ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра компьютерных интеллектуальных технологий
проектирования

221 - 2014

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы
по дисциплине «Математическое обеспечение САПР»
для студентов направления
230100.62 «Информатика и вычислительная техника»
(профиль «Системы автоматизированного проектирования
в машиностроении») заочной формы обучения

Воронеж 2014

Составитель ст. преп. А.А. Пак

УДК 681.3

Методические указания к выполнению контрольной работы по дисциплине «Математическое обеспечение САПР» для студентов направления 230100.62 «Информатика и вычислительная техника» (профиль «Системы автоматизированного проектирования в машиностроении») заочной формы обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А.А. Пак. Воронеж, 2014. 42 с.

В данных методических указаниях изложены вопросы для самостоятельного изучения теоретической части по основным темам курса и выполнения контрольной работы.

Предназначены для студентов 3 курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе Word и содержатся в файле «Математическое обеспечение САПР Контрольная работа.doc».

Табл.5. Ил.4. Библиогр.: 9 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.Н. Дурова

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. М.И. Чижов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Контрольная работа студентов по дисциплине «Математическое обеспечение САПР» является составляющей учебного процесса подготовки специалистов технического профиля.

Формами контрольной работы студентов является:

- проработка лекционного материала;
- подготовка к практическим занятиям,
- выполнение и оформление курсовых работ и проектов;
- подготовка к контрольным мероприятиям (коллоквиумам, контрольным работам);
- выполнение домашних заданий (подготовка рефератов, решение задач, изучение дополнительных литературных источников и статей в периодической печати и др.).

Важными принципами организации работы студентов является ее систематичность, присутствие контроля и оценка выполнения заданий по контрольной работе.

Конкретные задания по изучению учебного материала по прочитанным лекциям и в порядке подготовки к практическим занятиям студенты получают от преподавателей, которые ведут занятия. Кроме того, студентам предлагаются к проработке определенные разделы учебников, учебных пособий и других методических разработок.

Желательно, чтобы студент кратко законспектировал основные положения, самостоятельно приобрел навыки в решении задач.

Математическое обеспечение САПР изучает теоретические основы численных методов: погрешности вычислений; устойчивость и сложность алгоритма (по памяти, по времени) численные методы линейной алгебры; решение нелинейных уравнений и систем; интерполяция функций; численное интегрирование и дифференцирование; решение обыкновенных дифференциальных уравнений; методы приближения и аппроксимации функций; преобразование Фурье; равномерное приближение функций; математические программные системы.

Студенты изучат основные методы и алгоритмы вычислительной математики, связанные с моделированием технических систем, приобретают навыки приближенного решения дифференциальных уравнений, систем линейных уравнений, нелинейных уравнений; приобрести опыт обработки экспериментальных данных с помощью аппроксимации функций,

получать знания об основах математических вычислениях, реализуемых на ЭВМ; приобретают навыки приближенного решения дифференциальных уравнений, систем линейных уравнений, нелинейных уравнений.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа выполняется в тетради в клетку. Необходимо оставлять поля для замечаний рецензента.
2. На обложке тетради должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, шифр группы, название дисциплины. В начале работы указывается вариант контрольной работы. В конце работы ставится дата ее выполнения и подпись студента.
3. В работу включаются все задачи, указанные в заданиях, и строго по положенному варианту. Вариант соответствует последней цифре номера зачетной книжки.
4. Условия задач приводятся полностью. Решения излагаются подробно, объясняются все действия по ходу решения.
5. После получения проверенной работы исправляются все отмеченные рецензентом ошибки.

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САПР»

1. Особенности математических вычислений, реализуемых на ЭВМ.

Погрешности вычислений. Источники погрешностей, типы погрешностей, уменьшение погрешностей [1, 3, 6].

Приближенные числа. Действия над приближенными числами [1, 6].

1.3. Устойчивость и сложность алгоритма (по памяти, по времени). Корректность вычислительной задачи. Обусловленность вычислительной задачи. Понятие сходимости [1, 6].

2. Методы приближения и аппроксимация функций.

2.1. Понятие о приближении функций. Постановка задачи. Точечная аппроксимация. Равномерное приближение функций [2, 4, 5].

2.2. Интерполяция функций. Локальная и глобальная интерполяции. Линейная интерполяция. Квадратичная интерполяция [2, 3, 5].

2.3. Вычисление многочленов. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Остаточный член интерполяционного многочлена Лагранжа [2, 3, 6].

2.4. Интерполяционный многочлен Ньютона. Точность интерполяции [2, 3, 6].

2.5. Характер опытных данных. Подбор эмпирических формул. Определение параметров эмпирической зависимости. Метод наименьших квадратов [2, 5].

3. Численное дифференцирование.

3.1. Аппроксимация производных. Погрешность численного дифференцирования. Использование интерполяционного многочлена Ньютона [1, 2, 6].

3.2. Использование интерполяционного многочлена Лагранжа. Метод неопределенных коэффициентов [2, 3].

3.3. Улучшение аппроксимации. Метод Рунге-Ромберга. Частные производные [2].

4. Численное интегрирование.

4.1. Методы прямоугольников и трапеций [2, 4, 6].

4.2. Метод Симпсона. Адаптивные алгоритмы [2, 4, 6].

4.3. Кратные интеграла. Метод Монте-Карло [2].

5. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

5.1. Основные понятия. Постановка задач. Разностные методы [2, 4, 5].

5.2. Задача Коши. Одношаговые методы. Метод Эйлера. Метод Рунге-Кутта [2, 4, 5, 6].

5.3. Многошаговые методы. Повышение точности результатов [2, 3].

5.4. Краевые задачи. Метод стрельбы. Методы конечных разностей [2, 3, 5].

6. Численные методы линейной алгебры.

6.1. Основные понятия. Прямые методы. Метод Гаусса. Метод Гаусса с выбором главного элемента [1, 2, 4].

6.2. Определитель и обратная матрица. Метод прогонки [1, 2].

6.3. Итерационные методы. Уточнение решения. Метод Гаусса-Зейделя [2, 4].

7. Решение нелинейных уравнений и систем.

7.1. Уравнения с одним неизвестным. Метод деления отрезка пополам. Метод хорд [2, 3, 4].

7.2. Метод Ньютона. Метод простой итерации [2, 4, 6].

7.3. Системы нелинейных уравнений. Метод простой итерации. Метод Ньютона [1, 2, 6].

8. Математические программные системы.

1. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

К решению систем линейных уравнений сводятся многочисленные практические задачи. Можно с полным основанием утверждать, что решение линейных систем является одной из самых распространённых и важных задач вычислительной математики.

Запишем систему из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\vdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь a_{ij} и b_i $(i, j = \overline{1, n})$ – числовые коэффициенты, x_j – неизвестные.

Методы решения систем линейных уравнений делятся на две группы – прямые и итерационные. Прямые методы используют конечные соотношения (формулы) для вычисления неизвестных. Они дают решение после выполнения заранее известного числа операций. Итерационные методы – это методы последовательных приближений. В них необходимо задать некоторое приближённое решение – начальное приближение. После этого с помощью некоторого алгоритма проводится один цикл вычислений, называемых итерацией. В результате итерации находят новое приближение. Итерации проводятся до получения решения с требуемой точностью. Одним из самых распространенных итерационных методов является метод Гаусса-Зейделя.

Метод Гаусса–Зейделя

Достаточным условием сходимости метода Гаусса-Зейделя является

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j+1}^{n} |a_{ij}|, \quad j \neq i \qquad \text{при} \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Следующая последовательность шагов представляет метод Гаусса-Зейделя.

Шаг 1. Проверить выполнение условия $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, …, $a_{nn} \neq 0$. Если оно не выполняется, переставить уравнения так, чтобы оно выполнялось.

Шаг 2. Выразить j-ю переменную из j-го уравнения для каждого j=1,…,n . Получим

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(B_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n)$$

……………………………………………

$$x_j = \frac{1}{a_{jj}}(B_j - a_{j1}x_1 - \ldots - a_{jj-1}x_{j-1} - a_{jj+1}x_{j+1} - \ldots - a_{jn}x_n) \qquad (2)$$

……………………………………………

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(B_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... - a_{nn-1}x_{n-1}).$$

Шаг 3. Выбрать произвольным образом начальное приближение $\overline{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$.

Шаг 4. Подставить $\overline{x}^{(0)}$ в правую часть системы (2), тогда в левой её части получится первое приближение $\overline{x}^{(1)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$,

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}(B_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - ... - a_{1n}x_n^{(0)}),$$

……………………………………………

$$x_j^{(1)} = \frac{1}{a_{jj}}(B_j - a_{j1}x_1^{(0)} - ... - a_{jj-1}x_{j-1}^{(0)} - a_{jj+1}x_{j+1}^{(0)} - ... - a_{jn}x_n^{(0)})$$

……………………………………………

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}}(B_n - a_{n1}x_1^{(0)} - a_{n2}x_2^{(0)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)}).$$

Шаг 5. Вычислить δ=max| $x_j^{(0)} - x_j^{(1)}$ |, 1≤j≤n.

Шаг 6. Если δ меньше заданной точности, то $\overline{x}^{(1)}$ - приближенное решение, в противном случае подставить $\overline{x}^{(1)}$ в правую часть системы (2), тогда в левой части получим второе приближение $\overline{x}^{(2)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)})$. Снова вычислить δ=max| $x_j^{(1)} - x_j^{(2)}$ | и поступать таким образом до тех пор, пока δ станет меньше заданной точности.

Переход от k-ого приближения к (k+1)-му осуществляется по формулам

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(B_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - ... - a_{1n}x_n^{(k)}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \qquad (3)$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(B_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}),$$

а выход из цикла происходит при выполнения условия

$$\max_{1 \le j \le n} \left| x_j^{(k)} - x_j^{(k+1)} \right| < \varepsilon,$$

где ε - заданная точность приближения.

Пример. Решить с точностью 0,001 систему

$$5x_1 + 0.12x_2 + 0.09x_3 = 10,$$
$$0.08x_1 + 4x_2 - 0.15x_3 = 20,$$
$$0.18x_1 - 0.06x_2 + 3x_3 = -4.5.$$

Решение. Диагональные элементы отличны от нуля, поэтому можно применить метод Гаусса-Зейделя. Приведем систему к виду (3):

$$x_1 = 2 - 0.024x_2 - 0.018x_3$$
$$x_2 = 5 - 0.02x_1 + 0.03x_3$$
$$x_3 = -1.5 - 0.06x_1 + 0.02x_2.$$

Выберем начальное (нулевое) приближение $\overline{x}^{(0)} = (0{,}0{,}0)$ и найдем $\overline{x}^{(1)}$:

$$x_1^{(1)} = 2 - 0.024 \cdot 0 - 0.018 \cdot 0 = 2$$

$$x_2^{(1)} = 5 - 0.02 \cdot 0 + 0.03 \cdot 0 = 5$$

$$x_3^{(1)} = -1.5 - 0.06 \cdot 0 + 0.02 \cdot 0 = -1{,}5.$$

Найдем второе приближение $\bar{x}^{(2)}$:

$$x_1^{(2)} = 2 - 0.024 \cdot 5 - 0.018 \cdot (-1.5) = 1.907$$

$$x_2^{(2)} = 5 - 0.02 \cdot 2 + 0.03 \cdot (-1.5) = 4.915$$

$$x_3^{(2)} = -1.5 - 0.06 \cdot 0 + 0.02 \cdot 0 = -1.5 .$$

Найдем третье приближение $\bar{x}^{(3)}$:

$$x_1^{(3)} = 2 - 0.024 \cdot 4.915 - 0.018 \cdot (-1.52) = 1.90940$$

$$x_2^{(3)} = 5 - 0.02 \cdot 1.907 + 0.03 \cdot (-1.52) = 4.91626$$

$$x_3^{(3)} = -1.5 - 0.06 \cdot 1.907 + 0.02 \cdot 4.915 = -1.51612 .$$

Найдем четвертое приближение $\bar{x}^{(4)}$:

$$x_1^{(4)} = 2 - 0.024 \cdot 4.91626 - 0.018 \cdot (-1.51612) = 1.9092999$$

$$x_2^{(4)} = 5 - 0.02 \cdot 1.90940 + 0.03 \cdot (-1.51612) = 4.9163284$$

$$x_3^{(4)} = -1.5 - 0.06 \cdot 1.90940 + 0.02 \cdot 4.91626 = -1.5162388 .$$

Первые три знака после запятой в $\bar{x}^{(3)}$ и $\bar{x}^{(4)}$ одинаковы, поэтому приближенным решением с заданной точностью является вектор

$$\bar{x} = (1.909;\; 4.916;\; -1.516) .$$

Задание 1

Решить методом Гаусса-Зейделя систему уравнений с точностью 0.001.

Варианты

0.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= -6 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= -2. \end{aligned}$$

1.
$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14 . \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 100x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 200 \\ 6x_1 + 200x_2 - 10x_3 &= 600 \\ x_1 + 2x_2 + 100x_3 &= 500\,. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 0.4x_1 + 0.0003x_2 + 0.0008x_3 + 0.0014x_4 &= 0.122 \\ -0.0029x_1 - 0.5x_2 - 0.0018x_3 - 0.0012x_4 &= -0.2532 \\ -0.0055x_1 - 0.005x_2 - 1.4x_3 - 0.0039x_4 &= -0.9876 \\ -0.0082x_1 - 0.0076x_2 - 0.007x_3 - 2.3x_4 &= -2.0812 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 9.87x_1 + 4.25x_2 - 1.63x_3 &= 0.28 \\ 0.94x_1 - 7.31x_2 + 2.15x_3 &= 4.32 \\ 1.17x_1 + 2.56x_2 + 5.29x_3 &= 8.44\,. \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 1.7x_1 + 0.0003x_2 + 0.0004x_3 + 0.0005x_4 &= 0.681 \\ 0.8x_2 + 0.0001x_3 + 0.0002x_4 &= 0.4803 \\ -0.0003x_1 - 0.0002x_2 - 0.1x_3 &= -0.0802 \\ -0.0005x_1 - 0.0004x_2 - 0.0003x_3 - x_4 &= -1.0007 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 3x_1 + 0.0038x_2 + 0.0049x_3 + 0.0059x_4 &= 1.5136 \\ 0.0011x_1 + 2.1x_2 + 0.0032x_3 + 0.0043x_4 &= 1.4782 \\ -0.0005x_1 + 0.0005x_2 + 1.2x_3 + 0.0026x_4 &= 1.083 \\ -0.0022x_1 - 0.0011x_2 - 0.0001x_3 + 0.3x_4 &= 0.328 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 7.13x_1 + 2.87x_2 + 1.94x_3 - 0.61x_4 &= 0.32 \\ 1.34x_1 - 6.28x_2 - 0.25x_3 + 1.57x_4 &= -4.43 \\ 0.18x_1 + 2.75x_2 + 5.14x_3 - 0.96x_4 &= 2.57 \\ 1.97x_1 - 5.27x_2 - 2.72x_3 + 10.21x_4 &= 3.79 \end{aligned}$$

8. $4.3x_1 + 0.0217x_2 + 0.027x_3 + 0.0324x_4 = 2.6632$

$$0.01x_1 + 3.4x_2 + 0.0207x_3 + 0.026x_4 = 2.7779$$

$$0.0037x_1 + 0.009x_2 + 2.5x_3 + 0.197x_4 = 2.533$$

$$-0.027x_1 + 0.0027x_2 + 0.008x_3 + 1.6x_4 = 1.9285$$

9. $5.6x_1 + 0.0268x_2 + 0.0331x_3 + 0.0393x_4 = 4.0316$

$$0.0147x_1 + 4.7x_2 + 0.0271x_3 + 0.0334x_4 = 4.3135$$

$$0.0087x_1 + 0.015x_2 + 3.8x_3 + 0.274x_4 = 4.2353$$

$$0.0028x_1 + 0.009x_2 + 0.153x_3 + 2.9x_4 = 3.7969$$

2. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ МНОГОЧЛЕНОМ ЛАГРАНЖА

Постановка задачи. Пусть величина y является функцией аргумента x. Это означает, что любому значению x из области определения поставлено в соответствие значение y. Вместе с тем на практике часто неизвестна явная связь между y и x, т.е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости $y = f(x)$. В некоторых случаях даже при известной зависимости $y = f(x)$ она настолько громоздка (например, содержит трудно вычисляемые выражения, сложные интегралы и т.д.), что её использование в практических расчетах затруднительно.

Наиболее распространенным и практически важным случаем, когда вид связи между параметрами x и y неизвестен, является задание этой связи в виде некоторой таблицы $\{x_i, y_i\}$. Это означает, что дискретному множеству значений аргумента $\{x_i\}$ поставлено в соответствие множество значений функции $\{y_i\}(i = 0,1,..., n)$. Эти значения - либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике нам могут понадобиться значения величины y и в других точках, отличных от узлов x_i. Таким образом, необходимо использовать имеющиеся табличные данные для приближенного вычисления искомого параметра y при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра x, поскольку точная связь $y = f(x)$ неизвестна.

Этой цели и служит задача о приближении (аппроксимации) функций: данную функцию $f(x)$ требуется приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией $\varphi(x)$ так, чтобы отклонение (в некотором смысле) $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $\varphi(x)$ при этом называется аппроксимирующей.

Для практики весьма важен случай аппроксимации функции многочленом

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m. \qquad (4)$$

При этом коэффициенты a_j будут подбираться так, чтобы достичь наименьшего отклонения многочлена от данной функции.

Одним из основных типов аппроксимации является интерполирование. Оно состоит в следующем: для данной функции $y = f(x)$ строим многочлен (4), принимающий в заданных точках x_i те же значения y_i что и функция $f(x)$, т.е.

$$\varphi(x_i) = y_i, i = 0,1,..., n. \qquad (5)$$

При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых, т.е. $x_i \neq x_k$ при $i \neq k$. Точки x_i называются узлами интерполяции, а многочлен $\varphi(x)$ - интерполяционным многочленом.

Пусть функция $y = f(x)$ определена таблицей

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

Задачей интерполяции является построение многочлена $L_n(x)$, значения которого в узлах интерполяции $\{x_i\}$ равны соответствующим значениям заданной функции, т.е.

$L_n(x) = y_i$ (i=0,1,…,n).

Интерполяционной формулой Лагранжа называется формула, представляющая многочлен $L_n(x)$ в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x), \tag{6}$$

где $p_i(x)$ - многочлен степени n, принимающий значение, равное единице в узле x_i, и равные нулю значения в остальных узлах x_k ($i \neq k$), (i,k=0,1,…,n). Многочлен $L_n(x)$ называется интерполяционным многочленом Лагранжа. Следует отметить, что степень многочлена Лагранжа не превышает числа n. $L_n(x)$ определяется по следующей формуле

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{\substack{i=0,\\ i\neq j}}^{n} (x - x_i) / \prod_{\substack{i=0,\\ i\neq j}}^{n} (x_j - x_i). \tag{7}$$

Пример. Для функции, заданной таблицей, построить интерполяционный многочлен Лагранжа.

x_i	-1	0	1
y_i	3	2	5

Решение. Многочлен Лагранжа для трех узлов интерполирования запишется так:

$$L_3(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Применяя формулу Лагранжа, получим

$$L_3(x) = 3 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 2 \cdot \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} +$$

$$+ 5 \cdot \frac{(x-(-1))(x-0)}{(1-(-1))(1-0)}.$$

После элементарных преобразований получаем интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени $L_3(x) = 2x^2 + x + 2$.

Задание 2

Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей, построить интерполяционный многочлен Лагранжа.

Варианты

0.

x_i	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	1.4981	1.4675	1.4323	1.3931

1.

x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
y_i	1.5708	1.5738	1.5828	1.5981	1.62

2.

x_i	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	1.649	1.6858	1.7313	1.7868

3.

x_i	0.3	0.4	0.50	0.6	0.7
y_i	0.29131	0.37995	0.46212	0.53705	0.60437

4.

x_i	0.8	0.9	1.0
y_i	0.66404	0.7163	0.76159

5.

x_i	0.0	0.5	1.0	1.05	2.0
y_i	1.5708	1.5678	1.5589	1.5442	1.5238

6.

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	0.11246	0.2227	0.32863	0.42839	0.5205

7.

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	0.17469	0.35031	0.52773	0.70765	0.89054

8.

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4
y_i	1.07657	1.26548	1. 45663	1.649

9.

x_i	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80
y_i	0.912	0.897	0.881	0.864	0.846

3. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть, изучая неизвестную функциональную зависимость между y и x, в результате серии экспериментов произвели ряд измерений этих величин и получили таблицу значений

0	1	2		n
0	1	2		n

Задача состоит в том, чтобы найти приближенную зависимость

$$y = f(x), \tag{8}$$

значения которой при $x = x_i (i = \overline{0, n})$ мало отличаются от опытных данных y_i. Приближенная функциональная зависимость (8), полученная на основании экспериментальных данных, называется эмпирической формулой.

Задача построения эмпирической формулы отличается от задачи интерполирования. График эмпирической зависимости, вообще говоря, не проходит через заданные точки (x_i, y_i), как в случае интерполяции. Это приводит к тому, что экспериментальные данные в некоторой степени сглаживаются, а интерполяционная формула повторила бы все ошибки, имеющиеся в экспериментальных данных.

Построение эмпирической формулы состоит из двух этапов: подбор общего вида этой формулы и определения наилучших значений содержащихся в ней параметров.

В методе наименьших квадратов в качестве эмпирической функции выбран многочлен. Согласно этому методу за меру отклонения многочлена

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m \tag{9}$$

от данной функции $f(x)$ на множестве точек x_0, x_1, …, x_n принимают величину

$$S_m = \sum_{i=0}^{n}[Q_m(x_i) - f(x_i)]^2, \tag{10}$$

равную сумме квадратов отклонений многочлена $Q_m(x)$ от функции $f(x)$ на заданной системе точек.

Очевидно, что S_m есть функция коэффициентов c_0, c_1, …, c_m. Эти коэффициенты надо подобрать так, чтобы величина S_m была наименьшей. Полученный многочлен называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого многочлена – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования воспользуемся общим приемом дифференциального исчисления. Найдем частные производные от величины

$$S_m = \sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i)^2,$$

где $y_i = f(x_i)$ по всем переменным a_0, a_1, …, a_n. Приравнивая эти частные производные к нулю, получим для определения неизвестных a_0, a_1, …, a_m систему $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S_m}{\partial a_0} = \sum\limits_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i)1 = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S_m}{\partial a_1} = \sum\limits_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i)x_i = 0, \\ ------------------------------ \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S_m}{\partial a_m} = \sum\limits_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i)x_i^m = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Введем обозначения:

$$s_k = x_0^k + x_1^k + ... + x_n^k, \ (k = 0,1,2,...),$$

$$t_k = x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + ... + x_n^k y_n, \ (k = 0,1,2,...).$$

Преобразуя систему (11) и используя введенные обозначения, будем иметь:

$$\begin{cases} a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + ... + a_m s_m = t_0, \\ a_0 s_1 + a_1 s_2 + a_2 s_3 + ... + a_m s_{m+1} = t_1, \\ a_0 s_2 + a_1 s_3 + a_2 s_4 + ... + a_m s_{m+2} = t_2, \\ .... \\ a_0 s_m + a_1 s_{m+1} + a_2 s_{m+2} + ... + a_m s_{2m} = t_m. \end{cases} \qquad (12)$$

где $s_0 = n + 1$.

Можно доказать, что если среди точек x_0, x_1, …, x_n нет совпадающих и $m \le n$, то определитель системы (12) отличен от нуля и, следовательно, эта система имеет единственное решение $a_0 = a_0^*$, $a_1 = a_1^*$, …, $a_m = a_m^*$. Многочлен (9) с такими коэффициентами будет обладать минимальным квадратичным отклонением $S_{\min}$.

Таким образом, аппроксимирование функций представляет собой более общий процесс, чем интерполирование.

Для составления системы (11) рекомендуется схема способа наименьших квадратов, приведенная в таблице 1, где принято m=2.

Таблица 1

x^0	x	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y
1	x_0	x_0^2	x_0^3	x_0^4	y_0	$x_0\ y_0$	$x_0^2\ y_0$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	y_1	$x_1\ y_1$	$x_1^2\ y_1$
1	x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	y_2	$x_2\ y_2$	$x_2^2\ y_2$
1	x_3	x_3^2	x_3^3	x_3^4	y_3	$x_3\ y_3$	$x_3^2\ y_3$
1	x_4	x_4^2	x_4^3	x_4^4	y_4	$x_4\ y_4$	$x_4^2\ y_4$
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	t_0	t_1	t_2

Пример. Подобрать аппроксимирующий многочлен второй степени $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ для данных

x_i	0.78	1.50	2.34	3.12	3.81
y_i	2.50	1.20	1.12	2.25	4.28

Решение. Вычисления, которые нам нужно произвести, расположим по схеме (для *m*=2, *n*=4), приведенной в таблице 1.

Для данного примера получаем таблицу 2 (вычисления проводятся с тремя десятичными знаками).

Таблица 2

x^0	x	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y
1	0.78	0.608	0.475	0.370	2.50	1.950	1.520
1	1.56	2.434	3.796	5.922	1.20	1.872	2.921
1	2.34	5.476	12.813	29.982	1.12	2.621	6.133
1	3.12	9.734	30.371	94.759	2.25	7.020	21.902
1	3.81	14.516	55.306	210.717	4.28	16.307	62.128
5	11.61	32.768	102.761	341.750	11.35	29.770	94.604

Отсюда система для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2:

$$\begin{cases} 5a_0 + 11.61a_1 + 32.768a_2 = 11.350, \\ 11.61a_0 + 32.768a_1 + 102.761a_2 = 29.770, \\ 32.768a_0 + 102.761a_1 + 341.750a_2 = 94.604 \end{cases} \qquad (13)$$

Решив систему (13), получим $a_0 = 5.045$, $a_1 = -4.043$, $a_2 = 1.000$. Следовательно, искомый многочлен есть

$$y = 5.045 - 4.043x + 1.009x^2 \qquad (14)$$

Сравним исходные значения для y с соответствующими значениями $\overline{y}$, полученными из приближенной формулы (14). Соответствующие результаты приведены в таблице 3.

Таблица 3

x	y	$\overline{y}$	$\overline{y} - y$
0.78	2.50	2.505	0.005
1.56	1.20	1.194	0.006
2.34	1.12	1,110	0.010
3.12	2.25	2.252	0.002
3.81	4.28	4.288	0.008

Задание 3

Подобрать аппроксимирующий многочлен второй степени $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ для функции из задания 2.

4. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

<u>Постановка задачи.</u> Вычисление корней уравнения - одна из важнейших математических задач. Сравнительно редко удаётся найти точные значения корней. Поэтому важное значение приобретают способы приближённого нахождения корней уравнения и оценка степени их точности.

Пусть дано уравнение с одним неизвестным вида

$$f(x) = 0, \qquad (15)$$

где $f(x)$ - непрерывная функция переменной x. Требуется найти корень этого уравнения. Представить решение этого уравнения в виде конечной формулы оказывается невозможным, поэтому мы откажемся от поиска точного значения корней и займёмся их приближённым вычислением с заданной точностью.

Основные этапы решения. Решение задачи отыскания корней осуществляется в два этапа. Первый этап называется этапом отделения (локализации) корней, второй - итерационного уточнения корней.

Известно, что если функция $f(x)$ непрерывна и принимает на концах отрезка $[a,b]$ значения разных знаков, т.е. $f(a)f(b)<0$, то внутри этого промежутка имеется хотя бы один корень уравнения.

Геометрически это означает, что график непрерывной функции, расположенной по разные стороны оси OX, пересекает эту ось, по меньшей мере, в одной точке.

Отрезок $[a,b]$, содержащий только один корень уравнения $f(x)$, называется отрезком локализации корня. Цель этапа локализации считается достигнутой, если для каждых подлежащих определению корней удалось указать отрезок локализации.

К сожалению, универсальный метод локализации не представляется возможным. В простых ситуациях хороший результат может давать графический метод. Часто применяется построение таблиц значений функций вида $y_i= f(x_i)$, i=1,2,… и при этом о наличии корня на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, судят по перемене знака функции на концах отрезка.

Пример 1. Локализуем корни уравнения

$$4-2x^2-e^x=0.$$

Для этого преобразуем уравнение к виду $4-2x^2= e^x$ и построим графики функций $y=4-2x^2$ и $y=e^x$. Абсциссы точек пересечения этих графиков являются корнями данного уравнения. Из графика, изображенного на рис. 1, видно, что уравнение имеет два коня, расположенные на отрезках [-2,-1] и [0,1].

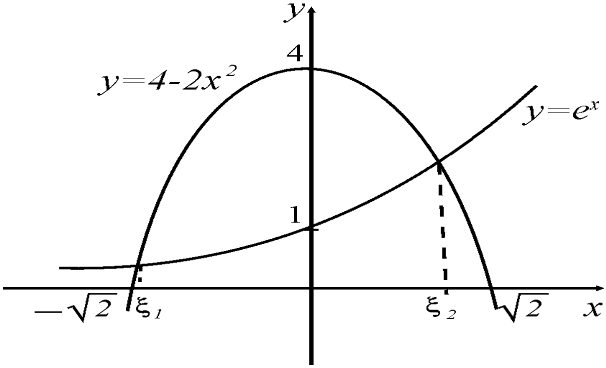

Рис. 1

Пример 2. Локализуем корни уравнения

$$x^3 - 1.1x^2 - 2.2x + 1.8 = 0.$$

Для этого составим таблицу значений функции $F(x) = x^3 - 1.1x^2 - 2.2x + 1.8$ на отрезке [-2,2] с шагом 0.4.

x_i	-2	-1.6	-1.2	-0.8	-0.4	0
y_i	-6.2	-1.592	1.128	2.344	2.44	1.8

x_i	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
y_i	0.808	-0.152	-0.696	-0.44	1

Из таблицы видно, что функция f меняет знак на концах отрезков [-1.6, -1.2], [0.4, 0.8], [1.6, 2.0]. Поэтому каждый из этих отрезков содержит, по крайней мере, один корень. Учитывая, что $f(x)$ - многочлен третьей степени, который не может иметь более трех корней, то задача локализации решена.

После локализации корней производится итерационное уточнение каждого корня одним из методов. Рассмотрим метод половинного деления.

<u>Метод половинного деления</u>. Пусть дано уравнение (15), причем функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)f(b)<0$. Для вы-

числения корня уравнения (15), принадлежащего отрезку [a,b], найдем середину этого отрезка $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$. Если $f(x_0) \neq 0$, то для продолжения вычислений выберем ту из частей данного отрезка [a, x_0] или [x_0, b], на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Концы нового отрезка обозначим через a_1 и b_1.

Новый отрезок [a_1, b_1] снова делим пополам и проводим те же рассуждения и т. д. В результате получаем на каком-то этапе или точный корень уравнения (15), или же бесконечную последовательность вложенных отрезков [a, b], [a_1, b_1],…, [a_n, b_n], таких что

$$f(a_n)f(b_n)>0 \quad (n=1,2,\ldots), \tag{16}$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a) \tag{17}$$

Число ξ - общий предел последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - является корнем уравнения $f(x)=0$.

Оценку погрешности на n-ом шаге вычислений можно получить из соотношения (17) в виде

$$0 \le b_n - a_n \le \frac{1}{2^n}(b-a). \tag{18}$$

Здесь $a_n \approx \xi$ с точностью ε, не превышающей $\dfrac{1}{2^n}(b-a)$.

Если требуется найти корень уравнения с точностью ε, то деление пополам продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε. Тогда координата середины отрезка и есть значение корня с требуемой точностью.

Метод деления пополам сходится для любых непрерывных функций, устойчив к ошибкам округления и легко реализуется на ЭВМ.

Задание 4

Отделить корни уравнения и найти их с точностью ε=0,01 методом деления пополам. Сделать чертеж.

0. $4x = 2^x$ **1.** $x^3 + 2x - 8 = 0$ **2.** $x^3 - 5x + 1 = 0$

3. $(x+1)^3 - x = 0$ **4.** $x + \sin x - 1 = 0$ **5.** $x^2 = \cos x$

6. $x = 2 - \ln x$ **7.** $x^2 = e^x + 2$ **8.** $x^3 + 2x + 1 = 0$

9. $x^3 - 2x - 5 = 0$

5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Постановка задачи. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $y = f(x)$. С помощью точек x_0, x_1, …, x_n разобьем отрезок $[a,b]$ на n отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1,n}$), причем $x_0 = a$, $x_n = b$. На каждом их этих отрезков выберем произвольную ξ_i $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ и найдем произведение (S_i) значения функции в этой точке $f(\xi_i)$ на длину отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$:

$$S_i = f(\xi_i)\Delta x_i \tag{19}$$

Составим сумму всех таких произведений:

$$S_n = S_1 + S_2 + ... + S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{20}$$

Сумма S_n называется интегральной суммой. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа точек разбиения; при этом длина наибольшего из отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (21)$$

<u>Теорема существования определенного интеграла</u>. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$, ни от выбора точек ξ_i.

Геометрический смысл введенных понятий для случая $f(x)>0$ проиллюстрирован на рис. 2.

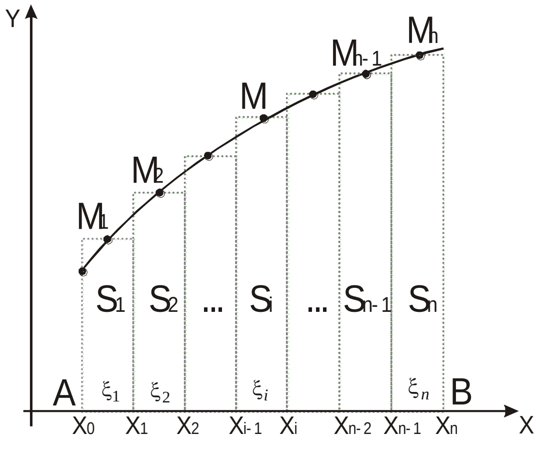

Рис. 2

Абсциссами точек M_i являются значения ξ_i, ординатами – значения $f(\xi_i)$. Выражения (19) при $i=1,2,...,n$ описывают площади элементарных прямоугольников (штриховые линии), интегральная сумма (20) - площадь ступенчатой фигуры, образуемой этими прямоугольниками. При неограниченном увеличении числа точек деления и стремлении к нулю всех Δx_i верхняя граница фигуры (ломаная) переходит в линию $y = f(x)$. Площадь полученной фигуры, которую называют криволинейной трапецией, равна определенному интегралу (21).

Во многих случаях, когда подынтегральная функция задана в аналитическом виде, определенный интеграл удается вычислить непосредственно с помощью неопределенного интеграла (вернее, первообразной) по формуле Ньютона-Лейбница. Она состоит в том, что определенный интеграл равен приращению первообразной $F(x)$ на отрезке интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (22)$$

Однако на практике этой формулой часто нельзя воспользоваться по двум основным причинам:

1) вид функции $f(x)$ не допускает непосредственного интегрирования, т.е. первообразную нельзя выразить в элементарных функциях;

2) значения функции $f(x)$ заданы только на фиксированном конечном множестве точек x_i, т.е. функция задана в виде таблицы.

В этих случаях используют методы численного интегрирования. Они основаны на аппроксимации подынтегральной функции некоторыми более простыми выражениями, например, многочленами.

Методы прямоугольников и трапеций

Простейшим методом численного интегрирования является <u>метод прямоугольников</u>. Он непосредственно использует замену определенного интеграла интегральной сумой (20). В качестве точек ξ_i могут выбираться левые ($\xi_i = x_{i-1}$) или правые ($\xi_i = x_i$) границы отрезков. Обозначая $f(x_i) = y_i$, $\Delta x_i = h_i$, получаем следующие формулы метода прямоугольников соответственно для этих двух случаев:

$$\int_a^b f(x)dx = h_1 y_0 + h_2 y_1 + ... + h_n y_{n-1}, \tag{23}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h_1 y_1 + h_2 y_2 + ... + h_n y_n \tag{24}$$

Более точным является вид формулы прямоугольников, использующий значения функции в средних точках отрезков (в полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} h_i f(x_{i-1/2}), \tag{25}$$

$$x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2 = x_{i-1} + \frac{h_i}{2} \ , i = 1,2,..., n.$$

В дальнейшем под методом прямоугольников будем понимать последний алгоритм (он еще называется методом средних).

<u>Метод трапеций</u> использует линейную интерполяцию, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i). В этом случае площадь всей фигуры (криволинейной трапеции) складывается из площадей прямолинейных трапеций (рис. 3).

Площадь каждой такой трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h_i, \ i = 1,2,..., n.$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i (y_{i-1} + y_i). \tag{26}$$

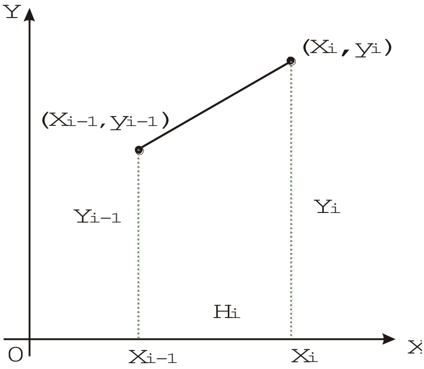

Рис. 3

Важным частным случаем этих формул является их применение при численном интегрировании с постоянным шагом $h_i = h = const$ $(i = 1,2,3)$. Формулы прямоугольников и трапеций в этом случае принимают соответственно вид:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2}), \tag{27}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i)\,. \tag{28}$$

Метод Симпсона

Разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на четное число n равных частей с шагом h. На каждом отрезке $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$ $\ldots$,$[x_{i-1}, x_{i+1}]$, …, $[x_{n-2}, x_n]$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменим интерполяционным многочленом второй степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i,$$
$$x_{i-1} \le x \le x_{i+1}.$$

Коэффициенты этих квадратных трехчленов могут быть найдены из условий равенства многочлена в точках x_i соответствующим табличным данным y_i. В качестве $\varphi_i(x)$ можно принять интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через точки $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$:

$$\varphi_i(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} y_{i-1} + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} y_i +$$

$$+ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} y_{i+1}.$$

Элементарная площадь S_i (рис. 4) может быть вычислена с помощью определенного интеграла.

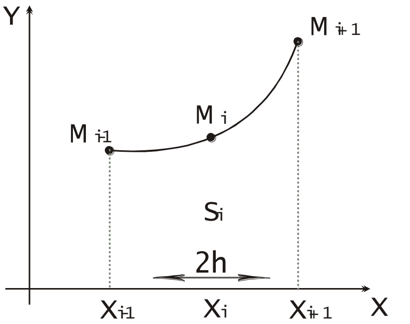

Рис. 4

Учитывая равенства $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$, получаем

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx = \frac{1}{2h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [(x-x_i)(x-x_{i+1})y_{i-1} - 2(x-x_{i-1}) \times$$

$$\times (x-x_{i+1})y_i + (x-x_{i-1})(x-x_i)y_{i+1}]dx = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}).$$

Проведя такие вычисления для каждого отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, просуммируем полученные выражения:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Данное выражение для S принимается в качестве значения определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) +$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}) + y_n] \quad (29)$$

Полученное соотношение (29) называется формулой Симпсона.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ методами прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Решение. Используем для вычисления интеграла формулы прямоугольников и трапеций. Для этого разобьем отрезок интегрирования [0,1] на десять равных частей: n=10, h=0.1. Вычислим значения подынтегральной функции $y_i = 1/(1 + x_i^2)$ в точках разбиения $x_i = x_{i-1} + h$, а также в полуцелых точках $x_{i-1/2} = x_{i-1} + h/2$, $(i = \overline{1,10})$. Результаты вычислений занесем в таблицу 4.

Таблица 4

x_i	y_i	$x_{i-1/2}$	$y_{i-1/2}$
0.0	1.000000	-	-
0.1	0.990099	0.05	0.997506
0.2	0.961538	0.15	0.977995
0.3	0.917431	0.25	0.941176
0.4	0.862069	0.35	0.890868
0.5	0.800000	0.45	0.831601
0.6	0.735294	0.55	0.767754
0.7	0.671141	0.65	0.702988
0.8	0.609756	0.75	0.640000
0.9	0.552486	0.85	0.580552
1.0	0.500000	0.95	0.525624

По формуле прямоугольников (27) получим $I_1 = h\sum_{i=1}^{10} y_{i-1/2} = 0.1\cdot(0.997506 + \ldots + 0.525624) = 0.785606$.

Вычислить значение интеграла по методу Симпсона. Значения функции при n=10, h=0.1 приведены в таблице 1. Применяя формулу (29), находим:

$$I = \frac{0.1}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + y_{10}) =$$
$$= \ldots = 0.785398\ .$$

Задание 5

Вычислить интеграл методами прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Варианты

0. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

1. $\int_0^2 \frac{x^3dx}{x^2+4}$.

2. $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

3. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$.

4. $\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$.

5. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$.

6. $\int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx$.

7. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$.

8. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

9. $\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}dx$.

6. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Общие сведения. Требуется найти функцию $Y = Y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dY}{dx} = f(x,Y) \tag{30}$$

и принимающую при $x=x_0$ заданное значение Y_0:

$$Y(x_0) = Y_0, \tag{31}$$

При этом будем для определенности считать, что решение надо получить при $x > x_0$.

Из курса дифференциальных уравнений известно, что решение $Y(x)$ задачи (30)-(31) существует, единственно и является гладкой функцией, если правая часть $f(x,Y)$ уравнения (30), являющаяся функцией двух переменных x, Y, удовлетворяет некоторым условиям гладкости. Будем считать, что эти условия выполнены и существует единственное гладкое решение $Y(x)$.

Численное решение задачи Коши (30)-(31) состоит в том, чтобы получить искомое решение $Y = Y(x)$ в виде таблицы его приближенных значений для заданных значений аргумента x на некотором отрезке $[a,b]$:

$$x_0 = a, \quad x_1, \quad x_2,..., \quad x_m = b.$$

Для решения задачи Коши (30)-(31) будем использовать разностные методы. Введем последовательность точек $x_0, x_1,...,$ и шаги $h_i = x_{i+1} - x_i (i = 0,1,...)$. Точки x_i называют узлами, а множество этих точек называют сеткой. В каждой точке x_i вместо значений функции $Y(x_i)$ вводятся числа y_i, аппроксимирующие точное решение Y на данном множестве точек. Функцию Y, заданную в виде таблицы $\{x_i, y_i\}(i = 0,1,....)$, называют сеточной функцией.

Далее, заменяя значение производной в уравнении (30) отношением конечных разностей, осуществляем переход от дифференциальной задачи (30), (31) относительно функции *y*:

$$y_{i+1} = F(x_i, h_i, y_{i+1}, y_i, ..., y_{i-k+1}), i = 1,2,.... \qquad (32)$$

$$y_0 = Y_0. \qquad (33)$$

Здесь разностное уравнение (32) записано в общем виде, а конкретное выражение его правой части зависит от способа аппроксимации производной. Для каждого численного метода получается свой вид уравнения (32).

<u>Одношаговые методы.</u> Простейшим численным методом решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения является метод Эйлера. Он основан на разложении искомой функции *Y(x)* в ряд Тейлора в окрестностях узлов $x = x_i (i = 0,1,...)$, в котором отбрасываются все члены, содержащие производные второго и более высокого порядков. Запишем это разложение в виде

$$Y(x_i + \Delta x_i) = Y(x_i) + Y'(x_i)\Delta x_i + O(\Delta x_i^2). \qquad (34)$$

Заменим значения функции *Y* в узлах x_i значениями сеточной функции y_i. Кроме того, используя уравнение (30), полагаем

$$Y'(x_i) = f(x_i, Y(x_i)) = f(x_i, y_i).$$

Будем считать для простоты узлы равноотстоящими, т.е. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const (i = 0,1,...)$. Учитывая введенные обозначения и пренебрегая членами порядка $O(h^2)$, из равенства (34) получаем

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), i = 0,1.... \qquad (35)$$

Полагая i=0, с помощью соотношения (35) находим значение сеточной функции y_1 при x=x_1:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Требуемое здесь значение y_0 задано начальным условием (31), т.е. $y_0 = Y(x_0) = Y_0$. Аналогично могут быть найдены значения сеточной функции в других узлах:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ .$$

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Построенный алгоритм называется методом Эйлера. Разностная схема этого алгоритма представлена соотношениями (35). Они имеют вид рекуррентных формул, с помощью которых значение сеточной функции y_{i+1} в узле x_{i+1} вычисляется по её значению y_i в предыдущем узле x_i.

Рассмотрим вопрос о погрешности метода Эйлера. Погрешность e_i в точке x_i равна разности между значением сеточной функции y_i и точным значением искомой функции $Y(x_i): e_i = y_i - Y(x_i)$. Эта погрешность состоит из двух частей: $e_i = e_i' + e_i''$. e_i' определяется погрешностью начального значения $e_0 = y_0 - Y(x_0)$. Как правило, начальное значение задается точно, т.е. $y_0 = Y(x_0)$, и тогда $e_0 = 0$ и, следовательно, равна нулю та часть погрешности решения e_i', которая связана с e_0. Погрешность e_i'' обусловлена отброшенными членами в разложении в ряд Тейлора (34). На каждом шаге эта погрешность имеет порядок $O(h^2)$, так как именно члены такого порядка отброшены в (34).

Пример. Найти решение задачи Коши $\dfrac{dY}{dx} = x + Y, \quad Y(0) = 1$ методом Эйлера на отрезке [0; 0.4] с шагом h=0.1.

Решение. Здесь $f(x, y) = x + y$, $a = 0$, $b = 0.4$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Используя рекуррентные формулы

$$y_i = y_{i-1} + 0.1(x_{i-1} + y_{i-1}) \quad (i = 1,2,3,4),$$

последовательно находим

при $i = 1$: $x_1 = 0.1$; $y_1 = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$;

при $i = 2$: $x_2 = 0.2$; $y_2 = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22$;

при $i = 3$: $x_3 = 0.3$; $y_3 = 1.22 + 0.1(0.2 + 1.22) = 1.362$;

при $i = 4$: $x_4 = 0.4$; $y_4 = 1.362 + 0.1(0.3 + 1.362) = 1.5282$.

Решение задачи Коши представлено в таблице

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4
y_i	1.1	1.22	1.362	1.5282

Существуют и другие явные одношаговые методы. Наиболее распространенным из них является метод Рунге–Кутта. На его основе могут быть построены разностные схемы разного порядка точности. Приведем схему Рунге–Кутта четвертого порядка. Вычисление приближенного значения y_{i+1} в точке $x_{i+1} = x_i + h$ производится по следующим формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i),$$

$$k_1^i = hf(x_i, y_i), \qquad k_2^i = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}\right), \tag{36}$$

$$k_3^i = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^i}{2}\right), \qquad k_4^i = hf(x_i + h, y_i + k_3^i).$$

Таким образом, метод Рунге–Кутта требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения $f(x, y)$.

Все вычисления удобно производить по следующей схеме.

i	x_i	y_i	$k^i = hf(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	k_1^0	k_1^0
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^0}{2}$	k_2^0	$2k_2^0$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^0}{2}$	k_3^0	$2k_3^0$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^0$	k_4^0	k_4^0
				Δy_1
1	x_1	y_1	$\ldots$	$\ldots$

Порядок заполнения таблицы.

1. Записать в первой строке таблицы данные значения x_0, y_0.

2. Вычислить $hf(x_0, y_0)$ и записать в таблицу в качестве k_1^0.

3. Во второй строке таблицы записать $x_0 + \frac{h}{2}$, $y_0 + \frac{k_1^0}{2}$.

4. Вычислить $hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^0}{2})$ и записать в таблицу в качестве k_2^0.

5. В третьей строке таблицы записать $x_0 + \frac{h}{2}$, $y_0 + \frac{k_2^0}{2}$.

6. Вычислить $hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^0}{2})$ и записать в таблицу в качестве k_3^0.

7. В четвертую строку таблицы записать $x_0 + h$, $y_0 + k_3^0$.

8. Вычислить $hf(x_0 + h, y_0 + k_3^0)$ и записать в таблицу в качестве k_4^0.

9. В столбец Δy записать числа k_1^0, $2k_2^0$, $2k_3^0$, k_4^0, просуммировать эти числа, полученную сумму разделить на 6 и записать в таблицу в качестве Δy_1.

10. Вычислить $y_1 = y_0 + \Delta y_1$. Затем все вычисления продолжаем в том же порядке, принимая за начальную точку (x_1, y_1). Результаты вычислений записать в следующий блок таблицы.

Метод Эйлера может рассматриваться как метод Рунге–Кутта первого порядка. Метод Рунге–Кутта (36) требует большего объема вычислений, однако окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге–Кутта.

Пример. Методом Рунге – Кутта найти решение задачи Коши $\dfrac{dY}{dX} = x + Y, Y(0) = 1$ на отрезке $[0;0.4]$, приняв шаг h=0.1.

Решение. Покажем начало процесса.

Вычисление y_1. Последовательно имеем

$$k_1^0 = (0+1)\cdot 0.1 = 0.1; \quad k_2^0 = 0.05 + (1+0.05)\cdot 0.1 = 0.11;$$

$$k_3^0 = 0.05 + (1+0.055)\cdot 0.1 = 0.1105;$$

$$k_4^0 = 0.1 + (1+0.1105)\cdot 0.1 = 0.12105.$$

Отсюда $\Delta y_0 = \dfrac{1}{6}(0.1 + 2\cdot 0.11 + 2\cdot 0.1105 + 0.12105) = 0.1103$ и, следовательно, $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0.1103 = 1.1103$.

Аналогично вычисляются дальнейшие приближения. Результаты вычислений приведены в таблице 5.

Таблица 5

i	x	y	$k = 0.1(x+y)$	Δy
0	0 0.05 0.05 0.1	1 1.05 1.055 1.1105	0.1 0.11 0.1105 0.1210	0.1000 0.2200 0.2210 0.1210
				$\frac{1}{6}\cdot 0.6620 = 0.1103$
1	0.1 0.15 0.15 0.2	1.1103 1.1708 1.1763 1.2429	0.1210 0.1321 0.1326 0.1443	0.1210 0.2642 0.2652 0.1443
				$\frac{1}{6}\cdot 0.7947 = 0.1324$
2	0.2 0.25 0.25 0.3	1.2427 1.3149 0.3209 1.3998	0.1443 0.1565 0.1571 0.1700	0.1443 0.3130 0.3142 0.1700
				$\frac{1}{6}\cdot 0.9415 = 0.1569$
3	0.3 0.35 0.35 0.3	1.3996 1.4846 1.4904 1.5836	0.17 0.1835 0.1840 0.1984	0.1700 0.3670 0.3680 0.1984
				$\frac{1}{6}\cdot 1.1034 = 0.1840$
4	0.4	1.5836		

Решение задачи Коши представлено в таблице

	0.1	0.2	0.3	0.4
y_i	1.1103	1.2427	1.3996	1.5836

Задание 6

Найти решение задачи Коши методом Эйлера на отрезке $[a; b]$ с шагом h

Вариант	Задача Коши	$[a; b]$	h
0	$\frac{dY}{dx} = 2(x^2 + Y), Y(0) = 1$	[0; 1]	0.1
1	$\frac{dY}{dx} = \frac{1}{Y} + x, Y(0) = 1$	[0; 1]	0.2
2	$\frac{dY}{dx} = x - Y, Y(0) = 1$	[0; 1]	0.2
3	$\frac{dY}{dx} = x^2 + Y, Y(0) = 0.3$	[0; 1]	0.2
4	$\frac{dY}{dx} = x^2 - Y^2, Y(-1) = 0$	[-1; 0]	0.2
5	$\frac{dY}{dx} = \frac{xY}{2}, Y(0) = 1$	[0; 1]	0.1
6	$\frac{dY}{dx} = Y - \frac{2x}{Y}, Y(0) = 1$	[0; 1]	0.2
7	$\frac{dY}{dx} = x^2 + 2Y, Y(0) = 0$	[0; 1]	0.1
8	$\frac{dY}{dx} = \frac{xY}{3}, Y(0) = 1$	[0; 1]	0.2
9	$\frac{dY}{dx} = \frac{2}{Y} + 3x, Y(0) = 1$	[0; 1]	0.2

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Омельченко В.П. Математика: учеб.пособие / В.П. Омелченко, Э.В. Курбатова.- Ростов н/Д: Феникс, 2008.- 380с.
2. Пантина И.В. вычислительная математика / И.В.Пантина,А.В.Синчуков.-М.:Маркет ДС, 2010.- 176с.
3. Амосов А.А., Вычислительные методы для инженеров / А.А.Амосов, Ю.А.Дубинский, Н.В. Копченова.- М.: Высш. шк.,1994.- 544 с.
4. Турчак Л.И. Основы численных методов / Л.И. Турчак. - М.: Наука, 1987. – 320 с.
5. Демидович Б.Н.,Основы вычислительной математики / Б.Н.Демидович, И.А. Марон.- М.: Высш. шк., 1994. - 172 с.
6. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование / Ю.П. Боглаев.- М.: Высш. шк., 1990. - 544 с.
7. Семенов М.П., Катрахова А.А. Жучкова В.В. Основы численных методов / М.П.Семенов, А.А.Катрахова, В.В.Жучкова.- Воронеж: Изд-во ВГТУ, 1997. - 62 с.
8. Ушаков Д.М.Введение в математические основы САПР / Д.М. Ушаков, В.П.Корячко, И.П.Норенков.-
9. Федорков Е.Д.Численные методы : учеб. пособие / Е. Д. Федорков, А. И. Бобров. - Воронеж: ВГТУ, 2004. - 164 с. - 33-00.
10. Федорков, Е.Д. Вычислительная математика: учеб.пособие / Е. Д. Федорков, А. И. Бобров. - Воронеж: ГОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2006. - 168 с. - 35-00.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы
по дисциплине «Математическое обеспечение САПР»
для студентов направления
230100.62 «Информатика и вычислительная техника» (профиль
«Системы автоматизированного проектирования
в машиностроении» заочной формы обучения

Составитель
Пак Алла Анатольевна

В авторской редакции

Компьютерный набор А.А. Пак

Подписано к изданию. 25.09.2014.
Уч.-изд. л. 2,6. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический
университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14