоканальной системы массового обслуживания представлены на рис. 37.

	A	B	C	D	E	F
1		Замкнутая многоканальная СМО				
2						
3	интенсивность входящего потока				L =	1
4	интенсивность обслуживания				V =	10
5	число каналов обслуживания				n =	2
6	число заявок в системе				m =	9
7						
8		Вероятности состояний СМО				
9		P(0)=	0,410601			
10		P(1)=	0,369541			
11		P(2)=	0,147816			
12		P(3)=	0,051736			
13		P(4)=	0,015521			
14		P(5)=	0,00388			
15		P(6)=	0,000776			
16		P(7)=	0,000116			
17		P(8)=	1,16E-05			
18		P(9)=	5,82E-07			
20	вероятность простоя канала				Po=	0,410601
21	коэффициент нагрузки системы				a =	0,1
22	абсолютная пропускная способность				A =	8,092566
23						
24	среднее число заявок в очереди				Nоч=	0,098178
25	коэффициент простоя в очереди				Кпо=	0,010909
26						
27	среднее число заявок в системе				Nст=	0,907434
28	коэффициент простоя в системе				Кпс=	0,100826
29						
30	среднее число свободных каналов				Nск=	1,190743
31	коэффициент простоя каналов				Кпк=	0,595372
32						
33	среднее число занятых каналов				Nз =	0,809257
34	коэффициент загрузки канала				Кз =	0,404628

Рис. 37. Расчёт характеристик замкнутой СМО

Принятие решения о выборе оптимальной системы массового обслуживания требует многократного расчёта параметров системы массового обслуживания при изменении значений исходных данных. Выбор оптимального (рационального) варианта осуществляется согласно принятому критерию эффективности. Так, величина затрат, связанных с пребыванием в очереди одного требования (заявки) имеет вид

$$C = \left(C_{об} \frac{n}{\lambda} + C_{\text{оч}} \cdot t_{\text{оч}} \right) \to \min ,$$

где С - величина затрат, связанных с пребыванием в очереди одного требования, ден.ед./час; n – число каналов обслуживания; λ - интенсивность входного потока, заявок/час; $C_{оч}$ – издержки, связанные с пребыванием в очереди одного требования, ден.ед./час; $t_{оч}$ – среднее время ожидания в очереди, час; $C_{об}$ – затраты на содержание обслуживающего устройства (канала).

Тема 3. МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

В результате изучения данной темы студенты должны:

знать:

- область применения моделей межотраслевого баланса в экономике;
- основные понятия моделирования межотраслевого баланса;
- методы решения задач межотраслевого баланса;

уметь:

- формулировать постановку различных задач межотраслевого баланса;
- находить решение задач межотраслевого баланса;
- давать экономическую интерпретацию полученных результатов решения задач межотраслевого баланса;
- применять методы межотраслевого баланса для решения практических задач;

владеть:

- математическим аппаратом межотраслевого баланса;
- практическими навыками формулирования и решения задач межотраслевого баланса, в том числе с помощью ЭВМ.

Важнейшим условием нормального развития национального хозяйства является сбалансированность общественного производства на всех уровнях. Эффективным аппаратом для определения сбалансированных пропорций развития являются балансовые модели производства и распределения продукции. Использование балансовых моделей помогает органам государственного управления экономикой способствовать предупреждению возникновения диспропорций в развитии отраслей национальной экономики.

Балансовые модели составляются для экономических систем разных уровней. Например, на уровне национального хозяйства используется модель межотраслевого баланса производства и распределения продукции, а на уровне предприятия – модель межпродуктового баланса.

Суть балансовой модели состоит в том, что затраты должны компенсироваться доходами. Данный метод позволяет для каждой отрасли определить количество продукции, которое она должна выпустить, чтобы удовлетворить потребность всех других отраслей, включая непроизводственную сферу и потребности внешней торговли. Рассмотрим балансовую модель в стоимостном выражении.

Характеристика основных разделов и схема межотраслевого баланса

При составлении межотраслевого баланса (МОБ) заполняется специальная таблица, которая имеет четыре раздела и отражает движение продукта из одной отрасли в другую в процессе его производства и распределения. Табл. 6 МОБ имеет следующий вид.

Таблица 6

Межотраслевой баланс

Отрасли-производители	Отрасли-потребители 1, 2 … j … n Промежуточный продукт	Общий производственный выпуск	Конечный продукт	Валовой выпуск
1	2	3	4	5
1	$x_{11}\ x_{12} \dots x_{1j} \dots x_{1n}$	$\sum_{j=1}^{n} X_{1j}$	y_1	x_1
2	$x_{21}\ x_{22} \dots x_{2j} \dots x_{2n}$	$\sum_{j=1}^{n} X_{2j}$	y_2	x_2
…	………………………..			
i	$x_{i1}\ x_{i2} \dots x_{ij} \dots x_{in}$	$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$	y_i	x_i
…	………………………			
n	$x_{n1}\ x_{n2} \dots x_{nj} \dots x_{nn}$	$\sum_{j=1}^{n} X_{nj}$	y_n	x_n
Общее производственное потребление	$\sum_{i=1}^{n} X_{i_1} \sum_{i=1}^{n} X_{i_2} \dots \sum_{i=1}^{n} X_{ij} \dots \sum_{i=1}^{n} X_{in}$	$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$		—
Добавленная стоимость	$Z_1\ Z_2 \dots Z_j \dots Z_n$	—	$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$	—
Валовый выпуск	$X_1\ X_2 \dots X_j \dots X_n$	—	$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{i=1}^{n} X_i$	

При составлении межотраслевого баланса предполагается, что все национальное хозяйство разбито на «чистые» отрасли, т.е. отрасли, выпускающие один продукт. Каждая отрасль является и производящей и потребляющей.

Для формализованной записи балансовых соотношений введем следующие обозначения:

i - порядковый номер отрасли, производящей продукцию, $i = \overline{1, n}$; j - порядковый номер отрасли, потребляющей продукцию, $j = \overline{1, n}$; n - количество «чистых» отраслей, входящих в балансовую модель; X_i - объем валового выпуска i–й отрасли; y_i - объем конечного продукта i–й отрасли; Z_j - величина добавленной стоимости для j–й отрасли; X_{ij} - объем межотраслевой поставки из i–й отрасли в j–ю, т.е. объем продукции i–й отрасли, используемый при производстве продукции j-й отрасли.

Первый раздел межотраслевого баланса содержит параметры, характеризующие движение межотраслевых потоков из i-й отрасли в j-ю (X_{ij}). Каждая строка первого раздела баланса характеризует процесс распределения продукции, а каждый столбец – структуру материальных затрат. Таким образом, в первом разделе межотраслевого баланса отражается та часть совокупного общественного продукта, которая функционирует в сфере материального производства. Поэтому этот раздел называют «промежуточный продукт».

Сумма показателей по i–й строке отражает общий объем продукции i–й отрасли, которая отправляется во все остальные отрасли. Сумма показателей j–го столбца – это общий объем продукции из всех отраслей, которая поступает в j–ю отрасль. Эта величина – материальные затраты j–й отрасли. В модели выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}, \qquad (3.1)$$

т.е. общий производственный выпуск всех отраслей соответствует общему производственному потреблению всех отраслей.

Второй раздел межотраслевого баланса содержит величины конечного продукта отраслей. Конечный продукт – это часть совокупного общественного продукта, которая производится в сфере материального производства, а используется в следующих направлениях: непроизводственная сфера потребления (личного и общественного); накопление основного капитала и изменение запасов материальных оборотных средств; сальдо экспорта-импорта. Второй раздел баланса характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода.

Третий раздел межотраслевого баланса содержит параметры, характеризующие добавленную стоимость: сумму оплаты труда и чистого дохода отраслей, а также амортизации основных фондов, т.е. характеризует стоимостной состав национального дохода.

Четвертый раздел используется для проверки правильности расчета баланса:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j , \tag{3.2}$$

т.е. валовой выпуск отраслей в стоимостном выражении равен общим расходам этих отраслей, соответственно должны быть равны суммарный валовой выпуск и суммарные расходы.

Основные балансовые соотношения

Первое балансовое соотношение выражает связь между первым и вторым разделами балансовой модели

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} + y_i = X_i,\ \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}\, , \tag{3.3}$$

т.е. валовой выпуск отрасли равен сумме промежуточного и конечного продукта.

Второе балансовое соотношение выражает связь между первым и третьим разделами балансовой модели

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} + Z_j = X_j,\ \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{n}}, \tag{3.4}$$

т.е. общие расходы отрасли равны сумме материальных затрат и добавленной стоимости.

Третье балансовое соотношение выражает связь между вторым и третьим разделами балансовой модели

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j, \tag{3.5}$$

т.е. сумма конечной продукции отраслей равна сумме добавленной стоимости этих отраслей.

Экономико-математическая модель межотраслевого баланса. Модель Леонтьева

Запишем первую систему балансовых соотношений, характеризующих распределение продукции отраслей материального производства:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} + y_i = X_i, \qquad \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}\ .$$

Предположим, что межотраслевой поток продукции, идущей из i–й отрасли в j–ю, прямо пропорционален валовому выпуску той отрасли, куда они направляются, т.е.

$$X_{ij} = a_{ij} \cdot X_j. \tag{3.6}$$

Коэффициенты пропорциональности $\boldsymbol{a_{ij}}$ называются коэффициентами прямых материальных затрат и характеризуют количество продукции i–й отрасли, необходимой для выпуска единицы продукции j–й отрасли. Будем полагать, что коэффициенты $\boldsymbol{a_{ij}}$ постоянны в некотором промежутке времени, охватывающем как отчетный, так и предстоящий (планируемый) период.

Подставим выражение (3.6) в первое балансовое соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + y_i = X_i,\ i = \overline{1,n}\ . \qquad (3.7)$$

Выражение (3.7) называется системой уравнений межотраслевого баланса или экономико-математической моделью межотраслевого баланса, или моделью Леонтьева. Модель Леонтьева в матричном виде

$$AX + Y = X, \qquad (3.8)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_n \end{pmatrix},\qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

Можно сформулировать три типа задач межотраслевого баланса:

1. Известны коэффициенты прямых материальных затрат ($\boldsymbol{a_{ij}}$; i,j = $\overline{1,n}$) и объёмы конечного продукта всех отраслей $\boldsymbol{y_i}$. Найти объёмы валового выпуска каждой отрасли X_i.

2. Известны объемы валового выпуска всех отраслей X_i и коэффициенты прямых материальных затрат $\boldsymbol{a_{ij}}$. Найти объемы конечной продукции каждой отрасли $\boldsymbol{y_i}$.

3. Известны коэффициенты прямых материальных затрат $\boldsymbol{a_{ij}}$. Заданы объемы валового выпуска для части отраслей и объемы конечной продукции для всех остальных отраслей. Найти объемы конечной продукции для первых отраслей и объемы валового выпуска для вторых.

Методы отыскания вектора валовых выпусков

Для решения первой задачи существует два метода: точный и приближенный.

а) Точный метод отыскания вектора валовых выпусков X.

Запишем модель Леонтьева в матричном виде

$$AX + Y = X, \text{ откуда: } X - AX = Y \text{ или } (E - A) \cdot X = Y, \qquad (3.9)$$

где E – единичная матрица той же размеренности, что и матрица A;   (E – A) – матрица Леонтьева.

Отсюда решение задачи находится из следующего выражения:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y = B \cdot Y, \qquad (3.10)$$

где $B = (E - A)^{-1}$ – обратная к матрице Леонтьева матрица.

Неотрицательное решение задачи существует, если $0 \le \boldsymbol{a_{ij}} < 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \qquad j = \overline{1, n}.$$

б) Приближенный метод отыскания вектора валовых выпусков.

Разложим матрицу $(E - A)^{-1}$ в ряд Тейлора, получим

$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots$

Подставим найденное выражение в зависимость (3.10).

Пример. Три отрасли выпускают продукцию, причем нормы затрат ресурсов заданы матрицей A, вектор конечной продукции – Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}35 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Определить вектор валовых выпусков и величины межотраслевых поставок.

Решение найдём с помощью функций Excel из категории *Математические*. Так, обратную матрицу $B = (E - A)^{-1}$ найдём с помощью функции =МОБР, вектор X=B*Y – с помощью функции =МУМНОЖ. Транспонировать вектор X поможет функция =ТРАНСП (рис. 38). Названные функции вводятся в виде формул массива. Например, для нахождения обратной матрицы следует выделить область B13:D15, ввести функцию =МОБР(B9:D11), нажать клавишу F2 и завершить расчёт нажатием комбинации клавишей Ctrl+Shift+Enter.

	A	B	C	D	E	F	G
1		0	0,3	0,4		20	
2	**A**	0,35	0	0,25	**Y**	30	
3		0,2	0,15	0		10	
4							
5		1	0	0			
6	**E**	0	1	0			
7		0	0	1			
8							
9		1	-0,3	-0,4	=B5-B1	=C5-C1	=D5-D1
10	**E - A**	-0,35	1	-0,25	=B6-B2	=C6-C2	=D6-D2
11		-0,2	-0,15	1	=B7-B3	=C7-C3	=D7-D3
12							
13		1,29804	0,4855	0,64059			
14	**B**	0,53945	1,24073	0,52596	=МОБР(B9:D11)		
15		0,34053	0,28321	1,20701			
16							
17		46,9319					
18	**X**	53,2704	=МУМНОЖ(B13:D15;F1:F3)				
19		27,3769					
20							
21	**X'**	46,9319	53,2704	27,3769	=ТРАНСП(B17:B19)		
22							
23		0	15,9811	10,9508		26,9319	
24	**Xij**	16,4262	0	6,84423	**Σ**	23,2704	
25		9,38638	7,99056	0		17,3769	
26							
27		=B1*B$21	=C1*C$21	=D1*D$21			
28		=B2*B$21	=C2*C$21	=D2*D$21			
29		=B3*B$21	=C3*C$21	=D3*D$21			

Рис. 38. Расчёт вектора валового выпуска

Величины межотраслевых поставок определяются из выражения

$$X_{ij} = a_{ij} \cdot X_j ,$$

где X_j - элементы транспонированного вектора валового выпуска.

Решение задачи поиска вектора валового выпуска в модели межотраслевого баланса возможно с помощью симплекс-метода.

Представим модель межотраслевого баланса в виде задачи линейного программирования.

Функция цели – максимальный объём валового выпуска

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}x_j \to \max$$

система ограничений

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j + y_i = x_i \quad (i=\overline{1,n})$$

условие неотрицательности получаемого решения

$$x_j \geq 0 \ (i=\overline{1,n}).$$

Система уравнений межотраслевого баланса имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = x_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = x_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n = x_n. \end{cases}$$

Преобразуем систему уравнений к следующему виду, оставив значения конечного продукта в правой части ограничений, а искомые значения валового выпуска – в левой части

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = y_1; \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = y_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1-a_{nn})x_n = y_n. \end{cases}$$

При решении задачи с помощью надстройки Поиск решения введём исходные данные и математические выражения так, как это показано на рис. 39.

Для получения решения задачи необходимо вызвать в меню Сервис надстройку Поиск решения и заполнить её так, как это показано на рис. 40.

	A	B	C	D	E	F
1		0	0,3	0,4		20
2	A	0,35	0	0,25	Y	30
3		0,2	0,15	0		10
4						
5		1	0	0		
6	E	0	1	0		
7		0	0	1		
8						
9		=B5-B1	=C5-C1	=D5-D1		=СУММПРОИЗВ(B9:D9;$B$14:$D$14)
10	E - A	=B6-B2	=C6-C2	=D6-D2		=СУММПРОИЗВ(B10:D10;$B$14:$D$14)
11		=B7-B3	=C7-C3	=D7-D3		=СУММПРОИЗВ(B11:D11;$B$14:$D$14)
12						
13						
14	X					=СУММ(B14:D14)

Рис. 39. Ввод исходных данных в модель оптимизации

F14 =СУММ(B14:D14)

	A	B	C	D	E	F	G
1		0	0,3	0,4		20	
2	A	0,35	0	0,25	Y	30	
3		0,2	0,15	0		10	
4							
5		1	0	0			
6	E	0	1	0			
7		0	0	1			
8							
9		1	-0,3	-0,4		0	
10	E - A	-0,35	1	-0,25		0	
11		-0,2	-0,15	1		0	
12							
13							
14	X					0	

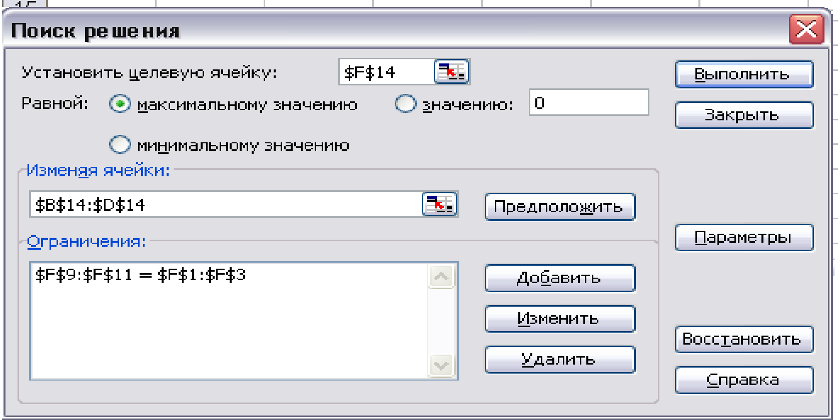


Рис. 40. Заполнение диалогового окна Поиска решения

На рис. 41 показаны результаты решения задачи межотраслевого баланса. Вектор валового выпуска X= (46,93 53,27 27,38). В целевой ячейке величина суммы валовых выпусков отраслей - 127,579 ден.ед.

F14 fx =СУММ(B14:D14)

	A	B	C	D	E	F
1		0	0,3	0,4		20
2	A	0,35	0	0,25	Y	30
3		0,2	0,15	0		10
4						
5		1	0	0		
6	E	0	1	0		
7		0	0	1		
8						
9		1	-0,3	-0,4		20
10	E - A	-0,35	1	-0,25		30
11		-0,2	-0,15	1		10
12						
13						
14	X	46,93189	53,2704	27,37694		127,5792

Рис. 41. Результата решения задачи межотраслевого баланса

Отыскание вектора конечной продукции

Для решения второй задачи межотраслевого баланса запишем модель Леонтьева в матричном виде

$$AX + Y = X,$$

откуда получим выражение (3.9)

$$Y = (E - A) \cdot X.$$

Пример. Три отрасли выпускают продукцию, причем нормы затрат ресурсов заданы матрицей A, вектор валовой продукции – X:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}35 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 45 \\ 50 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Определить вектор конечной продукции Y (рис. 42).

При определении венктора Y используется функция Excel =МУМНОЖ из категории *Математические*, позволяющая получить результат перемножения матрицы E-A и вектора X.

	A	B	C	D	E	F	G
1		0	0,3	0,4		45	
2	**A**	0,35	0	0,25	**X**	50	
3		0,2	0,15	0		35	
4							
5		1	0	0			
6	**E**	0	1	0			
7		0	0	1			
8							
9		1	-0,3	-0,4	=B5-B1	=C5-C1	=D5-D1
10	**E - A**	-0,35	1	-0,25	=B6-B2	=C6-C2	=D6-D2
11		-0,2	-0,15	1	=B7-B3	=C7-C3	=D7-D3
12							
13							
14		16					
15	**Y**	25,5	=МУМНОЖ(B9:D11;F1:F3)				
16		18,5					

Рис. 42. Расчёт вектора конечной продукции

Пример оптимизационной модели отыскания вектора конечной продукции (рис. 43 – 45).

Систему уравнений межотраслевого баланса можно представить в виде X = B ·Y или

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n = x_1; \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n = x_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n = x_n. \end{cases}$$

тогда, в качестве целевой функции задачи оптимизации можно выбрать максимизацию объёма конечной продукции

$$f(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \to \max$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot y_j = x_i \quad (i = \overline{1,\ n})$$

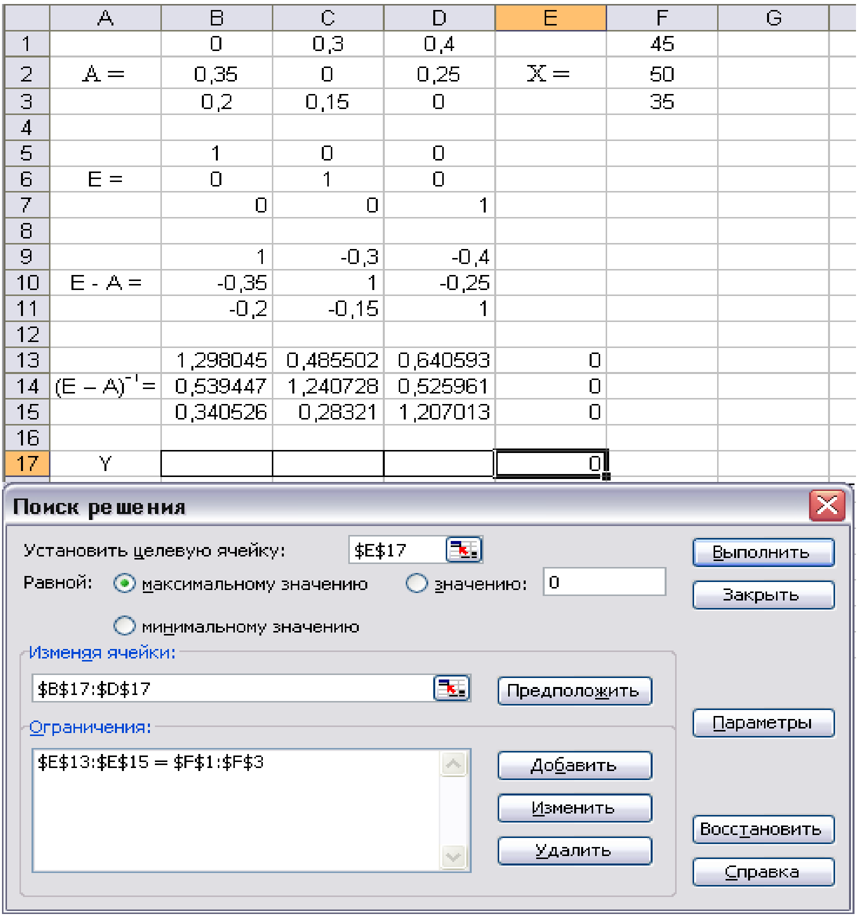
и условии неотрицательности получаемого решения

$$y_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,\ n}).$$

	A	B	C	D	E	F
1		0	0,3	0,4		45
2	A =	0,35	0	0,25	X =	50
3		0,2	0,15	0		35
4						
5		1	0	0		
6	E =	0	1	0		
7		0	0	1		
8						
9		=B5-B1	=C5-C1	=D5-D1		
10	E - A =	=B6-B2	=C6-C2	=D6-D2		
11		=B7-B3	=C7-C3	=D7-D3		
12						
13		=МОБР(B9:D11)	=МОБР(B9:D11)	=МОБР(B9:D11)	=СУММПРОИЗВ(B13:D13;$B$17:$D$17)	
14	$(E - A)^{-1}$=	=МОБР(B9:D11)	=МОБР(B9:D11)	=МОБР(B9:D11)	=СУММПРОИЗВ(B14:D14;$B$17:$D$17)	
15		=МОБР(B9:D11)	=МОБР(B9:D11)	=МОБР(B9:D11)	=СУММПРОИЗВ(B15:D15;$B$17:$D$17)	
16						
17	Y				=СУММ(B17:D17)	

Рис. 43. Ввод исходных данных в модель оптимизации

Выделим ячейки B17:D17 для размещения искомых переменных y_1, y_2 и y_3. Математические выражения левых частей ограничений введём в ячейки E13:E15 с помощью функции =СУММПРОИЗВ из категории *Математические*. Целевую функцию, как сумму искомых переменных введём в ячейку E17. Заполним диалоговое окно программы *Поиск решения* из меню *Сервис* (рис. 44).



	A	B	C	D	E	F	G
1		0	0,3	0,4		45	
2	A =	0,35	0	0,25	X =	50	
3		0,2	0,15	0		35	
4							
5		1	0	0			
6	E =	0	1	0			
7		0	0	1			
8							
9		1	-0,3	-0,4			
10	E - A =	-0,35	1	-0,25			
11		-0,2	-0,15	1			
12							
13		1,298045	0,485502	0,640593	0		
14	$(E – A)^{-1}$ =	0,539447	1,240728	0,525961	0		
15		0,340526	0,28321	1,207013	0		
16							
17	Y				0		

Рис. 44. Заполнение диалогового окна Поиска решения

Нажав на кнопку *Параметры* в диалоговом окне надстройки *Поиск решения*, укажем с помощью “галочек”: *Линейная модель* и *Неотрицательные значения*. Результаты отыскания вектора конечной продукции Y представлены на рис. 45.

	A	B	C	D	E	F
1		0	0,3	0,4		45
2	A =	0,35	0	0,25	X =	50
3		0,2	0,15	0		35
4						
5		1	0	0		
6	E =	0	1	0		
7		0	0	1		
8						
9		1	-0,3	-0,4		
10	E - A =	-0,35	1	-0,25		
11		-0,2	-0,15	1		
12						
13		1,298045	0,485502	0,640593	45	
14	$(E-A)^{-1}=$	0,539447	1,240728	0,525961	50	
15		0,340526	0,28321	1,207013	35	
16						
17	Y	16	25,5	18,5	60	

Рис. 45. Результата решения задачи межотраслевого баланса

Смешанная задача межотраслевого баланса

Для решения третьей задачи баланса все отрасли разделим на две группы. К первой группе отнесем отрасли, для которых задан конечный продукт. Множество номеров этих отраслей обозначим индексами i, j = $\overline{1,m}$. Ко второй группе отнесем отрасли, для которых задан валовой выпуск. Множество номеров этих отраслей обозначим индексами i, j = $\overline{m+1,n}$. Тогда вектор валовых выпусков можно разделить на два подвектора

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \hat{X}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

где X_1 – искомый подвектор с элементами $X_i(i = \overline{1,m})$;

$\widehat{X}_2$ - заданный подвектор с элементами $X_i(i = \overline{m+1,n})$.

Аналогично вектор конечного продукта можно разделить на два подвектора

$$Y = \begin{pmatrix} \widehat{Y}_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \qquad (3.12)$$

где $\widehat{Y}_1$ – подвектор с известными значениями $Y_i(i = \overline{1,m})$;

Y_2 - подвектор с неизвестными значениями $Y_i(i = \overline{m+1,n})$.

Матрица А разбивается на четыре подматрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad (3.13)$$

где A_{11} – подматрица с элементами a_{ij} $(i, j = \overline{1,m})$;

A_{12} – подматрица с элементами a_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{m+1,n})$;

A_{21} – подматрица с элементами a_{ij} $(i = \overline{m+1,n};\ j = \overline{1,m})$;

A_{22} – подматрица с элементами a_{ij} $(i, j = \overline{m+1,n})$.

Для нахождения неизвестных подвекторов X_1 и Y_2, зная А, $\widehat{X}_2$, $\widehat{Y}_1$, представим модель Леонтьева в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \widehat{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{Y}_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \widehat{X}_2 \end{pmatrix}. \qquad (3.14)$$

Раскроем это выражение

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}\widehat{X}_2 + \widehat{Y}_1 = X_1 \\ A_{21}X_1 + A_{22}\widehat{X}_2 + Y_2 = \widehat{X}_2. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Из первого уравнения этой системы найдем

$$X_1 = (E - A_{11})^{-1} \cdot (A_{12}\widehat{X}_2 + \widehat{Y}_1). \qquad (3.16)$$

Из второго уравнения найдем

$$Y_2 = (E - A_{22}) \cdot \widehat{X}_2 - A_{21} X_1 . \qquad (3.17)$$

Найдя из выражения (3.16) X_1 и подставив в выражение (3.17), получим Y_2.

Пример. Три отрасли выпускают продукцию, причем нормы затрат ресурсов заданы матрицей А:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Конечный продукт первой отрасли равен 8 ед., объем производства второй отрасли равен 10 ед., а третьей – 15 ед. Определить объем производства первой отрасли и конечный продукт второй и третьей.

Решение. Согласно изложенному ранее первая отрасль входит в первую группу, а вторая и третья – во вторую группу, тогда

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad X_1 = (x_1) \quad \widehat{X}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 8 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \widehat{Y}_1 = (8) \quad Y_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (0) \qquad A_{12} = (0{,}1 \quad 0{,}2)$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из формулы (3.16) найдем

$$X_1 = (1 - 0)^{-1} \cdot \left[(0{,}1 \quad 0{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} + 8\right] = 12$$

Из формулы (3.17) найдем

$$Y_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot 12 = \begin{pmatrix} 3{,}1 \\ 9{,}8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, валовой выпуск первой отрасли равен 12 ед., конечный продукт второй и третьей равен 3,1 ед. и 9,8 ед. соответственно.

Коэффициенты полных материальных затрат

Запишем модель в матричной форме

$$AX + Y = X .$$

Отсюда вектор валовых выпусков

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y.$$

Обозначим матрицу $(E - A)^{-1}$ через B, а ее элементы через $\boldsymbol{b_{ij}}$ $(i,j = \overline{1,n})$. Тогда

$$X = B \cdot Y . \qquad (3.18)$$

Коэффициенты полных материальных затрат $\boldsymbol{b_{ij}}$ показывают общую потребность в продукции i–й отрасли, которая обеспечивает выпуск единицы конечной продукции j–й отрасли.

Для определения матрицы коэффициентов полных материальных затрат существуют две формулы: точная и приближенная.

Формула для точного расчета

$$B = (E - A)^{-1} . \qquad (3.19)$$

Формула для приближенного расчета получается при разложении матрицы $(E - A)^{-1}$ в ряд Тейлора

$$B = E + A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots \qquad (3.20)$$

Коэффициенты косвенных затрат

Косвенные затраты относятся к предшествующим стадиям производства и входят в продукт не непосредственно, а через затраты сопряженных отраслей (рис. 46).

Коэффициенты косвенных затрат характеризуют количество продукции i–й отрасли, которая направляется в j–ю отрасль для производства единицы ее продукции, проходя *k* промежуточных стадий.

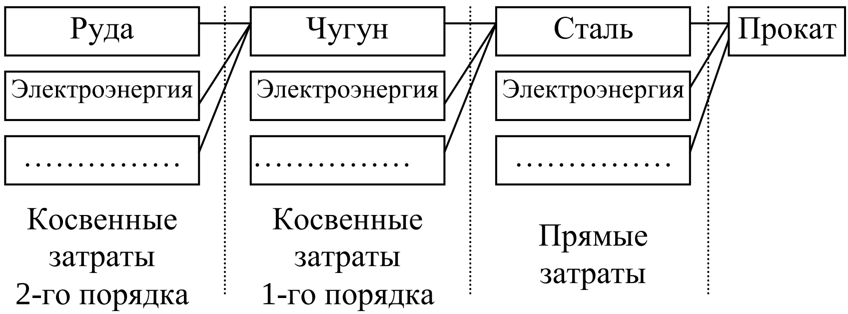


Рис. 46. Пример формирования косвенных затрат

Коэффициенты косвенных затрат обозначаются $a_{ij}^{(k)}$, где k – порядок косвенных затрат.

Для определения косвенных затрат первого порядка в матричной форме используют следующую формулу:

$$A^{(1)} = A \cdot A = A^2.$$

Матрица коэффициентов косвенных затрат второго порядка

$$A^{(2)} = A^3.$$

Матрица коэффициентов косвенных затрат k-го порядка

$$A^{(k)} = A^{k+1}. \qquad (3.21)$$

Определим общие (суммарные) косвенные затраты

$$A^{\Sigma(k)} = A^2 + A^3 + \ldots + A^k + \ldots \qquad (3.22)$$

Для получения точной расчетной формулы для суммарных косвенных затрат воспользуемся формулой (3.20):

$$B = E + A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots = E + A + A^{\Sigma(k)}.$$

Отсюда получим $\quad A^{\Sigma(k)} = B – E – A.$

Для автоматизации расчёта задачи межпродуктового баланса возможно использование программы «Межотраслевая балансовая модель В.Леонтьева» из ППП PRIMA.

Исходными данными для расчётов является матрица коэффициентов прямых затрат, вектор известных значений конечного продукта и вектор известных значений валового выпуска (рис. 47).

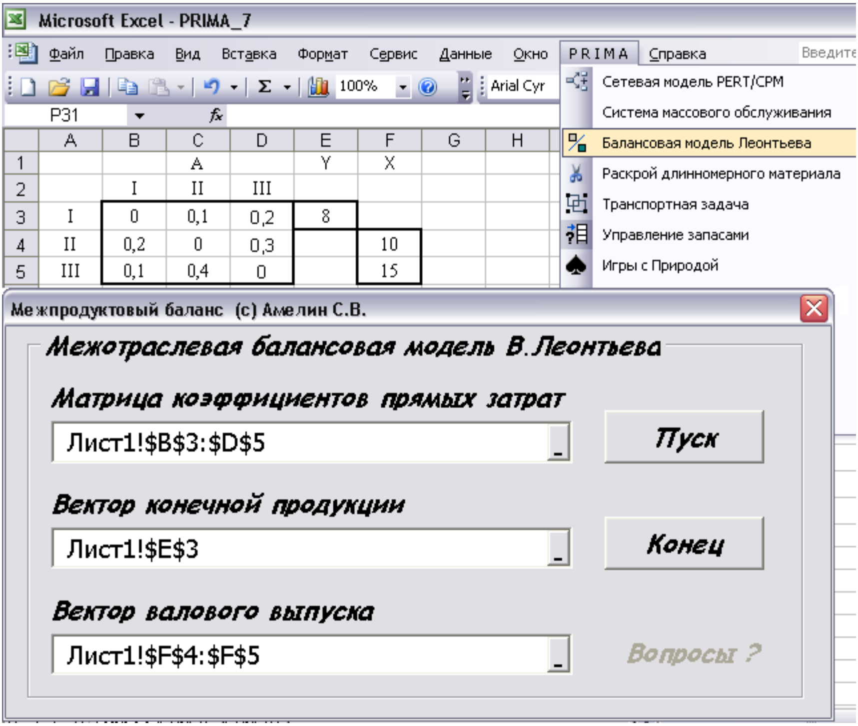


Рис. 47. Ввод исходных данных в диалоговую форму

Результаты расчёта параметров модели межпродуктового баланса представлены на рис. 48.

	A	B	C	D	E	F	G
7	РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ МЕЖПРОДУКТОВОГО БАЛАНСА						
8							
9	МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРЯМЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЗАТРАТ						
10	0	0,1	0,2				
11	0,2	0	0,3				
12	0,1	0,4	0				
13							
14	МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛНЫХ ЗАТРАТ						
15	1,07186	0,21924	0,28015				
16	0,28015	1,19367	0,41413				
17	0,21924	0,49939	1,19367				
18							
19	МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ КОСВЕННЫХ ЗАТРАТ						
20	0,07186	0,11924	0,08015				
21	0,08015	0,19367	0,11413				
22	0,11924	0,09939	0,19367				
23							
24	МАТРИЦА МЕЖЦЕХОВЫХ ПОСТАВОК ПО НОВОМУ ПЛАНУ						
25	0	1	3				
26	2,4	0	4,5				
27	1,2	4	0				
28							
29	ВАЛ.ВЫП.	КОН.ПРОД.	ПРОИЗВ.ЗАТРАТ				
30	12	8	4				
31	10	3,1	6,9				
32	15	9,8	5,2				

Рис. 48. Результаты расчёта параметров балансовой модели

Тема 4. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В результате изучения данной темы студенты должны:

знать:

- область применения моделей оптимального планирования и управления в экономике;
- основные понятия линейного программирования;
- методы решения задач линейного программирования;

уметь:

- формулировать постановку различных задач линейного программирования;
- находить решение задач линейного программирования с помощью графического и симплексного методов;

- давать экономическую интерпретацию полученных результатов решения задач линейного программирования;

- применять методы линейного программирования для решения практических задач;

владеть:

- математическим аппаратом линейного программирования;

- практическими навыками формулирования и решения задач линейного программирования, в том числе с помощью ЭВМ.

Раздел математических методов, в котором рассматриваются способы решения задач на нахождение экстремума функции цели при ограничении области допустимых значений в форме уравнений или неравенств, называется математическим программированием. Другими словами, математическое (оптимальное) программирование рассматривает задачи планирования, распределения ограниченных ресурсов наилучшим образом, для достижения поставленных целей.

Общая задача математического программирования имеет вид:

определить экстремум функции

$$f(x) \to \text{extremum (max, min)},$$

при выполнении условий

$$g_i(x) = (\geq, \leq) b_i, \ (i = \overline{1, m}),$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots x_j \ldots x_n), \ x_j \geq 0, \ (j = \overline{1, n}),$$

где $f(x)$ – целевая функция;

$g_i(x)$ - функция ограничения;

b_i - действительное число, константа ограничения.

Если функции $f(x)$ и $g_i(x)$ представлены в виде линейных функций, то оптимизационная задача называется задачей линейного программирования.

Таким образом, линейное программирование – это область математического программирования, посвященная теории и методам решения задач нахождения условного экстремума и характеризующаяся линейной зависимостью между переменными.

Примеры задач линейного программирования

1. *Задача планирования производства*

Фирма выпускает четыре вида персональных компьютеров (табл. 7).

Таблица 7

Цех	Затраты времени на единицу продукции, ч				Общий фонд времени, ч/мес
	α	β	γ	δ	
Узловой сборки	15	12	4,8	3	480
Сборочный	8,4	4,8	1,8	1,2	252
Испытательный	2,4	1,2	0,12	0,06	90
Доход, ден.ед.	6,5	6	1,5	0,75	—

Определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить фирме, чтобы доход за месяц был бы максимальным. Построить экономико-математическую модель задачи.

Решение. Обозначим через x_1 – количество изделий вида α, которое должна выпустить фирма; x_2 – количество изделий вида β; x_3 – количество изделий вида γ; x_4 – количество изделий вида δ.

Найдем затраты времени на производственный процесс в цехах (они не должны превышать располагаемый фонд времени)

$$\begin{cases} 15x_1 + 12x_2 + 4{,}8x_3 + 3x_4 \le 480, \\ 8{,}4x_1 + 4{,}8x_2 + 1{,}8x_3 + 1{,}2x_4 \le 252, \\ 2{,}4x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}06x_4 \le 90. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Доход за месяц должен быть максимизирован:

$$f(x) = 6{,}5x_1 + 6x_2 + 1{,}5x_3 + 0{,}75x_4 \to \max. \qquad (4.2)$$

Выпускается только выгодная продукция (в этом случае $x_i > 0$), а невыгодная не производится (тогда $x_i = 0$). Отсюда условие неотрицательности переменных

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \qquad (4.3)$$

Выражения (1.1), (1.2) и (1.3) составляют экономико-математическую модель задачи линейного программирования.

Для представления задачи в символьном виде введем обозначения:

X_j – количество выпускаемых изделий j-го типа, $j = \overline{1,n}$;

n – количество типов изделий;

a_{ij} – затраты времени на единицу j-го типа изделия в i-м цехе, $i = \overline{1,m}$;

m – количество производственных подразделений (цехов);

b_i – ресурс рабочего времени для i–го цеха;

C_j – доход от реализации единицы j–го типа изделия.

Тогда модель можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + a_{13} \cdot X_3 + a_{14} \cdot X_4 \leq b_1, \\ a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + a_{23} \cdot X_3 + a_{24} \cdot X_4 \leq b_2, \\ a_{31} \cdot X_1 + a_{32} \cdot X_2 + a_{33} \cdot X_3 + a_{34} \cdot X_4 \leq b_3, \\ f(x) = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + C_3 \cdot X_3 + C_4 \cdot X_4 \to \max, \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0.$$

2. *Задача оптимального использования ресурсов*

Предприятие выпускает n различных видов изделий. Для их производства требуется m различных видов ресурсов. Ресурсы ограничены b_i единицами ($i = \overline{1,m}$). Известны технологические коэффициенты a_{ij}, которые указывают, сколько единиц i–го ресурса требуется для производства единицы изделия j–го вида ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$). Прибыль от реализации единицы изделия j–го вида равна C_j.

Составить программу выпуска (план) продукции, при реализации которой прибыль была бы максимальной.

Таблица 8

Виды ресурсов	Виды изделий $1 \; \dots \; j \dots n$	Запасы ресурсов
1	$a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n}$	b_1
…	……………………..	…
i	$a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{in}$	b_i
…	…………………….	…
m	$a_{m1} \dots a_{mj} \dots a_{mn}$	b_m
Прибыль	$C_1 \; \dots \; C_j \dots C_n$	—

Обозначим через X_j – объем выпуска изделий j–го вида. Найдем расход ресурсов i–го типа на все виды изделий

$$\begin{cases} a_{11} \cdot X_1 + \; \dots + a_{1j} \cdot X_j + \dots + a_{1n} \cdot X_n \le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \cdot X_1 + \dots + a_{ij} \cdot X_j + \dots + a_{in} \cdot X_n \le bi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot X_1 + \dots + a_{mj} \cdot X_j + \dots + a_{mn} \cdot X_n \le b_m. \end{cases}$$

Прибыль от реализации

$$f(x) = C_1 \cdot X_1 + \dots + C_j \cdot X_j + \dots + C_n \cdot X_n \to \max.$$

Условия неотрицательности получаемого решения

$$X_j \ge 0, \; (j = \overline{1, n}).$$

3. *Задача оптимального распределения заданий по участкам производства*

Необходимо спланировать программу выпуска однородной продукции в n производственных подразделениях, которые различаются по мощности и по технологическому процессу. Для изготовления этой продукции требуется m видов ресурсов, запасы которых ограничены.

Обозначим через a_{ij} коэффициенты расхода i–го вида ресурса ($i = \overline{1, m}$) в j–м подразделении в единицу времени, через b_i – запасы i–го ресурса, а C_j – показатели производительности j–го подразделения ($j = \overline{1, n}$). Оптимальный план должен обеспечить максимальный объем выпуска продукции.

Таблица 9

Виды ресурсов	Подразделения производства $1 \ldots j \ldots n$	Запасы ресурсов
1 … i … m	$a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n}$ …………………….. $a_{i1} \ldots a_{ij} \ldots a_{in}$ ……………………. $a_{m1} \ldots a_{mj} \ldots a_{mn}$	b_1 … b_i … b_m
Производительность	$C_1 \ldots C_j \ldots C_n$	—

Пусть X_j – время работы j–го подразделения при выполнении производственного задания.

Суммарный расход ресурсов

$$\begin{cases} a_{11} \cdot X_1 + \ldots + a_{1j} \cdot X_j + \ldots + a_{1n} \cdot X_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \cdot X_1 + \ldots + a_{ij} \cdot X_j + \ldots + a_{in} \cdot X_n \le bi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot X_1 + \ldots + a_{mj} \cdot X_j + \ldots + a_{mn} \cdot X_n \le b_m. \end{cases}$$

Максимальный выпуск продукции

$$f(x) = C_1 \cdot X_1 + \ldots + C_j \cdot X_j + \ldots + C_n \cdot X_n \to \max.$$

Условие неотрицательности решения

$$X_j \ge 0, (j = \overline{1, n}).$$

4. *Задача составления оптимальной смеси (задача диеты)*

Для производства продукции используется n различных материалов, включающих в себя ряд различных компонентов (ингредиентов, элементов). Качество продукции определяется содержанием в ней различных компонентов в определенном количестве (никак не меньшем). Известны коэффициенты a_{ij} – удельный вес i–го компонента в единице j–го исходного материала; b_i- необходимое содержание i–го элемента в смеси; C_j - цена единицы j–го материала.

Таблица 10

Компоненты, входящие в состав материалов	Виды материалов $1 \ldots j \ldots n$	Необходимое количество компонентов в смеси (продукции)
1 … i … m	$a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n}$ ………………… $a_{i1} \ldots a_{ij} \ldots a_{in}$ ………………… $a_{m1} \ldots a_{mj} \ldots a_{mn}$	b_1 … b_i … b_m
Цена единицы материала	$C_1 \ldots C_j \ldots C_n$	—

Обозначим через X_j количество j–го материала, входящего в смесь (в готовый продукт). Тогда

$$\begin{cases} a_{11} \cdot X_1 + \ldots + a_{1j} \cdot X_j + \ldots + a_{1n} \cdot X_n \geq b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \cdot X_1 + \ldots + a_{ij} \cdot X_j + \ldots + a_{in} \cdot X_n \geq b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot X_1 + \ldots + a_{mj} \cdot X_j + \ldots + a_{mn} \cdot X_n \geq b_m. \end{cases}$$

Функция цели – минимальные затраты на материалы

$$f(x) = C_1 \cdot X_1 + \ldots + C_j \cdot X_j + \ldots + C_n \cdot X_n \rightarrow \min.$$

Условие неотрицательности решения

$$X_j \geq 0, \ (j = \overline{1, n}).$$

5. *Распределительная задача: о размещении парка оборудования по участкам производства*

Имеется n типов оборудования, которое должно быть использовано на m участках. Известно: число единиц оборудования каждого j–го типа (d_j); производительность оборудования j–го типа на i–м участке (a_{ij}); затраты на эксплуатацию единицы оборудования j–го типа на i–м участке (C_{ij}). Задан объем работы, который необходимо выполнить на каждом участке (b_i). Требуется так распределить парк оборудования, чтобы расходы на эксплуатацию были бы минимальными.

Пусть X_{ij} – число единиц оборудования j–го типа, которое направляется на i–й участок.

Таблица 11

Участки производства	Виды оборудования	Объем работы
	1 … j … n	
1 … i … m	$a_{ij} \backslash C_{ij}$	b_1 … b_i … b_m
Наличие оборудования	d_1 … d_j … d_n	—

Все оборудование должно быть распределено по участкам

$$\begin{cases} X_{11} + \ldots + X_{i1} + \ldots + X_{m1} = d_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{1j} + \ldots + X_{ij} + \ldots + X_{mj} = d_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{1n} + \ldots + X_{in} + \ldots + X_{mn} = d_n. \end{cases}$$

Работа должна быть выполнена (и, если возможно, перевыполнена)

$$\begin{cases} a_{11} \cdot X_{11} + \ldots + a_{1j} \cdot X_{1j} + \ldots + a_{1n} \cdot X_{1n} \geq b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \cdot X_{i1} + \ldots + a_{ij} \cdot X_{ij} + \ldots + a_{in} \cdot X_{in} \geq b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot X_{m1} + \ldots + a_{mj} \cdot X_{mj} + \ldots + a_{mn} \cdot X_{mn} \geq b_m. \end{cases}$$

Расходы на эксплуатацию оборудования должны быть минимальными

$$f(x) = C_{11} \cdot X_{11} + \ldots + C_{ij} \cdot X_{ij} + \ldots + C_{mn} \cdot X_{mn} \to \min.$$

Условие неотрицательности решения

$$X_{ij} \geq 0, \ (i = \overline{1, m}\,;\ j = \overline{1, n}\,).$$

Общая задача линейного программирования

Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении таких значений неизвестных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, для которых функция цели

$$f(x) = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \ldots + C_n \cdot X_n \to \text{extremum}$$

принимает экстремальное значение и которые удовлетворяют ограничениям

$$\begin{cases} a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + \ldots + a_{1n} \cdot X_n \le b_1, \\ a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + \ldots + a_{2n} \cdot X_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1} \cdot X_1 + a_{k2} \cdot X_2 + \ldots + a_{kn} \cdot X_n \le b_k, \\ a_{k+1,1} \cdot X_1 + a_{k+1,2} \cdot X_2 + \ldots + a_{k+1,n} \cdot X_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot X_1 + a_{m2} \cdot X_2 + \ldots + a_{mn} \cdot X_{mn} = b_m, \end{cases}$$

или в более компактном виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to \text{extremum}, \qquad (4.4)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i; \ (i = \overline{1,k}), & (4.5) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i; \ (i = \overline{k+1,m}), & (4.6) \end{cases}$$

$$X_j \ge 0; \ (j = \overline{1,S}; \ S \le n), \qquad (4.7)$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины.

Функция (4.4) называется целевой функцией задачи (4.4) – (4.7), а условия (4.5) – (4.7) – ограничениями данной задачи.

Совокупность значений переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, удовлетворяющих условиям задачи (4.5) – (4.7), называется допустимым решением, или планом. План $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots X_n^*)$, при котором целевая функция задачи принимает экстремальное значение, называется оптимальным.

Стандартная (симметричная) задача линейного программирования

Стандартной задачей линейного программирования называют задачу, в которой требуется найти такие значения X_1, X_2,

…, X_n, при которых функция цели принимает максимальное значение

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to \max \tag{4.8}$$

и которые удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i; \ (i = \overline{1,m}), \tag{4.9}$$

$$X_j \ge 0; \ (j = \overline{1,n}). \tag{4.10}$$

Каноническая (основная) задача линейного программирования

Канонической задачей называется задача, в которой требуется найти такой набор переменных X_1, X_2, …, X_n, который позволяет максимизировать функцию цели

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to \max \tag{4.11}$$

и удовлетворяет системе ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i; \ (i = \overline{1,m}), \tag{4.12}$$

$$X_j \ge 0; \ (j = \overline{1,n}). \tag{4.13}$$

Представление задачи линейного программирования в канонической форме

Пусть требуется найти неотрицательные значения переменных X_1, X_2, …, X_n, для которых функция цели принимает максимальное значение

$$f(x) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \le b_1, \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \le b_m, \end{cases}$$

$$X_j \geq 0, \ (j = \overline{1,n}).$$

Поскольку в ограничениях левая часть меньше, чем правая (или равна ей), чтобы перейти к строгому равенству, необходимо к левой части каждого неравенства добавить соответствующую переменную.

Найти максимум функции цели

$$f(x) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n + \ldots + 0 \cdot X_{n+1} + \ldots + 0 \cdot X_{n+m} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n + X_{n+1} = b_1, \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n + X_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n + X_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$X_j \geq 0, \ (j = \overline{1, n+m}).$$

Пример. Записать следующую задачу в канонической форме:

$$f(x) = -X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3X_1 - X_2 + 2X_3 + 2X_4 \leq 10, \\ X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 \geq 8, \\ 2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 \leq 6, \\ -X_1 + 3X_2 + 5X_3 - 3X_4 = 15, \end{cases}$$

$$X_j \geq 0, \ (j = 1 \div 4).$$

Для записи задачи в канонической форме поменяем знаки у всех коэффициентов функции цели на противоположные. Тогда задача будет заключаться в нахождении максимума целевой функции. Для приведения ограничений – неравенств к системе уравнений необходимо приравнять левые и правые части ограничений путем введения дополнительных переменных. Если левая часть ограничения меньше, чем правая, необходимо добавить дополнительную переменную, если же левая часть ограничения больше, из нее следует вычесть некоторое, пока неизвестное, значение.

$$f(x) = X_1 - 2X_2 + X_3 - X_4 + 0\cdot X_5 + 0\cdot X_6 + 0\cdot X_7 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3X_1 - X_2 + 2X_3 + 2X_4 + X_5 = 10, \\ X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 - X_6 = 8, \\ 2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 + X_7 = 6, \\ -X_1 + 3X_2 + 5X_3 - 3X_4 = 15, \\ X_j \geq 0. \end{cases}$$

Свойства задачи линейного программирования:

1. Множество планов задачи линейного программирования, если оно не пусто, образует выпуклый многогранник. Любая точка внутри области, ограниченной этим многогранником, является допустимым решением задачи.

2. В одной из вершин многогранника решений целевая функция принимает максимальное значение (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов).

3. Если максимальное значение функция принимает более, чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Рассмотрим следующую задачу: найти такие значения переменных X_1 и X_2, которые максимизируют функцию цели

$$f(x) = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 \rightarrow \max \tag{4.14}$$

при выполнении ограничений

$$a_{i1} \cdot X_1 + a_{i2} \cdot X_2 \leq b_i; \ (i = \overline{1,m}); \tag{4.15}$$

условие неотрицательности $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$. (4.16)

Каждое неравенство (4.15) и (4.16) системы ограничений геометрически представляет собой полуплоскость с граничными прямыми:

$$\begin{cases} a_{i1} \cdot X_1 + a_{i2} \cdot X_2 = b_i \ (i = \overline{1,m}), \\ \left.\begin{matrix} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{- оси координат (решение получаем в 1 квадранте).} \end{cases}$$

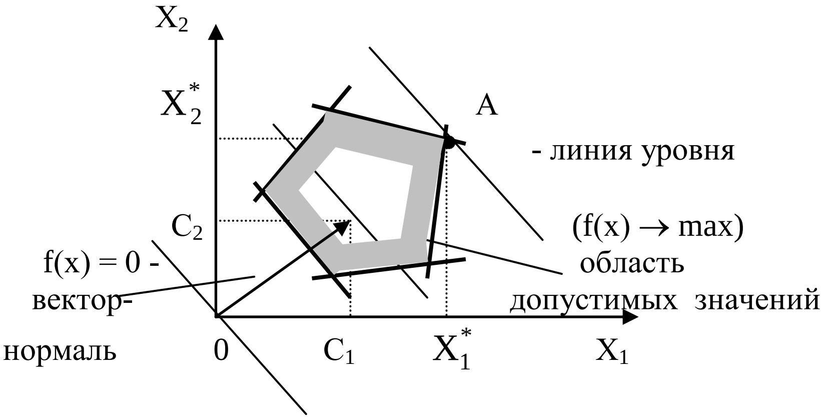
В том случае, если система неравенств (4.15) и (4.16) совместна, то область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. А так как множество точек пересечения данных полуплоскостей – выпуклое, то область допустимых решений задачи (4.14) – (4.16) есть выпуклое множество, которое называется многоугольником решений. Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получают из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств. Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой функция цели f(x) принимает максимальное значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и функция цели ограничена сверху.

При указанных условиях в одной из вершин многоугольника функция цели принимает максимальное значение. Для определения данной вершины строится вектор-нормаль с координатами – коэффициентами функции цели $\overline{C}=(C_1, C_2)$. Перпендикулярно вектору-нормали построим линию уровня $C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 = h$ (где h – некоторое число, которое подбирается таким, чтобы эта линия уровня проходила через многоугольник решений). Будем передвигать линию уровня в направлении вектора–нормали до тех пор, пока она не дойдет до последней общей точки с многоугольником решений. Координаты этой точки и определяют оптимальный план – решение задачи.

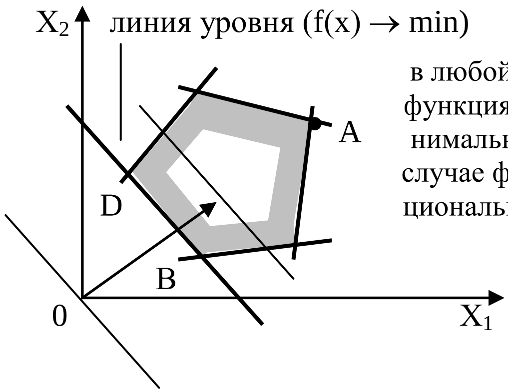
Координаты этой точки $A(X_1^*, X_2^*)$ находятся следующим образом: решается система уравнений, которые соответствуют линиям-ограничениям, на пересечении которых эта точка находится. Подставляя значения координат этой точки в функцию цели, получаем максимальное значение целевой функции. Для нахождения минимума функции цели линия уровня передвигается не в направлении вектора-нормали, а в противоположном направлении.

При нахождении решения задачи (4.14) – (4.16) возможны следующие случаи:

1. Единственное оптимальное решение – в точке А функция цели принимает максимальное значение

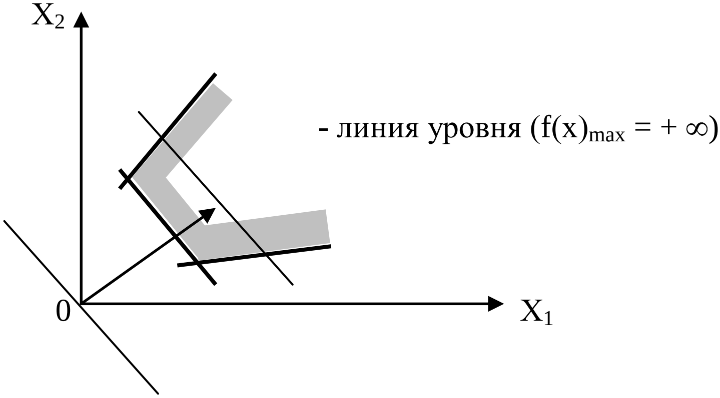


2. Множество точек на отрезке DB – оптимальное решение

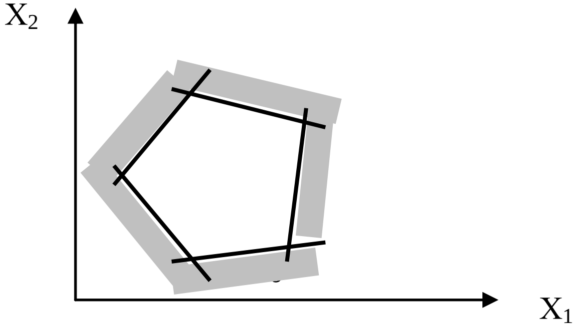


в любой точке этого отрезка функция цели принимает минимальное значение. В этом случае функция цели пропорциональна одному из ограничений.

3. Функция цели не ограничена сверху на множестве допустимых решений



4. Система ограничений задачи несовместна. Условия противоречивы. Многоугольник решений пуст. Решения нет.

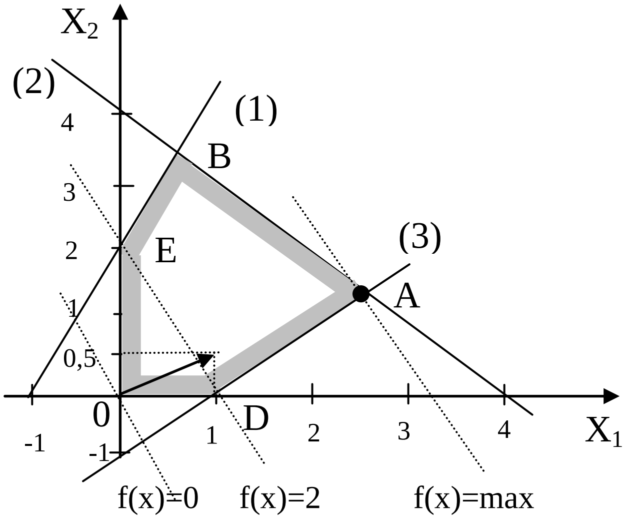


Пример. Найти решение задачи графическим и аналитическим методами:

$$f(x) = 2X_1 + X_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -2X_1 + X_2 \leq 2, \\ X_1 + X_2 \leq 4, \\ X_1 - X_2 \leq 1, \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение.



Построим прямые, уравнения которых получаем в результате замены в системе ограничений знаков неравенств на знаки точных равенств. Получаем уравнения прямых линий на плоскости. Для того, чтобы провести прямую линию, достаточно знать координаты двух точек. Проведем линию (1), соответствующую первому ограничению. Для этого присвоим переменной X_2 некоторое значение, например ноль, и определим значение переменной X_1, найдем координаты первой точки (-1; 0). Приравняв нулю переменную X_1, найдем значение переменной X_2 – координаты второй точки (0; 2). Для того, чтобы определить, с какой стороны от проведенной линии находится область допустимых значений, необходимо подставить в неравенство координаты какой-нибудь точки пространства, например начала координат ($X_1 = 0$, $X_2 = 0$). Полученное значение – ноль, меньше чем два (правая часть ограничения), а значит, точка начала координат принадлежит искомой полуплоскости. Повторим построения для всех остальных ограничений задачи и получим многоугольник решений ODABE. Построим вектор-нормаль, выходящий из начала координат в направлении точки с координатами – коэффициентами функции цели ($X_1 = 2$, $X_2 = 1$) или пропорциональными этим координатам ($X_1 = 1$, $X_2 = 0,5$). Линия уровня (соответствующая функции цели) строится перпендикулярно вектору-нормали или же функция цели приравнивается какому-либо числу, например $f(x) = 2X_1 + X_2 = 2$ и проводится соответствующая линия. Передвинем линию уровня в направлении, указанном вектором. В результате находим точку А, в которой целевая функция принимает максимальное значение. Находим координаты этой точки. Для этого решим систему уравнений, которые соответствуют прямым, на пересечении которых находится точка А:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 4, \\ X_1 - X_2 = 1. \end{cases}$$

Проведем сложение двух уравнений, получим

$2X_1 = 5$, откуда $X_1 = 2,5$.

Вычтем из первого уравнения второе, получим

$2X_2 = 3$, откуда $X_2 = 1,5$.

Вычислим значение функции цели в точке А(2,5; 1,5)

$$f(x)_{max} = 2 \cdot 2,5 + 1,5 = 6,5.$$

Двойственность в задачах линейного программирования. Прямая и двойственная задачи

Для каждой задачи линейного программирования можно составить двойственную задачу линейного программирования.

Допустим, прямая задача состоит в нахождении максимального значения функции:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to max, \tag{4.17}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i; \ (i = \overline{1,k}), & (4.18) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i; \ (i = \overline{k+1,m}), & (4.19) \end{cases}$$

$$X_j \geq 0;\ (j = \overline{1,S};\ S \leq n). \qquad (4.20)$$

Тогда двойственная задача по отношению к задаче (4.17) – (4.20) состоит в нахождении минимального значения функции:

$$F(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min, \qquad (4.21)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq C_j;\ (j = \overline{1,S}), & (4.22) \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = C_j;\ (j = \overline{S+1,n}), & (4.23) \\ y_i \geq 0;\ (i = \overline{1,k};\ k \leq m). & (4.24) \end{cases}$$

Правила составления двойственной задачи:

1. Если функция исходной задачи 4.17 – 4.20 задается на максимум, то целевая функция двойственной к ней задачи (4.21) – (4.24) задается на минимум.

2. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений (4.18) и (4.19), и матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений (4.22) и (4.23), являются транспонированными по отношению друг к другу (то есть столбцы в этих матрицах меняются местами со строками):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{m2} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в исходной, и наоборот, число ограничений двойственной задачи равно числу переменных исходной.

4. Коэффициенты при переменных в целевой функции прямой задачи становятся свободными членами (правыми частями) системы ограничений двойственной задачи. А правые части в соотношениях системы ограничений прямой задачи становятся коэффициентами при переменных в целевой функции двойственной задачи.

Связь между решениями прямой и двойственной задачи

Лемма 1. Если X – некоторый план исходной задачи (1.17) – (1.20), а Y – произвольный план двойственной задачи (1.21) – (1.24), то значение целевой функции исходной задачи при плане X всегда не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при плане Y, т. е.

$$f(x) \leq F(Y).$$

Лемма 2. Если f(x*) = F(Y*) для некоторых планов X* и Y* задач (1.17) – (1.20) и (1.21) – (1.24), то X* - оптимальный план исходной задачи, Y* - оптимальный план двойственной задачи.

Теорема двойственности. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, т.е.

$$\max f(x) = \min F(Y).$$

Если целевая функция одной из пары двойственной задач не ограничена (для f(x) – сверху, для F(Y) – снизу), то другая задача вообще плана не имеет.

Экономическая интерпретация двойственных задач

Пример. Для производства трех видов изделий A, B и C используются три различных вида сырья, запасы которого составляют соответственно 180, 210 и 244 кг. Нормы затрат сырья на единицу продукции и доход от реализации единицы продукции приведены в табл. 4.6.

Таблица 12

Вид сырья	Нормы затрат сырья, кг, на ед. продукции			Запасы сырья, кг
	A	B	C	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
Доход ден.ед.	10	14	12	-

Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается максимальный доход, и дать оценку каждому из видов сырья, используемых для производства продукции.

Решение. Предположим, что X_j – количество продукции j–го вида, т.е. производится X_1 изделий типа A,
X_2 – типа B и X_3 – типа C.

Для определения оптимального плана производства, необходимо решить следующую задачу: определить максимум целевой функции

$$f(x) = 10X_1 + 14X_2 + 12X_3 \to \max \qquad (4.25)$$

при следующих условиях

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + X_3 \le 180, \\ 3X_1 + X_2 + 3X_3 \le 210, \\ X_1 + 2X_2 + 5X_3 \le 244, \end{cases} \qquad (4.26)$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0. \qquad (4.27)$$

Припишем единице каждого из видов сырья, используемого для производства продукции, двойственную оценку, соответственно равные y_1, y_2 и y_3 (другие названия: объективно обусловленные оценки, теневые цены и т.п.). Тогда общая оценка сырья, используемого на производство всей продукции, должна быть минимальной:

$$F(Y) = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min, \qquad (4.28)$$

а суммарные оценки сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, должны компенсироваться доходом от реализации единицы продукции данного вида:

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12, \end{cases} \qquad (4.29)$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0. \qquad (4.30)$$

Задачи (4.25) – (4.27) и (4.28) – (4.30) образуют симметричную пару двойственных задач. Решение прямой задачи дает оптимальный план производства изделий A, B и C, а решение двойственной – оптимальную систему оценок сырья, используемого для производства этих изделий.

Двойственные оценки можно интерпретировать как внутреннюю ценность, важность ресурсов. Тогда функцию цели двойственной задачи можно интерпретировать таким образом, что внутренняя ценность используемых ресурсов состоит в обеспечении оптимальной прибыли, но при этом затраты ресурсов должны быть минимальными. Систему ограничений двойственной задачи можно интерпретировать как то, что суммарная внутренняя ценность ресурсов, идущих на единицу продукции, определяется получением ожидаемого дохода. Если же затраты на ресурсы больше ожидаемого дохода, то данный вид продукции нерентабелен и выпускаться не будет:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = C_j \ \text{ если } X_j > 0;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > C_j \ \text{ если } X_j = 0.$$

Решение задач линейного программирования симплекс-методом

Если условия задачи линейного программирования не противоречивы, то область ее допустимых решений образует выпуклый многогранник в n-мерном пространстве (многоугольник для двух переменных). При этом оптимальное решение, если оно существует, обязательно достигается в некоторой вершине многогранника (возможно, и более чем в одной).

Таким образом, чтобы найти решение задачи линейного программирования, достаточно перебрать лишь планы, соответствующие вершинам многогранника допустимых решений. Такие планы называют опорными. Однако в сложных задачах и число вершин может оказаться чрезмерно большим, вследствие чего нахождение всех опорных планов потребует огромного объема вычислений.

Симплекс-метод позволяет осуществить упорядоченный, направленный перебор вершин многогранника. После определения одной из вершин этот метод помогает установить, является ли найденный план оптимальным, то есть, достигнут ли в этой вершине максимум целевой функции. Если план не оптимален, то производится переход к такой соседней вершине многогранника, которая обеспечивает большее (или, в крайнем случае, равное предыдущему) значение целевой функции. Симплекс-метод называют еще методом последовательного улучшения плана. Повторное применение указанной процедуры приводит за конечное число шагов к вершине, соответствующей оптимальному плану.

Симплекс-метод применяется к задаче, записанной в канонической форме (используем одну из двойственных задач линейного программирования):

$$f(x) = 10X_1 + 14X_2 + 12X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + 0 \cdot X_6 \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned}
4X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 &= 180,\\
3X_1 + X_2 + 3X_3 + X_5 &= 210,\\
X_1 + 2X_2 + 5X_3 + X_6 &= 244.
\end{aligned}$$

Для решения задачи линейного программирования составим симплексную таблицу (рис. 49).

Базис Б	Коэффи-циенты функции цели C_i	План X_i	Коэффициенты функции цели C_j						$\theta = (X_i / a_{ik})_{min}$
			10	14	12	0	0	0	
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
$X_2 \rightarrow X_4$	0	180	4	2	1	1	0	0	180 / 2 = 90 min
X_5	0	210	3	1	3	0	1	0	210 / 1 =210
X_6	0	244	1	2	5	0	0	1	244 / 2 =122
$F(x) = \sum_i C_i X_i = 0$			-10	-14	-12	0	0	0	ключевая строка

Значение целевой функции при данном опорном плане

min

Ключевой элемент

Оценки переменных $\Delta_j = \sum_i C_i a_{ij} - C_j$

Ключевой столбец

Рис. 49. Симплексная таблица

В первом столбце вписаны базисные неизвестные, второй содержит коэффициенты при базисных неизвестных в целевой функции, в третьем – правые части уравнений системы ограничений. Далее записана матрица из коэффициентов левой части системы ограничений a_{ij}, изменяющаяся в процессе пересчета. В верхней строке над неизвестными записаны соответствующие им коэффициенты в целевой функции. В последней строке записывается значение целевой функции при данном опорном плане, которое вычисляется по формуле f(x) = $\sum_i C_i X_i$, и далее – оценки неизвестных, найденные по формуле $\Delta_j = \sum_i C_i a_{ij} - C_j$.

Если среди оценок Δ_j есть отрицательные, то опорный план не является оптимальным и значение целевой функции можно улучшить. Для этого нужно пересчитать симплексную таблицу, выбрав соответствующим образом ключевой элемент, стоящий на пересечении ключевой s-ой строки и ключевого k-го столбца, причем берется столбец с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой.

Для определения ключевой строки находим отношения правых частей уравнений к положительным элементам ключевого столбца a_{ik}. Полученные значения θ записываются в последний столбец симплексной таблицы. Из них выбирается наименьшая величина, которая указывает на ключевую строку.

Пересчет таблицы производится по следующему правилу:

1) Элементы ключевой строки делятся на ключевой элемент

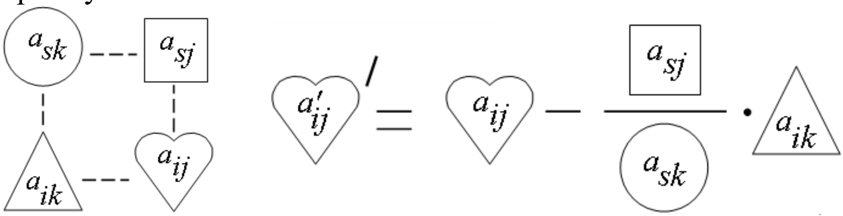
$$a'_{sj} = a_{sj} / a_{sk}, \;\; j = \overline{1, n}.$$

Далее, с помощью метода Жордана - Гаусса проводят пересчет таблицы таким образом, чтобы элементы ключевого столбца имели единицу на месте ключевого элемента и нули на месте всех остальных элементов.

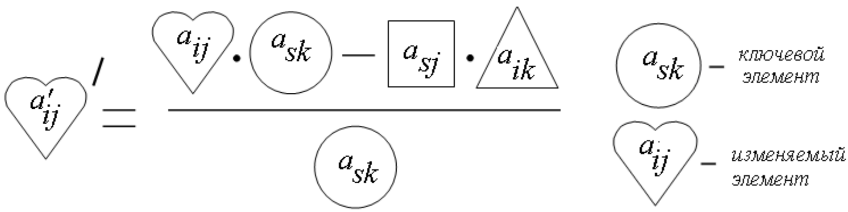
2) Остальные элементы матрицы, включая и свободные члены системы уравнений (правые части ограничений - b_i) преобразуются согласно выражению:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{sj}}{a_{sk}} \cdot a_{ik} = \frac{a_{ij} \cdot a_{sk} - a_{sj} \cdot a_{ik}}{a_{sk}}; \quad i = \overline{1, m}; \; j = \overline{1, n}; \; i \neq s.$$

Это правило пересчёта можно изобразить в виде «схемы прямоугольника»:



или



Так, для столбца «План X_i» получим:

180/2 = 90;   210 – (180/2) 1 = 120;   244 – (180/2) 2 = 64.

Для столбца X_3 получим:

1 / 2 = ½;   3 – (1/2)   1 = 5/2 ;   5 – (1/2)   2 = 4.

Таким образом, в данной задаче для получения следующей симплексной таблицы вычтем из элементов третьей строки соответствующие элементы первой строки, а из элементов второй строки – элементы первой строки, поделенные на два (на ключевой элемент).

Переменная, соответствующая ключевой строке, выводится из базиса, а переменная, соответствующая ключевому столбцу, вводится вместо неё в базис (X_2 вместо X_4).

Для каждого шага итерации строится своя симплексная таблица (рис. 50).

Б	C_i	X	10 X_1	14 X_2	12 X_3	0 X_4	0 X_5	0 X_6	θ
X_2	14	90	2	1	1/2	1/2	0	0	90 : 1/2 = 180
X_5	0	120	1	0	5/2	-1/2	1	0	120 : 5/2 = 48
$X_3 \rightarrow X_6$	0	64	-3	0	4	-1	0	1	64 : 4 = 16 min
f(x) = 1260			18	0	-5	7	0	0	

Отрицательная оценка Δ_j

Б	C_i	X	10 X_1	14 X_2	12 X_3	0 X_4	0 X_5	0 X_6	θ
X_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	-1/8	
X_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	-5/8	
X_3	12	16	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4	
f(x) = 1340			57/4	0	0	**23/4**	**0**	**5/4**	

Двойственные оценки сырья

Рис. 50. Вторая и третья симплексные таблицы

Поскольку среди оценок неизвестных есть отрицательная, необходимо продолжить расчеты и составить новую таблицу. Для этого элементы третьей (ключевой) строки разделим на ключевой элемент. Умножив новые элементы третьей строки на 1/2, вычтем их из соответствующих элементов первой строки предыдущей таблицы. Затем, умножив новые элементы третьей строки на 5/2, вычтем их из соответствующих элементов второй строки предыдущей таблицы.

Поскольку среди оценок нет отрицательных, то это значит, что найдено оптимальное решение. Из таблицы видно, что при оптимальном плане следует выпускать изделий вида В в количестве 82 штук, изделий С – 16 штук. При этом остаются неиспользованными 80 кг сырья второго вида, а общий доход от продажи изделий составит 1340 ден.ед. Из таблицы также видно, что оптимальным решением двойственной задачи является Y* = (23/4, 0, 5/4), поскольку решение двойственной задачи находится в столбцах, соответствующих дополнительным переменным исходной задачи (X_4, X_5, X_6).

Переменные y_1^* и y_3^* обозначают условные двойственные оценки единицы сырья первого и третьего вида. Они отличны от нуля, и сырье этих видов полностью использовано при оптимальном плане производства. Переменная $y_2^* = 0$, и, значит, второй вид сырья имеется в избытке.

Таким образом, положительную двойственную оценку имеют те виды сырья, которые используются полностью, а значит, они характеризуют дефицитность сырья: чем больше двойственные оценки, тем дефицитнее сырье. Более того, двойственные оценки показывают, насколько возрастет оптимальное (максимальное) значение функции цели прямой задачи при увеличении количества сырья соответствующего вида на 1 кг.

Выпускать продукцию типа А невыгодно, а принудительный выпуск единицы данной продукции уменьшит доход на 57/4 = 14,25 ден.ед.

Так, увеличение количества сырья первого вида на 1 кг приведет к новому оптимальному плану производства изделий, при котором доход возрастет на 23/4 = 5,75 и станет равным 1345,75 ден.ед. При этом числа, стоящие в столбце X_4 последней симплексной таблицы, покажут, что это может быть достигнуто за счет увеличения выпуска изделий В на 5/8 единиц и сокращения выпуска изделий С на 1/4 единицы. Использование сырья второго вида уменьшится при этом на 1/8 кг.

Также увеличение на 1 кг сырья третьего вида дает новый оптимальный план, при котором доход возрастет на 5/4 = 1,25 ден.ед. и составит 1341,25 ден.ед. Это будет достигнуто за счет увеличения выпуска изделия С на 1/4 единицы и уменьшения выпуска изделия В на 1/8 единицы, причем объем используемого сырья второго вида возрастет на 5/8 кг.

Вычислим минимальное значение целевой функции двойственной задачи:

$$F(y) = 180 \cdot 23/4 + 210 \cdot 0 + 244 \cdot 5/4 = 1340,$$

оно совпадает с максимальным значением целевой функции исходной задачи.

Если подставить двойственные оценки оптимального плана в систему ограничений двойственной задачи, то получим

$$\begin{cases} 23 + 5/4 > 10, \\ 23/2 + 5/2 = 14, \\ 23/4 + 25/4 = 12. \end{cases}$$

Когда ограничение выполнено как строгое неравенство, то двойственная оценка сырья на производство одного изделия А выше дохода от реализации одного изделия, значит, данный вид изделий выпускать невыгодно. Если как равенство, то выпускать такие изделия экономически целесообразно.

Для расчёта оптимизационных задач линейного программирования в среде Excel (рис. 51) необходимо ввести в таблицу коэффициенты левой части ограничений (например, в ячейки B3 : D5) и коэффициенты функции цели (например, в ячейки B6 : D6). Для размещения искомых значений переменных необходимо зарезервировать свободные ячейки (например, ячейки B8 : D8). Математические выражения для системы ограничений и целевой функции вводятся (например, в ячейки E3 : E5 и E6 соответственно) с помощью функции СУММПРОИЗВ из категории *Математические* (рис. 52). Для этого необходимо выбрать в меню *Вставка* строку *Функция…*.

	A	B	C	D	E	F
1	Вид сырья	Нормы затрат сырья, кг, на ед. продукции			Левая часть	Запасы сырья, кг
2		A	B	C	ограничегий	
3	I	4	2	1	=СУММПРОИЗВ(B3:D3;$B$8:$D$8)	180
4	II	3	1	3	=СУММПРОИЗВ(B4:D4;$B$8:$D$8)	210
5	III	1	2	5	=СУММПРОИЗВ(B5:D5;$B$8:$D$8)	244
6	Доход ден.ед.	10	14	12	=СУММПРОИЗВ(B6:D6;$B$8:$D$8)	-
7						
8						

Рис. 51. Ввод исходной информации оптимизационной задачи

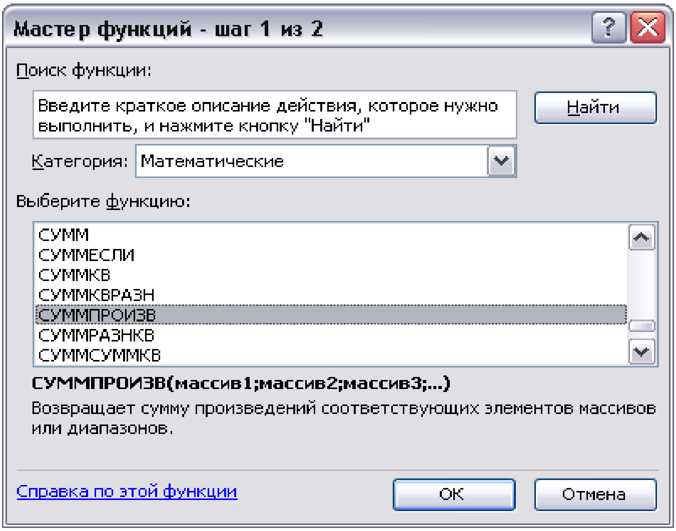


Рис. 52. Выбор функции СУММПРОИЗВ

При заполнении диалоговой формы функции СУММПРОИЗВ одним из массивов являются адреса ячеек коэффициентов левой части каждого из ограничений в отдельности (для первого ограничения D3:D3) и коэффициентов целевой функции (B6:D6), выделяемых с помощью мышки. Другим массивом являются адреса ячеек, предназначенных для размещения искомых переменных (B8:D8). Для копирования функции с помощью протягивания за маркер заполнения, необходимо установить абсолютную адресацию для ячеек, предназначенных для размещения переменных путём нажатия служебной клавиши F4 на клавиатуре. Адреса ячеек примут вид \$B\$3:\$D\$3 (рис. 53).

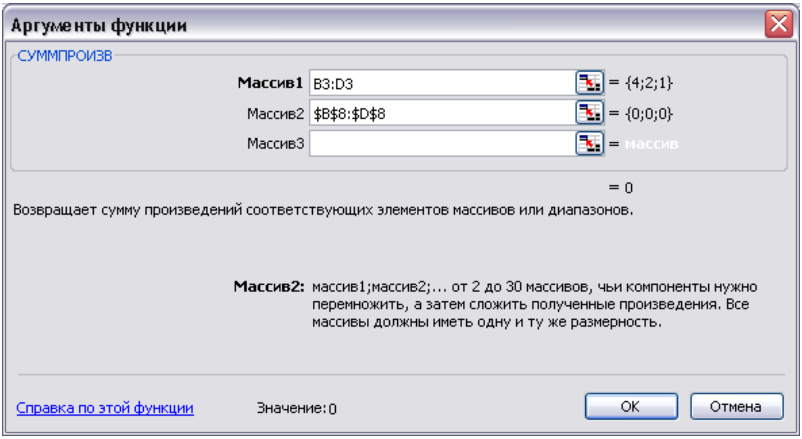


Рис. 53. Заполнение диалоговой формы функции СУММПРОИЗВ

Маркер заполнения находится в нижнем правом углу выделенной ячейки. Для копирования формулы необходимо подвести курсор мышки к маркеру заполнения до появления чёрного крестика (рис. 54) и при нажатой левой кнопке мышки протянуть её через ячейки, в которые должны быть помещены копии формулы. При этом, адреса ячеек, имеющие абсолютную адресацию (например, B3:D3) будут изменяться, а ячейки, имеющие абсолютную адресацию (например,

$B$8:D$8) не изменят её (рис. 51). Для просмотра формул в меню *Сервис* выбрать строку *Параметры* установить флажок *Отображать формулы*.

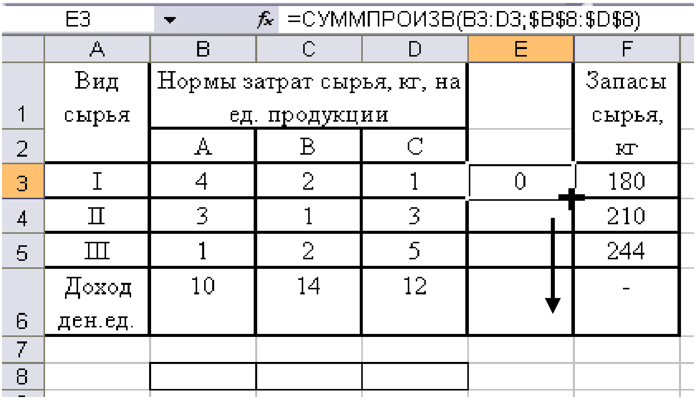


Рис. 54. Копирование функции протягиванием за маркер заполнения

Вызов программы *Поиск решения* осуществляется из меню *Сервис*. При первом использовании программы необходимо установить переде названием флажок, выбрав в меню Сервис строку Надстройки (рис. 55).

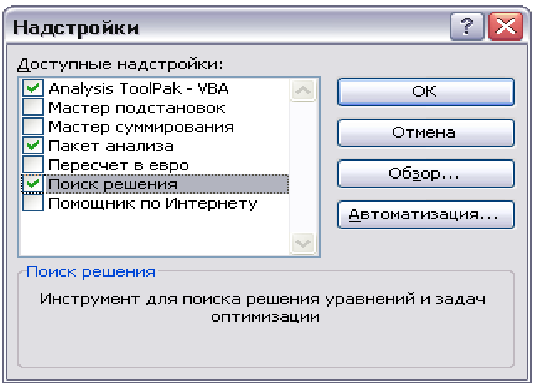


Рис. 55. Установка программы Поиск решения

В MS Office 2007 и 2010 для загрузки надстройки *Поиск решения* следует щёлкнуть значок – кнопку MS Office, выбрать *Параметры* Excel, команду *Надстройки*, в окне *Управление – Надстройки* Excel, нажать кнопку *Перейти*, в окне *Доступные надстройки* установить флажок *Поиск решения*.

При заполнении диалоговой формы Поиск решения (рис. 56) необходимо установить адрес целевой ячейки. Для этого следует выделить мышкой окно *Установить целевую ячейку* (или нажать на кнопку в правой части окна) и щёлкнуть мышкой по ячейке Е6, содержащей математическое выражение (формулу) целевой функции.

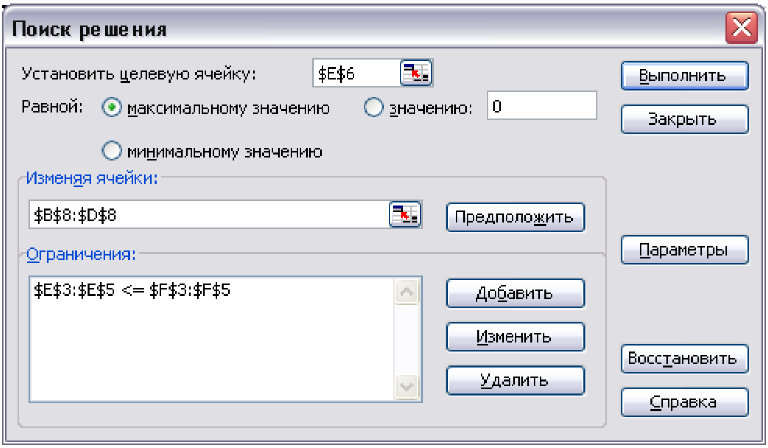


Рис. 56. Диалоговая форма Поиск Решения

Затем нужно выбрать направление поиска экстремума целевой функции (max или min), поставив точку у максимального или минимального значения.

Изменяя значения ячеек, в которых располагаются искомые переменные Поиск решения ищет оптимальное решение. Указать это можно щёлкнув левой кнопкой мышки в окне *Изменяя ячейки* и выделив мышкой адреса В8:D8.

Добавить к задаче ограничения следует нажав кнопку *Добавить*, заполнить соответствующую форму (рис. 57).

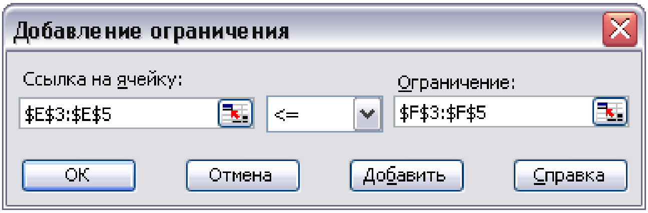


Рис. 57. Диалоговая форма Добавить ограничения

В левое окно формы Добавить ограничения нужно ввести адреса ячеек, содержащих математические выражения (формулы) левых частей ограничений (E3:E5), затем нужно выбрать знак ограничения (< = , = или > =) и в правое окно формы ввести адреса ячеек (F3:F5), содержащих числовые значения правой части ограничений (менее предпочтительно введение в окно конкретных чисел).

Добавить новое ограничение, изменить или удалить его можно с помощью соответствующих кнопок. Кроме того, необходимо установить *Параметры поиска решения* (рис. 58), нажав одноимённую кнопку.

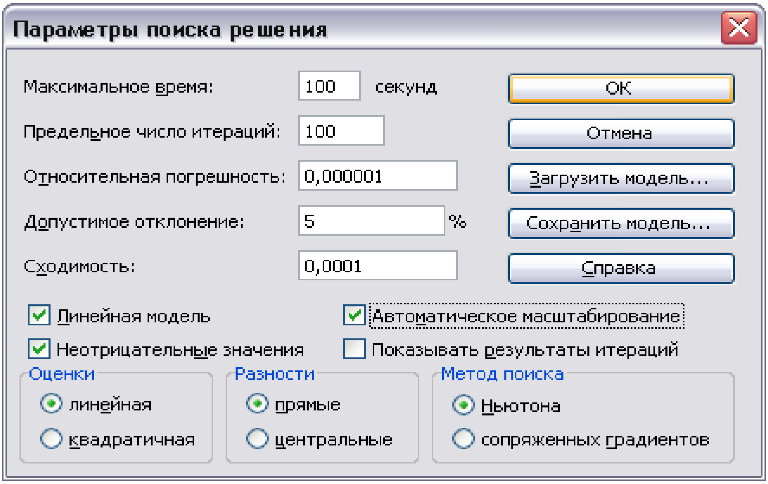


Рис. 58. Заполнение диалоговой формы Параметры

Среди множества параметров следует (поставив галочки) выбрать модель линейного программирования (*Линейная модель*), *Неотрицательные значения* переменных и *Автоматическое масштабирование* (если в задаче имеются данные, значения которых различаются на несколько порядков, например, 0,0001 и 1000000).

Решение задачи получим, нажав кнопки ОК и *Выполнить*. В диалоговом окне *Результаты поиска решения* (рис. 59) для вывода необходимых отчётов следует выделить их последовательно щёлкнув левой кнопкой мышки.

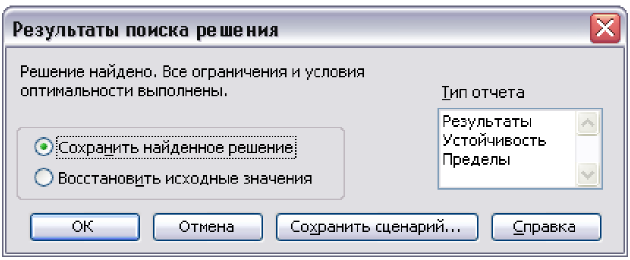


Рис. 59. Диалоговое окно Результаты поиска решения

Результаты решения появятся в таблице в ячейках, отведённых под значения переменных, и содержащих математические выражения для целевой функции и левых частей ограничений (рис. 60).

	A	B	C	D	E	F
1	Вид сырья	Нормы затрат сырья, кг, на ед. продукции			левая часть	Запасы сырья, кг
2		A	B	C	огранич	
3	I	4	2	1	180	180
4	II	3	1	3	130	210
5	III	1	2	5	244	244
6	Доход ден.ед.	10	14	12	1340	-
7						
8		0	82	16		

Рис. 60. Результаты решения задачи

Отчёт по результатам, который выводится на отдельный лист (рис. 61), помогает проанализировать решение. Так, для получения дохода, равного 1340 ден.ед. (ячейка E6), необходимо выпускать продукцию вида B в количестве 82 штук (ячейка C8) и продукцию вида C – в количестве 16 штук (ячейка D8). Продукцию вида A выпускать нерентабельно (ячейка B8). Из 210 единиц сырья II вида используется только 130 (ячейка E4). Другие два вида сырья используются полностью. Второе ограничение задачи не связанное, т.е. оно не равно правой части, а отличается, в данном случае остаются неизрасходованными запасы сырья II вида в количестве 80 единиц (210 – 130 = 80).

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$E$6	Доход ден.ед.	0	1340

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$8	A	0	0
$C$8	B	0	82
$D$8	C	0	16

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$E$3	I	180	$E$3<=$F$3	связанное	0
$E$4	II	130	$E$4<=$F$4	не связан.	80
$E$5	III	244	$E$5<=$F$5	связанное	0

Рис. 61. Отчёт по результатам

Отчёт по устойчивости (рис. 62) позволяет вывести результирующие значения для переменных и выражений левой части ограничений. *Нормированная стоимость* показывает, насколько изменится целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в окончательное решение. Теневая цена содержит двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при увеличении ресурса на единицу. Допустимое изменение коэффициентов целевой функции показывает предельные изменения коэффициентов функции цели, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение. Для ограничений правой части также выводятся возможные изменения ресурсов, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$8	A	0	-14,25	10	14,25	1E+30
$C$8	B	82	0	14	10	6
$D$8	C	16	0	12	19	5

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$E$3	I	180	5,75	180	64	131,2
$E$4	II	130	0	210	1E+30	80
$E$5	III	244	1,25	244	128	64

Рис. 62. Отчёт по устойчивости

Отчёт по пределам (рис. 63) показывает, в каких границах может изменяться выпуск продукции, вошедший в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения. Также показаны значения целевой функции при выпуске данного вида продукции на нижнем пределе. Так, если не выпускать продукцию вида B, то доход составит 192 ден.ед., если же не выпускать продукцию вида C, то доход будет равен 1148 ден.ед.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$E$6	Доход ден.ед.	1340

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$8	A	0	0	1340	0	1340
$C$8	B	82	0	192	81,99999997	1340
$D$8	C	16	0	1148	16	1340

Рис. 63. Отчёт по пределам

Тема 5. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

В результате изучения данной темы студенты должны:

знать:

- область применения транспортных задач в экономике;
- математическую постановку транспортной задачи;
- методы решения транспортных задач;

уметь:

- решать открытые и закрытые транспортные задачи;
- применять транспортные модели при решении практических задач;

владеть:

- математическим аппаратом решения транспортных задач;
- практическими навыками построения и решения транспортных задач, в том числе, с использованием ЭВМ.

Математическая постановка задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого груза из $\boldsymbol{m}$ пунктов отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$ в $\boldsymbol{n}$ пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$. При этом в качестве критерия оптимальности обычно выбирается либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки.

Обозначим через C_{ij} стоимость перевозки единицы груза из $\boldsymbol{i}$–го пункта отправления в $\boldsymbol{j}$–й пункт назначения; a_i - запасы груза в $\boldsymbol{i}$–м пункте отправления (величина предложения); b_j - потребности в этом грузе в $\boldsymbol{j}$–м пункте назначения (величина спроса); X_{ij} - объем перевозок (количество перемещаемых единиц груза) из $\boldsymbol{i}$–го пункта отправления в $\boldsymbol{j}$–й пункт назначения. Тогда математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид: определить минимум целевой функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \to \min \qquad (5.1)$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i;\ i = \overline{1,m}, & (5.2) \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j;\ j = \overline{1,n}, & (5.3) \\ X_{ij} \geq 0;\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}. & (5.4) \end{cases}$$

Обычно исходные данные транспортной задачи представляются в виде таблицы. Внутренняя часть этой таблицы является объединением двух матриц: матрицы перевозок $X = \{ X_{ij} \}$ и матрицы стоимостей $C = \{ C_{ij} \}$:

Пункты отправления	Пункты назначения						Запасы (пред-ложение)
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	…	C_{1j} X_{1j}	…	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	…	C_{2j} X_{2j}	…	C_{2n} X_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	…	C_{ij} X_{ij}	…	C_{in} X_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{mj} X_{mj}	…	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потреб-ности (спрос)	b_1	b_2	…	b_j	…	b_m	$\Sigma b_j = \Sigma a_i$

Если общий запас груза у поставщиков равен потребности в грузе у потребителей, т.е. если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \qquad (5.5)$$

то модель такой транспортной задачи называется *закрытой*, а если условие не выполняется, то задача называется *открытой*.

Определение 1. Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений (5.2) и (5.3), определяемое матрицей $X = \{ X_{ij} \}$; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$, называется планом транспортной задачи.

Определение 2. План $X^* = \{X_{ij}^*\}$, при котором функция цели 1 принимает минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи.

Ограничения (5.2) и (5.3) транспортной задачи представляют собой две группы уравнений. Первая из них, т.е. система уравнений (5.2), означает то, что сумма перевозок по каждой строке таблицы должна быть равна соответствующему запасу a_i. Каждое уравнение второй системы (5.3) означает то, что сумма перевозок по каждому столбцу таблицы должна быть равна соответствующей потребности b_j. Транспортная задача представляет собой задачу линейного программирования, записанную в каноническом виде. Следовательно, ее можно решать симплексным методом. Однако для решения транспортных задач существуют специальные методы.

Особенности транспортной задачи:

1. Закрытая транспортная задача всегда совместна, обладает планом, т.е. имеет решение.

2. Если значения и a_i-е и b_j-е – целые и неотрицательные, то транспортная задача имеет целочисленное решение.

3. Клетки таблицы транспортной задачи с координатами, в которых проставлены значения перевозок, называются базисными и соответствуют базисным переменным, а остальные клетки остаются свободными. Для невырожденного

опорного плана в таблице транспортной задачи будет заполнена положительными числами $m + n - 1$ клетка. Если же опорный план задачи вырожден, то часть базисных клеток будет заполнена нулями.

Нахождение первоначального опорного плана

Для определения первоначального опорного плана существуют несколько различных методов. Это – метод северо-западного угла, метод минимального элемента, или минимальной стоимости, и другие.

Метод северо-западного угла. Пусть условие транспортной задачи задано в следующей таблице.

Таблица 13

Пункты отправления	Пункты назначения				Предложение
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	2	5	30
A_2	6	1	1	3	70
A_3	2	3	1	8	50
A_4	6	3	2	1	100
Спрос	20	90	70	70	$\Sigma 250$

Поскольку сумма запасов (предложения) равна сумме потребностей (спроса) – имеем задачу закрытого типа.

Матрицу перевозок начинаем заполнять с левого верхнего (северо-западного) угла, с клетки (1,1). Для этого сравниваем два значения $a_1 = 30$ и $b_1 = 20$, т.е. попытаемся удовлетворить потребность первого пункта назначения за счет запасов первого пункта отправления. Запасы пункта A_1 больше потребности пункта B_1, следовательно, в качестве значения X_{11} выбираем меньшее число – b_1 и запишем это число в соответствующей клетке таблицы. Таким образом, потребность пункта B_1 в грузе удовлетворена, и поэтому все остальные числа этого столбца (X_{21}, X_{31}, X_{41}) считаем равными нулю, а соответствующие им клетки оставляем свободными.

Получаем новую матрицу из трех столбцов (B_2, B_3, B_4) и четырех строк (A_1, A_2, A_3, A_4) и новое значение запаса у первого пункта отправления ($a_1' = 30 - 20 = 10$). Далее сравниваем значения $a_1' = 10$ и $b_2 = 90$ и повторяем алгоритм. Меньшее из этих значений, равное 10, выбираем в качестве X_{12} и записываем в клетку (1,2) таблицы. Тогда запас пункта A_1 будет полностью исчерпан, следовательно, остальные значения перевозок из первой строки (X_{13}, X_{14}) принимаем равными нулю, а соответствующие клетки остаются свободными. Продолжая заполнять таблицу, таким образом дойдем до клетки (4,4). Построенный план является опорным. В рассматриваемой задаче число пунктов отправления $m = 4$ и число пунктов назначения $n = 4$, следовательно, невырожденный план задачи определяется числами, стоящими в $m+n-1 = 4+4-1 = 7$ заполненных клетках.

Таблица 14

Пункты отправления	Пункты назначения				Предложение
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 20	4 10	2	5	30
A_2	6	1 70	1	3	70
A_3	2	3 10	1 40	8	50
A_4	6	3	2 30	1 70	100
Спрос	20	90	70	70	-

Запишем первоначальный опорный план в виде матрицы X:

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 70 \end{pmatrix}.$$

Согласно данному плану перевозок функция цели – общая стоимость перевозок всего груза - составляет

$$f(x) = 5 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 70 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 40 + + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 70 = 410.$$

Вырожденный план. При построении опорного плана нужно следить, чтобы сумма перевозок по каждой строке была равна соответствующим запасам, а сумма перевозок по каждому столбцу – потребности. Количество заполненных клеток равно m + n – 1. Если план вырожденный, т.е. если на очередном шаге запас a_i равен потребности b_j, в этом случае необходимо считать одну из клеток (либо справа, либо под последней заполненной клеткой) базисной со значением, равным нулю. Этот нуль вписывают, и соответствующая клетка считается занятой.

Пусть условия задачи заданы следующей таблицей.

Таблица 15

Пункты отправления	Пункты назначения				Предложение
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 20	4 10	2	5	30
A_2	6	1 70	1	3	70
A_3	2	3 0	1 30	8 20	50
A_4	6	3	2	1 100	100
Спрос	20	80	30	120	Σ250

На первом шаге заполняем северо-западный угол, полагая $X_{11} = 20$, клетки (2,1), (3,1) и (4,1) остаются свободными. На втором шаге полагаем $X_{12} = 10$. Этим мы используем полностью запас пункта A_1. Остальные клетки первой строки (1,3) и (1,4) остаются свободными. На третьем шаге рассматриваем перевозку X_{22}. Поскольку в этом случае запас пункта A_2, равный 70, совпадает с оставшейся неудовлетворенной потребностью пункта B_2, равной 70, то выбираем X_{22} = 70. Этим самым заполняется одновременно и вся вторая строка и весь второй столбец. В этом случае нужно считать одну из переменный X_{23} или X_{32} базисной со значением, равным нулю. Пусть X_{32} = 0. Проставив в соответствующей клетке базисный нуль, мы получаем при продолжении процесса заполнения таблицы m + n – 1 заполненную клетку. Если не проставить нулевую базисную переменную, окажется, что число занятых положительными перевозками клеток меньше, чем m + n – 1.

Метод минимального элемента. Выбор пунктов отправления и назначения можно производить иначе, ориентируясь на стоимость перевозок, т.е. на каждом шаге следует выбирать какую-нибудь клетку, отвечающую минимальной стоимости перевозки. Если таких клеток несколько, то можно выбрать любую.

Этот метод позволяет найти первоначальный опорный план с меньшей стоимостью перевозок, чем план, полученный методом северо-западного угла.

Таблица 16

Пункты отправления	Пункты назначения				Предложение
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 10	4	2 20	5	30
A_2	6	1 70	1	3	70
A_3	2	3	1 50	8	50
A_4	6 10	3 20	2	1 70	100
Спрос	20	90	70	70	-

Порядок заполнения таблицы транспортной задачи: находим клетки с наименьшим значением стоимости перевозки и рассмотрим величину потребности и запаса для соответствующих пунктов. Заполним клетки (2,2), (3,3), (4,4) и подсчитаем остатки неизрасходованных запасов и величины неудовлетворенной потребности. Так, запасы пункта A_2 полностью расходуются на удовлетворение потребности пункта B_2, поэтому при нахождении первоначального опорного плана клетки второй строки, кроме (2,2), должны остаться свободными. Потребности пункта B_2 остаются неудовлетворенными на 20 единиц груза, поэтому клетки второго столбца, кроме (2,2), могут быть заполнены перевозками. Аналогично рассматриваем заполнение клеток (3,3) и (4,4). Найдем свободные клетки с наименьшими стоимостями перевозок, которые могут быть заполнены, это, например, клетка (1,3) или (4,3). Заполним клетку (1,3) и подсчитаем остаток. Затем заполним клетку (4,2), на следующем шаге клетку (1,1) и, наконец, (4,1).

Значение функции цели для первоначального опорного плана

$$f(x) = 10 \cdot 5 + 20 \cdot 2 + 70 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 10 \cdot 6 + \\ + 20 \cdot 3 + 70 \cdot 1 = 400.$$

Циклы пересчёта

Переход от одного опорного плана к другому в транспортной задаче сводится к тому, что, как и в симплекс-методе, надо ввести в базис новый вектор вместо выведенного базисного вектора. Это способствует тому, что одну из свободных клеток мы сделаем занятой, т.е. базисной, а одну из базисных – свободной.

Пусть первоначальный опорный план задан в табл. 17.

Таблица 17

Пункты отправления	Пункты назначения				Предложение
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	^{5} 20	^{4} 10	^{2}	^{5}	30
A_2	^{6}	^{1} 70	^{1}	^{3}	70
A_3	^{2}	^{3} 10	^{1} 40	^{8}	50
A_4	^{6}	^{3}	^{2} 30	^{1} 70	100
Спрос	20	90	70	70	

Выберем одну из свободных клеток, например (4,1), и поместим в нее некоторую положительную величину перевозки θ. Поскольку число занятых клеток должно быть равно m + n - 1, то какую-то из занятых клеток необходимо освободить. Чтобы получить новый опорный план, необходимо пересчитать значения базисных переменных.

Для того, чтобы сумма перевозок в первом столбце не изменилась, нужно перевозку $X_{11} = 20$ уменьшить на величину θ. Для того, чтобы при этом не изменилась сумма перевозок в первой строке, надо перевозку $X_{12} = 10$ увеличить на θ и т.д.

Пересчет продолжается, пока мы не вернемся к тому значению θ, с которого начали, т.е. не замкнем цикл пересчета (таблица 2.6).

Данная операция называется сдвигом по циклу пересчета на величину θ. Значение θ выбирается равным наименьшему из тех перевозок, из которых θ вычитается. В нашем примере выбирается $\theta = 10$; если взять $\theta > 10$, то перевозка X_{32} станет меньше нуля, а если взять $\theta < 10$, то получим больше, чем m+n-1 отличную от нуля перевозку, т.е. новый план тогда не будет опорным.

Таблица 18

Пункты отправления	Пункты назначения				Предложение
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 $20 - \theta$	4 $10 + \theta$	2	5	30
A_2	6	1 70	1	3	70
A_3	2	3 $10 - \theta$	1 $40 + \theta$	8	50
A_4	6 θ	3	2 $30 - \theta$	1 70	100
Спрос	20	90	70	70	-

Переход от одного опорного плана к другому связан с некоторым обходом по замкнутой ломаной линии, начало которой находится в свободной клетке, а все остальные вершины в некоторых базисных (занятых) клетках. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается сама с собой, то точки пересечения не являются вершинами. Циклы могут быть различной формы (рис. 64).

Вершин в цикле всегда четное число. Цикл, одна из вершин которого лежит в свободной клетке, а все остальные – в базисных, называется циклом пересчета данной свободной клетки.

Каждый опорный план обладает следующими свойствами:

1) не существует циклов, все вершины которых лежат в базисных клетках;

2) для каждой свободной клетки существует единственный цикл пересчета.

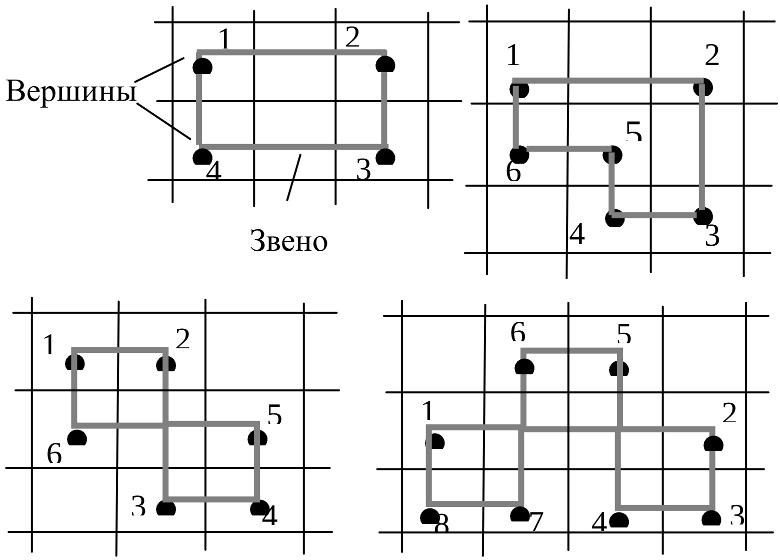


Рис. 64. Возможные формы циклов пересчёта

В общем случае, для того чтобы определить θ, припишем каждой вершине цикла определенный знак таким образом, чтобы две соседние вершины имели противоположные знаки, а вершина, лежащая в свободной клетке, была всегда положительна, т.е. приписываем ей знак (+). Поскольку число вершин в цикле четное, то число положительных вершин будет равно числу отрицательных. При сдвиге по циклу пересчета на величину θ перевозки в положительных вершинах цикла увеличиваются на величину θ, а в отрицательных – уменьшаются на θ. Следовательно, величину θ надо выбирать равной наименьшей из перевозок в отрицательных вершинах:

Таблица 19

Пункты отправления	Пункты назначения				Предложение
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 20 -	4 10 +	2	5	30
A_2	6	1 70	1	3	70
A_3	2	3 10 -	1 + 40	8	50
A_4	6 θ +	3	2 - 30	1 70	100
Спрос	20	90	70	70	-

Определим, как изменится функция цели (стоимость перевозок) при переходе к новому опорному плану:

$$+\theta \cdot 6 - \theta \cdot 5 + \theta \cdot 4 - \theta \cdot 3 + \theta \cdot 1 - \theta \cdot 2 =$$
$$= \theta \cdot (6 - 5 + 4 - 3 + 1 - 2) = +\theta \cdot 1.$$

Следовательно, функция цели увеличится на величину θ, а значит, клетка (4,1) для новой перевозки выбрана неудачно:

f(x) = 410 + θ = 410 + 10 = 420 ден.ед.

Для того чтобы перейти к лучшему опорному плану, с меньшей функцией цели, можно воспользоваться распределительным методом решения транспортных задач.

Открытая транспортная задача

Если не соблюдается баланс предложения и спроса, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то такая задача называется открытой. Для решения такой задачи, если общее предложение превышает общий спрос, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

необходимо ввести в модель фиктивный пункт потребления (B_{n+1}) в n + 1-м столбце матрицы транспортной задачи. При этом стоимости перевозки для фиктивного пункта потребления равны нулю:

$$C_{i,n+1} = 0; \; i = \overline{1,m} .$$

Потребность в грузе фиктивного пункта назначения равна разности предложения и спроса.

Таблица 20

Пункты отправления	Пункты назначения						Запасы (предложение)
	B_1	…	B_j	…	B_n	(B_{n+1})	
A_1	C_{11}		C_{1j}		C_{1n}	0	a_1
…		…		…			
A_i	C_{i1}		C_{ij}		C_{in}	0	a_i
…		…		…			
A_m	C_{m1}		C_{mj}		C_{mn}	0	a_m
Потребности (спрос)	b_1	…	b_j	…	b_n	($b_{n+1} = \Sigma a_i - \Sigma b_j$)	

Если величина суммарного спроса превышает суммарное предложение, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

необходимо ввести в модель фиктивный пункт отправления грузов (A_{m+1}) в m + 1-ю строку матрицы транспортной задачи. При этом стоимости перевозки от фиктивного пункта отправления равны нулю:

$$C_{m+1,j} = 0; \; j = \overline{1,n} .$$

Предложение фиктивного пункта отправления равно разности суммы потребностей и запасов грузов.

Таблица 21

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы (предложение)
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	C_{11}		C_{1j}		C_{1n}	a_1
…		…		…		
A_i	C_{i1}		C_{ij}		C_{in}	a_i
…		…		…		
A_m	C_{m1}		C_{mj}		C_{mn}	a_m
(A_{m+1})	0		0		0	$(a_{m+1} = \Sigma b_j - \Sigma a_i)$
Потребности (спрос)	b_1	…	b_j	…	b_n	—

Определение оптимального плана транспортных задач, имеющих дополнительные условия

1. Если по каким-либо причинам перевозки грузов из некоторого пункта отправления A_i в некоторый пункт назначения B_j не могут быть осуществлены, тогда для определения оптимального плана полагают, что стоимость этой перевозки является сколь угодно большой величиной, например, равной миллиарду денежных единиц. Для краткости эту величину обозначим буквой М. Такой прием, называемый блокированием, дает возможность исключить эту перевозку из плана как невыгодную.

2. Если из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j требуется перевезти определенное количество грузов d_{ij}, тогда в соответствующей клетке устанавливается блокировка М как стоимость перевозки, для исключения дальнейших перевозок по данному маршруту. Соответствующий запас корректируется на величину фиксированной перевозки $a_i - d_{ij}$, аналогично и соответствующая потребность корректируется на ту

же величину b_j - d_{ij}. После решения скорректированной задачи в оставшуюся свободной клетку i, j проставляется значение обязательной перевозки d_{ij}, а стоимость перевозки единицы этого груза берется из исходных данных равной C_{ij}.

3. Если необходимо решить транспортную задачу на максимум функции цели, тогда поступают следующим образом:

исходная матрица стоимости перевозок $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

максимальное значение стоимости перевозки $C_{13} = 7$;
вычтем из максимальной стоимости все элементы матрицы перевозок $C' = \begin{pmatrix} 7-2 & 7-3 & 7-7 \\ 7-0 & 7-4 & 7-2 \\ 7-1 & 7-3 & 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

задачу решают на минимум, используя матрицу C', а при нахождении функции цели в последней итерации используют матрицу C.

4. Если задача открытая и из пункта A_i весь груз должен быть выведен, то вместо нулевой стоимости перевозки из пункта A_i фиктивному потребителю используют блокировку (M). Тогда груз будет перевозиться только реальным потребителям.

Если же потребности пункта B_j надо полностью удовлетворить, тогда вместо нулевой стоимости перевозки от фиктивного поставщика к пункту B_j используют блокировку (M). Этим исключают из плана фиктивные перевозки к пункту B_j.

Распределительный метод решения транспортной задачи

Пусть дан некоторый опорный план. Для каждой свободной клетки таблицы перевозок вычислим алгебраические суммы стоимостей в вершинах цикла Δ_{ij}. Так, для клетки (4,1) получим

$\Delta_{41} = 6 – 5 + 4 – 3 + 1 – 2 = 1.$

Если все Δ_{ij} неотрицательны ($\Delta_{ij} \geq 0$), то задача решена, т.е. найден оптимальный план перевозок.

Допустим, есть хотя бы одно отрицательное значение Δ_{ij}, тогда среди отрицательных Δ_{ij} выбираем наименьшее и для этой клетки i_0, j_0 делаем сдвиг по циклу пересчета на величину θ_0, равную наименьшей из перевозок, стоящих в отрицательных вершинах цикла. Полученный новый опорный план будет лучше предыдущего, при этом целевая функция уменьшится на величину $\theta_0 \cdot \Delta_{i_0 j_0}$.

Замечания:

1. Каждая сумма Δ_{ij} начинается с положительного числа и кончается отрицательным. Количество всех слагаемых четное.

2. Если опорный план вырожденный, то возможен сдвиг по циклу пересчета на величину $\theta = 0$. При этом значение целевой функции не изменится, а изменятся базисные клетки.

Найдем решение задачи, первоначальный опорный план которой получен методом северо-западного угла, и введем дополнительное условие: груз из пункта A_2 в пункт B_3 не может быть доставлен:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$-$ ^{5} 20	$+$ ^{4} 10	^{2}	^{5}	30
A_2	^{6}	^{1} 70	^{M}	^{3}	70
A_3	$+$ ^{2} θ	$-$ ^{3} 10	^{1} 40	^{8}	50
A_4	^{6}	^{3}	^{2} 30	^{1} 70	100
	20	90	70	70	

Для всех свободных клеток вычислим Δ_{ij}:

$\Delta_{13} = 2 – 1 + 3 – 4 = 0$,

$\Delta_{14} = 5 – 1 + 2 – 1 + 3 – 4 = 4$,

$\Delta_{21} = 6 – 5 + 4 – 1 = 4$,

$\Delta_{23} = M – 1 + 3 – 1 = M + 1$,

$\Delta_{24} = 3 – 1 + 2 – 1 + 3 – 1 = 5$,

$\Delta_{31} = 2 – 3 + 4 – 5 = -2$, $\Delta_{34} = 8 – 1 + 2 – 1 = 8$,

$\Delta_{41} = 6 – 5 + 4 – 3 + 1 – 2 = 1$, $\Delta_{42} = 3 – 3 + 1 – 2 = -1$.

Поскольку не все $\Delta_{ij} \geq 0$, план перевозок не оптимален. Среди $\Delta_{ij} < 0$ выбираем наименьшее. Это $\Delta_{31} = -2$. Делаем сдвиг по циклу пересчета для свободной клетки (3,1) на величину θ_0. Этот цикл проходит через базисные клетки (1,1), (1,2) и (3,2). В этом цикле две отрицательные клетки (1,1) и (3,2). Им соответствуют перевозки 20 и 10. В качестве θ_0 выбираем меньшее из этих чисел, т.е. $\theta_0 = 10$. После сдвига по циклу пересчета на величину θ_0 переходим к следующему опорному плану:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$-$ ^{5} 10	^{4} 20	$+$ ^{2} θ	^{5}	30
A_2	^{6}	^{1} 70	^{M}	^{3}	70
A_3	$+$ ^{2} 10	^{3}	$-$ ^{1} 40	^{8}	50
A_4	^{6}	^{3}	^{2} 30	^{1} 70	100
	20	90	70	70	

Делаем второй шаг распределительного метода. Находим значения Δ_{ij} для всех свободных клеток

$\Delta_{13} = 2 – 5 + 2 – 1 = -2$,

$\Delta_{14} = 5 – 1 + 2 – 1 + 2 – 5 = 2$,

$\Delta_{21} = 6 – 5 + 4 – 1 = 4$,

$\Delta_{23} = M – 1 + 4 – 5 + 2 - 1 = M – 1 >> 0$,

$\Delta_{24} = 3 - 1 + 4 - 5 + 2 - 1 + 2 - 1 = 3,$
$\Delta_{32} = 3 - 4 + 5 - 2 = 2,$
$\Delta_{34} = 8 - 1 + 2 - 1 = 8,$
$\Delta_{41} = 6 - 2 + 1 - 2 = 3,$
$\Delta_{42} = 3 - 4 + 5 - 2 + 1 - 2 = 1.$

$f(x) = 10 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 70 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 70 \cdot 1 = 390.$

Делаем сдвиг по циклу пересчета для свободной клетки (1,3) на величину $\theta_0 = 10$. Переходим к новому опорному плану:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	^{5}	^{4} - 20	^{2} + 10	^{5}	30
A_2	^{6}	^{1} 70	^{M}	^{3}	70
A_3	^{2} 20	^{3}	^{1} 30	^{8}	50
A_4	^{6}	^{3} + θ	^{2} - 30	^{1} 70	100
	20	90	70	70	

Найдем Δ_{ij} для этой таблицы

$\Delta_{11} = 5 - 2 + 1 - 2 = 2,$
$\Delta_{14} = 5 - 2 + 2 - 1 = 4,$
$\Delta_{21} = 6 - 1 + 4 - 2 + 1 - 2 = 6,$
$\Delta_{23} = M - 2 + 4 - 1 = M + 1,$
$\Delta_{24} = 3 - 1 + 4 - 2 + 2 - 1 = 5,$
$\Delta_{32} = 3 - 4 + 2 - 1 = 0,$
$\Delta_{34} = 8 - 1 + 2 - 1 = 8,$

$\Delta_{41} = 6 - 2 + 1 - 2 = 3,$ $\Delta_{42} = 3 - 4 + 2 - 2 = -1.$

$f(x) = 20 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 70 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 70 \cdot 1 = 370.$

Делаем сдвиг по циклу пересчета для свободной клетки (4,2) на величину $\theta_0 = 20$.

Переходим к новому опорному плану:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	2 30	5	30
A_2	6	1 70	M	3	70
A_3	2 20	3	1 30	8	50
A_4	6	3 20	2 10	1 70	100
	20	90	70	70	

Определим значения Δ_{ij}

$\Delta_{11} = 5 - 2 + 1 - 2 = 2,$

$\Delta_{12} = 4 - 2 + 2 - 3 = 1,$

$\Delta_{14} = 5 - 1 + 2 - 2 = 4,$

$\Delta_{21} = 6 - 1 + 3 - 2 + 1 - 2 =$
$= 5,$

$\Delta_{23} = M - 1 + 3 - 2 =$
$= M >> 0,$

$\Delta_{24} = 3 - 1 + 3 - 1 = 4,$

$\Delta_{32} = 3 - 3 + 2 - 1 = 1,$

$\Delta_{34} = 8 - 1 + 2 - 1 = 8,$ $\qquad$ $\Delta_{41} = 6 - 2 + 1 - 2 = 3.$

$f(x) = 30 \cdot 2 + 70 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 70 \cdot 1 = 350.$

Для этого плана все $\Delta_{ij} > 0$. Следовательно, этот опорный план оптимальный.

Для расчёта задач транспортного типа в среде Excel (рис. 65) необходимо ввести в таблицу тарифы на перевозку единицы груза по различным маршрутам (например, в ячейки B3:E6), величину предложения поставщиков (например, в ячейки F3:F6) и величину спроса потребителей (например, в ячейки B7:E7). Для размещения искомых значений переменных необходимо зарезервировать свободные ячейки (например, ячейки B9:E12). Математические выражения для системы ограничений по спросу и предложению вводятся (например, в ячейки F9:F12 и B13:E13 соответственно) с помощью функции СУММ (рис. 66). Целевая функция вводятся (например, в ячейку F13) с помощью функции СУММПРОИЗВ из категории *Математические* (рис. 67). Для этого необходимо выбрать в меню *Вставка* строку *Функция…*.

F13 f_x =СУММПРОИЗВ(B3:E6;B9:E12)

	A	B	C	D	E	F
1	Пункты	Пункты назначения				Предло-жение
2	отправ-ления	B_1	B_2	B_3	B_4	
3	A_1	5	4	2	5	30
4	A_2	6	1	1	3	70
5	A_3	2	3	1	8	50
6	A_4	6	3	2	1	100
7	Спрос	20	90	70	70	Σ250
8						
9						0
10						0
11						0
12						0
13		0	0	0	0	0

Рис. 65. Ввод исходных данных транспортной задачи в Excel

F13 f_x =СУММПРОИЗВ(B3:E6;B9:E12)

	A	B	C	D	E	F
1	Пункты	Пункты назначения				Предложение
2	отправ-ления	B_1	B_2	B_3	B_4	
3	A_1	5	4	2	5	30
4	A_2	6	1	1	3	70
5	A_3	2	3	1	8	50
6	A_4	6	3	2	1	100
7	Спрос	20	90	70	70	Σ250
8						
9						=СУММ(B9:E9)
10						=СУММ(B10:E10)
11						=СУММ(B11:E11)
12						=СУММ(B12:E12)
13		=СУММ(B9:B12)	=СУММ(C9:C12)	=СУММ(D9:D12)	=СУММ(E9:E12)	=СУММПРОИЗВ(

Рис. 66. Табличное представление транспортной задачи в Excel

Аргументами функции СУММПРОИЗВ являются: Массив1 - адреса матрицы тарифов перевозок, Массив2 – адреса пустых ячеек, зарезервированных под размещение искомых переменных задачи (плана перевозок).

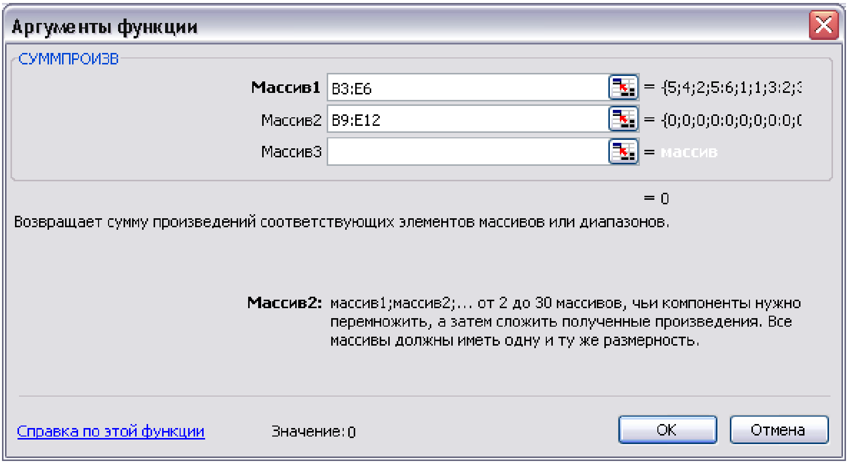


Рис. 67. Ввод целевой функции транспортной задачи

Условия транспортной задачи вводятся в диалоговую форму надстройки *Поиск решения*, вызываемой из меню *Сервис* (рис. 68). В окно *Установить целевую ячейку* вводится адрес функции цели щелчком левой кнопки мышки по ячейке, содержащей математическое выражение для подсчёта общих затрат на перевозки. Направление поиска экстремума целевой функции устанавливается соответствующим *минимальному значению*. В окно *Изменяя ячейки* вводятся адреса искомых значений переменных (B9:E12).

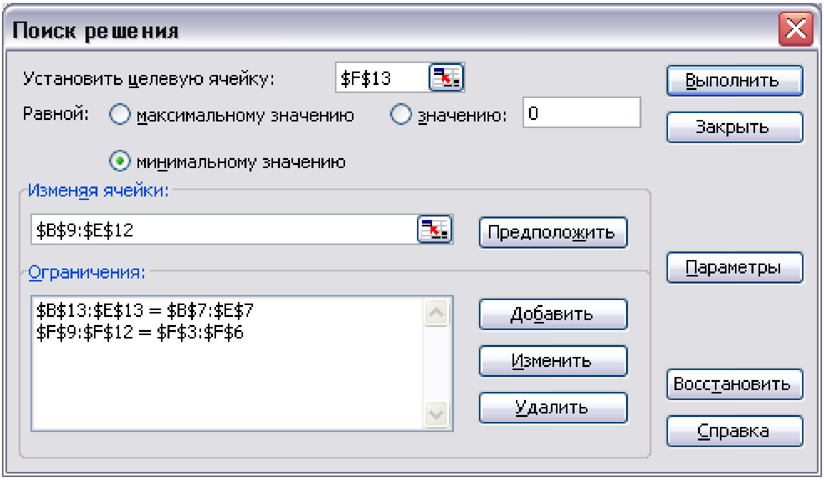


Рис. 68. Заполнение диалоговой формы Поиск решения

Ограничения задачи добавляются, изменяются и удаляются после нажатия соответствующей кнопки. В двух последних случаях предварительно необходимо выделить требуемую строку в окне *Ограничения*.

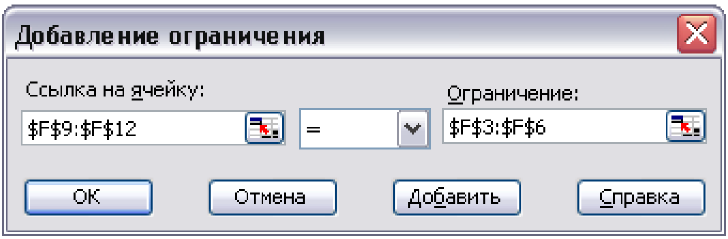


Рис. 69. Заполнение диалоговой формы Добавление ограничения

В левом окне формы *Добавление ограничения* (рис. 69) вводятся адреса левой части ограничений – суммы объёмов перевозок от поставщиков и суммы объёмов перевозок к потребителям. Знак ограничения устанавливается в виде знака равенства “ = “. В правом окне формы *Добавление ограничения* вводятся адреса правой части ограничений – числовые значения предложения и спроса.

Нажав кнопку *Параметры*, следует поставить «галки», выделив пункты: *Линейная модель*, *Неотрицательные значения* и *Автоматическое масштабирование* (рис. 70).

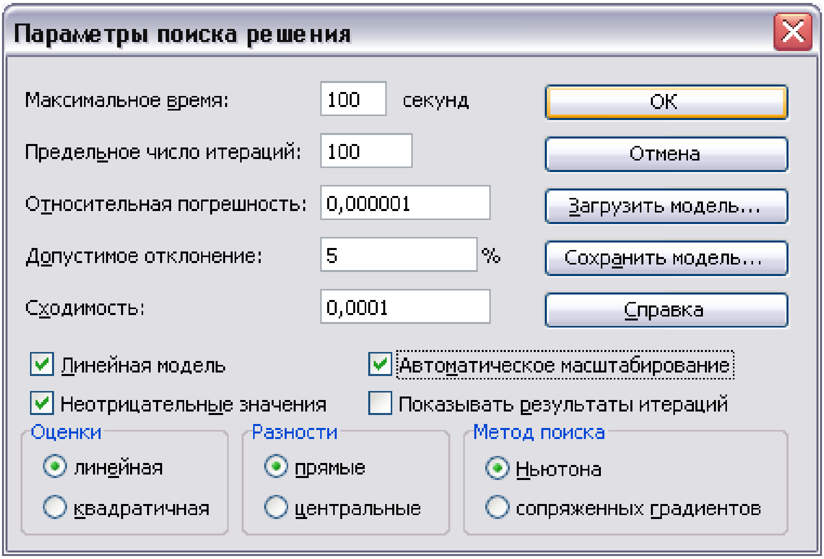


Рис. 70. Заполнение диалоговой формы Параметры

Оптимальный план перевозок представлен на рис. 71. Так, от первого поставщика третьему потребителю перевозится 30 единиц груза, от второго поставщика второму потребителю – 70 единиц груза. Третий поставщик обеспечивает поставки первому потребителю в объёме 20 единиц груза и третьему потребителю – 30 единиц груза. Поставки из четвёртого пункта отправления осуществляются по трём маршрутам: второму потребителю – 20 единиц груза, третьему потребителю – 10 единиц груза, третьему – 70 единиц груза. Общие затраты на перевозки составят 350 ден.ед.

	A	B	C	D	E	F
1	Пункты	Пункты назначения				Предло-жение
2	отправ-ления	B_1	B_2	B_3	B_4	
3	A_1	5	4	2	5	30
4	A_2	6	1	1	3	70
5	A_3	2	3	1	8	50
6	A_4	6	3	2	1	100
7	Спрос	20	90	70	70	Σ250
8						
9		0	0	30	0	30
10		0	70	0	0	70
11		20	0	30	0	50
12		0	20	10	70	100
13		20	90	70	70	350

Рис. 71. Результаты решения транспортной задачи

Метод потенциалов

Для решения транспортной задачи можно использовать метод потенциалов. Пусть задан опорный план задачи, тогда каждому пункту отправления A_i приписывается некоторое число U_i, а каждому пункту назначения B_j – число V_j. Эти числа называют потенциалами, они подбираются так, чтобы для каждой базисной клетки (i, j) выполнялось равенство

$$U_i + V_j = C_{ij}.$$

Таким образом, получаем $m + n - 1$ простых уравнений с $m + n$ неизвестными U_i и V_j. В таком случае, когда система состоит из числа уравнений, меньшего, чем число неизвестных, появляется свободная неизвестная величина, которой мы можем придать любое значение. Все остальные неизвестные можно найти из системы уравнений.

После того, как будут найдены все потенциалы U_i и V_j, для каждой свободной клетки (i, j) определяют числа $\Delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$. Далее поступаем так же, как и в распределительном методе: находим наибольшее по модулю отрицательное число $\Delta_{i_0 j_0}$ (т.е. самое малое из отрицательных) и делаем сдвиг по соответствующему циклу пересчета. Таким образом, в методе потенциалов для нахождения чисел Δ_{ij} не нужно искать циклы пересчета для всех свободных клеток. Надо найти только один цикл пересчета, соответствующий наименьшему отрицательному $\Delta_{i_0 j_0}$.

Пример решения задачи методом потенциалов:

	$V_1 = 5$	$V_2 = 4$	$V_3 = 2$	$V_4 = 1$	
$U_1 = 0$	(5) 20	(4) 10	(2)	(5)	30
$U_2 = -3$	(6)	(1) 70	(1)	(3)	70
$U_3 = -1$	(2) Θ	(3) 10	(1) 40	(8)	50
$U_4 = 0$	(6)	(3)	(2) 30	(1) 70	100
	20	90	70	70	

Для занятых клеток
$U_1 + V_1 = 5$,
$U_1 + V_2 = 4$,
$U_2 + V_2 = 1$,
$U_3 + V_2 = 3$,
$U_3 + V_3 = 1$,
$U_4 + V_3 = 2$,
$U_4 + V_4 = 1$.

Положим $U_1 = 0$, тогда учитывая занятые клетки $V_1 = 5$, $V_2 = 4$, $U_2 = -3$, $U_3 = -1$, $V_3 = 2$, $U_4 = 0$, $V_4 = 1$.

Подсчитаем Δ_{ij} для свободных клеток:

$\Delta_{13} = 2 - (0 + 2) = 0$, $\Delta_{14} = 5 - (0 + 1) = 4$,
$\Delta_{21} = 6 - (-3 + 5) = 4$, $\Delta_{23} = 1 - (-3 + 2) = 2$,
$\Delta_{24} = 3 - (-3 + 1) = 5$,
$\Delta_{31} = 2 - (-1 + 5) = -2$, $\Delta_{34} = 8 - (-1 + 1) = 8$,
$\Delta_{41} = 6 - (0 + 5) = 1$, $\Delta_{42} = 3 - (0 + 4) = -1$.

Поскольку среди значений Δ_{ij} есть отрицательные, то план перевозок не оптимален и необходимо, сделав сдвиг по циклу пересчета для клетки (3,1), перейти к новому плану.

	$V_1 = 5$	$V_2 = 4$	$V_3 = 4$	$V_4 = 3$	
$U_1 = 0$	^{5} 10	^{4} 20	^{2} Θ	^{5}	30
$U_2 = -3$	^{6}	^{1} 70	^{1}	^{3}	70
$U_3 = -3$	^{2} 10	^{3}	^{1} 40	^{8}	50
$U_4 = -2$	^{6}	^{3}	^{2} 30	^{1} 70	100
	20	90	70	70	

Для занятых клеток
$U_1 + V_1 = 5$,
$U_1 + V_2 = 4$,
$U_2 + V_2 = 1$,
$U_3 + V_1 = 2$,
$U_3 + V_3 = 1$,
$U_4 + V_3 = 2$,
$U_4 + V_4 = 1$.

Положим $U_1 = 0$, тогда
$V_1 = 5$, $V_2 = 4$, $U_2 = -3$, $U_3 = -3$, $V_3 = 4$, $U_4 = -2$, $V_4 = 3$.

Подсчитаем Δ_{ij} для свободных клеток:

$\Delta_{13} = 2 - (0 + 4) = -2$, $\Delta_{14} = 5 - (0 + 3) = 2$,
$\Delta_{21} = 6 - (-3 + 5) = 4$, $\Delta_{23} = 1 - (-3 + 4) = 0$,
$\Delta_{24} = 3 - (-3 + 3) = 3$,
$\Delta_{32} = 3 - (-3 + 4) = 2$, $\Delta_{34} = 8 - (-3 + 3) = 8$,
$\Delta_{41} = 6 - (-2 + 5) = 3$, $\Delta_{42} = 3 - (-2 + 4) = 1$.

Поскольку среди значений Δ_{ij} есть отрицательное, то план перевозок не оптимален и необходимо, сделав сдвиг по циклу пересчета для клетки (1,3), перейти к новому плану.

	$V_1 = 3$	$V_2 = 4$	$V_3 = 2$	$V_4 = 1$	
$U_1 = 0$	^{5}	^{4} 20	^{2} 10	^{5}	30
$U_2 = -3$	^{6}	^{1} 70	^{1}	^{3}	70
$U_3 = -1$	^{2} 20	^{3}	^{1} 30	^{8}	50
$U_4 = 0$	^{6}	^{3} Θ	^{2} 30	^{1} 70	100
	20	90	70	70	

Для занятых клеток
$U_1 + V_2 = 4$,
$U_1 + V_3 = 2$,
$U_2 + V_2 = 1$,
$U_3 + V_1 = 2$,
$U_3 + V_3 = 1$,
$U_4 + V_3 = 2$,
$U_4 + V_4 = 1$.

Положим $U_1 = 0$, тогда учитывая занятые клетки $V_2 = 4$, $V_3 = 2$, $U_2 = -3$, $U_3 = -1$, $V_1 = 3$, $U_4 = 0$, $V_4 = 1$.

Подсчитаем Δ_{ij} для свободных клеток:

$\Delta_{11} = 5 - (0 + 3) = 2$, $\Delta_{14} = 5 - (0 + 1) = 4$,

$\Delta_{21} = 6 - (-3 + 3) = 6$, $\Delta_{23} = 1 - (-3 + 2) = 2$,

$\Delta_{24} = 3 - (-3 + 1) = 5$,

$\Delta_{32} = 3 - (-1 + 4) = 0$, $\Delta_{34} = 8 - (-1 + 1) = 8$,

$\Delta_{41} = 6 - (0 + 3) = 3$, $\Delta_{42} = 3 - (0 + 4) = -1$.

Поскольку среди значений Δ_{ij} есть отрицательное, то план перевозок не оптимален и необходимо, сделав сдвиг по циклу пересчета для клетки (4,2), перейти к новому плану.

	$V_1 = 3$	$V_2 = 4$	$V_3 = 2$	$V_4 = 1$	
$U_1 = 0$	^{5}	^{4}	$30\ ^{2}$	^{5}	30
$U_2 = -3$	^{6}	$70\ ^{1}$	^{1}	^{3}	70
$U_3 = -1$	$20\ ^{2}$	^{3}	$30\ ^{1}$	^{8}	50
$U_4 = 0$	^{6}	$20\ ^{3}$	$10\ ^{2}$	$70\ ^{1}$	100
	20	90	70	70	

Для занятых клеток
$U_1 + V_3 = 2$,
$U_2 + V_2 = 1$,
$U_3 + V_1 = 2$,
$U_3 + V_3 = 1$,
$U_4 + V_2 = 2$,
$U_4 + V_3 = 2$,
$U_4 + V_4 = 1$.

Положим $U_1 = 0$, тогда учитывая занятые клетки $V_3 = 2$, $U_3 = -1$, $U_4 = 0$, $V_1 = 3$, $V_2 = 4$, $U_2 = -3$, $V_4 = 1$.

Подсчитаем Δ_{ij} для свободных клеток:

$\Delta_{11} = 5 - (0 + 3) = 2$, $\Delta_{12} = 4 - (0 + 4) = 0$,

$\Delta_{14} = 5 - (0 + 1) = 4$,

$\Delta_{21} = 6 - (-3 + 3) = 6$, $\Delta_{23} = 1 - (-3 + 2) = 2$,

$\Delta_{24} = 3 - (-3 + 1) = 5$,

$\Delta_{32} = 3 - (-1 + 4) = 0$, $\Delta_{34} = 8 - (-1 + 1) = 8$,

$\Delta_{41} = 6 - (0 + 3) = 3$.

Поскольку среди значений Δ_{ij} нет отрицательных, то найден оптимальный план перевозок.

$f(x) = 30 \cdot 2 + 70 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 70 \cdot 1 = 350.$

Решение транспортной задачи методом потенциалов, реализованным в ППП PRIMA показано на рис. 72 и 73.

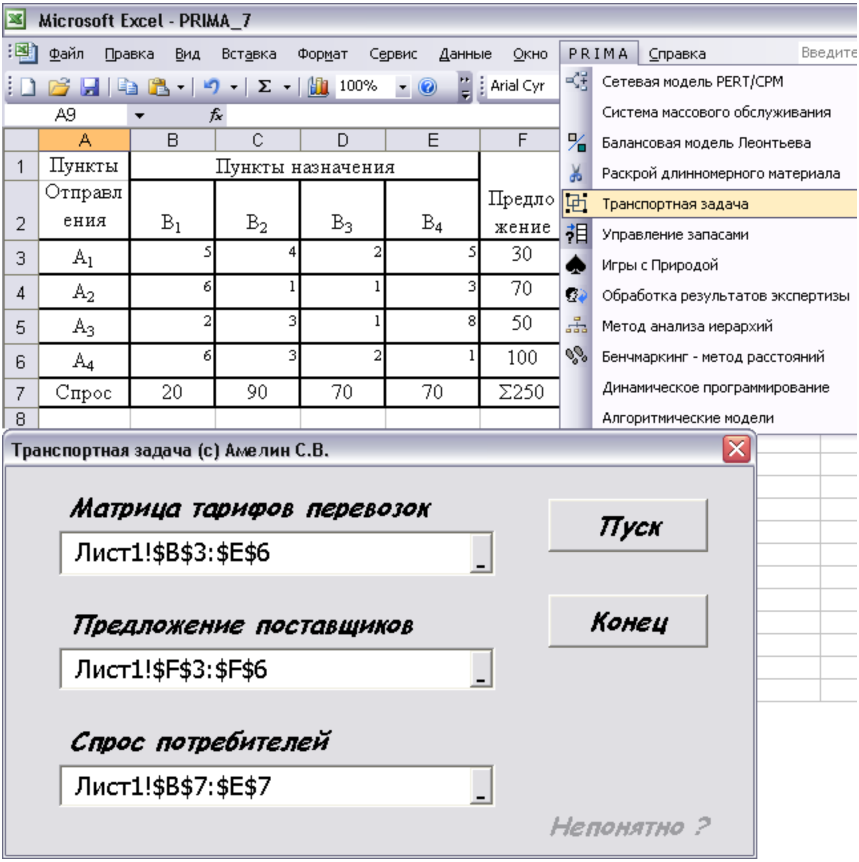


Рис. 72. Заполнение диалоговой формы Транспортная задача

	A	B	C	D	E	F
9	РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ					
10	МАТРИЦА ТАРИФОВ ПЕРЕВОЗОК					
11	Постав-	Потребители Bj				
12	щики Ai	B1	B2	B3	B4	Предложение
13	A1	5	4	2	5	30
14	A2	6	1	1	3	70
15	A3	2	3	1	8	50
16	A4	6	3	2	1	100
17	Спрос	20	90	70	70	

	A	B	C	D	E
18	Потенциалы				
19	U(I) =	1	-2	-2	0
20	V(J) =	4	3	3	1
21	Delta(i,j)				
22	D(1,3)= -2				
23	D(1,4)= 3				
24	D(2,1)= 4				
25	D(2,4)= 4				
26	D(3,1)= 0				
27	D(3,2)= 2				
28	D(3,4)= 9				
29	D(4,1)= 2				
30	D(4,3)= -1				
31	min D(KL)= -2 K=1 L=3 - включить в базис				
32	План перевозок: I-поставщики J-потребители				
33	I J	Xij	Cij	Стоимость	
34	1 1	20	5	100	
35	1 2	10	4	40	
36	2 2	50	1	50	
37	2 3	20	1	20	
38	3 3	50	1	50	
39	4 2	30	3	90	
40	4 4	70	1	70	
41	Всего транспортных расходов 420				

Рис. 73. Решение транспортной задачи в ППП PRIMA (начало)

	A	B	C	D	E	F
42	МАТРИЦА ПЕРЕВОЗОК					
43	Постав-	Потребители Bj				
44	щики Ai	B1	B2	B3	B4	Предложение
45	A1	20	10			30
46	A2		50	20		70
47	A3			50		50
48	A4		30		70	100
49	Спрос	20	90	70	70	
50	Цикл пересчета I J Перераспределение груза					
51	1)	1 3	0	(+) 10		
52	2)	1 2	10	(--) 10		
53	3)	2 2	50	(+) 10		
54	4)	2 3	20	(--) 10		
55	Q=10 Row =1 Col =2 - исключить из базиса					
56	преобразование закончено успешно					

	A	B	C	D	E	F
157	Всего транспортных расходов 350					
158	МАТРИЦА ПЕРЕВОЗОК					
159	Постав-	Потребители Bj				
160	щики Ai	B1	B2	B3	B4	Предложение
161	A1	0	0	30		30
162	A2		70	0		70
163	A3	20		30		50
164	A4		20	10	70	100
165	Спрос	20	90	70	70	

Рис. 73. Решение транспортной задачи в ППП PRIMA (продолжение)

Этапы метода потенциалов:

1. Найти первоначальный опорный план. Число заполненных клеток равно m + n – 1.

2. Найти потенциалы U_i и V_j. Составить для базисных клеток m + n – 1 уравнений с m + n неизвестными.

3. Для каждой свободной клетки найти значения $\Delta_{ij} = C_{ij} -$ $- (U_i + V_j)$. Если среди значений Δ_{ij} нет отрицательных, то полученный план транспортной задачи оптимальный. Если же такие имеются, то перейти к новому опорному плану.

4. Среди отрицательных Δ_{ij} выбрать наибольшее по модулю отрицательное число Δ_{ij}. Построить для этой свободной клетки цикл пересчета и произвести сдвиг по циклу пересчета.

5. Полученный опорный план проверить на оптимальность. Если он не оптимален, то перейти к п. 2.

Тема 6. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

В результате изучения данной темы студенты должны:

знать:

- область применения моделей управления запасами в экономике;
- основные понятия теории управления запасами;
- методы решения задач управления запасами;

уметь:

- формулировать постановку различных задач управления запасами;
- находить решение задач управления запасами;
- давать экономическую интерпретацию полученных результатов решения задач управления запасами;
- применять модели управления запасами для решения практических задач;

владеть:

- математическим аппаратом теории управления запасами;
- практическими навыками формулирования и решения задач управления запасами, в том числе с помощью ЭВМ.

Любые промышленные предприятия для успешного функционирования и выполнения установленных заданий в срок должны иметь запасы различных видов сырья, материалов, топлива. Величина этих запасов в процессе производства не остается неизменной, а колеблется между максимальным и минимальным уровнем.

Необходимость поставок сырья и производственного оборудования, удовлетворения запросов потребителей и создания разумного резерва запасных частей ставит задачи, которые можно различать по характеру спроса. Спрос может быть: детерминированным (т.е. предсказуемым с определенной точностью); случайным, но статистически устойчивым; случайным, но статистически неустойчивым (сезонные колебания); неизвестным.

Экономическая функция, оптимум которой отыскивается для случайного спроса, часто определяется как математическое ожидание общих затрат.

Объём производственных запасов различных ресурсов зависит от действия многих факторов, воздействие которых имеет противоположную направленность. Одни факторы способствуют увеличению запасов, другие - напротив, их сокращению. Поэтому величина запасов может оказывать значительное влияние на технико-экономические показатели деятельности предприятия. Так, увеличение запасов сокращает транспортные затраты по поставке данного вида ресурса, но увеличивает затраты по его хранению, требует больших складских помещений, повышает потребность предприятия в оборотных средствах. Но, с другой стороны, увеличение запасов способствует более ритмичной работе предприятия, снижает вероятность срыва выполнения производственного задания из-за сбоев в функционировании материально-технической базы. Поэтому в каждой ситуации определяется оптимальная величина производственного запаса какого-либо ресурса, достижение которого обеспечивает наилучшие технико-экономические показатели деятельности предприятия.

В задачах управления запасами рассматривают следующие факторы:

1) спрос на определенную продукцию, который либо является случайной во времени величиной, либо известен и определен;

2) наличие запаса этой продукции для удовлетворения спроса, его пополнение и восстановление; пополнение может быть нерегулярным, периодическим или осуществляться через некоторые интервалы времени;

3) затраты на ассигнования, страхование, хранение, а также убытки из-за неудовлетворенного спроса образуют экономическую функцию, которую нужно оптимизировать;

4) ограничения, определяемые факторами, связанными с задачей запасов.

Основные понятия теории управления запасами включают.

Издержки выполнения заказа (*организационные издержи*) - накладные расходы, связанные с оформлением заказа и доставкой. В промышленном производстве такими издержками являются затраты на переналадку оборудования и подготовительные операции.

Издержки хранения - расходы, связанные с физическим содержанием товаров на складе, плюс возможные проценты на капитал, вложенный в запасы. Они могут возникать из-за амортизации в процессе хранения (изделия могут портиться, устаревать, их количество может уменьшаться и т.д.). Обычно они выражены в абсолютных единицах или, в процентах от закупочной цены и связаны с определенным промежутком времени.

Упущенная прибыль (издержки дефицита) - издержки, связанные с неудовлетворенным спросом, возникающим из-за невозможности поставок вследствие отсутствия продукта на складе. Это может быть денежный штраф или ущерб, не осязаемый непосредственно (например, ухудшение бизнеса в будущем и потеря потребителей).

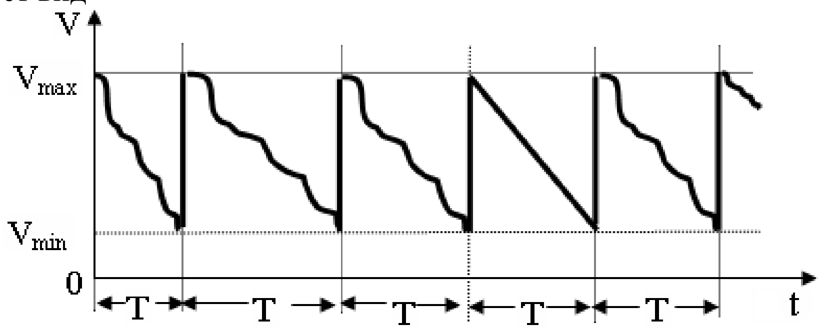
Совокупные издержки за период представляют собой сумму издержек заказа, издержек хранения и упущенной прибыли. Иногда к ним прибавляются издержки на закупку товара.

Срок выполнения заказа - время с момента заказа до момента его выполнения.

Точка восстановления (точка заказа) - уровень запаса, при котором делается новый заказ.

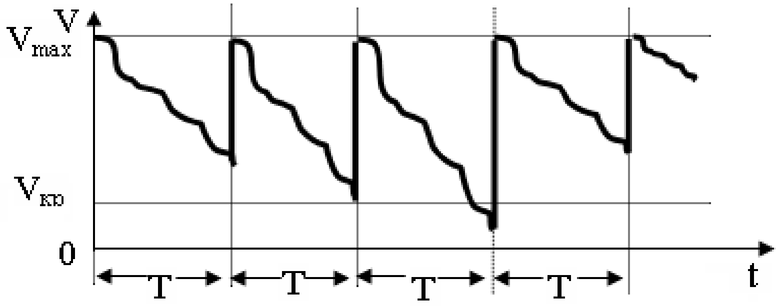
Количество товара, поставляемое на склад, называют *размером партии*.

Предположим, что интервал времени от заключения договора на пополнение до получения продукции равен нулю. В этом случае различают два основных метода простого уравнения запасами. Первый называется периодическим методом. Обозначим через T период времени, в конце которого систематически производится пополнение запасов до максимально возможного уровня V_{max}. Тогда кривая изменения запаса имеет вид



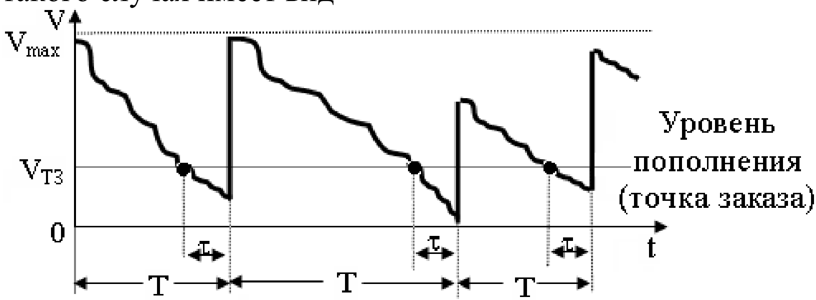
Этот метод имеет недостаток, связанный с риском исчерпания запасов, что может повлечь за собой дорогостоящее управление, но его преимуществом является автоматизм.

Другой метод можно назвать релаксационным. Здесь количество вновь поступающей продукции постоянно, и равно разности между максимальным V_{max} и минимальным V_{min} уровнями запаса, но интервалы времени $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ не равны друг другу. В этом случае кривая изменения запаса имеет вид



В этой модели нет риска исчерпания запасов, управление более дешевое, но ее труднее автоматизировать.

Допустим, что задержка в пополнении (интервал времени между заключением договора и получением продукции) не зависит от объема получаемой продукции, т.е. постоянна и равна τ. Метод управления запасами, при котором пополнение заказывается, когда запас достигает некоторой критической величины или уровня пополнения, называют «системой двух складов», или «S-s методом». Кривая изменения запаса для такого случая имеет вид



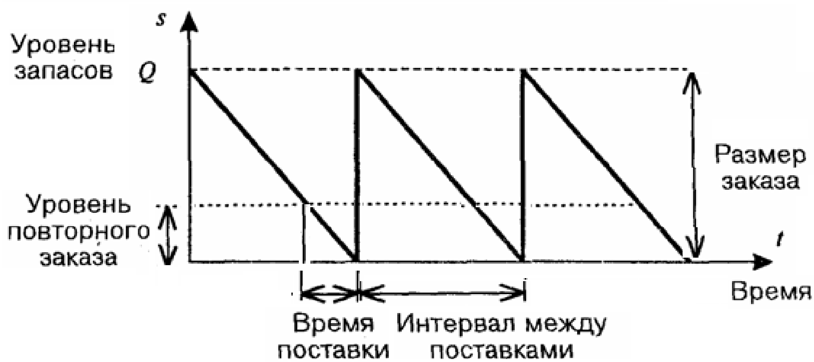
К затратам, связанным с организацией заказа и его реализацией, относятся расходы, производимые в связи с пополнением запасов начиная с поиска поставщика и оформления заказа и кончая оплатой всех услуг по доставке продукции на склад (расходы по размещению заказов, заключению договоров, расходы на связь, расходы по разъездам агентов снабжения, транспортные расходы, оплата стоимости погрузочноразгрузочных операций и т.д.). Считается, что часть расходов, связанная с организацией заказов, зависит не от размера заказа, а от их количества за год.

Расходы по хранению запасов – сложный показатель, так как хранение запасов вызывает не только затраты, связанные с физическим присутствием продукции на складе, но и затраты вследствие вложения средств в запасы (организация хранения, устаревание, порча и др.).

Потери из-за дефицита имеют место в том случае, когда снабженческо-сбытовая организация несет материальную ответственность за то, что не может удовлетворить потребительский спрос из-за отсутствия запасов.

Модель 1. Допустим, фирма должна поставлять своим клиентам S изделий равномерно в течение интервала времени T. Следовательно, спрос детерминированный. Нехватка товаров не допускается, т.е. штраф при неудовлетворительном спросе бесконечно велик: $C_H \to \infty$. Переменные затраты складываются из следующих элементов: C_X – стоимость хранения одного изделия в единицу времени; $C_З$ – затраты, связанные с организацией заказа (стоимость заказа).

Необходимо решить, как часто нужно организовывать заказ партий на склад фирмы и каким должен быть размер каждой партии.



Если V – размер партии заказа, $t_З$ - интервал времени между заказами партий, а S – полный спрос за время T, то $\frac{S}{V}$ – число партий за время T и

$$t_З = \frac{T}{S/V} = \frac{T \cdot V}{S}. \qquad (6.1)$$

Если интервал $t_З$ начинается, когда на складе имеется V изделий и заканчивается при отсутствии изделий, то V/2 – средний запас в течение $t_З$, а затраты на хранение в интервале $t_З$ составят $V/2 \cdot C_X \cdot t_З$.

Полная стоимость $Q_П$ создания запасов за время T равна сумме стоимости хранения и стоимости заказа, умноженных на общее число партий за это время:

$$Q_П = \left(\frac{V}{2} C_X \, t_З + C_З\right) \frac{S}{V}, \qquad (6.2)$$

подставляя выражение для t_Z, получая:

$$Q_П = \left(\frac{V}{2} C_X \cdot \frac{T \cdot V}{S} + C_Z\right) \frac{S}{V} = \frac{C_X T V}{2} + \frac{C_З S}{V}. \qquad (6.3)$$

С увеличение размера партий первое слагаемое этого выражения вырастает, а второе убывает. Суммируя эти зависимости, можно определить оптимальный размер партии заказа (рис. 74).

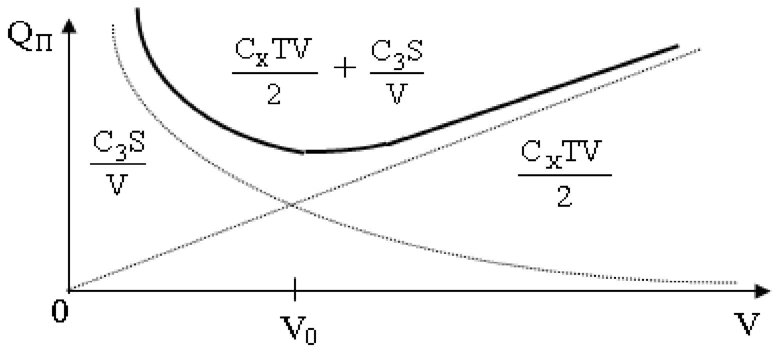


Рис. 74. Определение оптимального размера партии заказа

Решение задачи управления запасами состоит в определении такого оптимального размера партии заказа V_0, при котором суммарная стоимость была бы наименьшей, т.е. нахождении экстремума функции общих ожидаемых расходов $Q_П$.

Продифференцируем последнее выражение по V, получим

$$\frac{dQ_П}{dV} = \frac{C_X T}{2} - \frac{C_З S}{V^2}. \qquad (6.4)$$

Если вторая производная положительна, то в точке перегиба функция имеет минимум, получим

$\dfrac{d^2 Q_П}{dV^2} = 2\dfrac{C_X S}{V^3} > 0$, следовательно, при $V = V_0$ имеем минимум функции.

Поскольку в точке экстремума первая производная должна быть равна нулю, то из условия $\dfrac{dQ_П}{dV} = 0$ найдем

$$V_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{SC_З}{TC_X}}. \qquad (6.5)$$

Подставим это выражение в (6.1), получим оптимальное время между заказами

$$t_{З0} = \frac{TV_0}{S} = \frac{T}{S}\sqrt{2 \cdot \frac{SC_З}{TC_X}} = \sqrt{2 \cdot \frac{TC_З}{SC_X}}. \qquad (6.6)$$

Точка восстановления запаса (точка заказа)

$$V_{ТЗ} = \frac{S}{T} \cdot \tau, \qquad (6.7)$$

где τ – время выполнения заказа.

Оптимальное число заказов (партий поставок) за период T

$$N = S / V \qquad (6.8)$$

Подставим выражение (6.5) в (6.3), получим оптимальную (минимальную) величину затрат

$$Q_0 = \frac{C_X T V_0}{2} + \frac{C_З S}{V_0} = \frac{C_X T}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{SC_З}{TC_X}} + \frac{C_З S}{\sqrt{2\frac{SC_З}{TC_X}}} = \sqrt{2STC_X C_З}\ . \quad (6.9)$$

Пример. Фирма должна поставлять своим заказчикам 58000 единиц продукции в год. Поскольку получаемая продукция используется непосредственно на сборочной линии и заказчики не имеют для нее специальных складов, фирма-поставщик должна ежедневно отгружать дневную норму. В случае нарушения поставок фирма-поставщик рискует потерять заказ, поэтому нехватка продукции недопустима и штраф за это можно считать бесконечно большим. Хранение единицы продукции в месяц стоит 3 ден.ед. Стоимость заказа одной партии продукции составляет 420 ден.ед.

Требуется определить оптимальный размер партии заказа V_0, оптимальный период времени между заказами $t_{З0}$ и вычислить минимум общих ожидаемых годовых затрат Q_0.

В данном случае T = 12 месяцев, S = 58000 единиц, $C_X = 3$ ден.ед./мес, $C_З = 420$ ден.ед./партия. Время поставки заказа $\tau =$ 3 дн. (0,1 мес.). Подставим эти значения в выражения (6.5) - (6.9):

$$V_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{58000 \cdot 420}{12 \cdot 3}} = 1163 \text{ ед.},$$

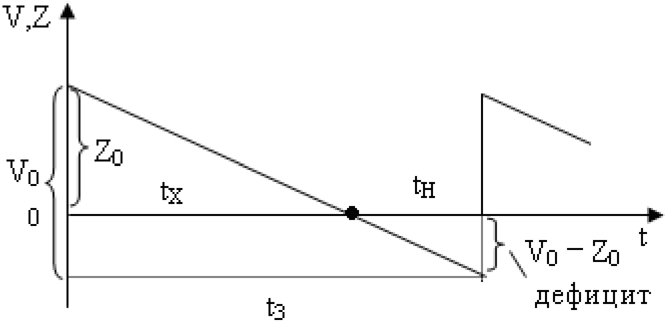
$$t_{З0} = \sqrt{2 \cdot \frac{12 \cdot 420}{58000 \cdot 3}} = 0{,}24 \text{ месяца} \approx 1 \text{ нед.},$$

$$V_{ТЗ} = 58000 \cdot 0{,}1 \,/\, 12 \approx 483 \text{ ед.},\quad N = 58000 / 1163 \approx 50,$$

$$Q_0 = \sqrt{2 \cdot 58000 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 420} = 41880 \text{ ден.ед./год}.$$

Модель 2. Допустим, что превышение спроса над запасами допускается, т.е. штраф за нехватку продукции конечный. Z_0 – оптимальный уровень запасов к началу некоторого интервала времени.

Кривая изменения запасов будет иметь вид



В этом случае интервал времени $t_З$ может состоять из t_X – времени, когда запас есть, и t_H – времени отсутствия запасов. На складе фирмы–поставщика до получения следующей партии пополнения запасов $t_X = \frac{Z}{V} \cdot t_З$, $t_H = \frac{V-Z}{V} \cdot t_З$, где Z – уровень запаса к началу периода.

Средний запас в течение t_X равен $\frac{Z}{2}$, затраты на хранение за время t_X равны $\frac{Z}{2} \cdot C_X \cdot t_X$. Средняя нехватка за время t_H равна $\frac{V-Z}{2}$, а штраф за время t_H составляет $\frac{V-Z}{2} \cdot C_H \cdot t_H$.

Полные расходы за время T равны сумме затрат на хранение, штрафа за нехватку и стоимости заказа

$$Q_П = \left(\frac{Z}{2} \cdot C_X \cdot t_X + \frac{V-Z}{2} \cdot C_H \cdot t_H + C_З\right) \cdot \frac{S}{V}. \qquad (6.10)$$

Подставляя сюда значения t_X, t_H и $t_З = TV/S$, получая

$$Q_П = \frac{Z^2 C_X T}{2V} + \frac{(V-Z)^2 C_H T}{2V} + \frac{C_З S}{V}. \qquad (6.11)$$

Из уравнения (6.11) можно найти оптимальные значения для V и Z:

$$V_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{S}{T} \cdot \frac{C_З}{C_X}} \cdot \sqrt{\frac{C_X + C_Н}{C_Н}}\ ; \tag{6.12}$$

$$Z_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{S}{T} \cdot \frac{C_З}{C_X}} \cdot \sqrt{\frac{C_H}{C_X + C_H}}\ ; \tag{6.13}$$

$$t_{З0} = \sqrt{2 \cdot \frac{T}{S} \cdot \frac{C_З}{C_X}} \cdot \sqrt{\frac{C_X + C_Н}{C_Н}}\ ; \tag{6.14}$$

$$Q_0 = \sqrt{2STC_X C_З} \cdot \sqrt{\frac{C_H}{C_X + C_H}}\ . \tag{6.15}$$

Пример. Пусть сохраняются все условия предыдущего примера, а штраф за нехватку $C_Н$ = 4 ден.ед. за одно изделие в месяц. Используя выражения (6.12) - (6.15), получим

$$V_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{58000 \cdot 420}{12 \cdot 3}} \cdot \sqrt{\frac{3+4}{4}} = 1540 \text{ ед.},$$

$$Z_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{58000 \cdot 420}{12 \cdot 3}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3+4}} = 879 \text{ ед.},$$

$$t_{З0} = \sqrt{2 \cdot \frac{12 \cdot 420}{58000 \cdot 3}} \cdot \sqrt{\frac{3+4}{4}} = 0{,}317 \text{ месяцев} \approx 1 \text{ декада},$$

$$Q_0 = \sqrt{2 \cdot 58000 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 420} \cdot \sqrt{\frac{4}{3+4}} = 31658 \text{ ден.ед.}$$

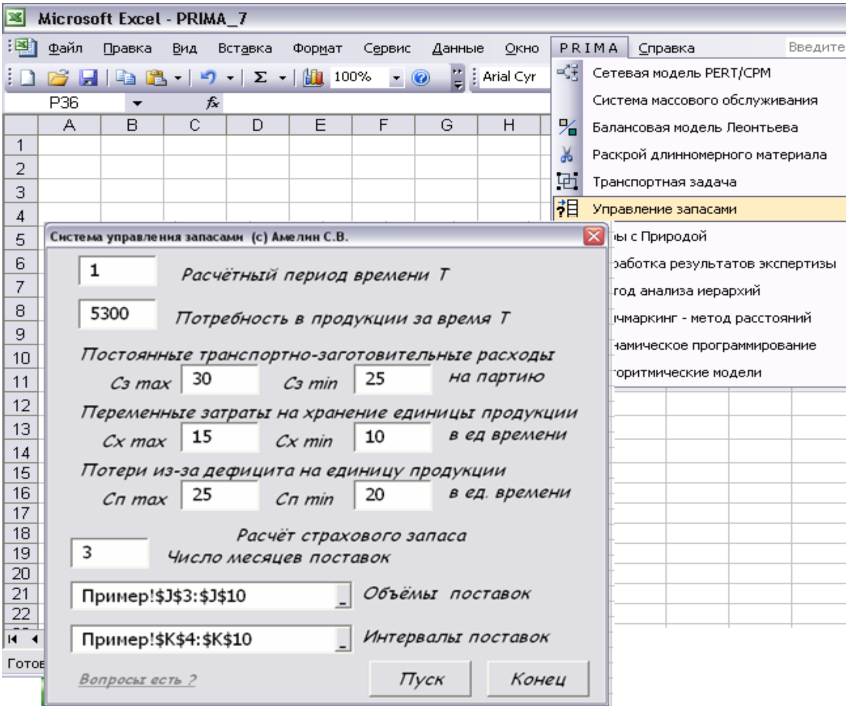


Рис. 75. Заполнение диалоговой формы Управление запасами

Для автоматизации расчёта параметров модели управления запасами возможно использование программы «Управление запасами» из ППП PRIMA (рис. 75). Для этого необходимо ввести объёмы поставок и интервалы между поставками в столбцы таблицы Excel (рис. 76).

	I	J	K	L	M	N
1	Даты	Объем	Интервал			
2	поставок	поставок	поставок			
3	05.01.2008	100				
4	10.01.2008	250	5,00			
5	25.01.2008	100	15,00			
6	15.02.2008	100	21,00			
7	28.02.2008	250	13,00			
8	05.03.2008	100	6,00			
9	20.03.2008	250	15,00			
10	25.03.2008	100	5,00			
11						
12	РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ					
13						
14	Размер партии поставки с учетом дефицита равен Vo = 197,370210518204					
15						
16	Периодичность поставок равна to = 3,72396623619252E-02					
17						
18	Накладные расходы за время Т составят Qo = 1507,12593084605					
19						
20	Средний интервал между поставками tсв=10,36					
21						
22	Средний интервал опозданий tоп=4,78285714285714					
23						
24	Среднесуточный расход продукции 13,8888888888889					

Рис. 76. Расчёт величины запасов в ППП PRIMA

При заполнении диалоговой формы программы Управление запасами необходимо ввести длительность расчётного периода времени (1 год), расход ресурса за данный период (5300 тонн), диапазоны транспортно-заготовительных расходов, затрат на хранение продукции, потерь от дефицита.

Для расчёта страхового запаса необходимо ввести число месяцев поставок и с помощью мышки ввести адреса ячеек, содержащих объёмы поставок и интервалы поставок.

Результаты решения задачи представлены на рис. 76. График изменения запаса и величины страхового запаса представлен на рис. 77.

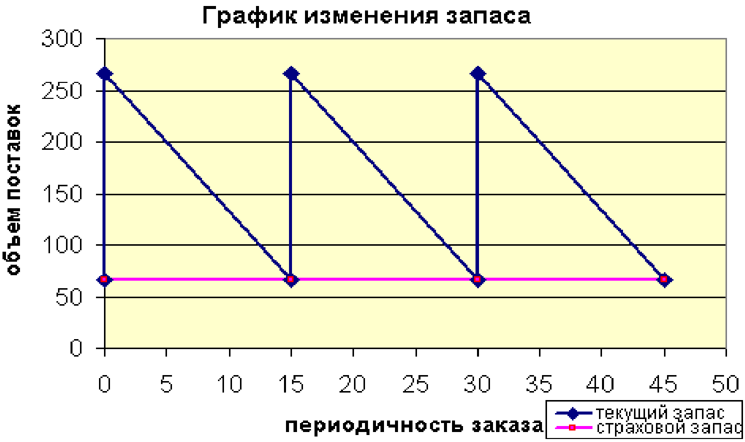


Рис. 77. Графики изменения запаса и страхового запаса

Модель 3. *Модель производственных поставок*. Фирма производит продукт самостоятельно, хранит его на складе и расходует с постоянным темпом. Если темп производства выше темпа спроса, то излишки продукта накапливаются на складе. Когда количество продукта на складе достигает максимального значения, производство прекращается и продукт расходуется со склада с постоянным темпом. Когда запас на складе достигает точки восстановления, производство возобновляется. При этом оптимальным решением задачи будет такой размер заказа, при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек на возобновление (запуск) производства.

Динамика изменения количества продукта на складе показана на рис. 78, где $\mathrm{tg}\ \alpha = \lambda - \mu$, $\mathrm{tg}\ \beta = \mu$. Интенсивность производства (поставок) – λ, интенсивность спроса – $\mu = S / T$.

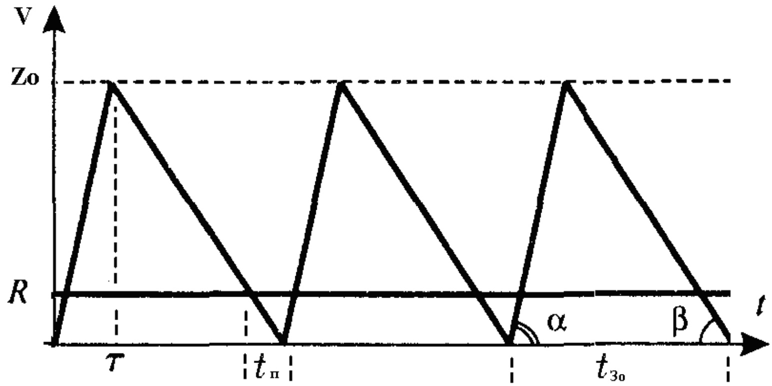


Рис. 78. Модель производственных поставок

$$V_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{S}{T} \cdot \frac{C_З}{C_X}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda - \mu}} \cdot \sqrt{\frac{C_Х + C_Н}{C_Н}}\ ; \qquad (6.16)$$

$$Z_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{S}{T} \cdot \frac{C_З}{C_X}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda - \mu}{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{C_Н}{C_Х + C_Н}}\ ; \qquad (6.17)$$

$$t_{З0} = \sqrt{2 \cdot \frac{T}{S} \cdot \frac{C_З}{C_X}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda - \mu}} \cdot \sqrt{\frac{C_Х + C_Н}{C_Н}}\ ; \qquad (6.18)$$

$$Q_0 = \sqrt{2STC_XC_З} \cdot \sqrt{\frac{\lambda - \mu}{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{C_Н}{C_Х + C_Н}}\ . \qquad (6.19)$$

Число партий поставок в течение периода T:

$$N = S / Vo = \mu \cdot T / Vo \qquad (6.20)$$

Продолжительность поставки:

$$\tau = Vo / \lambda \qquad (6.21)$$

Продолжительность цикла пополнения запаса:

$$t_{Зо} = T / N = Vo / \mu \qquad (6.22)$$

Максимальный уровень запасов:

$$Zo = (\lambda - \mu)\tau \qquad (6.23)$$

Средний уровень запасов:

$$Zср = Zо / 2 \tag{6.24}$$

Точка заказа (зависит от времени, необходимого для запуска производства $t_п$):

$$R = \mu \cdot t_п \tag{6.25}$$

Пример 1. Производственное оборудование позволяет изготавливать изделия с производительностью 3600 ед. в год. Заготовки для производства изделий изготавливаются на другом оборудовании с производительностью 12000 ед. в год. Оставшиеся необработанными заготовки образуют запас. Издержки хранения запаса составляют 0,5 ден.ед. за одну заготовку в год. Стоимость производственного цикла на оборудовании для производства заготовок равна 800 ден.ед. Определить оптимальный размер партии заготовок и периодичность поставок, учитывая, что дефицит недопустим (Сх/Сн ≈ 0).

$$V_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 3600 \cdot 800}{0{,}5}} \cdot \sqrt{\frac{12000}{12000 - 3600}} = 4056{,}74 \text{ заготовок}$$

$t_{з0} = V_0/(S/T) = 4056{,}74/3600 = 1{,}127$ года.

Пример 2. Интенсивность равномерного спроса выпускаемых фирмой mp3-плееров составляет μ=2000 шт. в год. Организационные издержки равны Сз=20 тыс. р. Издержки хранения равны Сх=0,1 тыс. р. в расчете на один mp3-плеер в год. Запасы на складе пополняются со скоростью λ=4000 mp3-плееров в год. Производственная линия начинает действовать, как только уровень запасов на складе становится равным нулю, и продолжает работу до тех пор, пока не будет произведено *Vo* mp3-плееров.

Найти размер партии, который минимизирует все затраты. Определить число поставок в течение года, время, в течение которого продолжается поставка, продолжительность цикла, максимальный уровень запасов и средний уровень запасов при условии, что размер поставки оптимален.

Решение. Оптимальный размер поставки:

$$Vo = \sqrt{2 \cdot 2000 \cdot 20 / 0{,}1} \cdot \sqrt{4000 / (4000 - 2000)} = 1265 \text{ шт.}$$

Максимальный уровень запасов:

$$Zo = \sqrt{2 \cdot 2000 \cdot 20 / 0{,}1} \cdot \sqrt{(4000 - 2000) / 4000} = 633 \text{ шт.}$$

Издержки:

$$Qo = \sqrt{2 \cdot 2000 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 0{,}1} \cdot \sqrt{(4000 - 2000) / 4000} = 63{,}25 \text{ тыс. р.}$$

Число партий в течение года:

$$N = 2000 / 1265 \approx 1{,}6 \text{ поставки,}$$

Продолжительность поставки:

$$\tau = 1265 / 4000 \approx 115 \text{ дн.,}$$

Продолжительность цикла:

$$t_{3o} = 365 / 1{,}6 = 1265 / 2000 \approx 230 \text{ дн.}$$

Средний уровень запасов:

$$Zср = 317 \text{ шт.}$$

Таким образом, за каждую поставку необходимо доставлять на склад 1265 mp3-плееров, оптимальное число поставок составляет 1,6, продолжительность поставки - 115 дней, продолжительность цикла - 230 дней.

Тема 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

В результате изучения данной темы студенты должны:

знать:

- область применения моделей теории игр в экономике;
- основные понятия теории игр;
- методы решения задач теории игр;

уметь:

- формулировать постановку различных задач теории игр;
- находить решение задач теории игр;

- давать экономическую интерпретацию полученных результатов решения задач теории игр;

- применять методы теории игр для решения практических задач;

владеть:

- математическим аппаратом теории игр;

- практическими навыками формулирования и решения задач теории игр, в том числе с помощью ЭВМ.

Основные понятия теории игр. При решении задач в области экономики и управления производством в условиях неполноты и неточности информации возможны ситуации, когда необходимо принятие решений в условиях риска и неопределенности.

Предметом изучения теории игр являются ситуации, когда отсутствует полнота информации, а аппарат теории игр предназначен для выбора оптимальных решений в условиях неопределенности. *Методы* теории игр разработаны применительно к специфическим конфликтным ситуациям, которые обладают свойством многократной повторяемости. *Целью* теории игр является выработка рекомендаций по рациональному образу действия участников многократно повторяющегося конфликта. Под *конфликтными ситуациями* понимается положение, когда сталкиваются интересы двух и более сторон, причем выигрыш зависит от того, как поведут себя другие стороны. Математический анализ конфликта возможен при построении математической модели конфликта. Такая модель называется *игрой*. От реального конфликта игра отличается тем, что ведется по определенным правилам, которые участникам конфликта известны и строго выполняются. Игра называется *парной*, если в ней участвуют две стороны. Если в парной игре выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, то такая парная игра называется *игрой с нулевой суммой*. *Конечной* игрой называется игра с конечным числом стратегий. *Стратегией* называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действия при каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Ходы бывают *личные* и *случайные*. При случайном ходе – выбор стратегии случайный. Стратегия игрока называется *оптимальной*, если при многократном повторении игры она обеспечивает ему максимальный средний выигрыш или минимальный средний проигрыш.

Матричные игры

Пусть игрок А имеет $\boldsymbol{m}$ чистых стратегий A_1, A_2, … A_i,…A_m, а игрок В имеет $\boldsymbol{n}$ чистых стратегий B_1, B_2, … B_j,…B_n. Такая игра называется игрой $\boldsymbol{m \times n}$. Если игрок А пользуется стратегией A_i, а игрок В пользуется стратегией B_j, то обозначим через a_{ij} выигрыш игрока А, если $a_{ij} > 0$, или проигрыш игрока А, если $a_{ij} < 0$. Очевидно, что – это одновременно проигрыш игрока В, если $a_{ij} > 0$, и выигрыш игрока В, если $a_{ij} < 0$.

Тогда мы можем привести игру к матричной форме, т.е. составить матрицу, которая называется *платежной матрицей*, или матрицей игры:

	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	a_{i2}…	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

(7.1)

Каждая строка этой матрицы соответствует некоторой стратегии игрока А, а каждый столбец – некоторой стратегии игрока В.

Пример игры. Два игрока выкидывают на пальцах числа, причем четное число пальцев – это выигрыш игрока А, нечетное – проигрыш игрока А. Для простоты введем ограничение – игроки выкидывают от 1 до 3 пальцев.

Составим платежную таблицу:

	B_1	B_2	B_3	$\min\limits_j$	
A_1	2	-3	4	-3	$\max\limits_i$
A_2	-3	4	-5	-5	
A_3	4	-5	6	-5	
$\max\limits_i$	4	4	6		
	$\min\limits_j$				

Проанализируем матрицу игры: для каждой чистой стратегии игрока А определим минимальный выигрыш, т.е. определим

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

В нашем примере $\alpha_1 = -3$; $\alpha_2 = -5$; $\alpha_3 = -5$. Далее, среди полученных значений λ_i-х определим максимальное

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

В нашем примере $\alpha = -3$, т.е. игрок А проигрывает 3 очка. Это число α называется *нижней ценой игры*, а соответствующая ему стратегия называется максиминной. В нашем примере стратегия A_1 максиминная, т.е. из всех наихудших ситуаций выбирают наилучшую. Эта величина (α) – гарантированный «выигрыш» игрока А, какую бы стратегию ни выбрал игрок В. Меньше нижней цены игры игрок А никогда не «выиграет», если будет придерживаться правил игры.

Игрок В старается максимально уменьшить свой проигрыш. Для этого определяется *верхняя цена игры*

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Соответствующая стратегия называется минимаксной. В нашем примере будет две минимаксных стратегии B_1 и B_2. При этом игрок В проигрывает 4 очка.

Теорема 1. В любой матричной игре справедливо неравенство $\alpha \le \beta$, т.е. нижняя цена игры никогда не превосходит верхнюю.

Игра с седловой точкой

Если в матричной игре нижняя и верхняя цены игры совпадают, то такая игра имеет «седловую точку» в чистых стратегиях, а число $\upsilon = \alpha = \beta$ называют ценой игры. В этом случае решением игры, т.е. оптимальным поведением для обоих игроков являются их максиминная для игрока А и минимаксная для игрока В стратегии игры. Любое отклонение игроков от своих оптимальных стратегий не может оказаться им выгодным. Элемент платежной матрицы, отвечающий оптимальным стратегиям, называется *седловой точкой*.

Пример. Пусть игра задана следующей платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	9	3	8	2	2
A_2	4	2	7	3	2
A_3	6	4	7	8	4
A_4	5	3	4	7	3
β_j	9	4	8	8	

max min - лучшая стратегия для игрока А – (A_3)

цена игры $\upsilon = \alpha = \beta = 4$

min max - лучшая стратегия для игрока В – (B_2)

Игра в смешанных стратегиях

Если платежная матрица не имеет седловой точки, то если игрок будет пользоваться смешанными стратегиями, т.е. при каждом ходе менять стратегию случайным образом, то игрок А выигрывает больше, чем α, а игрок В проигрывает больше, чем β.

Рассмотрим платежную матрицу (7.1). Пусть игрок А использует чистые стратегии $A_1, A_2, \dots A_i, \dots A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots p_i, \dots p_m$, причем $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, а игрок В использует свои чистые стратегии $B_1, B_2, \dots B_j, \dots B_n$ с вероятностями $q_1, q_2, \dots q_j, \dots q_n$, причем $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Тогда набор $S_A = (p_1, p_2, \dots p_i, \dots p_m)$ называется смешанной стратегией игрока А, а набор $S_B = (q_1, q_2, \dots q_j, \dots q_n)$ - смешанной стратегией игрока В.

Поскольку игроки выбирают свои стратегии случайным образом, то вероятность выбрать комбинацию A_iB_j по теории вероятности равна $(P_i \cdot q_j)$. При использовании смешанных стратегий игра становится случайной, тогда говорят о среднем значении выигрыша, который определяется платежной функцией

$$f(S_A, S_B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \,. \qquad (7.2)$$

Смешанные стратегии $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, \dots p_i^* \dots p_m^*)$ и $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, \dots q_j^* \dots q_n^*)$ называются оптимальными, т.е. дающими каждой стороне максимальный возможный для нее средний выигрыш (для А) или минимальный средний проигрыш (для В), если они образуют седловую точку для платежной функции (7.2), т.е. если выполняется следующее условие:

$$f(S_A, S_B^*) \le f(S_A^*, S_B^*) \le f(S_A^*, S_B).$$

Величина $\upsilon = f(S_A^*, S_B)$ называется ценой игры.

Теорема 2. В смешанных стратегиях любая матричная игра имеет седловую точку, или каждая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.

Решение игры в смешанных стратегиях

Теорема 3. Для того чтобы смешанные стратегии S_A^* и S_B^* были оптимальными в игре с матрицей (7.1) и ценой игры υ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq \upsilon; \ j = \overline{1,n}, \text{ причем } \sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1; \tag{7.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \leq \upsilon; \ i = \overline{1,m}, \text{ причем } \sum_{j=1}^{n} q_j^* = 1. \tag{7.4}$$

Нахождение оптимальной стратегии можно свести к решению задачи линейного программирования.

Пусть требуется найти оптимальные стратегии для игры с заданной платежной матрицей (7.1), для которой a_{ij} строго больше нуля ($a_{ij} > 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$), тогда цена игры $\upsilon > 0$. Найдем оптимальную стратегию игрока А – (S_A^*).

Разделим левую и правую части в выражении (7.3) на положительную величину υ:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{p_i^*}{\upsilon} \geq 1; \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^*}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon}.$$

Введем обозначение $\frac{p_i^*}{\upsilon} = X_i$, тогда

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_i \geq 1; \quad j = \overline{1,n}; \qquad \sum_{i=1}^{m} X_i = \frac{1}{\upsilon}.$$

Поскольку игрок А стремится сделать свой гарантированный выигрыш (υ) как можно большим ($\upsilon \to \max$), то величина $\frac{1}{\upsilon}$ должна быть как можно меньше ($\upsilon \to \min$), тогда имеем следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} X_i \to \min, \tag{7.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_i \geq 1;\ j = \overline{1,n}, \tag{7.6}$$

$$X_i \geq 0;\ i = \overline{1,m}. \tag{7.7}$$

Если $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots X_i^* \ldots X_m^*)$ – оптимальный план задачи (7.5) – (7.7), а минимум функции $f(x) = f(x^*) = f^*$, то цена игры υ при этом составит $\upsilon = \frac{1}{f^*}$, а т.к. $\frac{p_i^*}{\upsilon} = X_i$, тогда $S_A^* = (\upsilon \cdot X_1^*, \ldots \upsilon \cdot X_m^*) = (p_1^*, \ldots p_m^*)$ – оптимальная смешанная стратегия игрока А.

Для игрока В используя выражение (7.4), получим

$$g(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \to \max.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \leq 1,\ i = \overline{1,m}.$$

$$y_j \geq 0;\ j = \overline{1,n}.$$

Решение игры $\upsilon = \frac{1}{g(Y^*)}$;

$S_B^* = (\upsilon \cdot y_1^*, \ldots \upsilon \cdot y_n^*) = (q_1^*, \ldots q_n^*)$.

Пример. Найти оптимальные смешанные стратегии игры, заданной следующей платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	10	3
A_2	8	4	5

нижняя цена игры $\alpha = 4$,
верхняя цена игры $\beta = 5$,
т.е. $\alpha \neq \beta$ – седловой точки нет.

Сведем данную задачу к задаче линейного программирования.

Найдем оптимальную стратегию игрока А – (S_A^*):

$$f(x) = X_1 + X_2 \to \min.$$

$$\begin{cases} X_1 + 8X_2 \geq 1, \\ 10X_1 + 4X_2 \geq 1, \\ 3X_1 + 5X_2 \geq 1, \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

$f(x) = 0,21$; $X_1 = 0,026$; $X_2 = 0,184$,
отсюда

$$\upsilon = \frac{1}{0,21} = 4,76; \qquad P_1 = 4,76 \cdot 0,026 = 0,124;$$

$$P_2 = 4,76 \cdot 0,184 = 0,876.$$

Найдем оптимальную стратегию игрока В – (S_B^*):

$$g(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max.$$

$$\begin{cases} y_1 + 10y_2 + 3y_3 \leq 1, \\ 8y_1 + 4y_2 + 5y_3 \leq 1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

$g(y) = 0,21$; $y_1 = 0$; $y_2 = 0,0526$; $y_3 = 0,158$,

отсюда

$q_1 = 0$; $q_2 = 4,76 \cdot 0,0526 = 0,25$;
$q_3 = 4,76 \cdot 0,158 = 0,75$.

Таким образом, применяя свою первую чистую стратегию с вероятностью 0,124 и вторую – с вероятностью 0,876, игрок А выигрывает величину 4,76. Игрок В, применяя свою вторую чистую стратегию с вероятностью 0,25 и третью – с вероятностью 0,75, проигрывает величину 4,76, иначе он проигрывает больше.

Игра два на два (2 х 2)

Рассмотрим игру, в которой у игроков А и В по две стратегии. Платежная матрица имеет вид

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

(7.8)

Рассмотрим случай, когда игра не имеет седловой точки.

Теорема 4. Пусть S_A^* и S_B^* – оптимальные смешанные стратегии игры с платежной матрицей (7.1) и ценой игры υ, тогда для любого i, при котором выполняется строгое неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j < \upsilon,$$

имеет место равенство $p_i = 0$. А если $p_i > 0$, то

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j = \upsilon.$$

Аналогично, если для некоторых j

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i > \upsilon,$$

то для этих j $q_j = 0$. А если $q_j > 0$, то

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i = \upsilon.$$

Определим оптимальную смешанную стратегию S_A^* игрока A, а для этого решим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 = \upsilon, \\ a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 = \upsilon, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Решив следующую систему, найдем оптимальную стратегию S_B^* игрока B:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot q_1 + a_{12} \cdot q_2 = \upsilon, \\ a_{21} \cdot q_1 + a_{22} \cdot q_2 = \upsilon, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим первую систему. Вычитая из первого равенства второе, получая

$$(a_{11} - a_{12}) \cdot p_1 + (a_{21} - a_{22}) \cdot p_2 = 0.$$

Подставим $P_2 = 1 – P_1$, тогда

$$(a_{11} – a_{12}) \cdot p_1 + (a_{21} – a_{22}) (1– p_1) = 0,$$

отсюда оптимальная смешанная стратегия для игрока A – $S^*(p_1, p_2)$

это – хорошо

$$P_1 = (a_{22} – a_{21})/(a_{11} – a_{12} + a_{22} – a_{21}),$$

$$P_2 = 1– P_1 = (a_{11} – a_{12})/(a_{11} – a_{12} + a_{22} – a_{21}).$$

цена игры

$$\upsilon = (a_{11} \cdot a_{22} – a_{21} \cdot a_{12})/(a_{11} – a_{12} + a_{22} – a_{21}).$$

Рассуждая аналогично, для определения оптимальной стратегии игрока B получая

$$q_1 = (a_{22} – a_{12})/(a_{11} – a_{12} + a_{22} – a_{21}),$$

$$q_2 = (a_{11} – a_{21})/(a_{11} – a_{12} + a_{22} – a_{21}).$$

Пример. Имеются две конкурирующие фирмы A и B, выпускающие изделия двух модификаций. Изучение спроса покупателей показало, что если выпускаются изделия первой модификации обеими фирмами, A_1 и B_1, то 40 % покупателей предпочитают изделия фирмы А и 60 % - фирмы В. Если выпускаются изделия A_1 и B_2, то 90 % покупателей приобретают изделия А. Если изготавливаются изделия A_2 и B_1, будет продано 70 % изделий фирмы А. Наконец, если выпускаются изделия второй модификации A_2 и B_2 обеими фирмами, то 20 % покупателей предпочитают изделия фирмы А.

Решение. Представим выигрыш фирмы А в табличной форме

a_{11} = 40 % - 60 % = -20 %; a_{12} = 90 % - 10 % = 80 %;

a_{21} = 70 % - 30 % = 40 %; a_{22} = 20 % - 80 % = -60 %.

	B_1	B_2	α_i
A_1	-20	80	-20
A_2	40	-60	-60
β_j	40	80	

Нижняя цена игры составляет (-20), верхняя равна 40. Игра не имеет седловой точки. Найдем оптимальные смешанные стратегии

$$p_1 = (-60 - 40)/(-20 – 80-60-40) = \frac{1}{2};\ p_2 = \frac{1}{2};$$

$$\upsilon = [-20 \cdot (-60) - 40 \cdot 80]/ (-20 – 80-60-40) = 10;$$

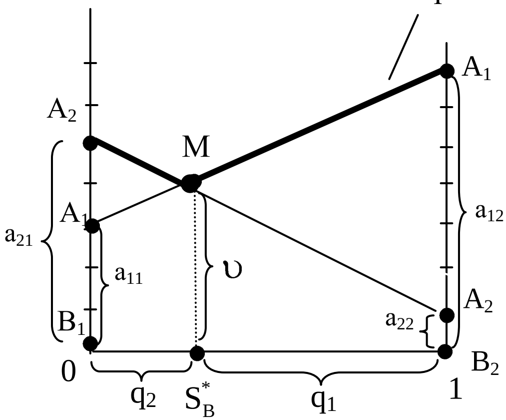
$$q_1 = (-60 - 80)/(-20 – 80-60-40) = \frac{7}{10};\ q_2 = \frac{3}{10}.$$

Выигрыш фирмы А в соответствии с ценой игры составит 10 %. Следовательно, предпочтение покупателей можно выразить как А – В = 10 %, но А + В = 100 %, тогда А = 55 %; В = 45 %. Следовательно, при таких оптимальных стратегиях изделия фирмы А будут покупать 55 % потребителей, а фирма В – 45 % потребителей.

Геометрическое решение игры

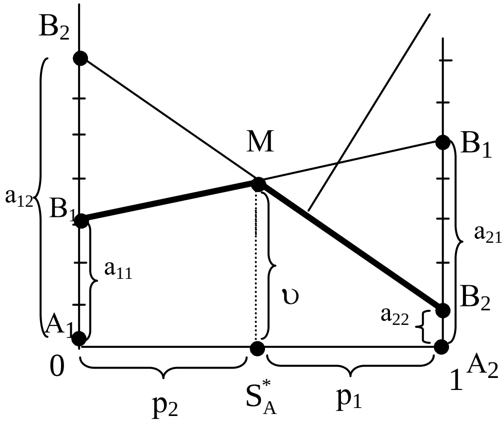
Пусть игра 2 х 2 имеет платежную матрицу (7.8). Изобразим на оси абсцисс отрезок горизонтальной линии единичной длины и обозначим концы отрезка через нуль и единицу. Из точек 0 и 1 по осям ординат восстановим перпендикулярные линии и изобразим на них выигрыши игрока А при использовании им соответственно чистых стратегий A_1 и A_2. Все промежуточные точки отрезка $(\overline{0,1})$ будут изображать смешанные стратегии:

верхняя граница игры - сколько самое меньшее проиграть игрок В.
q_1 - вероятность выбора стратегии B_1.
q_2 - вероятность выбора стратегии B_2.



При оптимальной смешанной стратегии S_A^* выигрыш игрока А будет составлять величину υ и отмечен точкой М.

Произведем аналогичные построения для игрока В:



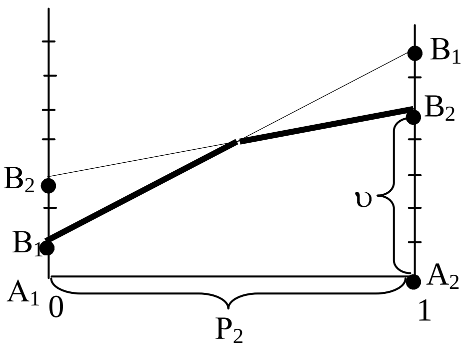
нижняя граница игры - гарантированный выигрыш первого игрока, т.е. самое лучшее, как может поступить игрок А в наихудшей для него ситуации.

υ - цена игры при максиминной стратегии игрока А.

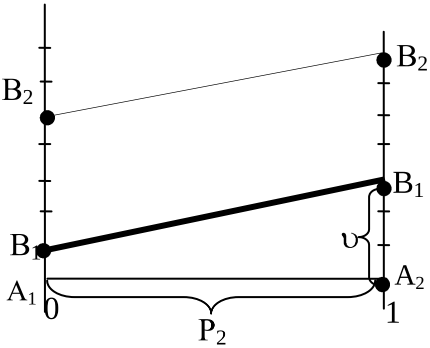
p_1 - вероятность выбора стратегии A_1.

p_2 - вероятность выбора стратегии A_2.

При графическом решении игр возможны и другие ситуации:



Максимальное из минимальных значений υ соответствует чистым стратегиям A_2 и B_2:
S_A^* = (0;1), т.е. $p_1 = 0$, $p_2 = 1$.



В этом случае стратегия B_2 – доминирующая и ее отбрасывают. Оптимальное решение игры – в чистых стратегиях $S_A^* = (0;1)$, т.е. $p_1 = 0$, $p_2 = 1$.

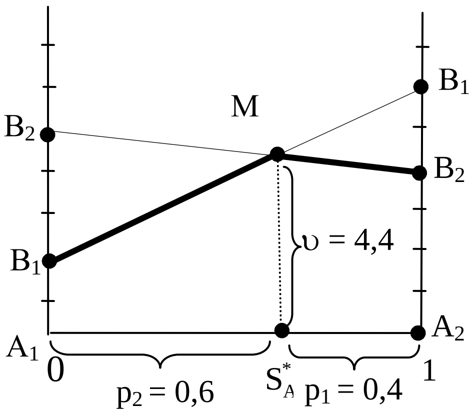
Пример. Найдем графическое и аналитическое решение игры:

	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	6	4

$\alpha = 4$, $\beta = 5$, $\alpha \neq \beta$ - следовательно, седловой точки нет.

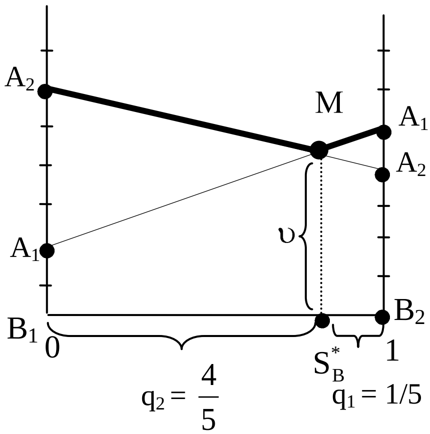
Найдем оптимальную смешанную стратегию игрока A

$$\begin{cases} 2p_1 + 6p_2 = \upsilon, \\ 5p_1 + 4p_2 = \upsilon, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$



$$2p_1 + 6p_2 - 5p_1 - 4p_2 = 0:$$
$$2p_2 - 3p_1 = 0,\ p_1 = 1 - p_2:$$
$$5p_2 = 3;\ p_2 = \frac{3}{5};\ p_1 = \frac{2}{5};$$
$$S_A^* = (p_1^*, p_2^*) = (0{,}4;\ 0{,}6);$$
$$\upsilon = 2p_1 + 6p_2 = 4{,}4.$$

Найдем оптимальную смешанную стратегию игрока В:



$$\begin{cases} 2q_1 + 5q_2 = \upsilon, \\ 6q_1 + 4q_2 = \upsilon, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

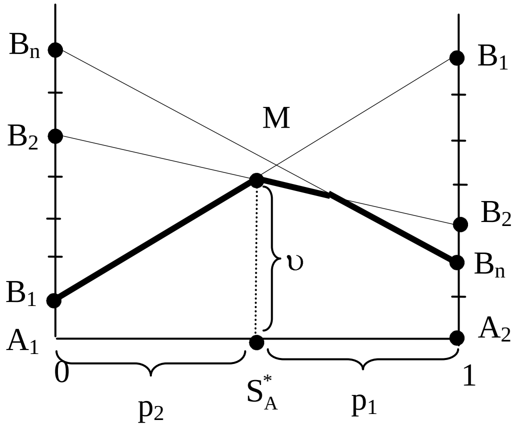
$$S_B^* = (q_1^*, q_2^*) = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5}).$$

Игры 2 x n и m x 2

Допустим, платежная матрица задана и имеет вид 2 x n:

	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}

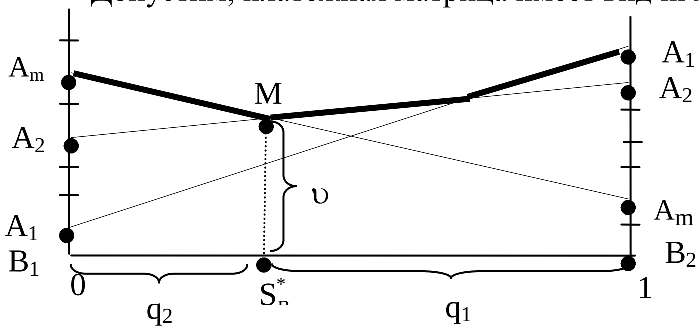
Игрок А имеет две стратегии, а игрок В – неограниченное число стратегий.



Точка максимума M находится на Пересечении стратегий B_1 и B_2, остальные отбрасываются, далее игра решается как задача 2 х 2.

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}
…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}

Допустим, платежная матрица имеет вид m х 2:



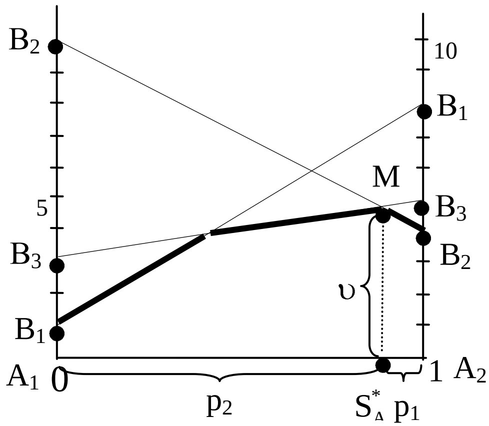
Минимум M находится на пересечении стратегий A_1 и A_m, остальные отбрасываются, далее игра решается как задача 2 х 2.

Пример. Пусть игра задана в виде платежной матрицы

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	10	3
A_2	8	4	5

Игра (2 х 3) не имеет седловой точки $\alpha = 4$, $\beta = 5$, $\alpha \neq \beta$, имеем игру в смешанных стратегиях.

Решим задачу графически и аналитически. Для игрока А: получаем игру 2 х 2, используя стратегии B_2 и B_3 игрока В:

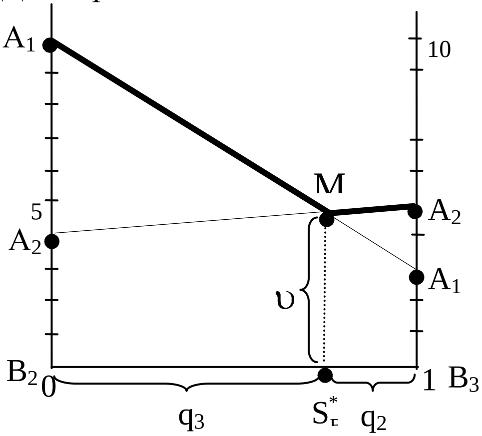


$$\begin{cases} 10p_1 + 4p_2 = \upsilon, \\ 3p_1 + 5p_2 = \upsilon, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{1}{8};\ p_2 = \frac{7}{8};\ \upsilon = \frac{19}{4};$$

$$S_A^* = (\frac{1}{8}; \frac{7}{8}).$$

Для игрока В:



$$\begin{cases} 10q_1 + 3q_3 = \upsilon, \\ 4q_2 + 5q_2 = \upsilon, \\ q_2 + q_3 = 1. \end{cases}$$

$$q_2 = \frac{1}{4};\ q_3 = \frac{3}{4};\ \upsilon = \frac{19}{4};$$

$$S_B^* = (\frac{1}{4}; \frac{3}{4}).$$

Тема 8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИГР. ИГРЫ С «ПРИРОДОЙ»

В результате изучения данной темы студенты должны:

знать:

- область применения моделей теории статистических игр в экономике;
- основные понятия теории статистических игр;
- методы решения задач теории статистических игр;

уметь:

- формулировать постановку различных задач теории статистических игр;
- находить решение задач теории статистических игр;
- давать экономическую интерпретацию полученных результатов решения задач теории статистических игр;
- применять методы теории статистических игр для решения практических задач;

владеть:

- математическим аппаратом теории статистических игр;
- практическими навыками формулирования и решения задач теории статистических игр, в том числе с помощью ЭВМ.

В рассмотренных случаях оба игрока действовали наилучшим для себя способом. Однако встречаются конфликтные ситуации, в которых одна из сторон действует неопределенно, она безразлична к выигрышу и не стремится воспользоваться промахами другой стороны. Такая игра возникает, когда у нас нет достаточной осведомленности об условиях данной операции (например, условия погоды, покупательский спрос на продукцию и т.д.). Игры такого типа, когда человек вынужден выбирать стратегию (принять решение) в условиях неопределенности, называют играми с «природой», состояние которой ему полностью не известно.

Под термином «природа» будем понимать комплекс внешних обстоятельств, при которых приходится принимать решения. Игры с «природой», т.е. когда одним из участников является человек (игрок С), а другим - «природа» (игрок П), называют также статистическими играми.

В общем виде постановка задачи теории статистических игр производится следующим образом. Пусть имеется m возможных стратегий (линий поведения) - $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_m$; условия обстановки – состояние «природы» нам точно не известно, однако о них можно сделать n предположений $П_1, П_2, \ldots, П_j, \ldots П_n$, которые являются как бы стратегиями «природы», результат игры – «выигрыш» a_{ij} - при каждом сочетании стратегий задан матрицей игры

	$П_1$	$П_2$	…	$П_j$	…	$П_n$
C_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
C_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
C_i	a_{i1}	a_{i2}…	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…
C_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Необходимо выбрать наилучшую стратегию поведения, которая по сравнению с другими наиболее выгодна.

Допустим, фирма должна определить уровень выпуска продукции и предоставления услуг на некоторый период времени, так, чтобы удовлетворить потребности клиентов. Точная величина спроса на продукцию и услуги неизвестна, но ожидается, что в зависимости от соотношения сил на рынке товаров, действий конкурентов и погодных условий спрос может принять одно из четырех возможных значений: 300, 400, 500 или 600 изделий. Маркетинговые исследования позволили определить возможные вероятности возникновения этих ситуаций, которые соответственно составили 0,2; 0,4; 0,3 и 0,1. Для каждого из возможных значений спроса существует наилучший уровень предложения с точки зрения возможных затрат и прибыли. Отклонение от этих уровней связано с риском и может привести к дополнительным затратам либо из-за превышения предложения над спросом, либо из-за неполного удовлетворения спроса. В первом случае это связано с необходимостью хранения нереализованной продукции и потерями при реализации ее по сниженным ценам, а также с транспортными расходами по доставке ее в другие регионы, где она будет пользоваться спросом. Во втором случае это связано с дополнительными затратами по оперативному выпуску недостающей продукции, поскольку иначе это будет связано с риском потери клиентов. Допустим, затраты, связанные с производством продукции равны 400 ден. ед., цена реализации – 500 ден.ед. Уценка при отсутствии спроса уменьшает прибыль на 20%, а затраты на хранение – на 4%. Дополнительные затраты на организацию сверхурочных работ сократит прибыль на 8%. Данную ситуацию можно представить в виде матрицы игры

Объем предложения (стратегия выпуска продукции), шт	Возможные колебания спроса на продукцию, шт			
	$П_1$ = 300	$П_2$ = 400	$П_3$ = 500	$П_4$ = 600
	Вероятности состояния спроса			
	q_1 = 0,2	q_2 = 0,4	q_3 = 0,3	q_4 = 0,1
	Размер прибыли (убытков) в зависимости от колебаний спроса a_{ij} , тыс. ден.ед.			
C_1 = 300	30	22	14	6
C_2 = 400	6	40	32	24
C_3 = 500	–18	16	50	42

$C_4 = 600$	– 42	–8	26	60

Из этой таблицы видно, что при обстановке $П_1$ решение C_1 в 5 раз лучше, чем C_2. Необходимо выбрать наиболее выгодную стратегию. Наибольший выигрыш в 60 тыс. ден.ед. дает стратегия C_4 при возникновении обстановки $П_4$.

В теории статистических игр вводится специальный показатель, который называется риском. Риск показывает, насколько выгодна применяемая стратегия в данной конкретной обстановке с учетом ее неопределенности. Риск рассчитывается как разность между ожидаемым результатом действий при наличии точных данных об обстановке и результатом, который может быть достигнут, если эти данные точно не известны. Например, если точно известно, что будет иметь место обстановка $П_4$, то лучшее решение – C_4, обеспечивающее выигрыш в 60 тыс. ден.ед. Поскольку точно не известно, какую обстановку ожидать, то могла быть выбрана стратегия C_1, дающая выигрыш в обстановке $П_4$ всего 6 тыс. ден.ед. При этом потеря в величине выигрыша составит 60 – 6 = 54 тыс. ден.ед. Величины риска определяются из следующего выражения:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} = \beta_j - a_{ij},$$

где a_{ij} – размер «выигрыша» при выборе i–й стратегии при j–м состоянии «природы»; β_j - максимальный «выигрыш» для j–й обстановки; r_{ij} - величина риска при выборе i–й стратегии при j–й обстановке. Составим матрицу рисков

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
C_1	0	18	34	52
C_2	24	0	18	36
C_3	48	24	0	18
C_4	72	48	14	0

Матрица рисков дает возможность непосредственно оценить качество различных решений и установить, насколько полно реализуются в них существующие возможности достижения успеха при наличии риска. Например, основываясь на матрице игры, можно прийти к выводу, что решение $С_1$ при обстановке $П_3$ равноценно решению $С_3$ при обстановке $П_2$, поскольку выигрыш в обоих случаях равен 16 тыс. ден.ед. Однако риск при этом неодинаков и составляет соответственно 34 и 24 тыс. ден.ед.

Критерии выбора стратегии

Проведем анализ стратегий производства при неопределенной рыночной конъюнктуре. Для выбора наилучшей стратегии поведения на рынке товаров и услуг существуют различные критерии, среди которых можно назвать критерии: Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица и максимакса. Нет никаких оснований считать априори один из критериев лучше, чем другие, однако вернее будет выбрать ту стратегию, которая будет предпочтительнее по нескольким критериям.

Критерий Байеса используется, если в результате исследований известны вероятности всех состояний «природы» (q_j). При этом, если учтены все из n возможных состояний, то

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

В этом случае в качестве показателя, который необходимо максимизировать, берется среднее значение выигрыша

$$B = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j.$$

Определим наилучшую стратегию по критерию Байеса:

$$30 \cdot 0{,}2 + 22 \cdot 0{,}4 + 14 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}1 = 19{,}6,$$

$$6 \cdot 0{,}2 + 40 \cdot 0{,}4 + 32 \cdot 0{,}3 + 24 \cdot 0{,}1 = 29{,}2,$$

$$-18 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}4 + 50 \cdot 0{,}3 + 42 \cdot 0{,}1 = 22{,}0,$$

$-42 \cdot 0{,}2 \; - 8 \cdot 0{,}4 \; + 26 \cdot 0{,}3 + 60 \cdot 0{,}1 = 2{,}2.$

Наилучшая стратегия C_2 дает максимальный средний «выигрыш» в размере 29,2 тыс. ден.ед.

Критерий Лапласа применяется в случае наибольшей неопределенности обстановки. При этом все n состояний «природы» принимаются равновероятными, т.е. вероятность каждого из состояний $q_j = \dfrac{1}{n}$. Согласно этому критерию «недостаточного основания» находится максимальный «средний» выигрыш.

$$L = \max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} .$$

Определим наилучшую стратегию по критерию Лапласа:

$(30 + 22 + 14 + 6)\,/4 = 18{,}0,$
$(6 + 40 + 32 + 24)\,/4 = 25{,}5,$
$(-18 + 16 + 50 + 42)\,/4 = 22{,}5,$
$(-42 - 8 + 26 + 60)\,/4 = 9{,}0.$

Наилучшая стратегия C_2 дает максимальный средний «выигрыш» в размере 25,5 тыс. ден.ед.

Критерий Вальда – это максиминный критерий крайнего пессимизма, или наибольшей осторожности, перестраховки. Такой подход характерен для того, кто очень боится проиграть и считает природу разумным, вредным и агрессивным конкурентом, назло мешающим нам достигнуть успеха. В этом случае оптимальной стратегией для игрока C будет чистая стратегия C_i, при которой наименьший «выигрыш» будет максимальным, т.е. при которой гарантируется выигрыш, в любом случае не меньший, чем нижняя цена игры с природой:

$$V = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Используя матрицу игры, определяем минимальный выигрыш для всех стратегий

$\alpha_1 = 6$; $\alpha_2 = 6$; $\alpha_3 = -18$; $\alpha_4 = -42$.

Наилучшие стратегии C_1 и C_2 дают максимальный (из минимальных) «выигрыш» в размере 6 тыс. ден.ед.

Критерий Сэвиджа сводится к тому, чтобы любыми путями избежать большого риска при принятии решения. Оптимальной будет стратегия C_i, при которой минимизируется величина максимального риска в наихудших условиях:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}.$$

Используя матрицу рисков, находим максимальные риски для всех стратегий

$$r_i = \max_j r_{ij}$$

$r_1 = 54$, $r_2 = 36$, $r_3 = 48$, $r_4 = 72$.

Наилучшая стратегия C_2 допускает минимальный риск (из максимальных) в размере 36 тыс. ден.ед.

Критерий крайнего оптимизма (максимакса) предполагает выбор стратегии, при которой из самых больших «выигрышей» для каждой стратегии выбирается наибольший. Этот критерий характерен для легкомысленного руководителя, полагающегося на «авось»:

$$M = \max_i \max_j a_{ij}.$$

Наивыгоднейшая стратегия может дать «выигрыш» в размере 60 тыс. ден.ед., но ей же соответствует и наибольший риск (72 тыс. ден.ед.).

Критерий Гурвица является линейной комбинацией пессимистической и оптимистической позиций. Стратегия выбирается из условия

$$G = \max_i \{k \cdot \min_j a_{ij} + (1 - k) \cdot \max_j a_{ij}\},$$

где k – коэффициент «пессимизма».

Коэффициент k меняется от 0 до 1, не принимая этих граничных значений ($0 < k < 1$). Коэффициент k выбирается на основании опыта или из субъективных соображений. Чем опаснее ситуация, тем менее мы склонны к риску, тем больше мы хотим подстраховаться, а значит, тем ближе к единице выбирается k. При k = 1 критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, а при k = 0 – в критерий «крайнего оптимизма». Примем k = 0,6, тогда

$$0{,}6 \cdot 6 + 0{,}4 \cdot 30 = 15{,}6,$$
$$0{,}6 \cdot 6 + 0{,}4 \cdot 40 = 19{,}6,$$
$$0{,}6 \cdot (-18) + 0{,}4 \cdot 50 = 9{,}2,$$
$$0{,}6 \cdot (-42) + 0{,}4 \cdot 60 = -1{,}2.$$

Наилучшая стратегия C_2 дает «выигрыш» в размере 19,6 тыс. ден.ед. По большинству критериев наилучшей стратегией является C_2, т.е. объем производства должен быть равен 400 изделиям.

Для автоматизации расчёта в игровых моделях возможно использование программы «Игры с Природой» из ППП PRIMA. Для этого необходимо ввести в Excel платёжную матрицу прибылей и убытков (например, в ячейки B7:E10), ввести также вероятности возможных ситуаций во внешней среде (например, в ячейки B5:E5) и коэффициент пессимизма (например, в ячейку B12).

В диалоговой форме программы *Игры с Природой* (рис. 79) указать адреса ячеек, содержащих вероятности состояний внешней среды (Природы), расположение матрицы прибылей и убытков (платёжной матрицы) и адрес ячейки с величиной коэффициента пессимизма (долей пессимизма, присущего лицу, принимающему решения).

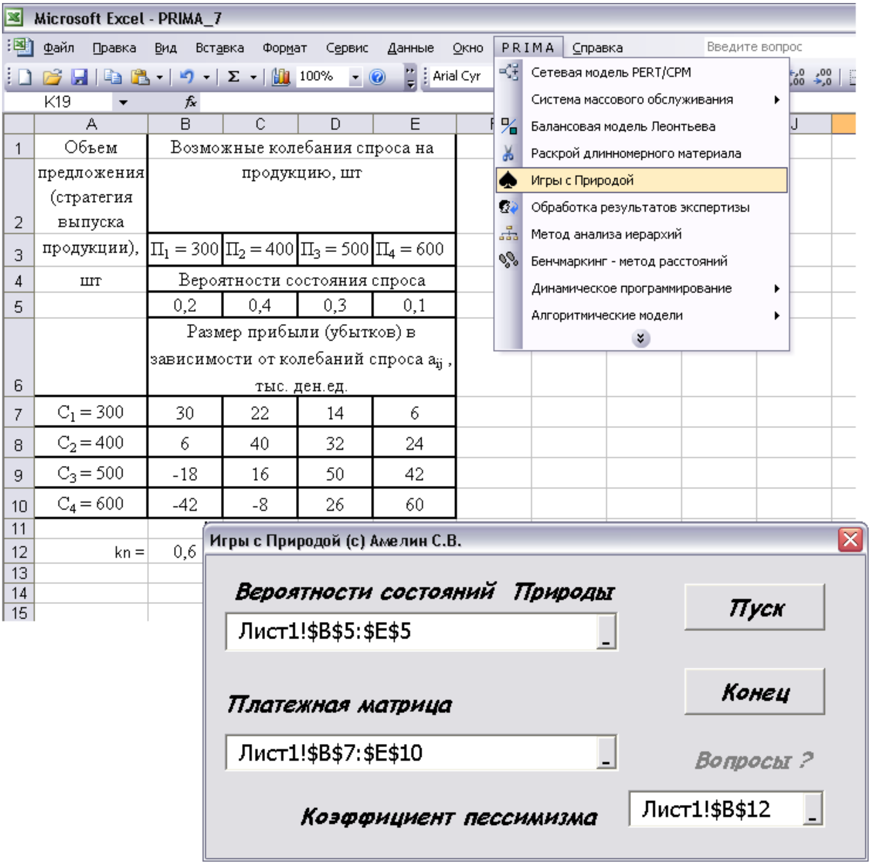


Рис. 79. Заполнение диалоговой формы Игры с Природой

Результаты расчёта и определения предпочтительных стратегий с использованием различных критериев выбора в играх с Природой представлены на рис.80.

	A	B	C	D	E	F	G
15	ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИГР - РИСКИ В ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ						
16	МАТРИЦА <<ВЫИГРЫШЕЙ>>						
17	30	22	14	6			
18	6	40	32	24			
19	-18	16	50	42			
20	-42	-8	26	60			
21							
22							
23	ПО КРИТЕРИЮ БАЙЕСА						
24	ПРИ АПРИОРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЯХ СОСТОЯНИЯ <<ПРИРОДЫ>>						
25	0,2	0,4	0,3	0,1			
26	1-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А1 = 19,6						
27	2-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А2 = 29,2						
28	3-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А3 = 22						
29	4-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А4 = 2,199999999						
30	ЛУЧШАЯ СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А2 = 29,2						

	A	B	C	D	E	F	G
33	ПО КРИТЕРИЮ ЛАПЛАСА						
34	1-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А1 = 18						
35	2-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А2 = 25,5						
36	3-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А3 = 22,5						
37	4-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А4 = 9						
38	ЛУЧШАЯ СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А2 = 25,5						
39							
40							
41	ПО КРИТЕРИЮ ВАЛЬДА						
42	1-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А1 = 5,99999999						
43	2-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А2 = 6						
44	3-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А3 = -18						
45	4-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А4 = -42						
46	ЛУЧШАЯ СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А2 = 6						

Рис. 80. Результаты расчёта в игре с Природой (начало)

	A	B	C	D	E	F	G
49	МАТРИЦА <<РИСКОВ>>						
50	0	18	36	54			
51	24	0	18	36			
52	48	24	0	18			
53	72	48	24	0			
54							
55							
56	ПО КРИТЕРИЮ СЭВИДЖА						
57	1-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А1 = 54						
58	2-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А2 = 36						
59	3-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А3 = 48						
60	4-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А4 = 72						
61	ЛУЧШАЯ СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А2 = 36						
62							
63							
64	ПО КРИТЕРИЮ ГУРВИЦА						
65	ПРИ КОЭФФИЦИЕНТЕ <<ПЕССИМИЗМА>> k = 0,6						
66	1-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А1 = 15,6						
67	2-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А2 = 19,6						
68	3-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А3 = 9,2						
69	4-Я СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А4 = -1,2						
70	ЛУЧШАЯ СТРАТЕГИЯ ДЛЯ ИГРОКА <<А>> ДАЕТ <<ВЫИГРЫШ>> А2 = 19,6						

Рис. 80. Результаты расчёта в игре с Природой (продолжение)

Вторая стратегия является наилучшей по большинству критериев.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современные сложные производственные системы являются крайне чувствительными к ошибкам в принятии управленческих решений. Интуиции, личного опыта руководителей уже не достаточно для успешного функционирования производственных систем в условиях рынка. Для принятии грамотных управленческих решений в современных условиях необходимо держать под контролем, организовывать и регулировать различные сферы деятельности производственных систем, что невозможно сделать без применения оптимизационных экономико-математических методов и моделей, так как в конкурентной борьбе побеждает тот, кто оперативно принимает более рациональные управленческие решения.

В учебном пособии представлены основные разделы экономико-математического моделирования, необходимые экономистам и менеджерам (руководителям и специалистам) для обоснования управленческих решений в сложных производственно-экономических ситуациях и проверки их на моделях процессов, протекающих в сложных организационных системах.

При изложении материала используется компьютерно-ориентированный подход с использованием математических функций и надстроек Excel, а также пакета прикладных математических программ для персональных компьютеров, разработанного Амелиным С.В., д.э.н., профессором кафедры экономики и управления на предприятии машиностроения Воронежского государственного технического университета.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Амелин С.В. Методы и модели в экономике [Текст]: учеб. пособие / С.В. Амелин. − Воронеж: «Воронеж гос. техн. ун-т», 2005. − 142 с.

2. Амелин С.В. Методы и модели в экономике [Текст]: учеб. пособие: практикум / С.В. Амелин. – Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2008. – 120 с.

3. Амелин С.В. Экономико-математические методы и модели в дипломном проектировании и выпускных квалификационных работах [Текст]: учеб. пособие / С.В. Амелин. − Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2011. − ч. 1. − 187 с.

4. Амелин С.В. Экономико-математические методы и модели в дипломном проектировании и выпускных квалификационных работах [Текст]: учеб. пособие / С.В. Амелин. − Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2012. − ч. 2. − 189 с.

5. Амелин С.В. Экономическое обоснование управленческих решений по повышению конкурентоспособности продукции [Текст] / С.В. Амелин, И.В. Щетинина. // Экономика и предпринимательство. – 2016. – № 11–4 (76–4). – С. 913–917.

6. Амелин С.В. Выбор инновационных альтернатив на основе моделирования [Текст] / С.В. Амелин. // Экономинфо. – 2016. – № 26. – С. 93–95.

7. Амелин С.В. Выбор решений о приоритетных направлениях выпуска конкурентоспособной продукции / С.В. Амелин. [Текст] // Современная экономика: проблемы и решения. – 2016. – Т. 83. – № 11. – С. 58–65.

8. Амелин С.В. Выбор рациональных решений на основе анализа конкурентоспособности продукции предприятия [Текст] / С.В. Амелин, И.В. Щетинина. // Современная экономика: проблемы и решения. – 2016. – Т. 84. – № 12. – С. 39–47.

9. Амелин С.В. Обоснование управленческих решений по повышению конкурентоспособности продукции промышленного предприятия [Текст]: монография / С.В. Амелин, И.В. Щетинина. Воронеж: ФГБОУ ВО “Воронежский государственный технический университет”, 2016. – 221 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Амелин Станислав Витальевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

В авторской редакции

Подписано к изданию 24.05.2017.

Объём данных 3,02 Мб

ФГБОУ ВО “Воронежский государственный технический университет”
394026 Воронеж, Московский просп., 14