

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический
университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА
(Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования)

А.А. Катрахова Е.М. Васильев В.С. Купцов
А.В. Купцов

**РЯДЫ ФУРЬЕ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И
ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ**

Учебное пособие

Фурье. doc 3,7 Mb 14.05.2014 10,2 уч.-изд. л.

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»

А.А. Катрахова Е.М. Васильев В.С. Купцов
А.В. Купцов

**РЯДЫ ФУРЬЕ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И
ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ**

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2014

УДК 517.53

Катрахова А.А. Ряды Фурье и их применение в решении задач математической физики и обработки информации : учеб. пособие / А.А. Катрахова, Е.М.Васильев, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж: ГОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2014 -216 с.

Учебное пособие состоит из одиннадцати глав, в нем излагается теоретический материал, а образцы решения задач и упражнения в виде примеров и задач.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлениям 220400 «Управление в технических системах», 140400 «Электроэнергетика и электротехника», 110800 «Агроинженерия» (все профили бакалаврской подготовки), дисциплинам «Теория автоматического управления», «Системы автоматического управления электроприводами», «Математика».

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения.

Учебное пособие подготовлено в электронном виде в текстовом редакторе MS Word и содержится в файле «Фурье. doc»

Табл. 1. Ил. 56. Библиогр.: 9 назв.

Рецензенты: кафедра дифференциальных уравнений
Воронежского государственного университета
(зав. кафедрой д-р физ.- мат. наук, проф. А.И. Шашкин);
д-р техн. наук, проф. Н.Д. Вервейко

© Катрахова А.А., Васильев Е.М., Купцов В.С.,
Купцов А.В 2014

© Оформление. ФГБОУ ВПО «Воронежский
государственный технический университет», 2014

ВВЕДЕНИЕ

Теория рядов, как и всякая математическая теория, имеет свой аналитический аппарат, состоящий из теорем, различных приемов преобразования формул, методов доказательств равенств и неравенств, вычислений пределов, подсчетов конечных сумм и т.д. Этот аппарат составляет существенную часть курса теории рядов, и его освоение требует основательного изучения (и в том числе запоминания) довольно большого числа утверждений и формул, а также практических навыков, приобретаемых в ходе решения задач. Поэтому теория рядов в принципе мало чем отличается от тех частей математического анализа, которые составляли предмет предыдущих разделов курса высшей математики: дифференциального и интегрального исчислений. Ряды при своем изучении доставляют трудности еще и другого характера, связанные с необычностью самого объекта изучения, каковым является ряд. Дело в том, что ряд по видимости является “суммой бесконечного числа слагаемых”.

Разделы пособия посвящены изучению рядов Фурье и обобщению на случай разложения непериодических функций с помощью интегральных преобразований.

Рассмотрены теоретические основы непрерывного и дискретного преобразований, алгоритмы их численной реализации и даны примеры, иллюстрирующие применение интегральных преобразований Фурье для решения задач обработки информации.

1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

1.1. Периодические функции

Функция $f(x)$ называется периодической, если существует постоянное число $T > 0$, для которого

$$f(x+T)=f(x); \quad (1.1)$$

каково бы ни было x из области задания этой функции (подразумевается, что в область задания вместе с x входят $x+T$ и $x-T$). Число T с таким свойством называется периодом функции $f(x)$. Наиболее известными периодическими функциями являются $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$... с периодическими функциями приходится иметь дело во многих приложениях математики к задачам физики и техники.

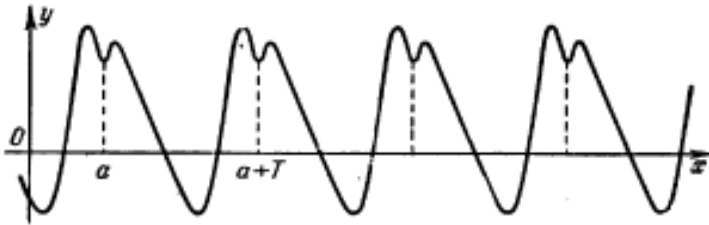


Рис. 1.

Сумма, разность произведение и частное функций периода T , очевидно, всегда дают функции того же периода.

Если мы построим график периодической функции $y(x)$ для какого-нибудь отрезка $[a, a+T]$ значений x , то полный график этой функции получим периодическим повторением построенного (рис.1).

Если T есть период функции $f(x)$, то числа $2T$, $3T$, $4T, \dots$ будут так же периодами, что сразу вытекает из рассмотрения графика периодической функции или из цепи равенств

$$f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=f(x+3T)=\dots$$

(Наряду с этим равенством справедливы и такие :

$f(x)=f(x-T)=f(x-2T)=f(x-3T)=\dots$) являющиеся следствием многократного пользования условием (1.1). Таким образом, если T -период, то и всякое число вида kT , где k -целое положительное число, есть также период, т. е. период, если он существует, всегда не единственен. Отметим следующее свойство любой функции $f(x)$ периода T .

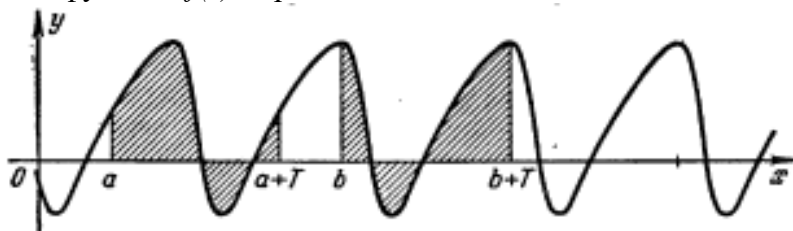


Рис. 2.

Если функция $f(x)$ интегрируема на некотором отрезке длины T , то она интегрируема на всяком другом отрезке той же длины, и величина интеграла при этом неизменна, т.е.

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx \quad (1.2)$$

при любых a и b .

Это свойство легко вытекает из интерпретации интеграла как площади. Действительно, интеграл складывается из площадей, заключенных между кривой $y=f(x)$, крайними ординатами и осью Ox , причем площади, лежащие над осью Ox , со знаком «+», а лежащие под осью Ox , со знаком «-». В нашем случае в силу периодичности $f(x)$ эти площади оказываются одинаковыми для обоих интегралов (1.2) (рис.2).

В дальнейшем, когда мы будем говорить, что функция периода T интегрируема, то будем под этим подразумевать ее интегрируемость на отрезке длины T , а значит, и на любом отрезке конечной длины, как это легко следует из только что установленного свойства.

1.2. Гармоники

Простейшей, и в то же время очень важной для приложений, является периодическая функция $a \cos ax + b \sin ax$, где A, a, b, ω, φ - постоянные. Эту функцию называют *гармоникой с амплитудой $|A|$* , частотой ω и начальной фазой φ . Гармоника имеет период $T = 2\pi / \omega$. Действительно, при любом x

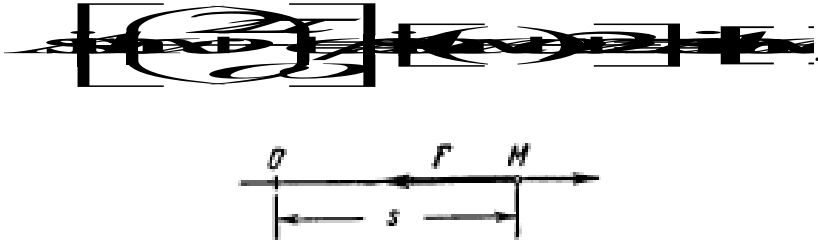


Рис. 3.

Происхождение наименований «амплитуда», «частота», «начальная фаза» связано со следующей задачей механики о простейшем колебательном движении - гармонических колебаниях. Пусть материальная точка M с массой m движется по прямой под действием силы F , пропорциональной расстоянию s точки M от фиксированной точки O и направленной к O (рис. 3). Считая, как обычно, $s > 0$ справа от O и $s < 0$ слева от O , т.е. задаваясь на прямой обычным положительным направлением, находим $F = -ks$, где k -коэффициент пропорциональности, $k > 0$. следовательно, $m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -ks$ или $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \omega^2 s = 0$, где

положено $\omega^2 = k/m$, откуда $\omega = \sqrt{k/m}$. Решением полученного дифференциального уравнения (как легко проверить) будет функция $s = A \sin(\omega x + \varphi)$, где A и φ - постоянные, которые можно вычислить, зная положение и скорость точки M в

начальный момент, т.е. в момент $t=0$. мы получили гармонику. Таким образом, s есть периодическая функция времени t с периодом $T=2\pi/\omega$. Это означает, что под действием указанной силы F точка M будет совершать колебательное движение. Амплитуда $|A|$ есть максимальное отклонение точки M от O . Величина $1/T$ есть число колебаний в единицу времени. $\omega = 2\pi/T$ есть число колебаний за отрезок времени 2π .

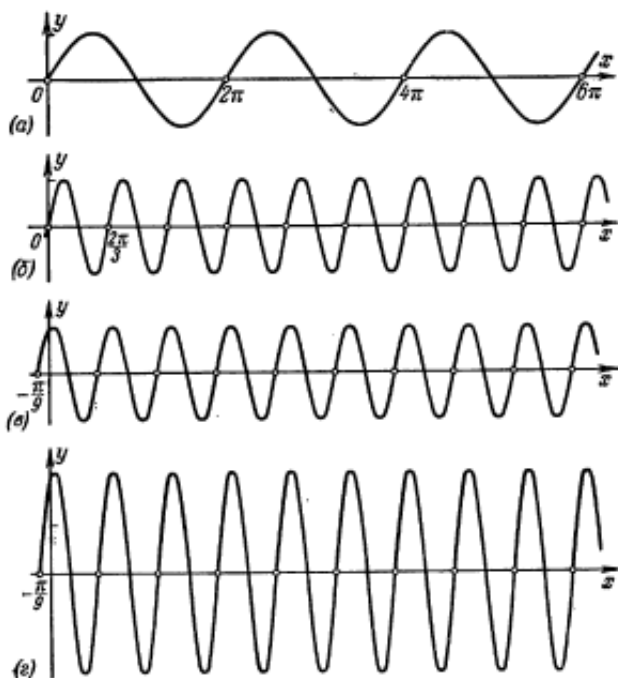


Рис. 4.

Отсюда наименование «частота». Величина φ - начальная фаза- характеризует положение точки М в начальный момент, так как при $t=0$ имеем: $s_0 = \sin \varphi$. Возвратимся к гармонике $y = A \sin(\omega x + \varphi)$. Как выглядит её график. Будем считать $\omega > 0$, так как в противном случае знак минус мы могли бы вынести из-под знака \sin . В наиболее простом случае- при $A=1, \omega=1, \varphi=0$ - мы получаем функцию $y=\sin x$, т.е. обычную синусоиду (рис. 4а). при $A=1, \omega=1, \varphi=\pi/2$ мы получаем косинусоиду $y=\cos x$, график которой есть сдвинутый на $\pi/2$ влево от графика синусоиды $y=\sin x$.

Рассмотрим гармонику $y=\sin \omega x$ и положим $\omega x=z$. Получим $y=\sin z$. Мы пришли к обычной синусоиде. Но $x=z/\omega$. Следовательно, график гармоники $y=\sin \omega x$ можно получить из графика обычной синусоиды с помощью деформации последнего в направлении оси абсцисс. При $\omega > 1$ деформация сводится к равномерному сжатию в ω раз, а при $\omega < 1$ к растяжению в $1/\omega$ раз. На рис.4,б изображена гармоника $y=\sin 3x$ с периодом $T=2\pi/3$. Рассмотрим теперь гармонику $y = \sin(\omega x + \varphi)$ и положим $\omega x + \varphi = \omega x$. График гармоники $y = \sin \omega x$ нам уже известен. Но $x=z-\varphi/\omega$. Следовательно, график гармоники $y = \sin(\omega x + \varphi)$ получается из графика гармоники $y = \sin \omega x$ сдвигом на $-\varphi/\omega$ вдоль оси абсцисс. На рис. 4,в изображена гармоника $y = 2 \sin(3x + \pi/3)$ с периодом $T=2\pi/3$ и начальной фазой $\varphi = \pi/3$. Наконец, график гармоники $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ получается из графика гармоники $y = \sin(\omega x + \varphi)$ умножением всех ординат на число А. на рис.4,г изображена гармоника $y=2 \sin(3x+\pi/3)$.

Резюмируем сказанное: *график всякой гармоники $y=A \sin(\omega x + \varphi)$ получается из графика обычной синусоиды*

равномерным сжатием (или растяжением) в направлении осей координат и сдвигом вдоль оси Ox .

Пользуясь известной формулой тригонометрии, напишем:

~~$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t - \varphi)$$~~

Положив

$$a = A \sin \varphi, \quad b = A \cos \varphi \quad (1.3)$$

убедимся, что всякую гармонику можно представить в виде

~~$$a \cos \omega t + b \sin \omega t$$~~

$$A \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.4)$$

Обратно, всякая функция вида (1.4) есть гармоника. Чтобы убедиться в этом, достаточно найти A и φ из уравнений (1.3). При этом получим:

$$A \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \varphi = \frac{a}{A \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{A \sqrt{a^2 + b^2}}$$

откуда φ легко находится.

В дальнейшем для гармоник мы будем пользоваться записью вида (1.4). Эта запись для гармоники $y = 2 \sin(3x + \pi/3)$, изображение на рис. 4,г, дает:

~~$$2 \left(\frac{\pi}{3} \right) \sqrt{2} \cos \sin$$~~

Нам удобно будет также в (1.4) явно ввести период T следующим образом:

Положим $T = 2l$. Тогда вследствие равенства $T = 2\pi / \omega$ получим:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l},$$

и, следовательно, гармоника с периодом $T = 2l$ может быть записана так:

$$a \cos \frac{\pi x}{l} + b \sin \frac{\pi x}{l} \quad (1.5)$$

1.3. Тригонометрические многочлены и ряды

Зададимся числом $T=2l$ и рассмотрим гармонику

$$a \cos \frac{\pi k x}{l} + b \sin \frac{\pi k x}{l} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

с частотами $\omega_k = \pi k / l$ и периодом $T_k = 2\pi / \omega_k = 2l / k$.

Поскольку $T = 2l = kT_k$, постольку число $T=2l$ является периодом для всех гармоник (1.6) сразу (так как период, умноженный на целое число, опять дает период-см. §1). Поэтому всякая сумма вида

$$S_n(x) = A + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right),$$

где $A = \text{const}$, будучи суммой функций периода $2l$, есть функция того же периода (прибавление постоянной, очевидно не нарушает периодичности; к тому же постоянную можно рассматривать как функцию, для которой любое число является периодом). Функцию $S_n(x)$ будем называть *тригонометрическим многочленом порядка n* (периода $2l$).

Тригонометрический многочлен хотя и складывается из нескольких гармоник, но представляет собой вообще функцию значительно более сложной природы, нежели простая гармоника. Располагая значениями постоянных

$A, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$, мы можем образовать функцию $y = S_n(x)$ с графиками, совсем непохожими на плавный и симметричный график простой гармоники. На рис.5 изображен график тригонометрического многочлена

$$y = \sin \frac{1}{2} x + \sin \frac{1}{4} x$$

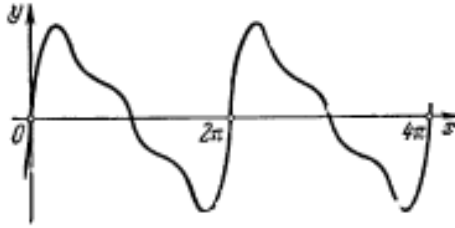


Рис. 5.

Сумма бесконечного *тригонометрического* ряда

$$A + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

(если он сходится) представляет собой также функцию периода $2l$. Природа функций, являющихся суммами таких тригонометрических рядов, ещё более разнообразна. Поэтому естественен вопрос: нельзя ли всякую *заданную* функцию периода $T=2l$ представить в виде суммы тригонометрического ряда? Мы увидим, что такое представление действительно возможно для весьма широкого класса функций. Пусть $f(x)$ принадлежит этому классу. Это значит, что $f(x)$ может быть разложена в сумму гармоник, т.е. в сумму функций очень простой структуры. График функции $y=f(x)$ получается «наложением» графиков гармоник. Если трактовать каждую гармонику как простое гармоническое колебание, а $f(x)$ как характеристику сложного колебательного движения, то последнее оказывается разложенным на сумму отдельных гармонических колебаний. Не нужно, однако, думать, что тригонометрические ряды применимы лишь к колебательным явлениям. Это совсем не так. Понятие тригонометрического ряда оказывается очень полезным и при изучении многих явлений совсем иной природы. Если

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.7)$$

то, положив $\frac{\pi x}{l} = t$ или $x = \frac{tl}{\pi}$, найдем $\varphi(t) = f\left(\frac{tl}{\pi}\right)$

$$\varphi(t) = f\left(\frac{tl}{\pi}\right) \quad (1.8)$$

Гармоники этого ряда имеют общий период 2π . Таким образом, если для $f(x)$ периода $2l$ имеет место разложение (1.7), то для функции $\varphi(t) = f\left(\frac{tl}{\pi}\right)$ периода 2π имеет место разложение (1.8). Справедливо, очевидно, и обратное заключение. Именно, если для функции $\varphi(t)$ периода 2π имеет место разложение (1.8), то для функции $f(x) = \varphi\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ периода $2l$ имеет место разложение (1.7). Таким образом, достаточно уметь решать задачу разложения в тригонометрический ряд для функций «стандартного» периода 2π . В этом случае к тому же и ряд выглядит проще. Поэтому мы и будем строить теорию для рядов вида (1.8) и лишь окончательные результаты будем переводить на «язык» общих рядов (1.7).

1.4. Уточнение терминологии. Интегрируемость. Функциональные ряды

Уточним терминологию и напомним некоторые сведения из дифференциального и интегрального исчисления. Когда мы будем говорить, что $f(x)$ *интегрируема* на отрезке $[a, b]$, то будем иметь в виду существование интеграла (хотя бы и несобственного).

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1.9)$$

В элементарном смысле. Таким образом, интегрируемая $f(x)$ у нас всегда либо непрерывна, либо имеет на отрезке

$[a, b]$ конечное число точек разрыва, вблизи которых функция может быть как ограниченной, так и неограниченной. В курсах интегрального исчисления доказывается, что для функции с конечным числом разрывов из существования интеграла

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

всегда следует существование интеграла (1.9) (обратное не всегда верно). При этом функцию $f(x)$ называют *абсолютно интегрируемой*. Если $f(x)$ абсолютно интегрируема, а $\varphi(x)$ -ограниченная интегрируемая функция, то произведение $f(x)\varphi(x)$ абсолютно интегрируемо. Имеет место также следующее *правило интегрирования по частям*:

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ -непрерывные на $[a, b]$ функции, возможно лишенные производных в конечном числе точек, причем предполагается, что $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ абсолютно интегрируема. Тогда



$$(1.10)$$

Известно: если функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то интегрируема и их сумма, причем

$$\int_b^a \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right) = \sum_{k=1}^n \int_b^a f_k(x) dx \quad (1.11)$$

Рассмотрим теперь *бесконечный функциональный ряд*



$$(1.12)$$

Он называется *сходящимся* для данного значения x , если для его частных сумм

$$s(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad (n=1, 2, \dots)$$

существует конечный предел $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$.

Величина $s(x)$ называется тогда суммой ряда и, очевидно, представляет собой функцию от x . Если ряд сходится для всех x из отрезка $[a, b]$, то его сумма $s(x)$ определена на $[a, b]$. Распространяется ли формула (1.11) на случай сходящегося на отрезке $[a, b]$ функционального ряда интегрируемых функций, т.е. справедлива ли формула



$$\int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx \quad (1.13)$$

(речь идет, таким образом, о возможности *почленного* интегрирования ряда)? Оказывается, что не всегда, и хотя бы уже потому, что ряд интегрируемых и даже просто непрерывных функций может иметь неинтегрируемую сумму. Аналогичная проблема связана с возможностью почленного дифференцирования рядов. Мы выделим важный класс функциональных рядов, к которым указанные операции приложимы. Говорят, что ряд (1.12) сходится *равномерно* на отрезке $[a, b]$, если для всякого положительного числа ε существует число N такое, что для всех $n \geq N$ и для всех x из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon \quad (1.14)$$

Если мы рассмотрим графики функций $y=s(x)$ (сумма ряда) и $y=s_n(x)$ (частная сумма), то свойство равномерной сходимости означает, что для всех достаточно больших индексов n и для всех x графики суммы ряда и соответствующих его частных сумм отстоят друг от друга меньше чем на наперед заданную ε , т.е. эти графики *равномерно* (для всех x) близки (рис.6)

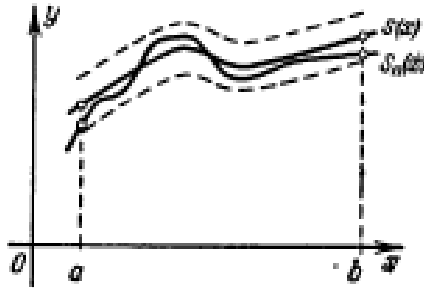


Рис. 6.

Не всякий сходящийся на некотором отрезке ряд сходится равномерно. Имеется очень полезный и простой признак равномерной сходимости функциональных рядов (признак Вейерштрасса): Если числовой ряд с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

сходится и для всех k , начиная с некоторого, $|f_k(x)| \leq u_k$, каково бы ни было x из отрезка $[a, b]$, то ряд (1.11) сходится равномерно (и к тому же абсолютно) на $[a, b]$.

Справедливы следующие важные теоремы:

Если члены ряда (1.12) непрерывны на отрезке $[a, b]$ и ряд сходится равномерно на этом отрезке, то

- а) сумма ряда есть функция непрерывная,
- б) ряд можно интегрировать почленно, т.е. для него справедлива формула (1.13)

2. Если ряд (1.12) сходится, его члены дифференцируемы и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ равномерно сходится на } [a, b], \text{ то}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

т.е. ряд (1.12) можно дифференцировать почленно.

1.5. Основная тригонометрическая система. Ортогональность синусов и косинусов

Основной тригонометрической системой будем называть систему функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (1.15)$$

Все эти функции имеют общий период 2π (хотя $\cos nx$ и $\sin nx$ имеют и меньший период $\frac{2\pi}{n}$). Установим несколько вспомогательных формул. При любом целом $n \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx &= \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx &= \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} \, dx = \pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx = \pi \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

В силу известных формул тригонометрии

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

для любых целых n и m , $n \neq m$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] dx$$

(1.18)

Наконец в силу формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] dx$$

для любых целых n и m

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] dx$$

(1.19)

Равенства (1.16), (1.18), (1.19) показывают, что интеграл от произведения двух любых различных функций системы (1.15), взятый по отрезку $[-\pi, \pi]$, равен 0. Условимся говорить, что две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ *ортогональны* на

отрезке $[a, b]$, если $\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx = 0$. Приняв это определение, можем сказать, что функции системы (1.15) попарно ортогональны на отрезке $[-\pi, \pi]$, или короче, система (1.15) ортогональна на $[-\pi, \pi]$. Мы знаем, что для периодической функции интеграл по любому отрезку длины, равной периоду, имеет неизменное значение. Поэтому формулы (1.16)-(1.19) справедливы не только для отрезка $[-\pi, \pi]$, но и для любого отрезка $[a, a+2\pi]$. Следовательно, система (1.15) ортогональна на всяком таком отрезке.

1.6. Ряд Фурье для функции периода 2π

Пусть для функции $f(x)$ периода 2π имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1.20)$$

Постоянное слагаемое здесь обозначено через $a_0/2$ для симметрии дальнейших формул. Поставим себе задачей вычислить коэффициенты a_0 , a_k и b_k , $k=1,2,\dots$, зная функцию $f(x)$. Для этого сделаем такое допущение: будем предполагать, что ряд (1.20) и ряды, которые мы сейчас получим, можно интегрировать почленно, т. е. для этих рядов интеграл от суммы равен сумме интегралов (тем самым предполагается и интегрируемость функции $f(x)$). Интегрируя равенство (1.20) в пределах от $-\pi$ до π , получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] dx$$

В силу (1.16) все интегралы под знаком суммы равны нулю. Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0 \quad (1.21)$$

Умножим обе части равенства (1.20) на $\cos nx$ и результат опять интегрируем в прежних пределах. Получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx) \right] dx$$

В силу (1.16) первый интеграл справа равен нулю. Так как функции системы (1.15) попарно ортогональны, то все интегралы под знаком суммы, кроме одного, оказываются также равными нулю. Останется лишь интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$$

(см. (1.17)), являющийся коэффициентом при a_n . Таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \pi \quad (1.22)$$

Аналогичным приемом найдем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = b_n \pi \quad (1.23)$$

Из (1.21)—(1.23) вытекает

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (1.24)$$

(n=0, 1, 2, ...) (n=1, 2, ...)

Итак, если $f(x)$ интегрируема и может быть разложена в тригонометрический ряд, причем почленное интегрирование этого ряда и рядов, получающихся из него умножением на $\cos nx$ и $\sin nx$ ($n=1, 2, \dots$), возможно, то коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам (1.24).

Пусть теперь задана некоторая интегрируемая функция периода 2π , и мы хотим представить эту функцию в виде суммы тригонометрического ряда. Если такое представление вообще возможно (с выполнением требования почленной интегрируемости, упомянутого выше), то в силу изложенного коэффициенты a_n и b_n необходимо получаются по формулам (1.24). Поэтому в поисках тригонометрического ряда, имеющего своей суммой заданную функцию $f(x)$, в первую очередь естественно обратить внимание на тот ряд, коэффициенты которого вычисляются по формулам (1.24), и посмотреть, не обладает ли

он нужным нам свойством. Мы увидим далее, что для обширного класса функций это так и будет. Коэффициенты a_n и b_n , вычисленные по формулам (1.24), называются *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$, а тригонометрический ряд с такими коэффициентами называется ее *рядом Фурье*. Заметим, кстати, что в формулах (1.24) интегрируются функции периода 2π . Поэтому отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ может быть заменен любым другим отрезком длины 2π (см. § 1), и мы наряду с формулами (1.24) получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi a} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi a} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.25)$$

Изложенное выше делает естественным особое внимание к рядам Фурье. Составив ряд Фурье для функции $f(x)$ и не предвещая вопроса о его сходимости к $f(x)$, мы пишем:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

Такая запись означает лишь, что функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье, написанный справа.

Знак « \sim » можно заменить знаком « = » только тогда, когда нам удастся доказать сходимость ряда и равенство его суммы функции $f(x)$. Из предшествующих рассуждений легко вытекает следующая, оказывающаяся часто полезной.

Теорема 1. *Если для функции $f(x)$ периода 2π имеет место разложение в некоторый равномерно сходящийся на всей оси Ox тригонометрический ряд, то этот ряд есть ряд Фурье для $f(x)$.* Действительно, пусть

для $f(x)$ имеет место равенство (1.20), где ряд сходится равномерно. В силу теоремы I, приведенной в 1.4, $f(x)$ непрерывна и почленное интегрирование ряда возможно. Это нам дает равенство (1.21).

Рассмотрим равенство

$$s_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (1.26)$$

и покажем, что ряд справа сходится равномерно.

Положим: $s_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k \cos kx + b_k \sin kx$

Пусть ε — произвольное положительное число. Если ряд (1.20) сходится равномерно, то существует число N такое, что для всех $m \geq N$ $|f(x) - s_m(x)| \leq \varepsilon$. Произведение $\sin x \cos x$, очевидно, является m -й частной суммой для ряда (1.26). Поэтому из соотношения

$$s_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

справедливого для всех $m \geq N$, и вытекает равномерная сходимость ряда (1.26). В таком случае этот ряд можно почленно интегрировать, а интегрирование дает равенство (1.22). Аналогично доказывается равенство (1.23). Тем самым для коэффициентов a_n и b_n доказаны формулы (1.24). Это и означает, что ряд (1.20) есть ряд Фурье для $f(x)$.

Современная теория рядов Фурье позволяет доказать следующее более общее предложение, доказательство которого мы приводить не будем из-за его сложности.

Теорема 2. *Если абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ периода 2π допускает разложение в некоторый тригонометрический ряд, сходящийся к ней всюду за исключением, быть может, конечного числа значений (для одного периода), то этот ряд есть ряд Фурье для $f(x)$.*

Эта теорема подтверждает высказанное выше соображение, что в поисках тригонометрического ряда, имеющего своей суммой заданную функцию, в первую очередь следует обращаться к ряду Фурье.

1.7. Ряд Фурье для функции, заданной на отрезке длины 2π

В приложениях очень часто возникает задача о разложении в тригонометрический ряд функции $f(x)$, заданной лишь на отрезке $[-\pi, \pi]$. Здесь, следовательно, о периодичности $f(x)$ нет и речи. Это тем не менее нисколько не мешает нам написать для нее ряд Фурье, ибо в формулах (1.24) фигурирует лишь отрезок $[-\pi, \pi]$.

Вместе с тем, если периодически продолжить $f(x)$ с отрезка $[-\pi, \pi]$ на всю ось Ox , то получим периодическую, совпадающую с $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ функцию, для которой ряд Фурье будет тождественным с рядом Фурье для $f(x)$.

К тому же, если ряд Фурье для $f(x)$ оказывается сходящимся к ней, то его сумма, будучи периодической функцией, даст как раз упомянутое периодическое продолжение $f(x)$ с отрезка $[-\pi, \pi]$ на всю ось Ox . Таким образом, говорить о ряде Фурье для $f(x)$ заданной на $[-\pi, \pi]$, — это все равно, что говорить о ряде Фурье для функции, получающейся из $f(x)$ периодическим продолжением ее на ось Ox . Отсюда вытекает, что признаки сходимости рядов Фурье достаточно формулировать для периодиче-

ских функций. В связи с упомянутым периодическим продолжением $f(x)$ с отрезка $[-\pi, \pi]$ на ось Ox уместно сделать следующее замечание.

Если $f(-\pi) = f(\pi)$, то периодическое продолжение никаких затруднений не встречает (рис. 7, а).

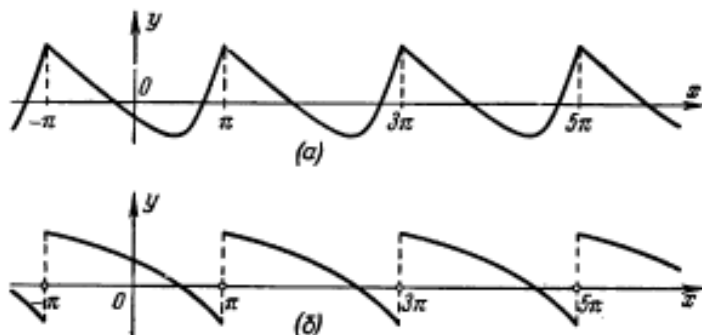


Рис. 7.

При этом, если $f(x)$ была непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ее продолжение будет непрерывным на всей оси Ox . Если же $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то, не изменяя значений $f(-\pi)$ и $f(\pi)$ мы не сможем осуществить нужное продолжение, так как по смыслу периодичности $f(-\pi)$ должно совпадать с $f(\pi)$.

Обойти это затруднение мы можем двояким образом: во-первых, исключить вовсе из рассмотрения значения $f(x)$ при $x = -\pi$ и $x = \pi$, сделав тем самым функцию неопределенной для этих значений и, следовательно, сделав неопределенным периодическое продолжение $f(x)$ для всех значений x вида $(2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); во-вторых, изменить выгодным нам образом значения функции $f(x)$ при $x = -\pi$ и $x = \pi$, сделав их равными. Важно отметить, что и в том и в другом случаях коэффициенты Фурье будут иметь те же значения, что и сначала. Действительно, изменение значений функции в конечном

числе точек, или даже неопределенность ее в этих точках,— не может оказать влияния на величину интеграла, в частности на величину интегралов (1.24), определяющих коэффициенты Фурье. Таким образом, независимо от того, осуществим мы указанную модификацию функции $f(x)$ или нет, ряд Фурье для нее остается неизменным. Нужно отметить, что при $f(-\pi) \neq f(\pi)$ и при непрерывности $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ периодическое продолжение $f(x)$ на всю ось Ox будет иметь разрывы во всех точках вида $x = (2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), как бы мы ни изменяли значения функции при $x = -\pi$ и $x = \pi$ (см. рис. 7,6). К каким значениям следует ожидать сходимости ряда Фурье в этих точках при $f(-\pi) \neq f(\pi)$, — это вопрос особый, и мы решим его позднее. Пусть теперь $f(x)$ задана на произвольном отрезке $[a, a + 2\pi]$ длины 2π и ее требуется разложить в тригонометрический ряд. Коэффициенты Фурье вычисляем по формулам (1.25). Как и выше, приходим к выводу, что говорить о ряде Фурье для $f(x)$ или для функции, получающейся из нее периодическим продолжением на всю ось Ox , — это одно и то же. При этом непрерывная на отрезке $[a, a + 2\pi]$ функция $f(x)$ при $f(a) \neq f(a + 2\pi)$ дает продолжение, разрывное в точках вида $x = a + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

1.8. Правый и левый пределы функции в точке. Точки разрыва первого рода

Введем обозначения:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

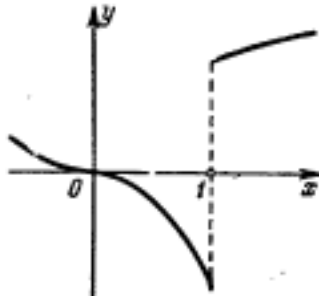


Рис. 8.

(если эти пределы существуют и конечны). Первый из этих пределов называется *пределом $f(x)$ в точке x_0 слева*, второй — *пределом $f(x)$ в точке x_0 справа*. В точках непрерывности, по самому определению понятия непрерывности, эти пределы существуют, причем

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0). \quad (1.27)$$

Если x_0 есть точка разрыва функции $f(x)$, то пределы справа и слева (оба или один из них) могут существовать в одних случаях и не существовать в других. Если *оба предела существуют*, то говорят, что точка x_0 есть *точка разрыва первого рода* для функции

$f(x)$. Если же *хотя бы один* предел не существует, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*. Нам будут интересовать точки разрыва первого рода. Если x_0 — такая точка, то величина

$$\delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) \quad (1.28)$$

называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0 .

Для пояснения сказанного рассмотрим пример.

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{для } x < 1 \\ 0 & \text{для } x = 1 \\ \sqrt{x} & \text{для } x > 1 \end{cases} \quad (1.29)$$

На рис. 8 изображен график этой функции.

Значение функции при $x = 1$ изображено маленьким кружком. Для пределов слева и справа при $x = 1$, очевидно, имеем:

$$f(1 - 0) = -1,$$

$$f(1 + 0) = 1$$

Следовательно, для скачка функции получаем:

$$\delta = f(1+0) - f(1 - 0) = 2,$$

что вполне согласуется с наглядным представлением о скачке (см. рис. 8).

Точки разрыва первого рода могут появиться, например, при периодическом продолжении

непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ с этого отрезка на всю ось Ox в случае, когда $f(-\pi) \neq f(\pi)$ (см. рис. 7, б). При этом все скачки оказываются равными числу $\delta = f(-\pi) - f(\pi)$.

1.9. Гладкие и кусочно-гладкие функции

Функцию $f(x)$ называют *гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она на этом отрезке обладает *непрерывной* производной. На геометрическом языке это означает, что при перемещении вдоль кривой $y = f(x)$ направление касательной изменяется *непрерывно*, без скачков (рис. 9, а). Таким образом, график гладкой функции представляет собой плавную кривую, лишенную угловых точек. Функцию $f(x)$ называют *кусочно-гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она сама и ее производная либо непрерывны на этом отрезке, либо допускают на нем лишь разрывы первого рода, и притом в конечном числе.

Легко понять, что график кусочно-гладкой функции представляет собой непрерывную или разрывную кривую, которая может иметь конечное число угловых точек (в них происходит скачок производной); с приближением к такому углу или к месту разрыва (с той или иной стороны) направление касательной стремится к определенному положению (ведь у нас производная имеет лишь разрывы первого рода!).

На рис. 9, б и 9 в изображены графики непрерывной и разрывной кусочно-гладких функций. Гладкие функции мы будем рассматривать в дальнейшем как частный случай функций кусочно-гладких.

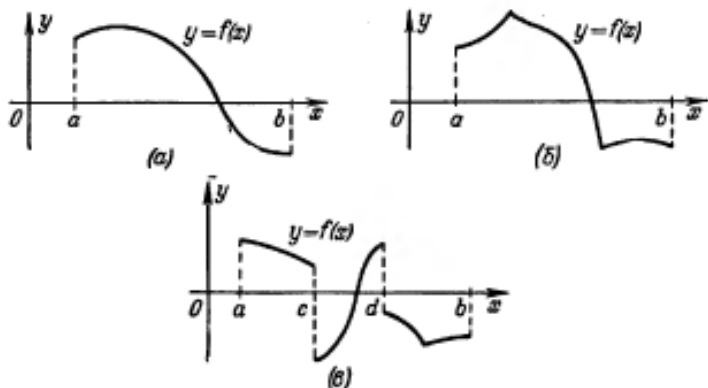


Рис. 9.

Непрерывная или разрывная функция $f(x)$, заданная на всей оси Ox , называется кусочно-гладкой, если она такова для каждого отрезка конечной длины. В частности, это относится к периодическим функциям.

Всякая кусочно-гладкая функция $f(x)$ (непрерывная или разрывная) ограничена и имеет ограниченную производную всюду, за исключением угловых точек и точек разрыва (во всех этих точках $f'(x)$ не существует).

1.10. Признак сходимости ряда Фурье

Мы формулируем наиболее употребительный признак сходимости ряда Фурье.

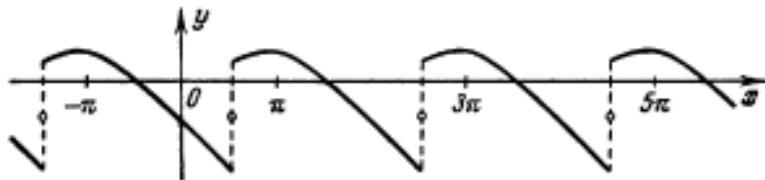


Рис. 10.

Ряд Фурье кусочно-гладкой (непрерывной или разрывной) функции $f(x)$ периода 2π сходится для всех значений x , причем его сумма равна $f(x)$ в каждой

точке непрерывности и равна числу $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

(среднее арифметическое предельных значений справа и слева) в каждой точке разрыва (рис. 10).

Если $f(x)$ всюду непрерывна, то ряд сходится абсолютно и равномерно.

Пусть функция $f(x)$ задана лишь на $[-\pi, \pi]$, является кусочно-гладкой на этом отрезке и непрерывна в его концах. Как мы заметили в 1.7, ряд Фурье для $f(x)$ совпадает с рядом Фурье для функции, являющейся периодическим продолжением $f(x)$ на всю Ox . Но такое периодическое продолжение в нашем случае, очевидно, приведет к функции $f(x)$, кусочно-гладкой на всей оси Ox . Поэтому из сформулированного нами признака вытекает, что ряд Фурье будет всюду сходящимся. В частности, это будет иметь место на интересующем нас отрезке $[-\pi, \pi]$, причем для $-\pi < x < \pi$ ряд будет сходиться к $f(x)$ в точках непрерывности и к значению в точках разрыва. Что же будет происходить в концах отрезка $[-\pi, \pi]$?

Возможны два случая:

1. $f(-\pi) = f(\pi)$. Здесь периодическое продолжение приводит, очевидно, к функции, непрерывной в точках $-\pi$ и π (и вообще во всех точках вида $x = (2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)). В силу нашего признака и в концах отрезка ряд будет сходиться, следовательно, к $f(x)$.
2. $f(-\pi) \neq f(\pi)$. Здесь периодическое продолжение приводит к функции, разрывной в точках $-\pi$ и π (а также во всех точках вида $x = (2k+1)\pi$ ($k = 0,$

$\pm 1, \pm 2, \dots$)), причем для продолженной $f(x)$ очевидно: $f(-\pi - 0) = f(\pi)$, $f(-\pi + 0) = f(-\pi)$,
 $f(\pi + 0) = f(-\pi)$, $f(\pi - 0) = f(\pi)$

(рис. 11). Поэтому при $x = -\pi$ и $x = \pi$ ряд будет сходиться к значениям

$$\frac{\frac{f(-\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2}}{\frac{f(\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}} = \frac{f(-\pi)}{2}$$

Таким образом, для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$ и непрерывной при $x = -\pi$ и $x = \pi$, ряд Фурье ведет себя в этих точках, как и в прочих точках непрерывности функции, если $f(-\pi) = f(\pi)$. Если же $f(-\pi) \neq f(\pi)$ то ряд заведомо не может сходиться к $f(x)$ при $x = -\pi$ и $x = \pi$. Поэтому в последнем случае задачу о разложении $f(x)$ в ряд Фурье имеет смысл ставить не для $-\pi \leq x \leq \pi$, а для $-\pi < x < \pi$. Аналогичное замечание можно сделать относительно ряда Фурье для функции, заданной на отрезке вида $[a, a + 2\pi]$, где a — любое число.

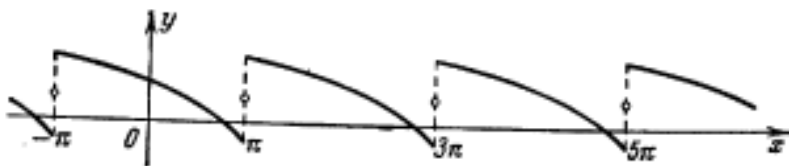


Рис. 11.

Впрочем, при решении каждой конкретной задачи, когда читатель построит график периодически продолженной функции (а это всегда рекомендуется!) и вспом-

нит сформулированный выше признак, то вопрос о поведении ряда Фурье в концах отрезка сразу станет ясным.

1.11. Четные и нечетные функции

Пусть $f(x)$ задана на всей оси Ox или же на некотором отрезке, симметричном относительно начала координат.

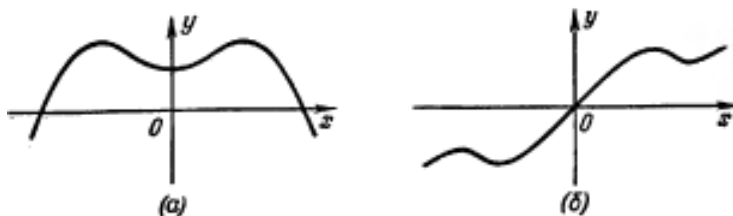


Рис. 12.

Скажем, что $f(x)$ есть *четная* функция, если для каждого x : $f(-x) = f(x)$.

Из этого определения вытекает, что график всякой четной функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси Oy (рис. 12, а). Из интерпретации интеграла как площади для четных функций имеем:

$$\int_{-l}^l f(x)dx = \int_0^l f(x)dx \quad (1.30)$$

при любом l (лишь бы $f(x)$ была определена и

интегрируема на отрезке $[-l, l]$).

Функцию $f(x)$ назовем *нечетной*, если для каждого x : $f(-x) = -f(x)$. Для нечетной функции, в частности, $f(-0) = -f(0)$ и, следовательно, $f(0) = 0$. График всякой нечетной функции $y = f(x)$ симметричен относительно точки O (см. рис. 12, б). Для нечетных функций

$$\int_{-l}^l f(x)dx = 0 \quad (1.31)$$

при любом l (лишь бы $f(x)$ была определена и интегрируема на отрезке $[-l, l]$).

Из определения четных и нечетных функций легко вытекает:

а) Произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная.

б) Произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная.

Действительно, если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - четные функции, то для $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ имеем:

$$f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = \varphi(x)\psi(x) = f(x).$$

Если же $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетны, то

$$\begin{aligned} f(-x) &= \varphi(-x)\psi(-x) = [-\varphi(x)][-\psi(x)] = \\ &= \varphi(x)\psi(x) = f(x). \end{aligned}$$

Тем самым свойство а) доказано.

Пусть $\varphi(x)$ четна, $\psi(x)$ нечетна. То-

гда

$$\begin{aligned} f(-x) &= \varphi(-x)\psi(-x) = \varphi(x)[- \psi(x)] = \\ &= -\varphi(x)\psi(x) = -f(x), \text{ т. е. доказано и б).} \end{aligned}$$

1.12. Ряды по косинусам и ряды по синусам

Пусть $f(x)$ — четная функция, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$ (или же четная периодическая функция).

Так как $\cos(nx)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) есть функция, очевидно, четная, то по свойству а) § 1.11 будет четной и функция $f(x)\cos(nx)$. Функция $\sin(nx)$ ($n = 1, 2, \dots$) нечетна. Поэтому по свойству б) § 1.11 нечетна и функция $f(x)\sin(nx)$.

Тогда в силу (1.24), (1.30) и (1.31) для коэффициентов Фурье четной функции $f(x)$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0 \\ &\quad (n=1,2,\dots), \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &\quad (n=0,1,2,\dots). \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, для четной функции ряд Фурье содержит лишь косинусы, т. е. коэффициенты a_n вычисляются по формулам (1.31).

Пусть теперь $f(x)$ — нечетная функция, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$ (или же нечетная периодическая функция), $\cos(nx)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) — четная функция. По свойству б) 1.11 функция $f(x) \cos(nx)$ нечетная. Функция $\sin(nx)$ ($n=1, 2, \dots$) нечетна. Поэтому по свойству а) 1.11 функция $f(x) \sin(nx)$ оказывается четной. Тогда в силу (1.24), (1.30) и (1.31) для коэффициентов Фурье нечетной функции $f(x)$:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0 \\ &\quad (n=0,1,2,\dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &\quad (n=1,2,\dots). \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

Таким образом, ряд Фурье нечетной функции содержит лишь синусы, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

где b_n вычисляются по формулам (1.32). Поскольку ряд Фурье для нечетной функции содержит лишь синусы, то, очевидно, он всегда сходится к нулевому значению при $x = -\pi$, $x = 0$ и $x = \pi$ (и вообще при $x = k\pi$), каково бы ни было значение $f(x)$ в этих точках.

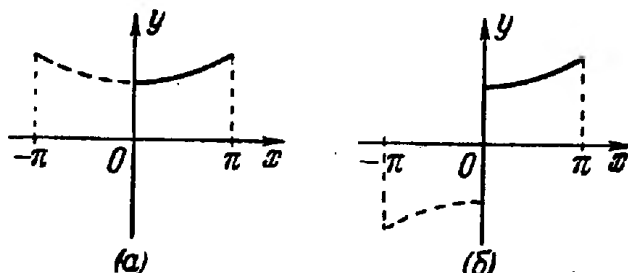


Рис. 13.

Часто возникает задача о разложении в ряд по косинусам или в ряд по синусам функции $f(x)$, заданной и абсолютно интегрируемой на отрезке $[0, \pi]$.

Для разложения $f(x)$ в ряд по косинусам можно рассуждать следующим образом. Продолжим $f(x)$ четным образом с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[-\pi, 0]$ (рис. 13, а). Тогда для «продолженной» четной функции справедливы все предыдущие рассуждения, и следовательно, коэффициенты Фурье могут быть вычислены по формулам

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.33)$$

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

В этих формулах фигурируют лишь *заданные* на $[0, \pi]$ значения $f(x)$. Следовательно, при практических вычислениях *фактически* можно и не осуществлять указанное четное продолжение.

Если мы хотим разложить $f(x)$ в ряд по синусам, то продолжаем ее с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[-\pi, 0]$ нечетным образом (см. рис. 13,б). При этом по смыслу нечетности должны принять $f(0) = 0$. К «продолженной» нечетной функции опять применимы соображения, приведенные выше, и, следовательно, для коэффициентов Фурье справедливы формулы:

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.34)$$

Поскольку здесь участвуют лишь значения $f(x)$ на $[0, \pi]$, постольку, как и в случае ряда по косинусам, *фактическое* продолжение функции $f(x)$ с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[-\pi, 0]$ можно и не осуществлять.

1.13. Примеры разложений в ряд Фурье

Пример 1. $f(x) = x^2$ для $-\pi \leq x \leq \pi$. Функция $f(x)$ — четная. График $f(x)$ вместе с ее периодическим продолжением изображен на рис. 14. Продолженная функция — непрерывная и кусочно-гладкая. Поэтому по признаку § 10 ряд Фурье сходится к $f(x) = x^2$ всюду на $[-\pi, \pi]$ и к периодическому продолжению этой

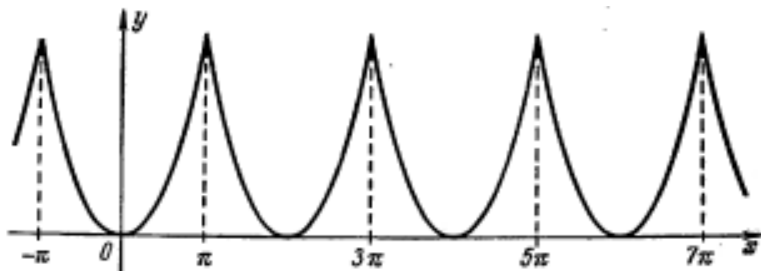


Рис. 14.

функции вне $[-\pi, \pi]$. Сходимость — абсолютная и равномерная. Подсчет дает:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x \cos nx \, dx$$

С помощью интегрирования по частям далее находим:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin nx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin nx \, dx$$

$b_n = 0$ ($n = 1, -2, \dots$) (так как $f(x)$ четна). Поэтому для $-\pi \leq x \leq \pi$

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1} \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x + \dots \right) \quad (1.35)$$

Пример 2. $f(x) = |x|$ для $-\pi \leq x \leq \pi$. Функция $f(x)$ — четная. Ее график вместе с периодическим продолжением изображен на рис. 15. Продолженная функция — непрерывная и кусочно-гладкая. Признак § 10 приложим. Поэтому ряд Фурье сходится к $f(x) = |x|$ всюду на $[-\pi, \pi]$ и к ее периодическому продолжению вне этого отрезка. Сходимость абсолютная и равномерная.

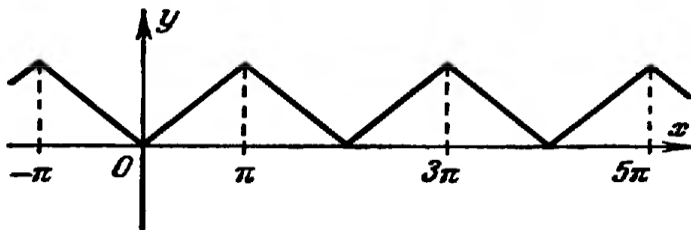


Рис. 15.

Так как $|x| = x$ для $x \geq 0$, то

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx, \\ & \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx + \int_{\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx \\ & = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx + \int_{\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что для n четных $a_n = 0$, а для n нечетных $-4/(n\pi^2)$. Наконец, $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), так как $f(x)$ четна. Таким образом, для $-\pi \leq x \leq \pi$

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (1.36)$$

Пример 3. $f(x) = |\sin x|$. Эта функция определена для всех x и представляет собой непрерывную кусочно-гладкую и четную функцию. Ее график изображен на рис. 16. Следовательно, $f(x) = |\sin x|$ всюду равна своему ряду Фурье, который сходится абсолютно и равномерно.



Рис. 16.

Так как $|\sin x| = \sin x$ для $-\pi \leq x \leq \pi$, то

~~$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cos(nx) dx$$~~

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x) dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_{x=0}^{x=\pi} = -2 \frac{(-1)^n + 1}{\pi(n^2 - 1)}$$

если $n \neq 1$.

Для $n = 1$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0$$

$b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), так как $f(x)$ четна.

Таким образом для всех x



Пример 4. $f(x) = x$ для $-\pi < x < \pi$. Функция $f(x)$ нечетна. График $f(x)$ вместе с ее периодическим продолжением изображен на рис. 17. Продолженная функция является кусочно-гладкой и разрывной в точках вида $x = (2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

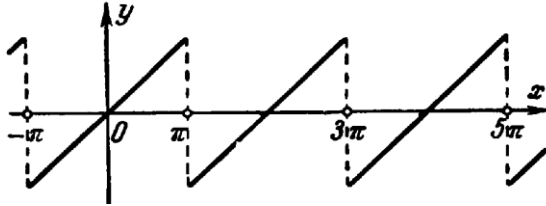


Рис. 17.

Признак § 1.10 приложим. В точках разрыва ряд Фурье сходится к нулю. В силу нечетности $f(x)$ $a_{n=0}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} (-1)^{n+1}$$

Поэтому для $-\pi < x < \pi$

$$x \sim \frac{2}{\pi} \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} - \dots \right) \quad (1.37)$$

Пример 5. Разложить в ряд по синусам функцию $f(x) = 1$ для $0 < x < \pi$. Нечетное продолжение $f(x)$ на отрезок $[-\pi, 0]$ порождает разрыв при $x = 0$. График $f(x)$ вместе с ее нечетным продолжением на $[-\pi, 0]$ и последующим периодическим продолжением (по периоду 2π) на всю Ox изображен на рис. 18. К такой «продолженной» функции признак § 1.10 приложим. Поэтому ряд Фурье сходится к $f(x) = 1$ для $0 < x < \pi$ и к функции, изображенной на рис. 18, вне этого промежутка, причем в точках вида $x = k\pi$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) сумма ряда равна нулю.

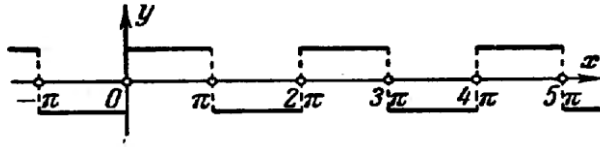


Рис.18.

Имеем, далее, $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),



Та

ким образом, для $0 < x < \pi$

$$\frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

(1.38)

Пример 6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ для $0 < x < 2\pi$. Внешне задача напоминает пример 4, но если построить график периодически продолженной $f(x)$, то сразу увидим различие (рис. 19). К продолженной функции признак § 1.10 приложим.

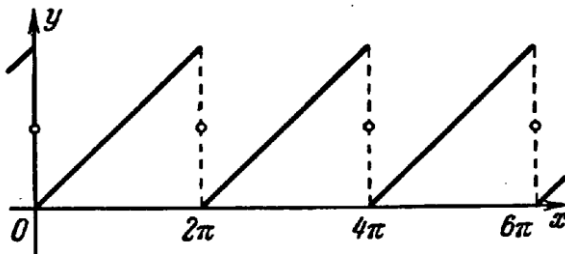


Рис. 19.

В точках разрыва ряд сходится к среднему арифметическому предельных значений справа и слева,

т. е. к значению π . Функция $f(x)$ не принадлежит классу четных или нечетных функций:

$$\int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx \neq 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) dx = \frac{1}{n\pi} [x \sin(nx)]_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = 0$$

($n = 1, 2, \dots$)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{1}{n\pi} [x \cos(nx)]_{x=0}^{x=2\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = -\frac{2}{n}$$

Поэтому для $0 < x < 2\pi$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n} \right) \sin(nx) \quad (1.39)$$

Пример 7. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$ для $0 < x < 2\pi$. Задача напоминает пример 1, но график периодически продолженной функции сразу указывает на различие (рис. 20). К продолженной функции признак § 1.10 приложим. В точках разрыва ряд сходится к среднему арифметическому предельных значений справа и слева, т. е. к значению $2\pi^2$. Функция

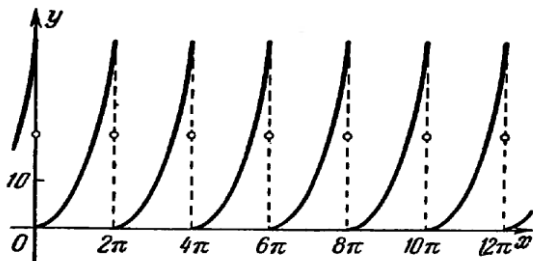


Рис. 20.

$f(x)$ не принадлежит классу четных или нечетных функций:



Интегрируя, по частям, имеем:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = 4/n^2, \quad ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = 4\pi/n$$

Поэтому для $0 < x < 2\pi$,

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{4\pi^2}{3} + 4 \left(\cos x - \pi \sin x + \dots + \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} + \dots \right) = \\ &= \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} \right) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Пример 8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ для $-\pi < x < \pi$, где A, B, C — постоянные. График $f(x)$ представляет собой параболу. В результате периодического продолжения, в зависимости от выбора значений A, B и C может получаться

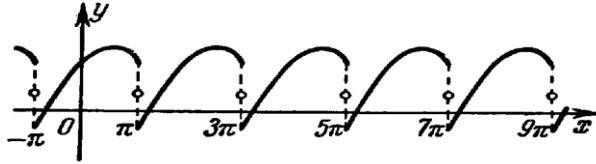


Рис. 21.

непрерывная или разрывная функция. На рис. 21 изображено такое продолжение для некоторых фиксированных A , B и C . Можно было бы подсчитать коэффициенты Фурье по соответствующим формулам, но в этом нужды нет, так как мы можем воспользоваться уже известными разложениями для $-\pi < x < \pi$ функций x^2 и x (примеры 1 и 4). Это дает для $-\pi < x < \pi$:



Пример 9. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ для $0 < x < 2\pi$. На рис. 22 изображена периодически продолженная $f(x)$ (при некотором выборе постоянных A , B , C). Пользуясь уже известными нам разложениями для $0 < x < 2\pi$ функций x^2 и x (примеры 6 и 7), получим для $0 < x < 2\pi$:

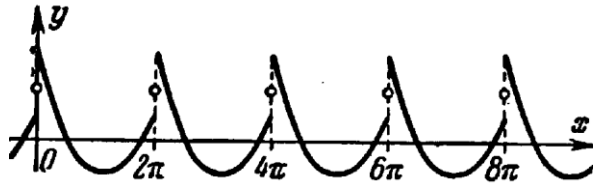


Рис. 22.

$$Ax^2 + Bx + C = \frac{A\pi^2}{3} + B\pi + C + 4A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} -$$

$$-(4\pi A - 2B) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$$

Из наших примеров можно вывести значения сумм некоторых важных тригонометрических рядов. Так, из (1.39) для $0 < x < 2\pi$ сразу получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (1.41)$$

Из (1.39) и (1.40) для $0 < x < 2\pi$ выводим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3\pi^2 - 6\pi x + x^2}{12} \quad (1.42)$$

Так как члены ряда слева не превосходят по абсолютной величине чисел $\frac{1}{n^2}$, то отсюда вытекает равномерная сходимость ряда, а значит, и непрерывность его суммы для всех x (см. § 1.4). Поэтому равенство (1.42) справедливо для $0 \leq x \leq 2\pi$, а не только для $0 < x < 2\pi$.

Из (1.37) для $-\pi < x < \pi$ находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (1.43)$$

Из (1.35) для $-\pi \leq x \leq \pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3\pi^2 - 6\pi x + x^2}{12} \quad (1.44)$$

Из (1.38) для $0 < x < \pi$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (1.45)$$

Из (1.36) для $0 \leq x \leq \pi$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx \pi^2}{(2n)^3} = \frac{\pi^2}{8} \quad (1.46)$$

С помощью вычитания из равенства (1.41) равенства (1.45) найдем для $0 < x < \pi$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \pi^2}{2n} = \frac{\pi}{4} \quad (1.47)$$

а с помощью вычитания равенств (1.42) и (1.46) для $0 \leq x \leq \pi$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \pi^2 - 6nx}{24} = \frac{\pi^2}{24} \quad (1.48)$$

Установленные равенства позволяют получить выражения для сумм некоторых *числовых* рядов.

Так при $x=0$ из (1.42) и (1.44) находим:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

При $x = \pi/2$ равенство (1.45) дает:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

1.14. Комплексная форма ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Составим для нее ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.49)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

Вспользуемся известным тождеством Эйлера, связывающим тригонометрические функции с показательной:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Из этого тождества легко вытекает, что

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Поэтому можем написать:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \end{aligned}$$

Подстановка в (1.49) дает:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n - ib_n}{2} e^{-inx} \right) \quad (1.51)$$

Если положить

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad \dots, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad (n=1,2,\dots), \quad (1.52)$$

то m -я частная сумма ряда (1.51), а значит, и ряда (1.49) может быть записана так:



$$(1.53)$$

Поэтому естественна запись

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1.54)$$

Это и есть *комплексная форма ряда Фурье* для $f(x)$. Сходимость ряда (1.54) нужно понимать как существование предела при $m \rightarrow \infty$ *симметричных сумм* (1.53).

Коэффициенты c_n , дающиеся формулами (1.52), называются *комплексными коэффициентами Фурье* функции $f(x)$. Для них справедливы соотношения

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.55)$$

Действительно, в силу тождества Эйлера и формул



$$(1.56)$$

для положительных индексов и



для отрицательных индексов. Полезно иметь в виду, что для действительной функции $f(x)$ коэффициенты c_n и c_{-n} являются взаимно сопряженными комплексными числами. Это сразу следует из (1.52).

2. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ

2.1. Неравенство Бесселя и его следствие

Бесконечная система действительных функций

$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется попарно ортогональной на отрезке $[a, b]$, если $\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0$ ($n \neq m, n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots$). Будем также предполагать всегда, что

Система $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется нормированной, если $\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Всякую ортогональную систему можно нормировать. Это означает следующее: всегда можно подобрать постоянные $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots$ так чтобы система $\mu_0\varphi_0(x), \mu_1\varphi_1(x), \dots, \mu_n\varphi_n(x), \dots$, которая, очевидно, по-прежнему ортогональна, была уже и нормированной. Действи-

тельно, из условия $\int_a^b \mu_n^2 \varphi_n^2(x) dx = \mu_n^2 \int_a^b \varphi_n^2 dx = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

следует, что $\mu_n = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}}$. Наконец, введем обозначение

$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ и назовем это число нормой

функции $\varphi_n(x)$. Если система $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ нормирована, то, очевидно, $\|\varphi_n\| = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$.

Для основной тригонометрической системы $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ (1.1)

получаем

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx} = \sqrt{2\pi},$$

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \cdot dx} = \sqrt{\pi} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \cdot dx} = \sqrt{\pi}$$

Пусть $f(x)$ – функция с интегрируемым квадратом, заданная

на отрезке $[-\pi, \pi]$ В применении к системе (1.1) неравенство

Бесселя приобретает вид

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \cdot \|1\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 \|\cos nx\|^2 + b_n^2 \|\sin nx\|^2)$$

или
$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cdot \pi$$

откуда
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (1.2)$$

В такой именно форме и принято писать неравенство Бесселя

для случая основной тригонометрической системы.. Следовательно, справедлива.

Теорема. Ряд из квадратов коэффициентов Фурье любой функции с интегрируемым квадратом всегда есть ряд сходящийся. Полезно заметить, что для всякой иной функции (т.е. для всякой функции, квадрат которой не интегрируем) ряд из квадратов коэффициентов Фурье всегда расходится. Этого мы доказывать не будем.

2.2. Предел при $n \rightarrow \infty$ тригонометрических интегралов

$$\int_a^b f(x) \cos nx \cdot dx$$
 и
$$\int_a^b f(x) \sin nx \cdot dx$$
. Из предыдущей теоремы сразу следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad (2.1)$$

для любой функции с интегрируемым квадратом (поскольку

общий член сходящегося ряда обязательно стремится к нулю

при $n \rightarrow \infty$)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = 0 \quad (2.3)$$

каков бы ни был отрезок $[a, b]$ (пока мы предполагаем, что $f(x)$ — функция с интегрируемым квадратом, хотя позднее от этого требования откажемся). Действительно, допустим с начала, что $a < b \leq a + 2\pi$, т.е. $b - a \leq 2\pi$. И положим $g(x) = f(x)$ для $a \leq x \leq b$, $g(x) = 0$ для $b < x < a + 2\pi$. Функция $g(x)$, очевидно, с интегрируемым квадратом на отрезке $[a, a + 2\pi]$. Продолжим ее периодически (по периоду 2π) на всю ось Ox . Тогда по свойству периодических функций

$$\int_a^{a+2\pi} g(x) \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx \text{ откуда в силу (2.2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+2\pi} g(x) \cos nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx = 0$$

С другой стороны, из определения функции $g(x)$ следует, что

$$\int_a^{a+2\pi} g(x) \cos nx dx = \int_a^b f(x) \cos nx dx \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx dx = 0$$

Для второго интеграла в (2.3) рассуждение такое же. Если же $b - a > 2\pi$, то отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число частичных отрезков с длиной, не превосходящей 2π , для каждого из которых свойство, выраженное равенством (2.3) уже доказано. Но тогда это свойство будет справедливо и для всего отрезка. Теперь мы освободимся от требования того, что

$f(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом.

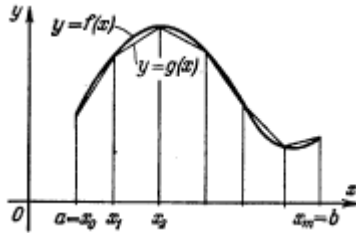


Рис. 23.

Более того, мы освободимся и от требования, что n является целым числом. Для этого нам понадобятся две леммы, довольно очевидные с геометрической точки зрения.

Лемма 1. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная и кусочно-гладкая функция $g(x)$ такая, что $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ (рис. 23)

Лемма 2. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируемая на отрезке $[a, b]$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная и кусочно-

гладкая функция $g(x)$ такая, что $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \varepsilon$.

Доказательство. Функция $f(x)$ может иметь лишь конечное число точек разрыва и, в частности, лишь конечное число точек, вблизи которых она не ограничена. Каждую такую точку заключим в промежуток столь малой длины, чтобы сумма интегралов от функции $|f(x)|$ по этим промежуткам не превосходила числа $\varepsilon/3$.

Пусть $\Phi(x)$ — вспомогательная функция, равная $f(x)$ вне упомянутых промежутков и равная нулю внутри их. $\Phi(x)$ ограничена, может иметь лишь конечное число разрывов и, очевидно,

$$\int_a^b |f(x) - \Phi(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.4)$$

Каждую точку разрыва функции $\Phi(x)$ в свою очередь заключим в столь малый промежуток, чтобы для суммарной длины l этих промежутков выполнялось условие $2Ml \leq \varepsilon/3$ где M - какое-нибудь число, превосходящее $|\Phi(x)|$ для $x \in [a, b]$

Рассмотрим непрерывную функцию $F(x)$, равную $\Phi(x)$ вне только что упомянутых промежутков и линейную внутри каждого из них. Очевидно,

$$\int_a^b |\Phi(x) - F(x)| dx \leq 2Ml \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.5)$$

Наконец, по лемме 1 существует кусочно-гладкая непрерывная

функция $g(x)$, для которой

$$|F(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad (a \leq x \leq b), \text{ откуда}$$

$$\int_a^b |F(x) - g(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ Из (2.4), (2.5) вытекает:}$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \\ & \leq \int_a^b |f(x) - \Phi(x)| dx + \int_a^b |\Phi(x) - F(x)| dx + \int_a^b |F(x) - g(x)| dx \leq \varepsilon \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если $f(x)$ – абсолютно интегрируемая и периодическая функция, то и функцию $g(x)$ можно взять периодической.

Теорема. Для любой абсолютно интегрируемой функции

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos mx dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin mx dx = 0 \quad (2.6)$$

причем m не предполагается целым.

Доказательство. Пусть ε — произвольно малое положительное число. В силу леммы 2 существует непрерывная и кусочно-гладкая функция $g(x)$, для которой

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.7)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos mx dx \right| &= \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] \cos mx dx + \int_a^b g(x) \cos mx dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \left| \int_a^b g(x) \cos mx dx \right| \end{aligned} \quad (2.8)$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int_a^b g(x) \cos mx dx = \frac{1}{m} [g(x) \sin mx]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g'(x) \sin mx dx$$

Выражение в квадратных скобках и интеграл справа, очевидно, ограничены. Поэтому для всех достаточно больших значений m

$$\left| \int_a^b g(x) \cos mx dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.9)$$

В силу (2.7) и (2.9) из (2.8) вытекает, что для всех достаточно больших m

$$\left| \int_a^b f(x) \cos mx dx \right| \leq \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos mx dx = 0 \quad \text{Для}$$

второго интеграла (2.6) рассуждение то же. Теорема доказана.

Если мы вспомним формулы для коэффициентов Фурье, то из доказанной теоремы получим другое следствие.

Коэффициенты Фурье для любой абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. В начале параграфа это свойство нами было доказано для функций с интегрируемым квадратом, а теперь мы его распространяем на любые абсолютно интегрируемые функции. Следует заметить, что при отказе от условия абсолютной интегрируемости функции коэффициенты Фурье уже могут и не стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$.

2.3. Формула для суммы косинусов. Вспомогательные интегралы

Докажем, что

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad (2.10)$$

Для этого сумму слева обозначим через S . Очевидно,

$$2S \sin \frac{u}{2} = \sin \frac{u}{2} + 2 \cos u \sin \frac{u}{2} + 2 \cos 2u \sin \frac{u}{2} + \dots + 2 \cos nu \sin \frac{u}{2}.$$

Применяя к каждому произведению справа формулу $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$

найдем:

$$2S \sin \frac{u}{2} = \sin \frac{u}{2} + \left(\sin \frac{3}{2}u - \sin \frac{u}{2} \right) + \left(\sin \frac{5}{2}u - \sin \frac{3}{2}u \right) + \dots$$

$$+ \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) u \right) = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u \quad \text{Отсюда}$$

$$S = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad \text{что и требовалось доказать.}$$

Установим еще две вспомогательные формулы.

Проинтегрировав равенство (2.10) по отрезку $[-\pi, \pi]$ и разделив результат на π , получим:

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \quad (2.11)$$

каково бы ни было n (так как интегралы от косинусов равны нулю). Нетрудно сообразить, что под интегралом в (2.11) стоит четная функция (смена знака u и меняет знак и в числителе и в знаменателе и, следовательно, отношение остается неизменным).

Поэтому

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{1}{2} \quad (2.12)$$

2.4. Интегральная формула для частной суммы ряда Фурье

Пусть $f(x)$ имеет период 2π и

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Положим:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Подставив сюда выражения для коэффициентов Фурье, получим:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt \end{aligned}$$

или, воспользовавшись формулой (2.10),

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (t-x) \right]}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt$$

В этом интеграле произведем замену переменного, положив

$t-x=u$. Это даст:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

Функции $f(x+u)$ и $\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}}$ по переменному и имеют

Период 2π (см. равенство (2.10)), а отрезок $[-\pi-x, \pi-x]$ имеет длину равную 2π . Следовательно, интеграл по этому отрезку совпадает с интегралом по отрезку $[-\pi, \pi]$ (см. 1.1 гл. I), и мы получаем:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \quad (2.13)$$

Эта интегральная формула для частной суммы ряда Фурье позволит нам установить условия, при которых может быть гарантирована сходимость ряда к функции $f(x)$.

2.5. Правая и левая производные

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x справа, т.е. $f(x+0)=f(x)$. Скажем, что $f(x)$ имеет в точке x правую производную, если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} = f'_+(x) \quad (2.14)$$

Если же $f(x)$ непрерывна в точке x слева, т.е. $f(x-0)=f(x)$ и существует конечный предел

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u < 0}} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} = f'_-(x) \quad (2.15)$$

то скажем, что $f(x)$ имеет в точке x левую производную.

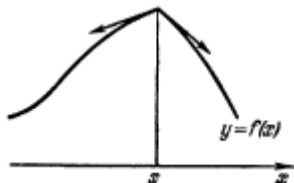


Рис. 24.

В случае когда $f'_+(x) = f'_-(x)$ функция $f(x)$ в точке x имеет, обычную производную, численно равную общему значению правой и левой производных, т.е. кривая $y=f(x)$ в точке с абсциссой x имеет касательную.

В случае же, когда $f'_+(x) \neq f'_-(x)$, но та и другая производные существуют, кривая $y=f(x)$ имеет «излом», и можно говорить о наличии правой и левой касательных (на рис. 24 указаны стрелками). Пусть теперь x есть точка разрыва первого рода.

Тогда, если существует конечный предел (вместо (2.14))

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} = f'_+(x) \quad (2.16)$$

то $f(x)$ в точке x имеет правую производную.

Если же существует конечный предел (вместо (2.15))

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u < 0}} \frac{f(x+u) - f(x-0)}{u} = f'_-(x) \quad (2.17)$$

то мы говорим о наличии в точке x левой производной.

Существование правой производной в точке разрыва $x=x_0$ равносильно существованию касательной при $x=x_0$ к графику функции $y = f_+(x)$, совпадающей с $f(x)$ для $x>x_0$ и равной $f(x_0+0)$ при $x=x_0$ (функция $f_+(x)$ определена, таким образом, лишь для $x \geq x_0$). Точно так же существование левой производной при $x=x_0$ к графику функции $y = f_-(x)$ совпадающей с $f(x)$ для $x<x_0$ и равной $f(x_0 - 0)$ при $x=x_0$ (функция $y = f_-(x)$ определена $x \leq x_0$). Так, для функции

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{для } x < 1, \\ 0 & \text{для } x = 1, \\ \sqrt{x} & \text{для } x > 1, \end{cases}$$

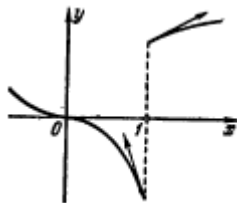


Рис. 25.

график которой изображен на рис. 25, в точке $x=1$, являющейся точкой разрыва, очевидно, имеем:

$$f_+(x) = \sqrt{x} \text{ для } x \geq 1,$$

$$f_-(x) = -x^3 \text{ для } x \leq 1,$$

и, следовательно,

$$f'_+(1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)_{x=1} = \frac{1}{2},$$

$$f'_-(1) = \left(-3x^2 \right)_{x=1} = -3$$

Соответствующие касательные изображены на чертеже в виде стрелок.

2.6. Достаточное условие для сходимости ряда Фурье в точке непрерывности функции

Мы докажем, что в каждой точке непрерывности абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ периода 2π , в которой $f(x)$ обладает правой и левой производными, ряд Фурье сходится и имеет своей суммой $f(x)$. В частности, это будет иметь место в каждой точке дифференцируемости $f(x)$. Пусть x есть точка непрерывности функции $f(x)$, в которой существуют правая и левая производные. Нужно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = f(x) \tag{2.18}$$

Из (2.11) следует:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

Поэтому вместо (2.18) можем написать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = 0 \quad (2.19)$$

Задача, таким образом, свелась к доказательству этого равенства. Прежде всего установим абсолютную интегрируемость

Функции

$$\varphi(u) = \frac{f(x+u) - f(x)}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \cdot \frac{u}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad (2.20)$$

(x фиксировано).

Так как $f(x)$ в точке x обладает правой и левой производными, то отношение

$$\frac{f(x+u) - f(x)}{u} \quad (2.21)$$

остается ограниченным при $u \rightarrow 0$. Иными словами, существует число $\delta > 0$, такое, что

$$\left| \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \right| \leq M = \text{const}$$

для $-\delta \leq u \leq \delta$. Так как при $u \neq 0$ это отношение может иметь разрывы лишь там, где их имеет $f(x+u)$ (а эта функция, будучи абсолютно интегрируемой, поскольку абсолютно интегрируема функция $f(x)$ б) может иметь лишь конечное число разрывов), то оно представляет собой абсолютно интегрируемую на $[-\delta, \delta]$.

Вне отрезка $[-\delta, \delta]$ отношение (2.21) представляет собой произведение абсолютно интегрируемой функции $f(x+u) - f(x)$ на ограниченную функцию $\frac{1}{u}$ (так как из $|u| \geq \delta$ следует,

что $\left| \frac{1}{u} \right| \leq \frac{1}{\delta}$) и поэтому является функцией абсолютно интегрируемой. Итак, отношение (2.21) представляет собой абсолютно интегрируемую функцию как внутри отрезка $[-\delta, \delta]$, так и вне этого отрезка. Следовательно, абсолютная интегрируемость имеет место и на $[-\pi, \pi]$. С другой стороны функция

$$\frac{u}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad (2.22)$$

непрерывна при $u \neq 0$ и стремится к единице для $u \rightarrow 0$).

Следовательно, она представляет собой ограниченную непрерывную функцию (не определенную лишь для $u=0$). Таким образом $\varphi(u)$ (см. (2.20)), представляя собой произведение абсолютно интегрируемой функции (2.21) на ограниченную функцию (2.22), сама является абсолютно интегрируемой. Но

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u du$$

Поэтому в силу (2.6) отсюда следует равенство (2.19).

2.7. Достаточное условие для сходимости ряда Фурье в точке разрыва функции

Докажем, что в каждой точке разрыва абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ периода 2π , в которой $f(x)$ обладает правой и левой производными, ряд Фурье сходится и имеет своей суммой число

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

В силу (2.13) нужно доказать равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Для этого достаточно установить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{f(x+0)}{2} \quad (2.23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{f(x-0)}{2} \quad (2.24)$$

Мы ограничимся доказательством равенства (2.23), так как для (2.24), рассуждение ничем существенным не отличается.

Ввиду (2.12)

$$\frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+0) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

Поэтому вместо (2.23) можем доказывать равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = 0 \quad (2.25)$$

Сначала установим абсолютную интегрируемость на отрезке $[0, \pi]$ функции переменного u :

$$\varphi(u) = \frac{f(x+u) - f(x+0)}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} \cdot \frac{u}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

Так как $f(x)$ в точке x обладает правой производной, то отношение

$$\frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} \quad (u > 0) \quad (2.26)$$

остается ограниченным при $u \rightarrow 0$). Отсюда (как и для отношения (2.21)) мы делаем заключение о его абсолютной интегри-

руемости. Поскольку функция $\frac{u}{2 \sin \frac{u}{2}}$ ограничена, то абсолютно интегрируемой на $[0, \pi]$ оказывается и функция $\varphi(u)$.

Но

$$\int_0^{\pi} [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \int_0^{\pi} \varphi(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u du$$

и, чтобы получить (2.25), остается применить (2.6).

2.8. Обобщение достаточных условий сходимости ряда Фурье

Анализ доказательств, приведенных в 2.6 и 2.7, приводит к выводу, что существование правой и левой производных в точке x потребовалось лишь для того, чтобы можно было утверждать абсолютную интегрируемость отношения

$$\frac{f(x+u) + f(x)}{u} \quad (2.27)$$

в 2.6 (см (2.21) и далее) и абсолютную интегрируемость отношений

$$\left. \begin{array}{l} \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} \quad (u > 0) \\ \frac{f(x+u) - f(x-0)}{u} \quad (u < 0) \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

в 2.7 (см. (2.26) и далее), где x фиксировано и отношения рассматриваются как функции переменного u . Следовательно, если мы эту абсолютную интегрируемость потребуем (отказавшись от условия существования правой и левой производных), то получим более общий признак сходимости: Ряд Фурье абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ периода 2π сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности, в которой отношение (2.27) представляет собой абсолютно интегрируемую функцию переменного u , и сходится к значению $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

в каждой точке разрыва, в которой абсолютно интегрируемы оба отношения (2.28).

2.9. Сходимость ряда Фурье для кусочно-гладкой функции (непрерывной или разрывной)

Как следствие 2.6 и 2.7 может быть получена.

Теорема. Если $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция периода 2π , кусочно гладкая на отрезке $[a, b]$, то ряд Фурье сходится для всех x , удовлетворяющих условию $a < x < b$, причем его сумма равна $f(x)$ в точках непрерывности и равна зна-

чению $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ в точках разрыва (для значений $x=a$ и $x=b$ сходимость может не иметь места).

Теорема есть простое следствие того факта, что кусочно-гладкая на $[a, b]$ функция (см. 1.9) для каждого x , $a < x < b$, обязательно имеет правую и левую производные (и нам остается применить признаки 2.6 и 2.7). Для точек дифференцируемости функции это ясно. Для угловой точки с помощью известной формулы Лагранжа мы получаем:

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} f'(\xi) = f'(x+0)$$

так как $x < \xi < x+u$, и, следовательно $\xi \rightarrow x$, $\xi > x$.

Подобным образом для точки разрыва функции:

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} f'(\xi) = f'(x+0)$$

Иными словами, и в угловой точке, и в точке разрыва имеется правая производная. Существование левой производной устанавливается аналогично. Что касается концов отрезка $[a, b]$, то из условия теоремы следует существование лишь правой производной для $x=a$ и лишь левой производной для $x=b$. Следовательно, признаки 2.6 и 2.7 мы здесь применять не можем. Если отрезок $[a, b]$ имеет длину 2π , то легко сообразить, что $f(x)$ оказывается кусочно-гладкой на всей оси Ox (поскольку $f(x)$ – периодическая функция). В этом случае ряд Фурье оказывается всюду сходящимся. Мы получили то, что составляет первую часть признака, сформулированного в 1.10. Вторая часть, касающаяся абсолютной и равномерной сходимости ряда в случае непрерывности $f(x)$, будет доказана в следующем параграфе.

2.10. Абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье непрерывной и кусочно-гладкой функции периода 2π

Пусть $f(x)$ — непрерывная и кусочно-гладкая функция периода 2π . Производная $f'(x)$ существует всюду, за исключением угловых точек графика $f(x)$, и является ограниченной функцией (см. 1. 9). Поэтому, применяя формулу интегрирования по частям (что допустимо ввиду 1.4), получим:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi n} [f(x) \sin nx]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = -\frac{1}{\pi n} [f(x) \cos nx]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx,$$

Первые члены справа в обеих формулах обращаются в нуль.

Следовательно, если обозначить через a'_n и b'_n коэффициенты Фурье функции $f'(x)$, то найдем

$$a_n = -\frac{b'_n}{n}, b_n = \frac{a'_n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.29)$$

Так как $f'(x)$ ограничена и, следовательно, является функцией с интегрируемым квадратом, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2) \quad (2.30)$$

сходится. Рассмотрим очевидные соотношения

$$\left(|a'_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = a_n'^2 - \frac{2|a'_n|}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0,$$

$$\left(|b'_n| - \frac{1}{n}\right)^2 = b_n'^2 - \frac{2|b'_n|}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0,$$

откуда

$$\frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \leq \frac{1}{2}(a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2}$$

Справа здесь стоит член сходящегося ряда. Поэтому и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \right), \text{ но тогда из (2.29) следует.}$$

Для любой непрерывной кусочно-гладкой функции ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \tag{2.31}$$

сходится.

Замечание. Для доказательства сходимости ряда (2.31) мы использовали лишь сходимость ряда (2.30). Последнее будет иметь место для непрерывной функции $f(x)$ периода 2π всегда, когда $f'(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом ($f'(x)$ может и не существовать в отдельных точках*). Поэтому сходимость ряда (2.31) имеет место и в этом случае.

Теперь обратим внимание на очень простой, но и очень важный факт. Пусть дан некоторый тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.32}$$

(заранее не предполагается, что этот ряд является рядом Фурье для какой-либо функции). Тогда имеет место

Теорема 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ сходится, то ряд (2.32) сходится абсолютно и равномерно и, следовательно, имеет не-

прерывную сумму, для которой является рядом Фурье (см. Теорему 1 1. 6).

Действительно,

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$$

Таким образом, члены функционального ряда (2.32) по абсолютной величине не превосходят членов сходящегося ряда. Отсюда и вытекает справедливость нашего утверждения (см. 1.4).

Из доказанного вытекает

Теорема 2. *Ряд Фурье непрерывной кусочно-гладкой функции $f(x)$ периода 2π сходится к ней абсолютно и равномерно.*

Мы получили вторую часть признака в 1.10 . Из этой теоремы следует, что непрерывная и кусочно-гладкая функция $f(x)$ периода 2π для больших n должна хорошо аппроксимироваться частными суммами $s_n(x)$ ее ряда Фурье (именно к этому и сводится сущность понятия равномерной сходимости) – см. 1.4). Для иллюстрации этого рассмотрим периодическую, непрерывную и кусочно-гладкую функцию $f(x)$, совпадающую с $|x|$ для $-\pi \leq x \leq \pi$. В примере 2 нами было установлено, что

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

На рис.26 изображен график $f(x)$ и частной суммы ее ряда

Фурье

$$s_5(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \right).$$

Мы видим, что уже при $n=5$ графики весьма близко прилегают друг к другу.

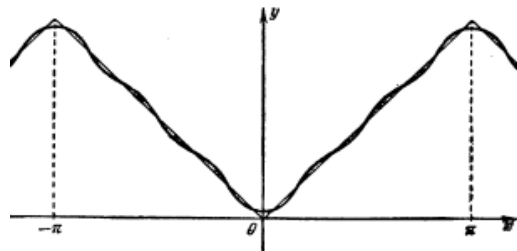


Рис. 26.

Обобщение теоремы 2: Ряд Фурье непрерывной функции $f(x)$ периода 2π , производная которой есть функция с интегрируемым квадратом (последняя может и не существовать в отдельных точках), сходится к $f(x)$ абсолютно и равномерно.

2.11. Равномерная сходимость ряда Фурье непрерывной функции периода 2π , обладающей абсолютно интегрируемой производной

Лемма 1. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция периода 2π , обладающая абсолютно интегрируемой производной (последняя может и не существовать в отдельных точках), а $\omega(u)$ ($\alpha \leq u \leq \beta$) — функция с непрерывной производной. Тогда, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, для всех значений x справедливо неравенство

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x+u)\omega(u) \sin mu du \right| \leq \varepsilon \quad (2.33)$$

лишь только m достаточно велико (m не предполагается целым).

Доказательство. Интегрирование по частям дает:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x+u)\omega(u)\sin mudu = \frac{1}{m} \left[-f(x+u)\omega(u)\cos mu \right]_{u=\alpha}^{u=\beta} + \\ + \frac{1}{m} \int_{\alpha}^{\beta} [f(x+u)\omega(u)]' \cos mudu \quad (2.34)$$

Скобка в правой части, очевидно, ограничена. Так как

$$[f(x+u)\omega(u)]' = f'(x+u)\omega(u) + f(x+u)\omega'(u) \quad (2.35)$$

то отсюда легко вытекает и ограниченность интеграла справа.

Действительно, величины $\omega(u)$ и $f(x+u)\omega'(u)$ ограничены и, следовательно, по абсолютной величине не превосходят некоторой постоянной M . Но тогда в силу (2.35)

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} [f(x+u)\omega(u)]' \cos mudu \right| \leq M \int_{\alpha}^{\beta} |f'(x+u)| du + M(\beta - \alpha) \leq$$

$$\leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f'(u)| du + M(\beta - \alpha) = \text{const} \quad (\text{мы воспользовались}$$

периодичностью функции $f(x)$, а значит, и $|f'(x)|$ и предположили, что $\beta - \alpha \leq 2\pi$; последнее, впрочем не существенно, но достаточно нам для дальнейшего).

Раз скобка и интеграл в (2.34) ограничены, то справедливость (2.33) становится очевидной.

Лемма 2. Интеграл

$$I = \int_0^u \frac{\sin mt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \quad (2.36)$$

ограничен при любом m и $-\pi \leq u \leq \pi$. Действительно,

$$I = \int_0^u \frac{\sin mt}{t} dt + \int_0^u \omega(t) \sin mt dt, \quad (2.37)$$

где положено $\omega(t) = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$. Применение правила Лопиталя

позволяет убедиться в том, что $\omega(t)$ и $\omega'(t)$ непрерывны (если принять $\omega(0)=0$). Второй интеграл в (2.37), очевидно, ограничен. С другой стороны, положив $mt=x$, получим:

$$\int_0^u \frac{\sin mt}{t} dt = \int_0^{mu} \frac{\sin x}{x} dx, \text{ а этот последний интеграл, как}$$

легко сообразить, не превосходит площади первой арки кривой $y = \frac{\sin x}{x}$ (рис. 27).

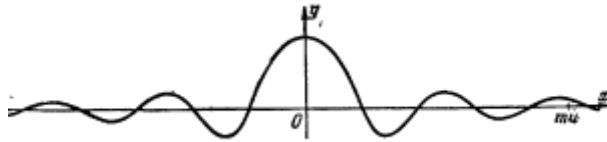


Рис. 27.

Тем самым ограничен каждый интеграл справа в (2.37).

Следовательно, ограничен и интеграл I. Можно доказать теоремы:

Теорема 1. Ряд Фурье непрерывной функции $f(x)$ периода 2π , обладающей абсолютно интегрируемой производной (последняя может и не существовать в отдельных точках), сходится к $f(x)$ равномерно для всех x .

Теорема 2. Пусть $f(x)$ – абсолютно интегрируемая функция периода 2π , непрерывная и обладающая абсолютно интегрируемой производной на некотором отрезке $[a, b]$ (производная может и не существовать в отдельных точках).

Тогда ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно на всяком отрезке $[a+\delta, b-\delta]$ ($\delta > 0$). В примере 5 1.13 было доказано, что

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots$$

(для $x \neq k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2$)),

а в этих точках $f(x)=0$. На рис. 28 изображены график $f(x)$ и графики частных сумм ее ряда Фурье:

$$s_1(x) = \sin x, s_3(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3},$$

$$s_5(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}, s_7(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7}.$$

Чертеж ясно показывает равномерный характер приближения частных сумм к $f(x)$ на отрезках $[-\pi+\delta, -\delta]$ и $[\delta, \pi-\delta]$ ($\delta > 0$), на которых $f(x)$ — гладкая функция. Заметим, что число δ может быть взято сколь угодно малым (но отличным от нуля).

При этом нетрудно сообразить, что с уменьшением δ для хорошей аппроксимации $f(x)$ на упомянутых отрезках (точнее говоря, для аппроксимации с заданной степенью точности) нам придется брать частные суммы с большими номерами.

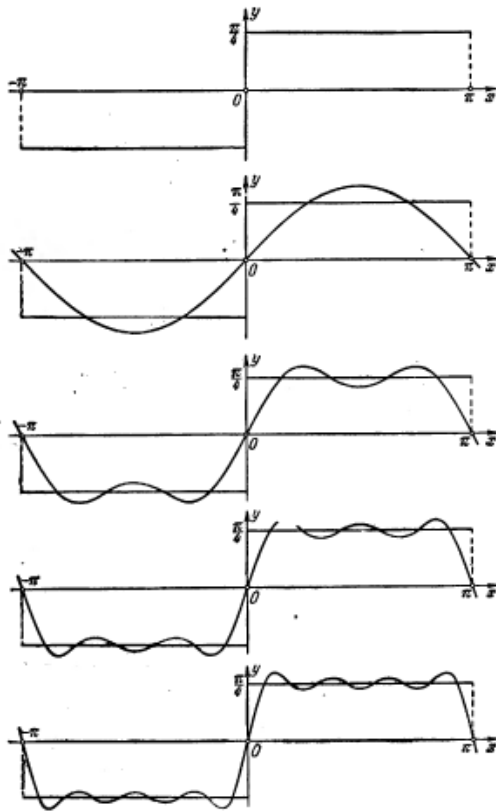


Рис. 28.

2.12. Примеры разложения в ряд Фурье неограниченных функций

Пример 1. $f(x) = -\ln|2 \sin x/2|$. Эта функция — четная и обращается в бесконечность для $x=2k\pi$ ($0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Покажем, что $f(x)$ имеет период 2π .

Действительно,

$$\left| 2 \sin \frac{x+2\pi}{2} \right| = \left| 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \pi \right) \right| = \left| -2 \sin \frac{x}{2} \right| = \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|$$

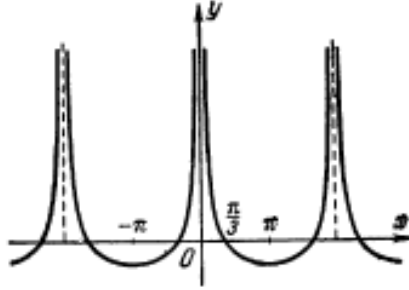


Рис. 29.

Поэтому и

$$\ln \left| 2 \sin \frac{x+2\pi}{2} \right| = \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|, \text{ что и доказывает периодичность } f(x).$$

Чтобы доказать интегрируемость $f(x)$, достаточно установить это для отрезка $[0, \pi/3]$.

Очевидно,

$$\begin{aligned} & - \int_{\varepsilon}^{\pi/3} \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx = - \int_{\varepsilon}^{\pi/3} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) dx = \\ & = - \left[x \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \right]_{x=\varepsilon}^{x=\pi/3} + \int_{\varepsilon}^{\pi/3} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \varepsilon \ln \left(2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right) + \int_{\varepsilon}^{\pi/3} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx \end{aligned}$$

(знак абсолютной величины можно отбросить, так как для $0 < x < \pi/3$, $2 \sin x/2 > 0$).

При $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $\varepsilon \ln(2 \sin \varepsilon/2)$ стремится к нулю (в чем легко убедиться с помощью известного правила Лопиталья), а

последний интеграл стремится к интегралу $\int_0^{\pi/3} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx$

очевидно имеющему смысл, так как подынтегральная функция ограничена (ведь $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \sin \frac{x}{2}} = 1$).

Таким образом, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/3} \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx$ существует, а это и

означает интегрируемость $f(x)$ на отрезке $[0, \pi/3]$. Поскольку на этом отрезке $f(x)$ сохраняет знак (см. рис. 29), то интегрируемость — абсолютная.

В силу четности $f(x)$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Прежде всего вычислим интеграл

$$I = \int_0^{\pi} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^{\pi} \left(\ln 2 + \ln \sin \frac{x}{2} \right) dx = \pi \ln 2 + \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx$$

Последний интеграл обозначим через Y .

Подстановка $x=2t$

$$Y = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) dt =$$

$$= \pi \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin \frac{t}{2} dt + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \cos \frac{t}{2} dt$$

дает:

Подстановка $t = \pi - u$ дает:

$$2 \int_0^{\pi/2} \ln \cos \frac{t}{2} dt = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin \frac{u}{2} du = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin \frac{t}{2} dt$$

Поэтому $Y = \pi \ln 2 + 2Y$, откуда $Y = -\pi \ln 2$.

Отсюда в свою очередь следует, что $I=0$, а значит, и $a_0=0$.

Далее, интегрирование по частям дает:

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \sin nx}{n} \right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx$$

(первый член в фигурной скобке равен нулю, так как неопределенность, получающаяся при $x \rightarrow 0$, легко «раскрывается» по правилу Лопиталья).

Но

$$\sin nx \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x \right], \text{ и поэтому}$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx + \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx$$

что ввиду формул (2.12) :

$$a_n = \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

Так как функция $f(x)$, очевидно, дифференцируема для $x \neq 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то

$$-\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| = \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots \quad (2.38)$$

для $x \neq 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Следует заметить, что при $x=2k\pi$ и левая правая части равенства (2.38) обращаются в бесконечность.

Таким образом, в известном смысле равенство (2.38) можно считать справедливым для всех x . Положив в (2.38) $x=\pi$, получим известное равенство $\ln 2=1-1/2+1/3-1/4+\dots$

Пример 2. $f(x) = \ln|2 \cos x/2|$. Эта функция — четная и обращается в отрицательную бесконечность для $x = (2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Положив $x = t - \pi$, видим, что

$$\ln\left|2 \cos \frac{x}{2}\right| = \ln\left|2 \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \ln\left|2 \sin \frac{t}{2}\right|$$

т.е. график функции $\ln|2 \cos x/2|$ получается из графика функции $\ln|2 \sin x/2|$ сдвигом на π . Чтобы получить разложение в ряд Фурье функции $f(x)$, достаточно в разложении

$$\ln\left|2 \sin \frac{t}{2}\right| = -\cos t - \frac{\cos 2t}{2} - \frac{\cos 3t}{3} - \dots$$

сделать подстановку $t = x + \pi$. При этом получим

$$\ln\left|2 \cos \frac{x}{2}\right| = \cos x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \dots \quad (2.39)$$

для $x \neq (2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Впрочем, поскольку для $x = (2k+1)\pi$ обе части равенства (2.39) обращаются в отрицательную бесконечность, то это равенство можно считать справедливым для всех x .

В этой главе и далее — в вопросах теории — мы не говорим о разложении в тригонометрические ряды функций периода $T=2l$, так как можно легко перейти от случая «стандартного» периода 2π к случаю любого периода.

3. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ. УМНОЖЕНИЕ НА ЧИСЛО

Чтобы получить ряд Фурье для суммы или разности двух функций, ряды Фурье которых известны, достаточно произвести сложение или, соответственно, вычитание этих известных рядов.

Действительно, пусть

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \\ f(x) &\sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx). \end{aligned} \right\}$$

Для коэффициентов Фурье a_n и β_n функции $f(x) \pm F(x)$

тогда получим

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F(x) \pm f(x)) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \pm \\ &\pm \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx = a_n \pm A_n \quad \text{и аналогично } \beta_n = b_n \pm B_n, \end{aligned}$$

что и доказывает сказанное нами. Совершенно так же показывается, что ряд Фурье для функции $kf(x)$ ($k = \text{const}$) получается из ряда Фурье для $f(x)$ умножением всех его членов на k .

3.1. Умножение рядов Фурье

Как составить ряд Фурье для произведения $f(x) \cdot F(x)$, когда известны ряды Фурье для сомножителей? Чтобы ответить на этот вопрос, будем рассуждать так. Прежде всего предположим, что $f(x)$ и $F(x)$ являются функциями с интегрируемым квадратом. Тогда произведение $f(x)F(x)$ представляет собой функцию, заведомо интегрируемую. Заметим, что при отказе

от требования, предъявленного нами к $f(x)$ и $F(x)$, произведение $f(x)F(x)$ может оказаться неинтегрируемым, и тогда вопрос о ряде Фурье для этого произведения станет бессмысленным.

Пусть, далее, для $f(x)$ и $F(x)$ имеет место

$$f(x)F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

Наша задача — выразить коэффициенты α_n и β_n через a_n , b_n , A_n и B_n .

Находим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx = \frac{a_0 b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n). \quad (3.1)$$

и

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x) \cos nx dx, \quad (3.2)$$

Вычислим эти коэффициенты:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \cdot \cos mx dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(m+n)x dx + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(m-n)x dx \right] \right]. \end{aligned}$$

Это дает:

$$\frac{1}{2}(A_{m+n} + A_{m-n}), \quad \text{если } m \geq n, \quad \frac{1}{2}(A_{n+m} + A_{n-m}), \quad \text{если } m < n,$$

Если мы раз навсегда положим

$A_{-k} = A_k$, то можем писать:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}(A_{m+n} + A_{m-n}).$$

Аналогично

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \sin mxdx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(m+n)xdx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(m-n)xdx \right] = \frac{1}{2} (B_{m+n} + B_{m-n}),$$

где положено $B_{-k} = B_k$.

Итак, мы знаем коэффициенты Фурье функции $F(x)\cos nx$. Тогда можно получить:

$$a_n = \frac{a_0 A_n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_m (A_{m+n} + A_{m-n}) + b_m (B_{m+n} + B_{m-n})] \quad (3.3)$$

Совершенно аналогично найдем:

$$a_n = \frac{a_0 B_n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_m (B_{m+n} - B_{m-n}) - b_m (B_{m+n} + B_{m-n})] \quad (3.4)$$

Формулы (3.1), (3.3) и (3.4) дают решение нашей задачи. Заметим, что эти формулы можно получить путем *формального* перемножения рядов (3.1) (т.е. рассуждая так, как будто эти ряды сходятся и перемножение законно) с последующей заменой

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

4.1. Интегрирование рядов Фурье

В приложениях могут встретиться случаи, когда известен лишь ряд Фурье, но не сама функция. В связи с этим возникают задачи:

- 1) Зная ряд Фурье функции $f(x)$ периода 2π , вычислить

$$\int_a^b f(x) dx,$$

где $[a, b]$ — произвольный отрезок.

2) Зная ряд Фурье функции $f(x)$, составить ряд Фурье для функции

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx.$$

Ответ на первую задачу дает

Теорема 1. Если абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ задана своим рядом Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (4.1)$$

то $\int_a^b f(x) dx$ может быть найден почленным интегрированием ряда (1.1) независимо от того, сходится последний или нет, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\sin nb - \sin na) - b_n(\cos nb - \cos na)}{n}. \quad (4.2)$$

Положим:

$$F(x) = \int_0^x \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx. \quad (4.3)$$

Эта функция непрерывна, имеет абсолютно интегрируемую производную (не существующую, быть может, в конечном числе точек), причем

$$\begin{aligned} F(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx + \int_x^{x+2\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx = \\ &= F(x) + \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx = F(x) + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \pi a_0 = F(x). \end{aligned}$$

т. е. $F(x)$ имеет период 2π . Поэтому $F(x)$ может быть разложена в ряд Фурье:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

Интегрирование по частям для $n \geq 1$ дает:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} -$$

$$- \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] \sin nx dx = - \frac{b_n}{n},$$

и аналогично $B_n = \frac{a_n}{n}$.

Следовательно

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n} \quad \text{и}$$

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{a_0 x}{2} + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}. \quad (4.4)$$

Теорема 2. Пусть абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ задана своим рядом Фурье (сходящимся или нет)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

Тогда для ее интеграла имеет место следующее разложение в ряд Фурье:

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos nx + (a_n + (-1)^{n+1} a_0) \sin nx}{n}$$

$$(-\pi < x < \pi) \quad (4.5)$$

Для доказательства воспользуемся равенством (4.4). Положив там $x=0$, найдем:

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (4.6)$$

С другой стороны, в силу (1.43) для $(-\pi < x < \pi)$

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}. \quad (4.7)$$

Подстановка (4.6) и (4.7) в (4.4) и дает (4.5).

Замечание. Попутно нами была доказана сходимость для всякой абсолютно интегрируемой функции ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$.

Теорема 3. В случае $a_0 = 0$ (прочие условия — по теореме 2) для всех x

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n}. \quad (4.8)$$

т. е. ряд Фурье для интеграла может быть получен почленным интегрированием ряда для $f(x)$. Формула (4.8) получается из (4.5) простой подстановкой туда значения $a_0 = 0$. Справедливость же ее для всех x (а не только для $(-\pi < x < \pi)$, как в (4.5)) вытекает из периодичности интеграла слева, а что это действительно так, видно из следующего:

$$\int_0^{x+2\pi} f(x)dx = \int_0^x f(x)dx + \int_x^{x+2\pi} f(x)dx = \int_0^x f(x)dx + \pi a_0 = \int_0^x f(x)dx.$$

Формула (4.8) позволяет получить много новых тригонометрических разложений, отправляясь от какого-нибудь известного. Например, мы знаем, что для $(-\pi < x < \pi)$

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots$$

Интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} &= \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots\right) - \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right) = \\ &= C - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad C = \text{const.} \end{aligned}$$

Чтобы найти C , интегрируем последнее равенство по отрезку $[-\pi, \pi]$. Так как ряд справа сходится равномерно, то почленное интегрирование законно, и мы получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = 2\pi C - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 2\pi C$$

Следовательно,

$$C = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{12}. \quad \text{Поэтому}$$

$$\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}$$

Интегрируем еще раз:

$$\int_0^x \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3}$$

$$\text{или } \frac{\pi^2}{12} x - \frac{x^3}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

4.2. Дифференцирование рядов Фурье. Случай непрерывной функции периода 2π

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция периода 2π , обладающая абсолютно интегрируемой производной (которая может и не существовать в отдельных точках). Тогда ряд Фурье для $f'(x)$ может быть получен из ряда Фурье функции $f(x)$ почленным дифференцированием.

Доказательство. Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (4.9)$$

Обозначим через a'_n и b'_n коэффициенты Фурье для $f'(x)$. Прежде всего,

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0$$

Далее, интегрирование по частям дает:

$$\left. \begin{aligned}
 a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} [f(x) \cos nx]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \\
 &+ \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = nb_n, \\
 b'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} [f(x) \sin nx]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \\
 &- \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -na_n.
 \end{aligned} \right\} (4.10)$$

Поэтому

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx + a_n \sin nx),$$

а это и есть ряд, получающийся из (4.4) почленным дифференцированием.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ —непрерывная функция периода 2π , обладающая m производными, причем $m - 1$ производных непрерывны, а m -я производная абсолютно интегрируема (эта m -я производная может и не существовать в отдельных точках). Тогда: 1) ряды Фурье для всех m производных могут быть получены почленным дифференцированием ряда Фурье для $f(x)$, причем все эти ряды, кроме, быть может, последнего, сходятся к соответствующим производным; для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ имеют место соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^m a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^m b_n = 0 \quad (4.11)$$

Чтобы получить доказательство первого утверждения, достаточно m раз применить теорему 1. Сходимость всех получающихся почленным дифференцированием рядов, кроме, быть может, последнего, к соответствующим производным вытекает из дифференцируемости этих производных (до $(m - 1)$ -й включительно).

Теорема 3. Пусть дан тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (4.12)$$

Если для коэффициентов a_n и b_n справедливы соотношения

$$|n^m a_n| \leq M, \quad |n^m b_n| \leq M \quad (m \geq 2, M \text{ const}), \quad (4.13)$$

то сумма ряда (4.12) есть непрерывная функция периода 2π , обладающая $m - 2$ непрерывными производимыми, которые могут быть получены почленным дифференцированием ряда (4.12).

4.3. Дифференцирование рядов Фурье.

Случай функции, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$

Теорема 1. Пусть непрерывная функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$ и обладает абсолютно интегрируемой производной (которая может и не существовать в отдельных точках).

Тогда

$$f'(x) \sim \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nb_n + (-1)^n c) \cos nx - na_n \sin nx], \quad (4.14)$$

где a_n и b_n -коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а постоянная c определяется равенством

$$c = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)]. \quad (4.15)$$

Доказательство. Пусть

$$f'(x) \sim \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx).$$

Следовательно,

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)].$$

Очевидно,

$$f'(x) - \frac{a'_0}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx). \quad (4.16)$$

Ряд Фурье для функции

$$\int_0^x \left(f'(x) - \frac{a'_0}{2} \right) dx = f(x) - \frac{a'_0}{2} - f(0) \quad (4.17)$$

может быть получен из ряда (4.16) почленным интегрированием. Поэтому, наоборот, ряд (4.16) можно получить почленным дифференцированием ряда для функции (4.17). Но

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

и

$$f(x) - \frac{a'_0}{2} - f(0) = \frac{a_0}{2} - f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + \left(b_n + \frac{(-1)^n a'_0}{n} \right) \sin nx \right].$$

Следовательно,

$$f'(x) - \frac{a'_0}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[-na_n \sin nx + (nb_n + (-1)^n a'_0) \cos nx \right],$$

откуда и вытекает (4.3.1), если положить $c = a'_0$

Следствие. Если $c = 0$, т. е. $f(\pi) = f(-\pi)$, то

$$\text{формула (4.1) дает: } f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx).$$

Иными словами, ряд Фурье для $f(x)$ можно почленно дифференцировать. Это, впрочем, и непосредственно ясно, так как при $f(\pi) = f(-\pi)$, периодическое продолжение на всю ось Ox приводит к непрерывной функции.

Теорема 2. Пусть дан ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (4.18)$$

Если ряд

$$\frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nb_n + (-1)^n c) \cos nx - na_n \sin nx], \quad (4.19)$$

где

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} [(-1)^{n+1} nb_n] \quad (4.20)$$

Является рядом Фурье от некоторых абсолютно интегрируемой функции $\omega(x)$, то ряд является рядом Фурье от функции $f(x) = \int_0^x \omega(x) dx + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, непрерывной для $-\pi < x < \pi$ сходится к этой функции, причем, очевидно, $f'(x) = \omega(x)$ во всех точках непрерывности $\omega(x)$

Доказательство. К ряду

$$\omega(x) \sim \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nb_n + (-1)^n c) \cos nx - na_n \sin nx]$$

При этом для $-\pi < x < \pi$ получим:

$$\int_a^x \omega(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ и}$$

$$\int_a^x \omega(x) dx + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Пример 1. Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{n^2 - 1}$$

есть ряд Фурье от непрерывной и дифференцируемой для $-\pi < x < \pi$ функции. Действительно, по формуле (4.20) находим:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n^2}{n^2 - 1} \right) = -1$$

Составляем ряд :

$$-\frac{1}{2} + \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{n^2}{n^2 - 1} + (-1)^{n+1} \right] \cos nx$$

или

$$-\frac{1}{2} + \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}.$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно (так как сходится, очевидно, ряд из абсолютных величин коэффициентов) и поэтому имеет непрерывную сумму $\omega(x)$, для которой является рядом Фурье.

По теореме 2

$$f(x) = \int_0^x \omega(x) dx = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{n^2 - 1} \quad (4.21)$$

и

$$f''(x) = -\sin x - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1} \quad (4.22)$$

Заметим, кстати, что дифференцирование рядов Фурье иногда приводит к возможности находить их суммы. Так, в рассмотренном примере применение теоремы 2 к ряду (4.22) дает:

$$f(x) = \int_0^x \omega(x) dx = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{n^2 - 1}$$

и

$$f''(x) = -\sin x - f(x)$$

или

$$f''(x) + f(x) = -\sin x$$

Если решить это дифференциальное уравнение относительно $f(x)$, то получим:

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x \cos x}{2}. \quad (4.23)$$

Найдем c_1 и c_2 . Положив $x = 0$, получим $f(0) = c_1$. В силу (4.21) $f(0) = 0$, и поэтому $c_1 = 0$. Чтобы найти c_2 , дифференцируем (4.23) и сравниваем с (4.22). При этом получим:

$$c_2 \cos x + \frac{\cos x}{2} - \frac{x \sin x}{2} = -\frac{1}{2} + \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}.$$

Для $x = 0$ это равенство дает:

$$\begin{aligned} c_2 &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right] = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Итак,

$$f(x) = \frac{\sin x}{4} + \frac{x \cos x}{2}.$$

Отметим еще один полезный признак дифференцируемости функции, заданной тригонометрическим рядом.

Теорема 3. Пусть дан ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (4.24)$$

где a_n и b_n положительны. Если величины na_n , nb_n не возрастают (начиная с некоторого n) и стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, то ряд сходится для $-\pi < x < \pi$ и имеет дифференцируемую сумму $f(x)$, причем

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (b_n \cos nx + a_n \sin nx), \quad (4.25)$$

т. е. ряд (4.24) можно дифференцировать почленно.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что коэффициенты a_n и b_n не возрастают и стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Ряд (4.24) и ряд справа в (4.24) сходятся равномерно на всяком отрезке $[a, b]$, внутреннем к $[-\pi, \pi]$. Отсюда вытекает возможность почленного дифференцирования ряда (4.24) для $-\pi < x < \pi$, что и доказывает равенство (4.25).

Пример 2. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n \ln n}$

имеет для $-\pi < x < \pi$ дифференцируемую сумму $f(x)$, причем

$$f'(x) = -\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{\ln n},$$

что сразу вытекает из теоремы 3.

4.4. Дифференцирование рядов Фурье. Случай функции, заданной на отрезке $[0, \pi]$

Теорема 1. Если $f(x)$ непрерывна на $[0, \pi]$, имеет абсолютно интегрируемую производную (которая может и не существовать в отдельных точках) и разложена в ряд Фурье по косинусам или по синусам, то ряд по косинусам всегда можно почленно дифференцировать, а для ряда синусов это справедливо при $f(0) = F(\pi) = 0$

Действительно, продолжение на отрезок $[-\pi, 0]$ — для ряда косинусов четное, для ряда синусов нечетное— в обоих случаях приводит к функции, непрерывной на $[-\pi, \pi]$ и принимающей равные значения в концах этого отрезка. Поэтому последующее периодическое продолжение на всю Ox приводит к непрерывной функции периода 2π с абсолютно интегрируемой производной.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0, \pi]$ имеет абсолютно интегрируемую производную (которая может и не существовать в отдельных точках) и разложена в ряд Фурье по синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (0 < x < \pi).$$

Тогда

$$f'(x) \sim \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [nb_n - d + (c+d)(-1)^n] \cos nx, \quad (4.26)$$

где

$$c = \frac{2}{\pi} [f(\pi) - f(0)], \quad d = \frac{2}{\pi} f(0). \quad (4.27)$$

Доказательство. Пусть

$$f'(x) \sim \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx.$$

Тогда

$$f'(x) - \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx. \quad (4.28)$$

Ранее мы имели $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2},$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{\sin nx}{x}, \quad (0 < x < \pi). \quad (4.29)$$

Поэтому

$$\int_0^x \left(f'(x) - \frac{a'_0}{2} \right) dx = f(x) - \frac{a'_0 x}{2} - f(0) =$$

$$- a'_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} - \frac{2}{\pi} f(0) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{\sin nx}{n} = .$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[nb_n - \frac{2}{\pi} f(0) + \left(a'_0 + \frac{2}{\pi} f(0) \right) (-1)^n \right] \frac{\sin nx}{n}.$$

Мы получили ряд Фурье для функции

$$\int_0^x \left(f'(x) - \frac{a'_0}{2} \right) dx.$$

Но ведь этот ряд можно получить почленным интегрированием ряда (4.28) и, следовательно, наоборот, ряд (4.28) может быть получен почленным дифференцированием ряда (4.4.5). Поэтому

$$-\frac{a'_0}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[nb_n - \frac{2}{\pi} f(0) + \left(a'_0 + \frac{2}{\pi} f(0) \right) (-1)^n \right] \cos nx,$$

Откуда и следует (4.26) и (4.27), если положить:

$$c = a'_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f'(x) dx = \frac{2}{\pi} [f(\pi) - f(0)], \quad d = \frac{2}{\pi} f(0).$$

С л е д с т в и е. Если $-d + (c + d)(-1)^n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), то получаем:

$$f'(x) \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx,$$

т. е. ряд Фурье для $f'(x)$ получается из ряда для $f(x)$ простым почленным дифференцированием. Этот случай соответствует условию $f(0) = f(\pi) = 0$, которое нами рассматривалось уже в теореме 1. Действительно, для четного n сразу получаем $c = 0$. Но тогда для нечетного n находим $-2d = 0$ или $d = 0$. Остается вспомнить (4.27).

Теорема 3. Пусть дан ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{4.30}$$

Если ряд $-\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx$ рядом Фурье от некоторой абсолютно интегрируемой функции $\omega(x)$, то ряд (4.30) является

рядом Фурье от функции $f(x) = \int_0^x \omega(x) dx + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, непрерывной на $[0, \pi]$, сходится к этой функции и, очевидно, $f'(x) = \omega(x)$ во всех точках непрерывности $\omega(x)$..

Теорема 4. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (4.31)$$

Если существуют пределы (4.4.6) и ряд

$$\frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [nb_n - d + (c+d)(-1)^n] \cos nx \quad (4.32)$$

является рядом Фурье от некоторой абсолютно интегрируемой функции $\omega(x)$, то ряд (4.31) является рядом

$$\text{Фурье от функции } f(x) = \int_0^x \omega(x) dx + \frac{\pi d}{2} \quad (0 < x < \pi),$$

сходится к этой функции, причем, очевидно $f'(x) = \omega(x)$ во всех точках непрерывности функции $\omega(x)$

Теорема 5. Пусть дан ряд (4.31). Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = h \quad (4.33)$$

и ряд

$$-\frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n - h) \cos nx \quad (4.34)$$

представляет собой ряд Фурье от некоторой абсолютно интегрируемой функции $\omega(x)$, то ряд (4.31) есть ряд

$$\text{Фурье от функции } , f(x) = \int_0^x \omega(x) dx + \frac{\pi h}{2} \quad (0 < x < \pi),$$

сходится к этой функции, причем, очевидно, $f'(x) = \omega(x)$ во всех точках непрерывности функции $\omega(x)$.

Действительно, в случае, когда существует предел (4.33), формулы (4.6) дают: $c = -h$, $d = h$, и ряд (4.32) получает вид (4.34), что и доказывает теорему 5.

Пример 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \sin nx}{n^4 + 1}$$

есть ряд Фурье от функции, допускающий для $0 < x < \pi$, сколько угодно производных.

Действительно, формула (4.33) дает:

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^4 + 1} = 1.$$

Составляем ряд (4.34):

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^4}{n^4 + 1} - 1 \right) \cos nx$$

или

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4 + 1}.$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно и, следовательно, имеет непрерывную сумму $\omega(x)$. По теореме 5 для $0 < x < \pi$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \sin nx}{n^4 + 1} = \int_0^x \omega(x) dx + \frac{\pi}{2}, \quad f'(x) = \omega(x).$$

Заметим, что для коэффициентов Фурье функции $\omega(x)$ имеем:

$$|n^4 a_n| = \frac{n^4}{n^4 + 1} \leq 1.$$

Функция $\omega(x)$ обладает двумя непрерывными производными, причем

$$\omega'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^4 + 1},$$

$$\omega''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos nx}{n^4 + 1}$$

К последнему ряду можно применить теорему 3. При этом получим:

$$\omega'''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \sin nx}{n^4 + 1} = -f(x).$$

Очевидно,

$$\omega'''(x) = f^4(x).$$

Поэтому для $f(x)$ получаем дифференциальное уравнение $f^4(x) = -f(x)$ ($0 < x < \pi$), откуда и следует существование для $f(x)$ производных любого порядка. Результаты могут быть приложены к вычислению сумм некоторых тригонометрических рядов.

Пример 2. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 1}. \quad (4.35)$$

Этот ряд сходится равномерно и, следовательно, имеет непрерывную сумму $F(x)$. Дифференцируя почленно, получим:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^2 + 1} \quad (4.36)$$

К этому ряду приложима теорема 5. Действительно, формула (4.33) дает:

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n^2}{n^2 + 1} \right) = -1,$$

и мы в качестве ряда (4.34) получаем:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n^2}{n^2 + 1} + 1 \right) \cos nx \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} + F(x).$$

Таким образом, по теореме 5 для суммы $f(x)$ ряда (4.36) имеем:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \int_0^x F(x) dx - \frac{\pi}{2}, \quad (0 < x < \pi).$$

Но тогда к ряду (4.35) применима теорема 3. Следовательно,

$$F'(x) = \frac{x}{2} + \int_0^x F(x)dx - \frac{\pi}{2} \quad (0 < x < \pi) \quad (4.37)$$

Или

$$F''(x) - F(x) = 1/2.$$

Из этого дифференциального уравнения находим:

$$F(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}, \quad (4.38)$$

и поэтому $F'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$. Положив в этих равенствах $x = 0$ и воспользовавшись (4.35) и (4.37), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} &= c_1 + c_2 - \frac{1}{2}. \\ -\frac{\pi}{2} &= c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$c_1 = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \right), \quad c_2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \right).$$

При таких значениях постоянных c_1 и c_2 функция (4.38) дает сумму ряда (4.35).

5. УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

В приложениях наиболее удобны тригонометрические ряды с быстро убывающими коэффициентами. Действительно, в этом случае лишь несколько первых членов ряда весьма точно определяют его сумму, так как при достаточной быстроте приближения к нулю коэффициентов сумма всех последующих членов ряда оказывается малой. При этом, чем быстрее убывают коэффициенты, тем меньше нам понадобится членов

ряда для приближенного представления его суммы с нужной степенью точности. Наиболее просто обстоит дело и с дифференцированием тригонометрических рядов с быстро убывающими коэффициентами. Сказанное естественным образом приводит к следующей задаче.

Дан тригонометрический ряд (сумму его обозначим через $f(x)$)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (5.1)$$

Требуется выделить из этого ряда другой ряд, сумма которого $\omega(x)$ известна (в конечном виде), с тем, чтобы оставшийся ряд, т. е. ряд, связанный с $f(x)$ и $\omega(x)$ соотношением

$$f(x) = \omega(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \beta_n \sin nx,$$

имел достаточно быстро убывающие коэффициенты.

Когда поставленная задача решена, мы говорим, что улучшили сходимость ряда (5.1). Укажем два приема такого улучшения сходимости рядов. Первый прием основан на следующем обстоятельстве: разность двух эквивалентных бесконечно малых величин*) есть бесконечно малая величина более высокого порядка, чем каждая из них.

Пример 1. Улучшить сходимость ряда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4 - 1} \sin nx.$$

В данном случае величина $\frac{n^3}{n^4 - 1} : \frac{1}{n} = \frac{n^4}{n^4 - 1} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ со эквивалентна величине $\frac{1}{n}$ (ибо $\frac{n^3}{n^4 - 1}$ при $n \rightarrow \infty$).

При этом подсчет дает:

$$\frac{n^3}{n^4 - 1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n^5 - n}.$$

Поэтому

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^5 - n}.$$

Но

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi).$$

Поэтому

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^5 - n} \quad (-\pi < x < \pi).$$

В последнем ряде, очевидно,

$$|b_n n^5| \leq M \quad (M = \text{const}),$$

т. е. коэффициенты Фурье имеют порядок $\frac{1}{n^5}$.

Пример 2. Улучшить сходимость ряда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 - n^2 + 1}{n^2(n^4 + 1)} \cos nx.$$

В данном случае коэффициент ряда эквивалентен величине $\frac{1}{n^2}$. При этом

$$\frac{n^4 - n^2 + 1}{n^2(n^4 + 1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4 + 1}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4 + 1}.$$

Но

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

и поэтому

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4 + 1} \quad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

Для последнего ряда

$|a_n n^4| \leq 1$, и, следовательно, коэффициенты Фурье имеют порядок $\frac{1}{n^4}$. Второй прием улучшения сходимости основан на представлении коэффициентов Фурье в виде сумм

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \dots \quad (A = \text{const}, B = \text{const}).$$

Пример 3. Улучшить сходимость ряда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n+a} \quad (a = \text{const}, a > 0).$$

Очевидно,

$$\frac{1}{n+a} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{a}{n}} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{a}{n} + \frac{a^2}{n^2} - \dots \right)$$

Прогрессию, стоящую в скобках, оборвем на члене a остаток просуммируем. Получим:

$$\frac{1}{n+a} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{a}{n} + \frac{a^2}{n^2} - \frac{a^3}{n^2(n+a)} \right) = \frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} + \frac{a^2}{n^3} - \frac{a^3}{n^3(n+a)}.$$

Поэтому

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} - a^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3(n+a)}.$$

Суммы первых трех рядов, как и вообще суммы рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p} \quad (p - \text{целое}),$$

могут быть легко получены из известных разложений. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln 2 \sin \frac{x}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$$

Интегрируя второй и третий ряды, получим для $0 < x < 2\pi$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \int_0^x \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} dx = \frac{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2 x}{12},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = -\int_0^x \ln(2 \sin \frac{x}{2}) dx$$

Поэтому

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} + a \int_0^x \ln(2 \sin \frac{x}{2}) dx + \frac{a^2}{12} (x^2 - 3\pi x + 2\pi^2 x) - \\ - a^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3 (n + a)}.$$

Коэффициенты последнего ряда имеют порядок $\frac{1}{n^4}$.

6. ТАБЛИЦА НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

При операциях с рядами Фурье выгодно иметь таблицу часто встречающихся тригонометрических разложений. Это особенно полезно, когда речь идет об улучшении сходимости рядов. В приводимой ниже таблице мы собрали воедино разложения, полученные нами в предыдущих главах, и добавили некоторые новые.

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln(2 \sin \frac{x}{2}) \quad (0 < x < 2\pi),$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi),$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = -\int_0^x \ln(2 \sin \frac{x}{2}) dx \quad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3} = \int_0^x dx \int_0^x \ln(2 \sin \frac{x}{2}) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{\pi^3}{25,79436..} = 1,20205.. \right),$$

(получается почленным интегрированием из предшествующего ряда),

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} \quad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n} = \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) \quad (-\pi < x < \pi),$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi),$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3x^2}{12} \quad (-\pi \leq x \leq \pi),$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^2} = \int_0^x \ln(2 \cos \frac{x}{2}) dx \quad (-\pi \leq x \leq \pi),$$

(получается почленным интегрированием ряда 7))

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3} - \int_0^x dx \int_0^x \ln(2 \cos \frac{x}{2}) dx$$

$(-\pi \leq x \leq \pi),$

(получается почленным интегрированием ряда 10)),

$$12) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2 x - x^3}{12} \quad (-\pi \leq x \leq \pi),$$

(получается почленным интегрированием ряда 9)),

$$13) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} = -\frac{1}{2} \operatorname{Intg} \frac{x}{2} \quad (0 < x < \pi),$$

(получается сложением 1) и 7)),

$$14) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < \pi),$$

$$15) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

$$16) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} = -\frac{1}{2} \int_0^x \operatorname{Intg} \frac{x}{2} dx \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

(получается почленным интегрированием ряда 13)),

$$17) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^3} = \frac{1}{2} \int_0^x \operatorname{Intg} \frac{x}{2} dx + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3},$$

(получается почленным интегрированием ряда 16)

$$18) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2 x - \pi x^2}{8} \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

(получается почленным интегрированием ряда 15)).

Если в формулах 13)— 18) заменить x через t , а затем положить $t = \frac{\pi}{2} - x$, то получим разложения:

$$19) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$20) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = -\frac{1}{2} \operatorname{Intg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$21) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} \operatorname{Intg} \frac{t}{2} dt \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$22) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} = \frac{\pi x}{4} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$23) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3 - 4\pi x^2}{32} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$24) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} dx \int_0^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

7. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

В практических вопросах очень часто функция, которую нужно разложить в ряд Фурье, задается не аналитически, а таблицей или графически, т. е. приближенно. В этом случае коэффициенты Фурье с помощью непосредственного применения обычных формул

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

получены быть не могут, и ставится задача об их приближенном вычислении. При этом для практических целей в большинстве случаев достаточно знать лишь несколько первых коэффициентов. Для решения поставленной задачи от точных формул (7.1) переходят к приближенным формулам, используя методы приближенного интегрирования. Обычно используется метод прямоугольников или метод трапеций. Применение метода прямоугольников в нашем случае сводится к следующему.

Пусть отрезок $[0, 2\pi]$ точками

$$0, \frac{2\pi}{m}, 2 \cdot \frac{2\pi}{m}, \dots, (m-1) \frac{2\pi}{m}, 2\pi \quad (7.2)$$

разделен на m равных частей и нам известны значения $f(x)$ в этих точках: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} a_n &\approx \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \cdot \cos \frac{2k\pi}{m} n, \\ b_n &\approx \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \cdot \sin \frac{2k\pi}{m} n, \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Пусть, например, $m = 12$. Тогда числа (7.2) имеют вид

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$$

или в градусах $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ, 360^\circ$. Но тогда, как легко сообразить, все множители, на которые умножаются ординаты в (7.3), сведутся к следующим: $0, \pm 1, \pm \sin 30^\circ = \pm 0,5, \pm \sin 60^\circ = \pm 0,866$.

Нетрудно проверить, что

$$\left. \begin{aligned} 6a_0 &\approx y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}, \\ 6a_1 &\approx (y_0 - y_6) + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7) \cdot 0,866 + (y_2 + y_{10} - y_4 - y_8) \cdot 0,5, \\ 6a_2 &\approx (y_0 + y_6 - y_3 - y_9) + (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10}) \cdot 0,5, \\ 6a_3 &\approx (y_0 + y_6 - y_3 - y_9) + (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10}) \cdot 0,5, \\ 6a_3 &\approx y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10}, \\ 6b_1 &\approx (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \cdot 0,5 + (y_2 + y_4 + y_8 + y_{10}) \cdot 0,866 + (y_3 - y_9), \\ 6b_2 &\approx (y_1 + y_2 + y_7 + y_8 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11}) \cdot 0,866, \\ 6b_3 &\approx y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11} \end{aligned} \right\}$$

(7.4)

и т. д.

Для упрощения выкладок их выгодно проводить по следующей схеме. Сначала в указанном ниже порядке выписывают ординаты $y_0, y_1, y_2...$ и под каждой парой ординат, подписанных одна под другой, производят сложение и вычитание:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
суммы	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
разность	u_6					
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	

Затем выписываются эти суммы и разности и аналогичным образом подвергаются сложению и вычитанию:

	u_0	u_1	u_2	
	u_3	u_6	u_5	u_4
суммы	s_0	s_1	s_2	
раз-	s_3			
ность	t_0	t_1	t_2	
	v_0	v_1	v_2	
	v_3	v_5	v_4	
суммы	σ_1	σ_2	σ_3	
раз-	τ_2	τ_2		
ность				

Пользуясь полученными величинами, вместо (7.4) можем писать:

$$\begin{aligned}
6a_0 &= s_0 + s_1 + s_2 + s_3, \\
6a_1 &= t_0 + 0,866t_1 + 0,5t_2, \\
6a_2 &= s_0 - s_3 + 0,5(s_1 - s_2), \\
6a_3 &= t_0 - t_2, \\
6b_1 &= 0,5\sigma_1 + 0,866\sigma_2 + \sigma_3, \\
6b_3 &= 0,866(\tau_1 + \tau_2), \\
6b_3 &= \sigma_1 - \sigma_3.
\end{aligned}$$

Мы провели схему вычислений для двенадцати заданных ординат. Применение этой схемы к гладким функциям, для которых мы знаем *точные* значения коэффициентов Фурье, дает *приближенные* значения коэффициентов $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$, весьма близкие к точным. Для более точных результатов, а также в случаях, когда надо знать большее число коэффициентов Фурье, употребляют схемы с большим числом ординат. Употребительна схема с 24 ординатами.

Упражнения

1. Вычислить суммы числовых рядов

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, & \quad \text{б)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, & \quad \text{в)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}, \\
\text{г)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}, & \quad \text{д)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}, & \quad \text{е)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}.
\end{aligned}$$

Ответы: а) $\frac{\pi^4}{90}$, б) $\frac{\pi^4}{96}$,

в)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \pi^4 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{2^4 \cdot 96} \right) = \frac{241 \cdot \pi^4}{23040},$$

г) $\frac{\pi^6}{945}$, д) $\frac{\pi^6}{960}$, е) $\pi^6 \left(\frac{1}{960} - \frac{1}{2^6 \cdot 945} \right)$.

2. Функция задана рядом

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} + (-1)^n \frac{\sin nx}{n+1} \right).$$

написать ряд Фурье для ее производной.

Ответ.

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n+1} - \frac{\sin nx}{n^2} \right] \quad (x \neq (2k+1)\pi).$$

3. Доказать дифференцируемость функции, заданной для $-\pi < x < \pi$ рядом

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n(\sqrt{n}+1)},$$

и написать разложение для производной.

Ответ. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\sqrt{n}+1}.$

4. Доказать дифференцируемость функции $f(x)$, заданной для $0 < x < \pi$ и написать разложение для производной.

а) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+1} \sin nx$ б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^3+1} \sin nx$

Ответ.

а) $f'(x) = -\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+n+1},$

б) $f'(x) = -\frac{1}{10} - \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{5n^3+1}.$

7. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2-1}.$$

Ответ. $F(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} \quad (0 \leq x \leq \pi),$

где

$$c_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{2} = 2 \left(\text{так как } \frac{1}{m^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1} \right) \right),$$

$$c_2 = -\frac{\pi}{2}.$$

8. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

8.1. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье

Пусть $f(x)$ — функция, заданная для всех действительных x и кусочно-гладкая (непрерывная или разрывная) на каждом конечном отрезке $[-l, l]$. Тогда на каждом таком отрезке $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right) \quad (8.1)$$

(в точках разрыва вместо $f(x)$ нужно писать $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$), причем

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n u}{l} du \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \sin \frac{\pi n u}{l} du \quad (n=1, 2, \dots)$$

Если в (8.1) подставить выражения для a_n и b_n , то получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) du + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n}{l} (u-x) du.$$

Предположим теперь абсолютную интегрируемость $f(x)$ на всей Ox , т. е. предположим существование интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \quad (8.2)$$

Тогда при $l \rightarrow \infty$ (x — фиксировано) получим:

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n}{l} (u-x) du. \quad (8.3)$$

Попытаемся установить, во что перейдет в пределе сумма справа. С этой целью положим:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \dots, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \dots, \quad \Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{l}.$$

Тогда интересующая нас сумма получит вид

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\lambda_n \int_{-l}^l f(u) \cos \lambda_n (u-x) du. \quad (8.4)$$

Это напоминает интегральную сумму для функции переменного λ

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda (u-x) du,$$

составленную для промежутка $[0, +\infty)$. Поэтому естественно ожидать, что при $l \rightarrow \infty$ (1.4) перейдет в двойной несобственный интеграл, и, следовательно, естественно ожидать формулы

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda (u-x) du. \quad (8.5)$$

Интеграл справа в (8.5) называется *интегралом Фурье*, а формула в целом — *интегральной формулой Фурье*. Если воспользоваться формулой для косинуса разности, то вместо (8.5) можем написать:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda, \quad (8.6)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du. \quad (8.7)$$

Сходство с рядом Фурье состоит в следующем: знак суммы заменился знаком интеграла, и вместо целочисленного параметра n фигурирует непрерывно изменяющийся параметр λ . Коэффициенты $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ весьма напоминают коэффициенты Фурье.

8.2. Доказательство интегральной формулы Фурье

Предположим, что $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей Ox . По определению понятия несобственного интеграла

$$\frac{1}{n} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^l d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du. \quad (8.8)$$

Таким образом, существование интеграла слева эквивалентно существованию предела справа.

Но интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du$$

равномерно сходится для $-\infty < \lambda < \infty$. так как

$$|f(u) \cos \lambda(u-x)| \leq |f(u)|,$$

а $f(u)$ абсолютно интегрируема на всей оси.

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^l d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du &= \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^l f(u) \cos \lambda(u-x) d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{\sin lu}{u} du \end{aligned}$$

(мы сделали замену $u-x = v$, а затем вместо v опять стали писать u). Имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{\sin lu}{u} du.$$

Если теперь в точке x функция $f(x)$ имеет правую и левую производные, то предел в правой части существует и равен числу $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

Следовательно, существует интеграл слева и

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (8.9)$$

В точках непрерывности полусумма предельных значений совпадает с $f(x)$. Таким образом:

Если $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси Ox , то интегральная формула Фурье имеет место в каждой точке x , в которой $f(x)$ имеет правую и левую производные.

Отсюда:

Если кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси Ox , то интегральная формула Фурье имеет место для всех x .

8.3. Различные виды интегральной формулы Фурье

Предполагая $f(x)$ абсолютно интегрируемой на всей оси Ox , рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda(u-x) du.$$

Этот интеграл равномерно сходится для $-\infty < \lambda < \infty$, так как $|f(u) \sin \lambda(u-x)| \leq |f(u)|$

Поэтому он представляет собой непрерывную и, очевидно, нечетную функцию от λ . Но тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda(u-x) du = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda(u-x) du = 0.$$

С другой стороны, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du$$

представляет собой *четную* функцию от λ .. Поэтому

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) [\cos \lambda(u-x) + i \sin \lambda(u-x)] du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\lambda(u-x)} du. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Мы получили *комплексную форму* интеграла Фурье. Перепишем теперь формулу (8.10) в виде:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du \right) d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du \right) d\lambda. \quad (8.11)$$

В случае *четной* $f(u)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du = 2 \int_0^{\infty} f(u) \cos \lambda u du,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du = 0$$

и равенство (8.11) дает:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda x \left(\int_0^{\infty} f(u) \cos \lambda u du \right) d\lambda. \quad (8.12)$$

В случае *нечетной* $f(u)$ аналогично получим:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda x \left(\int_0^{\infty} f(u) \sin \lambda u du \right) d\lambda. \quad (8.13)$$

Если $f(x)$ задана лишь для $[0, \infty)$, то формула (8.12) *четным* образом распространяет $f(x)$ на всю Ox , а формула (3.4) — *нечетным* образом. Для положительных x , таким образом, приложимы обе формулы, а для отрицательных — они дадут разные значения. Заметим, что при непрерывности $f(x)$ для

$x = 0$ формула (8.12) всегда справедлива в этой точке, а формула (8.13) справедлива лишь тогда, когда $f(0) = 0$ (так как при нечетном продолжении функции всегда

$\frac{f(+0) + f(-0)}{2} = 0$, а это значение и принимает интеграл в (8.13) при $x = 0$).

8.4. Преобразование Фурье

Пусть $f(u)$ задана.

Функцию

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\lambda u} du \quad (8.14)$$

называют *преобразованием Фурье* функции $f(u)$. Если для $f(x)$ справедлива интегральная формула Фурье, то в силу (8.10)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (8.15)$$

Эта функция будет *обратным преобразованием Фурье* функции $F(\lambda)$. Функцию (8.14) можно рассматривать как решение *интегрального уравнения* (8.15): $f(x)$ задана, $F(\lambda)$ ищется. Отметим несколько свойств преобразований Фурье

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{ixu} du.$$

Если $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, \infty)$, то функция $F(x)$ непрерывна для всех x и стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Непрерывность следует из равномерной сходимости интеграла (по x), поскольку

$|e^{ixu}| = 1$, $|f(u) e^{ixu}| = |f(u)|$, а интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| du \text{ существует.}$$

Далее,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos x u du + i \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin x u du \right] = 0$$

Если функция $x^n f(x)$ (n -целое, положительное) абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, \infty)$, то для $F(x)$ существует n производных, причем

$$F^{(k)}(x) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) u^k e^{ixu} du \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (8.16)$$

и все эти производные стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

Действительно, формулы (8.16) могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла, поскольку каждый раз мы получаем интегралы, равномерно сходящиеся по x , что вытекает из равенств

$$|f(u) u^k e^{ixu}| = |f(u) u^k| \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где функции справа абсолютно интегрируемы.

3. Если $f(x)$ непрерывна и стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, $f'(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, \infty)$, то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(u) e^{ixu} du = \frac{x}{i} F(x).$$

4. Если $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке

$$(-\infty, \infty), \text{ а } \int_0^x f(u) du \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \text{ то}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^u f(t) dt \right) e^{ixu} du = \frac{i}{x} F(x).$$

Обе последние формулы доказываются интегрированием по частям. Эти формулы позволяют сделать следующий вывод: Дифференцированию исходной функции $f(x)$ отвечает умножение на x/i ее преобразованной функции $F(x)$, а интегрированию — деление на ту же величину. Идея такого рода сведения сложных операций математического анализа к простым

алгебраическим операциям с преобразованными функциями (с последующим обратным преобразованием окончательного результата) лежит в основе *операционного исчисления*, весьма важного по своим приложениям раздела математики. Обратимся теперь к преобразованиям несколько иного вида.

Функцию

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \cos \lambda u du \quad (8.17)$$

условимся называть *косинус-преобразованием* Фурье для функции $f(u)$. Если для $f(x)$ справедлива интегральная формула Фурье, то

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\lambda) \cos x \lambda d\lambda, \quad (8.18)$$

т. е. $f(x)$ в свою очередь является косинус-преобразованием для $F(\lambda)$. Иными словами, функции f и F являются взаимными косинус-преобразованиями.

Аналогично, функция

$$\Phi(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \sin \lambda u du \quad (8.19)$$

называется *синус-преобразованием* Фурье для $f(u)$. Можно получить:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) \sin x \lambda d\lambda, \quad (8.20)$$

т.е., подобно случаю косинус-преобразований, f и Φ оказываются взаимными синус-преобразованиями. Функцию (8.17) можно рассматривать как решение *интегрального уравнения* (8.18) ($f(x)$ задана, $F(\lambda)$ ищется), а функцию (8.19) — как решение интегрального уравнения (8.20). В качестве упражнения применим косинус- и синус-преобразования Фурье к вычислению некоторых интегралов.

Пример 1. Пусть $f(x) = e^{-ax}$ ($a > 0, x \geq 0$). Эта функция интегрируема для $0 \leq x < \infty$ и всюду обладает производной.

С помощью интегрирования по частям найдем:

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-au} \cos \lambda u du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2 + \lambda^2},$$

$$\Phi(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-au} \sin \lambda u du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2}.$$

Тогда формулы (4.5) и (4.7) дадут:

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos x \lambda d\lambda}{a^2 + \lambda^2} \quad (x \geq 0),$$

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin x \lambda d\lambda}{a^2 + \lambda^2} \quad (x > 0).$$

Пример 2.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq x < a, \\ \frac{1}{2} & \text{для } x = a, \\ 0 & \text{для } x > a. \end{cases}$$

Очевидно,

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos \lambda u du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a \lambda}{\lambda},$$

и

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a \lambda \cos x \lambda d\lambda}{\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq x < a, \\ \frac{1}{2} & \text{для } x = a, \\ 0 & \text{для } x > a. \end{cases}$$

В частности, при $x = a$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2a\lambda}{\lambda} d\lambda,$$

и если положить $a = 1/2$, то получаем: $\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda$.

8.5. Спектральная функция

Формулу (8.10), как легко сообразить, можно переписать так:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\lambda(x-u)} du \quad (8.21)$$

$e^{i\lambda(x-u)} = \cos \lambda(x-u) + i \sin \lambda(x-u) = \cos \lambda(u-x) - i \sin \lambda(u-x)$, а интеграл, содержащий синус, равен 0). Теперь положим:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\lambda u} du. \quad (8.22)$$

Эта функция (в общем случае — комплексная) играет важную роль в электротехнике и носит наименование *спектральной функции* для $f(x)$. В силу (8.21) и (8.22)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (8.23)$$

Формула (8.22) является аналогом формулы (1.55), дающей значения *комплексных коэффициентов Фурье*; формула (8.23)—аналог формулы (1.54).

Пример. Найти спектральную функцию для

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases} \quad (\text{см. рис. 30}).$$

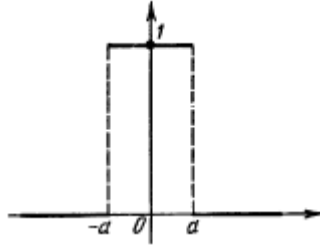


Рис. 30.

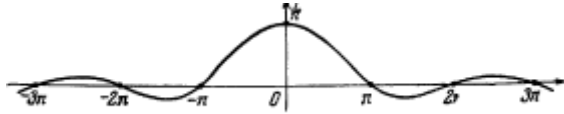


Рис. 31.

Формула (8.22) дает:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{-i\lambda u} du = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-i\lambda u}}{-i\lambda} \right]_{u=-a}^{u=a} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin a\lambda}{\lambda}.$$

Таким образом, $A(\lambda)$ оказалось здесь действительной функцией; ее график (при $a = 1$) изображен на рис. 31.

9. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ И СТЕРЖНЯ

9.1. Вывод уравнения колебания струны

Рассмотрим натянутую однородную струну, закреплённую в концах. В покое струна имеет форму прямой. Эту прямую примем за ось Ox и будем считать, что концы струны находятся в точках $x=0$ и $x=1$ (1-длина струны). Если отклонить струну от положения равновесия (или придать ее точкам некоторые скорости), а затем предоставить самой себе, то струна начнёт колебаться. Ограничимся рассмотрением случая малых колебаний струны. Это позволяет считать длину струны неиз-

менной. Колебания будем считать происходящими в одной плоскости таким образом, что каждая точка струны движется в направлении, перпендикулярном к оси Ox .

Пусть $u=u(x,t)$ обозначает величину отклонения в момент t точки струны с абсциссой x . При каждом фиксированном значении t график функции $u=u(x,t)$, очевидно, дает форму струны. На элемент AB струны действуют силы натяжения T_1 и T_2 , направленные по касательной к струне (мы предполагаем пока, что на струну никакие другие силы не действуют). В положении покоя натяжения T во всех точках струны одинаково. Поскольку, как мы уже говорили, длину струны можно считать неизменной, постольку можно считать неизменным и натяжение. Поэтому T_1 и T_2 по величине совпадают с T , хотя и различны между собой по направлению (их направления вследствие кривизны элемента AB несколько отличны от противоположных). Следовательно, в направлении оси Ox на элемент AB действует сила

$$\begin{aligned} T[\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi] &\approx T[tg(\varphi + \Delta\varphi) - tg\varphi] = \\ &= T\left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right] = T\frac{\partial^2 u(x + \theta\Delta x, t)}{\partial x^2}\Delta x \end{aligned}$$

Считая элемент x весьма малым, согласно закону Ньютона можем написать:

$$p\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \quad (9.1)$$

где p -линейная плотность струны. Положив $T/p=a$ и сократив на x , получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9.2)$$

Мы получили уравнение *свободных* колебаний струны.

Если бы на струну, помимо натяжения, действовала еще некоторая сила $F(x,t)$, которую будем считать отнесенной к единице длины, то вместо уравнения (9.1) мы получили бы:

$$p\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x + F(x,t)\Delta x$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F(x,t)}{p} \quad (9.3)$$

Это есть уравнение *вынужденных* колебаний струны.

Мы займемся сейчас задачей: зная форму струны и скорость ее точек в начальный момент ($t=0$), найти ее форму в любой момент t . Математически эта задача сводится к решению уравнения (9.2)- случай свободных колебаний или (9.3) -случай вынужденных колебаний при граничных условиях

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad (9.4)$$

и при начальных условиях

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \quad (9.5)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ -заданные непрерывные функции, образующиеся в нуль при $x=0$ и при $x=l$.

9. 2. Свободные колебания струны

Мы не будем пользоваться готовыми формулами предыдущей главы и воспроизведем рассуждения, следуя методу, изложенному там в 1. Ищем частные решения (отличные от $u=0$),удовлетворяющие граничным условиям, в виде

$$u(x,t) = \Phi(x) \cdot T(t) \quad (9.6)$$

Подстановка в (9.2) дает: $\Phi T'' = a^2 \Phi'' T$

Откуда

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda = \text{const}$$

и следовательно,

$$\Phi'' = -\lambda \Phi \quad (9.7)$$

$$T'' = -a^2 \lambda T \quad (9.8)$$

Чтобы функция (9.2.1), отличная от тождественного нуля, удовлетворяла условиям (9.1.4), очевидно, нужно потребовать выполнения условия

$$\Phi(0) = \Phi(l) = 0 \quad (9.9)$$

Мы пришли к краевой задаче для уравнения (9.7) при условии (9.9). Все собственные значения нашей задачи положительны. Поэтому вместо λ мы вправе писать λ^2 . Тогда уравнения (9.7) и (9.8) примут вид

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0 \quad (9.10)$$

$$T'' + a^2 \lambda^2 T = 0 \quad (9.11)$$

Из уравнения (9.10) находим:

$$\Phi = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \quad (C_1 = \text{const}, C_2 = \text{const})$$

При $x=0$ и при $x=l$ должны получить:

$$\Phi(0) = C_1 = 0$$

$$\Phi(l) = C_2 \sin \lambda l = 0$$

Приняв $C_2 \neq 0$ (в противном случае было бы $\Phi=0$), найдем $\lambda l = \pi n$ (n -целое). Полагаем $C_2=1$,

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

И получаем собственные функции

$$\Phi_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(отрицательные n не рассматриваем, так как они с точностью до постоянного множителя дали бы те же собственные

функции, что и для соответствующих положительных n ; к тому же каждому собственному значению λ в квадрате отвечает в указанном смысле лишь одна собственная функция).

При $\lambda = \lambda_n$ уравнение (9.11) дает:

$$T_n = A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t = A_n \cos \frac{a\pi n t}{l} + B_n \sin \frac{a\pi n t}{l}$$

($n = 1, 2 \dots$)

и, следовательно,

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{a\pi n t}{l} + B_n \sin \frac{a\pi n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (n = 1, 2 \dots) \quad (9.12)$$

Чтобы получить решение задачи, полагаем

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{a\pi n t}{l} + B_n \sin \frac{a\pi n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (9.13)$$

И требуем, чтобы

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{a\pi n}{l} \sin \frac{a\pi n t}{l} + B_n \frac{a\pi n t}{l} \cos \frac{a\pi n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} \right]_{t=0} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{a\pi n}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} = g(x) \end{aligned}$$

Следовательно, мы должны $f(x)$ и $g(x)$ разложить в ряды по

системе $\left\{ \sin \frac{\pi n x}{l} \right\}$. Формулы для коэффициентов Фурье дают:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2 \dots) \quad (9.14)$$

$$B_n \frac{a\pi n}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$$

Или

$$B_n \frac{2}{a\pi n} = \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2 \dots) \quad (9.15)$$

Таким образом, решение нашей задачи дается рядом (9.13), где A_n и B_n определяются формулами (9.14) и (9.15).

Мы видим, что колебательное движение струны складывается из отдельных гармонических колебаний вида

$$u_n = H_n \cdot \sin\left(\frac{a\pi n t}{l} + \alpha_n\right) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$\text{где } H_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \sin \alpha_n = \frac{A_n}{H_n}, \cos \alpha_n = \frac{B_n}{H_n}.$$

Амплитуда колебаний каждой точки x зависит здесь лишь от положения этой точки и неизменно равна числу

$$H_n \cdot \left| \sin \frac{\pi n x}{l} \right|$$

Точки , для которых $x = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \dots, \frac{(n-1)l}{n}, l$

, остаются на месте: это «узлы». Тем самым струна, колеблющаяся по закону (9.12), разбивается на n участков, в концах которых колебаний нет. На соседних участках отклонения струны различны по закону. Середины участков-«пучности» колеблются с наибольшей амплитудой. Такого рода явление носит название *стоячей волны*. На рис.48 изображены последовательные положения струны, колеблющейся по закону (9.12), для $n=1,2,3,4$. в общем случае, когда струна колеблется по закону (9.13), основной тон определяется составляющей

u_1 с частотой $\omega_1 = \frac{a\pi n}{l} = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{p}}$. И периодом

$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l \sqrt{\frac{p}{T}}$. Остальные тоны, издаваемые струной, или

обертоны с частотами $\omega_n = \frac{a\pi n}{l} = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{p}}$ и периодами

$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2l}{n} \sqrt{\frac{p}{T}}$ характеризуют тембр звука, его «окраску».

Если зажать струну в середине, то четные обертоны для которых середина струны является узлом, естественно сохранятся. Что же касается основного тона и нечетных обертонов, то они сразу заглушатся, так как, зажав струну в середине, мы по существу делаем от струны длины l перейдем к струне длины $l/2$, а замена l на $l/2$ в (9.13) приведет к ряду лишь с четными составляющими. Роль основного тона будет играть обертоном с периодом $\tau_2 = 2\pi / \omega_2 = \tau_1 / 2$.

9.3. Вынужденные колебания струны

Рассмотрим случай периодической возмущающей силы, т. е. положим

$$\frac{F(x, t)}{p} = A \sin \omega t$$

Тогда

$$\frac{F(x, t)}{p} = A \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{\pi n t}{l} \quad (9.16)$$

Где

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l A \sin \omega t \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2A}{\omega n} [1 - (-1)^n] \sin \omega t$$

($n = 1, 2, \dots$)

Положим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (9.17)$$

Подставив (9.17) и (9.16) в (9.3) и выполнив почленное дифференцирование, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'' + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} T_n - \frac{2A}{\pi n} [1 - (-1)^n] \cdot \sin \omega t \right) \sin \frac{\pi n x}{l} = 0$$

Откуда

$$\left(T_n'' + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} T_n - \frac{2A}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin \omega t \right) = 0 \quad (9.18)$$

Для краткости положим:

$$\omega_n = \frac{a \pi n}{l} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(в этих числах мы узнаем частоты свободных или собственных колебаний струны). Тогда уравнение (9.18) можно переписать так:

$$T_n'' + \omega_n^2 T_n = \frac{2A}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin \omega t \quad (9.19)$$

Решив его, получим:

$$T_n = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{2A [1 - (-1)^n]}{\pi (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t \quad (9.20)$$

(если $\omega_n \neq \omega$). Чтобы удовлетворить условиям (9.4) и (9.5), требуем:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{\pi n x}{l} f(x)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \frac{\pi n x}{l} g(x)$$

Подсчет коэффициентов Фурье для $f(x)$ и $g(x)$ дает

$$T_n(0) = A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (9.21)$$

$$T_n'(0) = \omega_n B_n + \frac{2A [1 - (-1)^n]}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

Или

$$B_n = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi x}{l} dx = \frac{2A[1 - (-1)^n]}{\pi\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (9.22)$$

Если (9.21) и (9.22) подставив в (9.20), а затем найденное выражение для T_n подставить в (9.17), то получим :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + \overline{B}_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{4A}{\pi} \sin \omega t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)(\omega_{2k}^2 - \omega^2)} - \frac{4A\omega}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \omega_{2k+1} t \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}}{\omega_{2k+1}^2 (\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)}, \quad (9.23)$$

где положено

$$\overline{B}_n = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi x}{l} dx$$

Выражение в первой сумме справа в (9.23) - это функция, дающая свободные колебания струны при условиях (9.4) и (9.5). Следовательно, вторая и третья суммы - это тот корректив, который вносится наличием возмущающей силы. Среднюю сумму обычно называют «чистыми» вынужденными колебаниями, поскольку они осуществляются с частотой возмущающей силы. Равенства (9.20) справедливы, если $\omega_n \neq \omega$. Посмотрим, что будет, когда $\omega_n = \omega$. Т.е. частота возмущающей силы совпадает с одной из собственных частот. В этом случае уравнение (9.19) дает:

$$T_n = A \cos \omega t + B_n \sin \omega t - \frac{At}{\pi\omega} [1 - (-1)^n] \cos \omega t$$

Откуда мы видим, что при n нечетном в слагаемом $T_n(t) \sin \frac{\pi x}{l}$ суммы (9.17) амплитуда колебания равна

$$H = \sqrt{\left(A_n - \frac{2At}{\pi\omega}\right)^2 + B_n^2} \cdot \left| \sin \frac{\pi x}{l} \right|$$

Неограниченно растет вместе с t , т. е. наблюдается явление резонанса.

9.4. Свободные колебания стержня

Как в случае струны, ищем частные решения вида $U(x,t) = \Phi(x)T(t)$. И приходим к уравнениям

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0 \quad (9.24), (9.25)$$

$$T'' + a^2 \lambda^2 T = 0$$

при условиях $\Phi(0) = \Phi(l) = 0$ (9.26)

Уравнение (9.24) дает:

$$\Phi = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \quad (C_1 = \text{const}, C_2 = \text{const})$$

При $x = 0$ и $x = l$ в силу (9.26) должны получить:

$$\Phi(0) = C_1 = 0$$

$$\Phi'(l) = C_2 \lambda \cos \lambda l = 0$$

Считая $C_2 \neq 0$ (в противном случае имели бы $\Phi \equiv 0$),

отсюда находим: $\lambda l = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ (n – целое). Полагаем:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n &= \frac{(2n+1)\pi}{2l} \\ \Phi_n(x) &= \sin \lambda_n x = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

(отрицательные n новых собственных функций не дадут).

При $\lambda = \lambda_n$ из уравнения (9.25), находим:

$$T_n = A_n \cos a \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Следовательно,

$$u_n(x,t) = (A_n \cos a \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t) \sin \lambda_n x \dots (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Для решения задачи составляем ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t) \sin \lambda_n x \quad (9.28)$$

И требуем, чтобы

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x = f(x)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-A_n a \lambda_n \sin a \lambda_n t + B_n a \lambda_n t) \sin \lambda_n x \right]_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n a \lambda_n \sin \lambda_n x = g(x)$$

Подсчет коэффициентов Фурье для $f(x)$ и $g(x)$ по системе $\{\sin \lambda_n x\}$ дает:

$$A_n = \frac{\int_0^l f(x) \sin \lambda_n x dx}{\int_0^l \sin^2 \lambda_n x dx}$$

$$B_n a \lambda_n = \frac{\int_0^l g(x) \sin \lambda_n x dx}{\int_0^l \sin^2 \lambda_n x dx}$$

Но

$$\int_0^l \sin^2 \lambda_n x dx = \frac{1}{2} \int_0^l (1 - \cos 2\lambda_n x) dx = \frac{l}{2}$$

И поэтому

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \lambda_n x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$B_n = \frac{2}{a \lambda_n l} \int_0^l g(x) \sin \lambda_n x dx = \frac{4}{(2n+1)a\pi} \int_0^l g(x) \sin \lambda_n x dx$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.29)$$

Итак, решение задачи дается формулой (9.28), где A_n и B_n определяются равенствами (9.29). Таким образом, колебательное движение стержня складывается из гармонических колебаний

$$u_n = (A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t) \sin \lambda_n x \quad (9.30)$$

Или $u_n = H_n \sin(a\lambda_n t + \alpha_n) \sin \lambda_n x$,

где $H_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\sin \alpha_n = \frac{A_n}{H_n}$, $\cos \alpha_n = \frac{B_n}{H_n}$.

Амплитуда колебательного движения (9.30) зависит лишь от положения сечения x и неизменно равна числу

$$H_n |\sin \lambda_n x| = H_n \left| \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right|$$

Что касается частоты, то для нее имеем:

$$\omega_n = a\lambda_n = \frac{(2n+1)a\pi}{2l} = \frac{(2n+1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{p}}$$

И, следовательно, период дается формулой

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{4l}{(2n+1)a} = \frac{4l}{2n+1} \sqrt{\frac{p}{E}}$$

Основной тон в колебании стержня получается при $n=0$. Он имеет амплитуду $\left| A_0 \sin \frac{\pi x}{2l} \right|$, частоту $\omega_0 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{p}}$ и

период $\tau_0 = 4l \sqrt{\frac{p}{E}}$. Следовательно, для основного тона в закрепленном конце стержня, т. е. при $x=0$, имеем узел, а в свободном конце, т. е. при $x=l$, пучность (рис.50).

9.5. Вынужденные колебания стержня

Рассмотрим случай, когда стержень подвешен за конец $x=0$ и возмущающая сила есть сила тяжести, т. е. $F(x, t) = p \cdot g$ (сила $F(x, t)$ отнесена к единице объема). Уравнение колебаний для данного случая имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \quad (9.31)$$

(см. (9.26)) при граничных условиях (9.27) и начальных условиях (4.5). Положим:

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \lambda_n x, \\ \frac{F(x, t)}{p} &= g = n = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \sin \lambda_n x, \end{aligned} \right\} \quad (9.32)$$

$$\text{Где } F_n = \frac{\int_0^l g \sin \lambda_n x dx}{\int_0^l \sin^2 \lambda_n x dx} = \frac{2g}{l\lambda_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Подставив ряды (9.32) в (9.31) и перенеся все члены влево, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(T_n'' + a^2 \lambda_n^2 T_n - \frac{2g}{l\lambda_n} \right) \sin \lambda_n x = 0$$

Откуда

$$T_n'' + a^2 \lambda_n^2 T_n - \frac{2g}{l\lambda_n} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$T_n = A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t + \frac{2g}{la^2 \lambda_n^3} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Чтобы удовлетворить условиям (9.28), требуем:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \sin \lambda_n x = f(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) \sin \lambda_n x = g(x).$$

Подсчёт коэффициентов Фурье для $f(x)$ и $g(x)$ по системе $\{\sin \lambda_n x\}$ дает:

$$T_n(0) = A_n + \frac{2g}{la^2 \lambda_n^3} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \lambda_n x dx,$$

$$T_n'(0) = B_n a \lambda_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \lambda_n x dx,$$

откуда

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \lambda_n x dx - \frac{2}{la^2 \lambda_n^3} = \overline{A}_n - \frac{2g}{la^2 \lambda_n^3}$$

$$B_n = \frac{2}{al \lambda_n} \int_0^l g(x) \sin \lambda_n x dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Поэтому

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\overline{A}_n \cos a \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t \right) \sin \lambda_n x - \frac{2g}{la^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos a \lambda_n t \sin \lambda_n x}{\lambda_n^3} + \frac{2g}{la^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x}{\lambda_n^4}$$

В первой сумме справа читатель без труда узнает функцию, дающую решение задачи о свободных колебаниях стержня при тех же условиях (9.28). Следовательно, вторая и третья суммы дают поправку на действие силы тяжести.

10. УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В СТЕРЖНЕ

10. 1. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим однородный цилиндрический стержень, боковая поверхность которого изолирована от внешнего про-

странства. Направим Ох вдоль оси стержня и обозначим через $u(x,t)$ температуру в сечении стержня с абсциссой x в момент t .

Пусть АВ-элемент стержня между сечениями x и $x + \Delta x$. Будем считать промежуток времени столь малым, чтобы температуру в сечении x и $x + \Delta x$ можно было принять неизменной (во времени). Опытом установлено, что количество тепла q , протекающее через какой-нибудь стержень, концы которого поддерживаются при постоянных температурах, пропорционально разности этих температур, площади сечения стержня, промежутку времени и обратно пропорционально длине стержня. Поэтому для элемента АВ можем написать:

$$q = \frac{K \cdot [u(x+\Delta x, t) - u(x, t)] \cdot s \cdot \Delta t}{\Delta x} = K \cdot \frac{\partial u(x + \theta \Delta x, t)}{\partial x} \cdot s \cdot \Delta t \quad (0 < \theta < 1)$$

Где K – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом внутренней теплопроводности, s – площадь поперечного сечения. В пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ мы получим количество тепла Q , протекающее через сечение x за время Δt :

$$Q(x) = K \frac{\partial u}{\partial x} s \Delta t \quad (10.1)$$

Рассмотрим опять элемент АВ. Нетрудно сообразить, что количество тепла ΔQ , которое получит этот элемент за время Δt , выразится так:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= Q(x + \Delta x) - Q(x) = Ks\Delta t \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \\ &= Ks\Delta t \Delta x \frac{\partial^2 u(x + \theta_1 \Delta x, t)}{\partial x^2} \quad (0 < \theta_1 < 1) \quad (10.2) \end{aligned}$$

(следует иметь в виду, что тепло течет в направлении, обратном тому, в котором возрастает температура). Величину ΔQ можно подсчитать и другим способом. Будем считать элемент АВ столь малым, что в каждый данный момент температуру всех его сечений можно считать одной и той же. Тогда

$$\Delta Q = cps\Delta x[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] = cps\Delta x\Delta t \frac{\partial u(x, t + \theta_2\Delta t)}{\partial t}$$

$$(0 < \theta_2 < 1) \quad (10.3)$$

где c - теплоемкость вещества стержня, p - плотность (на единицу длины) и, следовательно, $ps\Delta x$ - масса элемента АВ. Сопоставление (10.2) и (10.3) дает:

$$cp \frac{\partial u(x, t + \theta_2\Delta t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u(x + \theta_1\Delta x, t)}{\partial x^2}$$

И если перейти к пределу или $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10.4)$$

Где положено $a^2 = \frac{K}{cp}$. Мы получили уравнение

теплопроводности в линейном случае). В зависимости от условий, в которых находятся концы стержня, можно поставить несколько задач.

10.2. Распространение тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре.

Задача состоит в отыскании решения уравнения (10.4) при граничных условиях

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (10.5)$$

($x = 0$ и $x = l$ - концы стержня) и при начальном условии

$$u(x, 0) = f(x), \quad (10.6)$$

где $f(x)$ - заданная функция

Найдем частные решения уравнение (10.4) (отличные от $u \equiv 0$ и удовлетворяющие граничным условиям (10.5)) в виде

$$u(x, t) = \Phi(x)T(t).$$

Подстановка в (1.4) дает: $\Phi T' = a^2 \Phi'' T,$

Откуда

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2 = \text{const}$$

Следовательно

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0 \quad (10.7)$$

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0 \quad (10.8)$$

Из уравнения (10.7) находим:

$$\Phi(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

В силу условия (10.5) должны потребовать, чтобы

$$\Phi(0) = C_1 = 0, \quad \Phi(l) = C_2 \sin \lambda l = 0$$

Отсюда, считая $C_2 \neq 0$, получаем $\lambda l = \pi n$
(n – целое число).

Полагаем $C_2 = 1$, $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$,

$$\Phi_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

При $\lambda = \lambda_n$ уравнение (1.4) дает:

$$T_n(t) = A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} = A_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t}, \quad A = \text{const} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Таким образом, функции

$$u_n(x, t) = A_n \sin \frac{\pi n x}{l} e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Представляют собой частные решения уравнения (10.4), удовлетворяющие условиям на границе. Чтобы удовлетворить начальному условию, составляем ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l} e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} \quad (10.9)$$

И требуем, чтобы

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x) \quad (10.10)$$

Следовательно, нужно разложить $f(x)$ по системе $\left\{\sin \frac{\pi n x}{l}\right\}$.

Подсчет коэффициентов Фурье дает:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Итак, решение задачи дается рядом (10.9), где коэффициенты A_n определяются по формулам (10.10). Вследствие наличия множителей $e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t}$ ряд (10.9), как легко проверить, сходится равномерно для $t \geq t_0 > 0$ каково бы ни было $t_0 > 0$. То же справедливо для рядов, получающихся почленным дифференцированием по x и по t (любое число раз). Следовательно, сумма ряда непрерывна и почленное дифференцирование законно.

10.3. Распространение тепла в стержне, концы которого поддерживаются при постоянных температурах

Задача состоит в отыскании решения уравнения (10.4) при граничных условиях

$$u(0, x) = A = const, u(l, t) = B = const^* \quad (10.11)$$

И при начальном условии

$$u(x, 0) = f(x) \quad (10.12)$$

Решение ищем в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (10.13)$$

Где

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

Интегрирование по частям дает:

$$\frac{l}{2} \cdot T_n = \left[-\frac{lu(x,t)}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{l} \right]_{x=0}^{x=l} + \left[\frac{l^2}{\pi^2 n^2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \sin \frac{\pi n x}{l} \right]_{x=0}^{x=l} - \\ - \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \frac{\pi n x}{l} dx$$

Так как $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (10.4) и условиям (10.5), то

$$\frac{1}{2} \cdot T_n = \frac{1}{\pi n} [A - (-1)^n B] - \frac{l}{a^2 \pi^2 n^2} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (10.15)$$

Дифференцируя (10.14) по t , получим:

$$T_n' = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \sin \frac{\pi n x}{l} dx$$

И, следовательно,

$$\frac{1}{2} T_n = \frac{1}{\pi n} [A - (-1)^n B] - \frac{l^2}{2a^2 \pi^2 n^2} T_n'$$

Откуда

$$T_n' + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} T_n = \frac{2a^2 \pi n}{l^2} [A - (-1)^n B] \quad (10.15)$$

Это уравнение дает:

$$T_n = A_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} + 2 \cdot \frac{A - (-1)^n B}{\pi n} \quad (10.16)$$

Чтобы удовлетворить начальному условию (10.12), потребуем выполнения равенства

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x)$$

Подсчёт коэффициентов Фурье для $f(x)$ по системе $\left\{ \sin \frac{\pi n x}{l} \right\}$ даёт:

$$T_n(0) = A_n + 2 \cdot \frac{A - (-1)^n B}{\pi n} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$$

И поэтому

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx - 2 \cdot \frac{A - (-1)^n B}{\pi} \quad (10.17)$$

Таким образом, решение задачи дается рядом (10.13), где T_n определяется формулами (10.16) и (10.17).

10.4. Распространение тепла в бесконечном стержне

В этом случае граничных условия отсутствуют, и задача сводится к отысканию решения уравнения (10.4), определенного для всех x и $t > 0$ и удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (10.18)$$

Как обычно, ищем частные решения вида

$$u = \Phi(x)T(t)$$

Подстановка в (10.4) дает: $\Phi T' = a^2 \Phi'' T$

Откуда

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2 = \text{const} \quad (10.19)$$

И, следовательно,

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0 \quad (10.20), (10.21)$$

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0$$

Эти уравнения дают:

$$\Phi = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x,$$

$$T = C_3 e^{-a^2 \lambda^2 t}$$

Поэтому нужные нам частные решения могут быть записаны в виде

$$u(x, t; \lambda) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t}$$

Постоянные A и B произвольны и мы можем считать их значениями функций $A = A(\lambda), B = B(\lambda)$. При дискретных значениях λ (как в случае конечного стержня) мы составляли ряд, чтобы сумма ряда давала решение, удовлетворяющее начальному условию. В нашем случае λ меняется непрерывно, и мы полагаем:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} u(x, t; \lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \quad (10.22)$$

Если здесь возможно дифференцирование под знаком интеграла (один раз по t и дважды по x), то функция $u(x, t)$ есть решение уравнения (10.4). Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x, t; \lambda)}{\partial t} d\lambda - a^2 \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, t; \lambda)}{\partial x^2} d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u(x, t; \lambda)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t; \lambda)}{\partial x^2} \right) d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Чтобы удовлетворить начальному условию, потребуем выполнения равенства

$$u(x, 0) = \int_0^{\infty} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda = f(x)$$

Этому равенству можно удовлетворить, если потребовать представимость $f(x)$ интегралом Фурье. Для этого достаточно предположить, что $f(x)$ есть кусочно-гладкая и абсолютно интегрируемая на всей Ox функция. В сделанных предположениях

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos \lambda v dv, \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin \lambda v dv. \end{aligned} \quad (10.23)$$

При таких $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ интеграл (10.22) можно дифференцировать по x и по t сколько угодно раз. Действительно, ввиду наличия под интегралом множителя $e^{-a^2\lambda^2 t}$ и неравенств

$$|A(\lambda)| < \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(v)| dv = C$$

$$|B(\lambda)| < \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(v)| dv = C \quad (C = \text{const}).$$

Сам интеграл (10.22) и, получающиеся из него дифференцированием по x и по t любое число раз оказывается равномерно сходящимися для $t \geq t_0 > 0$ (при любом $t_0 > 0$), поскольку

$$|(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)e^{-a^2\lambda^2 t}| \leq 2Ce^{-a^2\lambda^2 t} \leq 2Ce^{-a^2\lambda^2 t_0},$$

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} [(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)e^{-a^2\lambda^2 t}] \right| \leq 2Ce^{-a^2\lambda^2 t} \leq 2Ce^{-a^2\lambda^2 t_0},$$

а мажорирующие функции интегрируемы по λ в пределах от 0 до бесконечности. Решение $u(x,t)$ есть решение уравнения (10.4), но оно не доказывает, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x,t) = f(x)$$

Тем не менее последнее все же справедливо, и это можно было бы доказать. Ввиду (10.23) найденное нами решение можно переписать так:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos\lambda(x-v) e^{-a^2\lambda^2 t} dv \quad (10.24)$$

Преобразуем эту формулу, для чего прежде всего установим возможность изменения порядка интегрирования. С этой целью заметим, что для каждого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших t

$$\left| \int_l^{\infty} \cos\lambda(x-v) e^{-a^2\lambda^2 t} d\lambda \right| \leq \int_l^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} d\lambda \leq \varepsilon \quad (t > 0 \text{ фиксировано})$$

Следовательно,

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_l^{\infty} f(v) \cos \lambda(x-v) e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \right| \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(v)| dv,$$

Откуда следует, что интеграл слева стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$, но тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_l^{\infty} f(v) \cos \lambda(x-v) e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda = \\ & \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_l^{\infty} f(v) \cos \lambda(x-v) e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda = \\ & \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_l^{\infty} f(v) \cos \lambda(x-v) e^{-a^2 \lambda^2 t} dv = u(x, t) \end{aligned}$$

(см. (10.24)). Изменение порядка интегрирования здесь законно, так как интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos \lambda(x-v) e^{-a^2 \lambda^2 t} dv$$

сходится равномерно по λ для $0 \leq \lambda \leq l$, поскольку подынтегральная функция не превосходит $|f(v)|$. Таким образом, можем писать:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv \int_0^{\infty} \cos \lambda(x-v) e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \quad (10.25)$$

Внутренний интеграл, оказывается, можно вычислить.

Действительно, положим $a\lambda\sqrt{t} = z$, $\lambda(x-v) = \mu z$

$$\text{Откуда } d\lambda = \frac{dz}{a\sqrt{t}}, \quad \mu = \frac{x-v}{a\sqrt{t}}.$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} \cos \lambda(x-u) e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-z} \cos \mu z dz = \frac{1}{a\sqrt{t}} I(\mu) \quad (10.26)$$

Дифференцирование по μ под знаком интеграла дает:

$I'(u) = -\int_0^{\infty} e^{-z^2} z \sin \mu z dz$, причем это дифференцирование законно в силу равномерной сходимости полученного интеграла по μ . Интегрируем теперь по частям:

$$I'(\mu) = \frac{1}{2} \left[e^{-z^2} \sin \mu z \right]_{z=0}^{z=\infty} - \frac{\mu}{2} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \mu z dz = \frac{\mu}{2} I(\mu).$$

Отсюда $I(\mu) = Ce^{-\frac{\mu^2}{4}}$. Чтобы найти C , полагаем здесь $\mu = 0$. Это даст: $C = I(0) \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz$

Мы получили известный интеграл Эйлера-Пуассона, значение которого равно $\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, поэтому $I(\mu) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-\frac{\mu^2}{4}}$

В силу (10.26)

$$\int_0^{\infty} \cos \lambda(x-v) e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(x-v)^2}{4a^2 t}}$$

Подставим это в (10.25), окончательно найдем

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4a^2 t}} dv$$

Эта формула, с одной стороны, показывает, что с течением времени $u(x,t) \rightarrow 0$, т. е. тепло как бы растекается вдоль стержня. С другой стороны, она показывает, что тепло передается вдоль стержня мгновенно. Действительно, пусть начальная температура положительна для $x_0 \leq v \leq x_1$ и равна нулю вне этого отрезка. Тогда для последующего распределения температуры получаем:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{x_1} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4a^2 t}} dv$$

Откуда видно, что при сколь угодно малых $t > 0$ и сколь угодно больших x $u(x,t) > 0$.

10.5. Распространение тепла в круглом цилиндре; случай установившейся температуры

Будем предполагать, что на поверхности цилиндра поддерживается неизменная температура, причем распределение ее не зависит от z . По прошествии длительного промежутка времени в каждой точке цилиндра установится определенная температура. Иными словами, функция u перестанет зависеть от t и получим, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Или, в полярных координатах,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (10.27)$$

Пусть температура на границе задана условием

$$u(l, \theta) = f(\theta) \quad (10.28)$$

Ищем частные решения вида $u(r, \theta) = R(r) \cdot \Phi(\theta)$

Подстановка в (10.27) даст:

$$R'' \Phi + \frac{1}{r} R' \Phi + \frac{1}{r^2} R \Phi'' = 0$$

Откуда

$$-\frac{R'' + \frac{1}{r} R'}{\frac{1}{r^2} R} = \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2 = const \quad (10.29)$$

Поэтому

$$r^2 R'' + r R' - \lambda^2 R = 0 \quad (10.30)$$

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0 \quad (10.31)$$

Из (10.31) находим: $\Phi(\theta) = A \cos \lambda \theta + B \sin \lambda \theta$

По замыслу задачи функция $\Phi(\theta)$ должна иметь период 2π и, следовательно, λ должно быть целым числом.

Полагаем:

$$\Phi_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (10.32)$$

При $\lambda = n$ уравнение (5.4) получает вид

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0 \quad (10.33)$$

Это есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Непосредственная проверка показывает, что функции r^n и r^{-n} удовлетворяют этому уравнению. Поэтому для $n > 0$ общим интегралом уравнения (10.33) будет:

$$R_n = C_n r^n + D_n r^{-n}$$

Поскольку $r^{-n} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, вынуждены положить $D_n = 0$.

При $n = 0$ легко находим

$$R_0 = C_0 + D_0 \ln r \quad (10.34)$$

И, следовательно, опять должны принять $D_0 = 0$.

В силу (10.32) и (10.34) и условий $D_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

можем писать: $u_n(r, \theta) = (\alpha_n \cos n\theta + \beta \sin n\theta) r^n$ ($n = 1, 2, \dots$)

$u_0 = \frac{\alpha_0}{2}$. Составляем ряд

$$u(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta \sin n\theta) r^n$$

и, чтобы удовлетворить условию (10.28), требуем выполнения равенства

$$u(l, \theta) = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta \sin n\theta) l^n = f(\theta)$$

Подсчет коэффициентов Фурье для $f(\theta)$ дает:

$$\alpha_n l^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta = a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\beta_n l^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{Откуда } \alpha_n = \frac{a_n}{l} \quad \beta_n = \frac{b_n}{l}.$$

Следовательно

$$u(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \frac{r^n}{l} \quad (10.35)$$

Этот ряд для $r < l$ можно сколько угодно раз дифференцировать почленно по r и по θ , так как каждый раз получаются ряды, равномерно сходящиеся для $0 \leq r \leq r_0$ при любом $r_0 < l$. Отсюда следует, что формула (10.35) действительно дает решение уравнения (10.27). Этому решению можно придать более компактный вид, если воспользоваться интегралом Пуассона, что дает:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2}{1 - 2\frac{r}{l} \cos(t - \theta) + \left(\frac{r}{l}\right)^2} dt$$

или

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{l^2 - r^2}{l^2 - 2lr \cos(t - \theta) + r^2} dt$$

Вместе с тем $\lim_{r \rightarrow l} u(r, \theta) = f(\theta)$ всюду, где $f(\theta)$

непрерывна. Это означает, что найденное решение удовлетворяет граничному условию (10.28).

11. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

В задачах управления и обработки информации возникает необходимость представления функций времени $f(t)$ в виде непрерывного частотного спектра $F(j\omega) = F(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, являющегося суммой неограниченно большого числа гармонических составляющих с частотами ω , отличающимися на бесконечно малую величину $d\omega$, амплитудами $F(\omega) \cdot d\omega$ и фазами $\varphi(\omega)$. Такой переход в технике получил название частотного представления временного сигнала, которое оказалось удобным инструментом анализа и синтеза информационно-управляющих систем и нашло, как будет показано ниже, широкое практическое применение.

В главе изложены теоретические основы частотных преобразований в непрерывной и дискретной формах, способы их алгоритмической реализации, в том числе так называемое быстрое преобразование, а также приведены числовые примеры.

11.1. Непрерывное преобразование Фурье

11.1.1. Интеграл Фурье и способы его вычисления

Пусть непериодическая функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси $(-\infty, \infty)$, т.е. существует интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \quad (11.1)$$

и пусть $f(t)$ на любом конечном интервале $[-\ell, \ell]$ удовлетворяет условиям Дирихле, т.е. разлагается в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi t}{\ell} \right), \quad (11.2)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx; \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

(введение переменной интегрирования x , отличной от t , не изменяет значений a_0 и b_0 и сделано для общности дальнейших выкладок). При выполнении этих условий функцию $f(t)$ можно представить интегралом:

$$f(t) = \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t) d\omega, \quad (11.3)$$

где

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx;$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx,$$

который называется интегралом Фурье.

Интеграл Фурье (11.3) является обобщением ряда Фурье (11.2) для неограниченного интервала $\ell \rightarrow \infty$. В отличие от ряда Фурье, который даёт разложение функции $f(t)$ на гармонические составляющие с дискретно изменяющимися частотами $\frac{n\pi}{\ell}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, интеграл Фурье даёт разложение функций на

гармоники с непрерывно изменяющейся от 0 до ∞ частотой ω .

В точках, где функция $f(t)$ непрерывна, интеграл Фурье (11.3) равен значению самой функции, а в точках разрыва — сходится к $f(t)$ в смысле Дирихле, т.е. равен полусумме значений $f(t)$ слева и справа от точки разрыва t^* :

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t^* - 0} f(t) + \lim_{t \rightarrow t^* + 0} f(t) \right].$$

Поскольку реальные сигналы – вещественные функции $f(t)$ с неотрицательной областью определения $t \in [0, \infty)$, то для вычисления интеграла Фурье следует доопределить $f(t)$ в интервале $(-\infty, 0)$ чётным или нечётным образом.

Если сделать $f(-t) = f(t)$ (чётное доопределение), то $f(x)\sin\omega x$ в (11.3) будет нечётной функцией, $B(\omega) = 0$, и получим косинус-форму преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \right) \cos \omega t \, d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t \, d\omega \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx. \end{aligned} \quad (11.4)$$

(Последняя форма записи означает, что сначала интегрируется $f(x)\cos\omega x$ по x , а затем полученный результат – по ω).

Если сделать $f(-t) = -f(t)$ (нечётное доопределение), то $f(x)\cos\omega x$ в (11.3) будет нечётной функцией, $A(\omega) = 0$, и получим синус-форму преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx \right) \sin \omega t \, d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega t \, d\omega \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Если в формуле (11.4) обозначить:

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx, \quad (11.6)$$

то (11.4) можно переписать:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t \, dt, \quad (11.7)$$

и убедиться в том, что преобразования (11.6) и (11.7) взаимно симметричны. Функция $F_c(\omega)$ называется прямым косинус-преобразованием Фурье для функции $f(t)$, а (11.7) – обратным косинус-преобразованием.

Аналогично из выражения (11.5) можно получить формулы для прямого и обратного синус-преобразований Фурье:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx, \quad (11.8)$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega t \, dt, \quad (11.9)$$

Синус преобразование используется для нечётно-доопределённых функций $f(t)$.

Формулы (11.7), (11.9) эквивалентны (11.4), (11.5), однако введение в рассмотрение пар симметричных преобразований (11.6), (11.7) и (11.8), (11.9) позволяет перейти к частотному представлению $F_c(\omega)$ и $F_s(\omega)$ функции времени $f(t)$. Смысл этих представлений будет рассмотрен ниже.

Рассмотрим числовые примеры вычисления интегралов Фурье.

Пример 1.

Вычислим интеграл Фурье для функции:

$$f(t) = e^{-at}, \quad t \geq 0, \quad a = 2.$$

Доопределяя эту функцию чётным образом и используя косинус-преобразование Фурье (11.4), получаем:

$$F(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-at} \cos \omega t \, dt \right) \cos \omega t \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{a^2 + \omega^2} \cos \omega t \, d\omega.$$

Представить интеграл $F(t)$ в конечном виде не удаётся, однако при подстановке в него $t=[0, \infty)$ получаем исходную функцию $f(t)$, т.е. в указанной области $F(t)=f(t)$. Результаты вычислений и их иллюстрация в пакете Mathcad показаны на рис.39.

На рис.39 показан также приём введения условия $t \geq 0$ в область определения функций: общее выражение для $f(t)$ умножается на функцию Хевисайда $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$$

которую часто называют единичной ступенчатой функцией.

$$a := 2 \quad f(t) := \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$R(\omega) := \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt \rightarrow \frac{2}{4 + \omega^2}$$

$$F(t) := \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} R(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t) d\omega$$

$$t := -2, -1.99..2$$

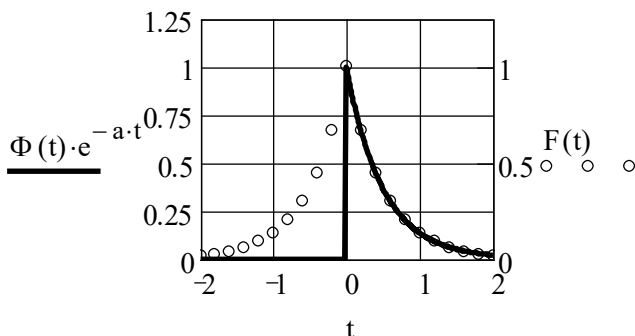


Рис. 32. Исходная функция $f(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$ и её интеграл Фурье $F(t)$

Рассмотренная в примере 1 функция $f(t) = e^{-at}$ имеет не только самостоятельное применение для описания реального сигнала, но и используется в качестве вспомогательной функции при вычислении интегралов Фурье для функций, не удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости (11.1). Приёмы такого использования функции $f(t) = e^{-at}$ приведены в примере 1.

Пример 2.

Вычислим интеграл Фурье для ступенчатого сигнала, описываемого функцией Хевисайда $f(t) = \Phi(t)$.

Для этой функции имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)| dt \rightarrow \infty,$$

т.е. условие абсолютной интегрируемости не выполняется. Однако интеграл Фурье можно получить путем введения в рассмотрение абсолютно интегрируемой функции $\Phi(t)e^{-at}$ с последующим устремлением a к нулю:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-at} \cos \omega t dt \right) \cos \omega t d\omega = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{a^2 + \omega^2} \cos \omega t d\omega. \end{aligned}$$

Примеры 1 и 2 показывают, что интегралы Фурье (11.4) и (11.5) не позволяют в явной форме получить частотное представление о сигнале $f(t)$. Более удобным для вычисления спектра $F(j\omega)$ является комплексная форма интеграла Фурье, переход к которой осуществляется с помощью формул Эйлера:

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}; \quad \sin z = -j \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2}; \quad (11.10)$$

$$\cos z + j \sin z = e^{jz}; \quad \cos z - j \sin z = e^{-jz}.$$

Подставляя (11.10) в (11.3) получаем:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^{\infty} \left(A(\omega) \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} - jB(\omega) \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2} \right) d\omega = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left((A(\omega) - jB(\omega)) e^{j\omega t} + (A(\omega) + jB(\omega)) e^{-j\omega t} \right) d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left((\cos \omega x - j \sin \omega x) e^{j\omega t} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\cos \omega x + j \sin \omega x) e^{-j\omega t} \right) dx \right) d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(e^{-j\omega x} e^{j\omega t} + e^{j\omega x} e^{-j\omega t} \right) dx \right) d\omega = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{e^{(j\omega t - x)} + e^{-j\omega(t-x)}}{2} \right) dx \right) d\omega = \\
&\quad = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega(t-x) dx \right) d\omega.
\end{aligned}$$

$$a := 1 \cdot 10^{-3} \quad f(t) := \Phi(t)$$

$$R(\omega) := \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) dt \text{ float, 1} \rightarrow \frac{.1e-2}{.1e-5 + \omega^2}$$

$$F(t) := \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} R(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t) d\omega$$

$$t := -2, -1.99 .. 2$$

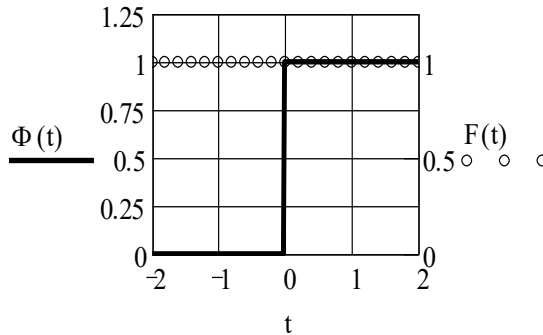


Рис. 33. Исходная функция $\Phi(t)$ и её интеграл Фурье $F(t)$

Переходя к интегрированию в интервале $(-\infty, \infty)$ введём во внутренний интеграл нечётную функцию от ω : $j \sin \omega(t-x)$, указанный интеграл от которой заведомо равен нулю:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos \omega(t-x) + j \sin \omega(t-x)) dx \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{j\omega(t-x)} dx \right) d\omega. \end{aligned}$$

Окончательное выражение для интеграла Фурье в комплексной форме примет вид:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \right) e^{j\omega t} d\omega. \quad (11.11)$$

Введя обозначение:

$$F(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx, \quad (11.12)$$

получим почти симметричное соотношение:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (11.13)$$

отличающиеся знаком в показателе степени.

Пара соотношений (11.12) и (11.13) определяют собою соответственно прямое преобразование Фурье для функции $f(t)$ и обратное преобразование Фурье для её спектра $F(j\omega)$.

В технических приложениях получила применение несимметричная пара преобразований Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (11.14)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (11.15)$$

Выражение (11.14) может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega t dt = \\ &= \operatorname{Re} F(j\omega) + j \operatorname{Im} F(j\omega). \end{aligned} \quad (11.16)$$

Сопоставляя (11.1) с косинус и синус-преобразованиями (11.6) и (11.8) можно заметить, что несимметричные формы последних:

$$F_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \text{ и } F_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt ,$$

представляют собой вещественную и мнимую части комплексного выражения $F(j\omega)$:

$$F(j\omega) = F_c(\omega) - jF_s(\omega),$$

его модуль:

$$|F(j\omega)| = \sqrt{F_c(\omega)^2 + F_s(\omega)^2} ,$$

и фаза:

$$\varphi(\omega) = \arg F(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{-F_s(\omega)}{F_c(\omega)} ,$$

дают искомое частотное представление, т.е. спектр $F(j\omega)$ функции времени $f(t)$:

$$F(j\omega) = F(\omega) e^{j\varphi(\omega)} .$$

Модуль $F(\omega)$ характеризует плотность распределения амплитуд гармонических составляющих, а фаза $\varphi(\omega)$ – их фазовые сдвиги.

Приведём примеры вычисления спектров сигналов с помощью преобразования Фурье.

Пример 3.

Определим спектр $F(j\omega)$ функции из примера 11.1.1:

$$f(t) = e^{-at} , \quad t \geq 0, \quad a = 2.$$

$$\operatorname{Re} F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{-at} \cos \omega t dt = \frac{a}{a^2 + \omega^2} .$$

$$\operatorname{Im} F(j\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{-at} \sin \omega t dt = - \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} .$$

$$F(j\omega) = \operatorname{Re} F(j\omega) + j \operatorname{Im} F(j\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{a + j\omega} .$$

$$F(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re} F(j\omega)^2 + \operatorname{Im} F(j\omega)^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}.$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} F(j\omega)}{\operatorname{Re} F(j\omega)} = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{a}.$$

Программа реализации этих вычислений в Mathcad'е представлена на рис. 34.

$$a := 2 \quad f(t) := \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$R(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt \rightarrow \frac{2}{4 + \omega^2}$$

$$I(\omega) := -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt \rightarrow \frac{-1}{4 + \omega^2} \cdot \omega$$

$$F(i, \omega) := R(\omega) + i \cdot I(\omega) \text{ factor} \rightarrow \frac{i}{(-\omega) + 2 \cdot i}$$

$$F(\omega) := \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2} \text{ factor} \rightarrow \left(\frac{1}{4 + \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi(\omega) := \operatorname{atan} \left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)} \right) \rightarrow -\operatorname{atan} \left(\frac{1}{2} \cdot \omega \right)$$

$t := -2, -1.99 \dots 2$

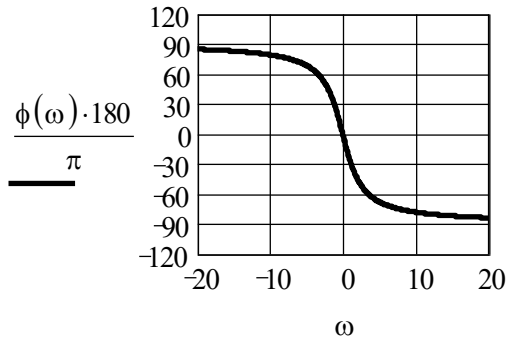
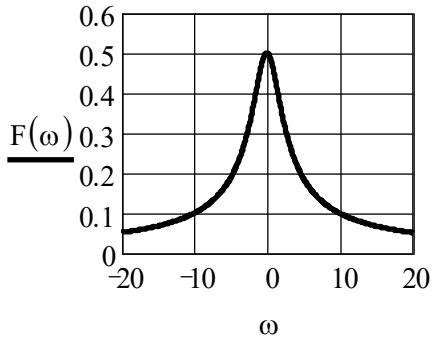
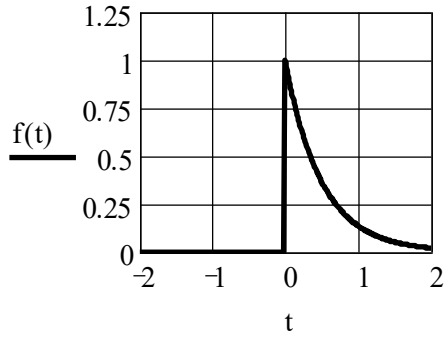


Рис. 34. Вычисление спектра функции $f(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$

Пример 4.

Определим спектр функции Хевисайда $f(t)=\Phi(t)$.

Воспользуемся результатами примеров 1, 2 и осуществим предельный переход: $f(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \Phi(t)e^{-at}$.

Тогда выражения для модуля и фазы спектральных составляющих $F(j\omega)$ примут вид:

$$F(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\omega};$$

$$\varphi(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \arctg \frac{-\omega}{a} = \begin{cases} 90^\circ & \text{при } \omega < 0; \\ -90^\circ & \text{при } \omega > 0. \end{cases}$$

Вычисления в пакете Mathcad и графики модуля и фазы приведены на рис. 35.

$$a := 1 \cdot 10^{-3} \quad f(t) := \Phi(t)$$

$$R(\omega) := \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) dt \rightarrow \frac{1}{1000 \cdot \left(\frac{1}{1000000} + \omega^2 \right)}$$

$$I(\omega) := - \left(\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) dt \right) \rightarrow \frac{-\omega}{\frac{1}{1000000} + \omega^2}$$

$$F(i, \omega) := R(\omega) + i \cdot I(\omega) \text{ factor} \rightarrow (-1000) \cdot \frac{i}{1000 \cdot \omega - i}$$

$$F(\omega) := \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2} \text{ simplify} \rightarrow 1000 \cdot \left(\frac{1}{1 + 1000000 \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi(\omega) := \text{atan} \left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)} \right) \text{ simplify} \rightarrow -\text{atan}(1000 \cdot \omega)$$

$t := -2, -1.99..2$

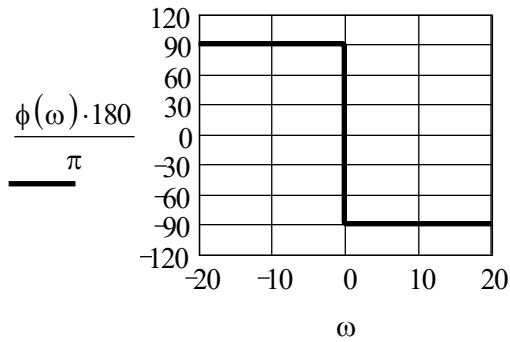
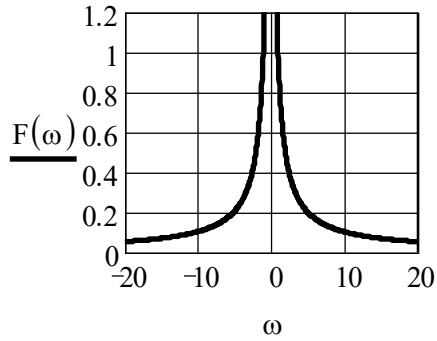
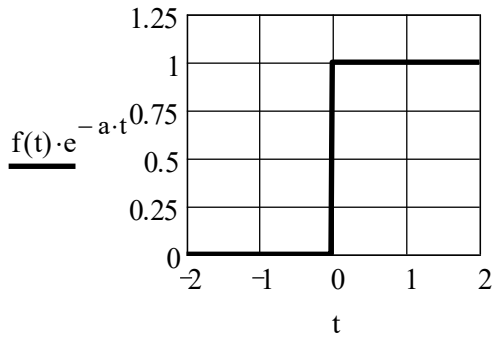


Рис.35. Вычисление спектра функции Хевисайда $\Phi(t)$

11.1.2. Свойства преобразований Фурье

При получении спектров сложных функций $f(t)$ полезно пользоваться свойствами преобразований Фурье, приведёнными в таблице 1.

Свойства преобразований Фурье

Свойство	$f(t)$	$F(j\omega)$
Прямое преобразование	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega t} dt = F(j\omega),$	
Обратное преобразование	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$	
Линейность	$a \cdot f(t) f_1(t) \pm f_2(t)$	$a \cdot F(j\omega) F_1(j\omega) \pm F_2(j\omega)$
Подобие	$f\left(\frac{t}{a}\right)$	$a \cdot F(j\omega a)$
Смещение в комплексной области	$f(t)e^{jat}$ $f(t)e^{-jat}$	$F(j\omega - a)$ $F(j\omega + a)$
Смещение в вещественной области	$f(t - a)$ $f(t + a)$	$F(j\omega)e^{-j\omega a}$ $F(j\omega)e^{j\omega a}$
Теорема Релея	$\int_0^{\infty} f(t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega)^2 d\omega$	

Остановимся на математическом и физическом содержании теоремы Релея (равенстве Парсеваля), имеющей важное прикладное значение при обработке сигналов.

Возьмём выражение для обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Умножим обе части этого равенства на $f(t)$ и проинтегрируем по t в интервале $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) dt.$$

В правой части полученного выражения изменим порядок интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right) d\omega,$$

и в соответствии с формулой (11.14) для прямого преобразования Фурье, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt = F(-j\omega).$$

Отсюда следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F(-j\omega) d\omega,$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\omega) d\omega.$$

Если учесть, что для $t < 0$ реальные сигналы $f(t) = 0$, а также обратить внимание, что $F^2(\omega)$ является чётной функцией и пределы интегрирования $\int_{-\infty}^{\infty}$ для чётной функции можно

заменить на $2 \int_0^{\infty}$, то придём к равенству Парсеваля, являющемуся предметом теоремы Релея:

$$\int_0^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F^2(\omega) d\omega.$$

В физическом смысле эта теорема показывает, что интеграл квадрата модуля спектра сигнала $f(t)$ равен энергии, рассеиваемой этим сигналом в цепи с активным сопротивлением.

Действительно, если принять, что величина $f(t)$ имеет размерность напряжения U на некотором участке электрической цепи, то квадрат этой величины U^2 пропорционален активной мощности $P \sim U^2$, выделяемой сигналом на этом участке, интеграл которой соответствует выделенной энергии.

В теории случайных процессов величина $F(j\omega)$ имеет смысл спектральной плотности случайного сигнала $f(t)$. Средняя мощность P_{cp} , рассеиваемая этим сигналом на активном сопротивлении 1 Ом определяется выражением:

$$P_{cp} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega.$$

Отсюда следует, что мощность сигнала $f(t)$ может быть представлена в виде суммы бесконечно малых слагаемых $\frac{1}{\pi} F(\omega) d\omega$, играющих роль элементарных мощностей спектра.

Рассмотрим пример применения некоторых из свойств преобразований Фурье для вычисления спектров сигналов.

Пример 5.

Найти спектр прямоугольного импульса длительностью 2 с и амплитудой 5 В.

Опишем заданный сигнал функцией:

$$f(t) = 5 \cdot (\Phi(t) e^{-at} - \Phi(t - \tau) e^{-a(t - \tau)}),$$

где $a \rightarrow 0$, $\tau = 2$.

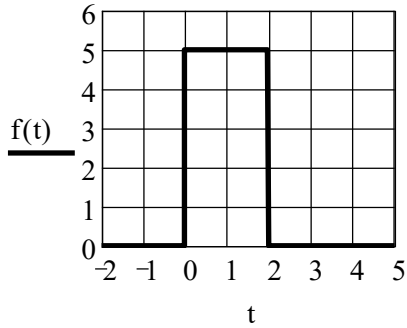
Используя найденное в примере 4 выражение $F_X(j\omega)=1/j\omega$ для спектра функции Хевисайда $f(t)=\Phi(t)e^{-at}$ и указанные в табл. 1 свойства линейности и смещения в вещественной области, получим спектр $F(j\omega)$ заданного сигнала:

$$F(j\omega) = 5(F_X(j\omega) - F_X(j\omega)e^{-j\omega 2}) = 5F_X(j\omega)(1 - e^{-j\omega 2}).$$

Порядок вычисления спектра $F(j\omega)$ и его результаты показаны на рис. 36. Следует обратить внимание, что периодический характер фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ на рис.36 связан с периодическими разрывами функции арктангенса.

$$\begin{aligned} \tau &:= 2 & a &:= 1 \cdot 10^{-3} \\ f(t) &:= 5 \cdot \left[\Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} - \Phi(t - \tau) \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)} \right] \\ R1(\omega) &:= \left(\int_0^{\infty} \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \, dt \right) \\ I1(\omega) &:= - \left(\int_0^{\infty} \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \, dt \right) \\ F1(i, \omega) &:= R1(\omega) + i \cdot I1(\omega) \quad \left| \begin{array}{l} \text{factor} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow (-1000) \cdot \frac{i}{1000 \cdot \omega - i} \\ F(i, \omega) &:= 5 \cdot \frac{1000 \cdot i}{(-1000) \cdot \omega + i} \cdot (1 - e^{-i \cdot \omega \cdot \tau}) \\ F(\omega) &:= \left| 5 \cdot \frac{1000 \cdot i}{(-1000) \cdot \omega + i} \cdot (1 - e^{-i \cdot \omega \cdot \tau}) \right| \\ \phi(\omega) &:= \arg \left[5 \cdot \frac{1000 \cdot i}{(-1000) \cdot \omega + i} \cdot (1 - e^{-i \cdot \omega \cdot \tau}) \right] \end{aligned}$$

$t := -2, -1.99..5$



$\omega := -10, -9.9999..10$

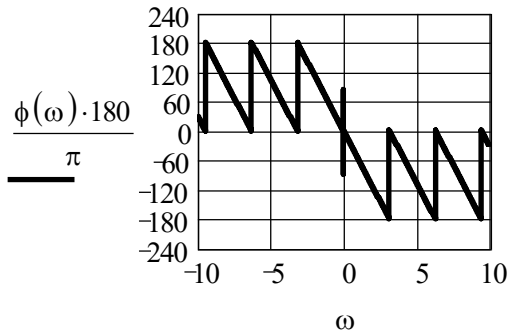
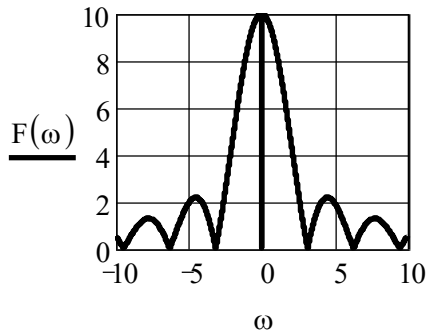


Рис. 36. Вычисление спектра одиночного прямоугольного импульса

Покажем, как с помощью преобразования Фурье получить спектр неограниченного во времени гармонического сигнала $f(t)=\sin\omega t$, не удовлетворяющего условию абсолютной интегрируемости.

Пример 6.

Найдём спектр функции $f(t)=\sin 3t$ при $t \geq 0$.

Воспользуемся изложенным выше приёмом предельного перехода и будем искать спектр функции:

$$f(t) = \sin 3t \cdot \Phi(t) e^{-at} \text{ при } a \rightarrow 0.$$

Необходимые преобразования и их результаты показаны на рис. 37. На рис. 37 хорошо видны симметричные спектральные составляющие, соответствующие частоте сигнала $\omega=3 \text{ с}^{-1}$.

$$f(t) := \sin(3t) \quad a := 1 \cdot 10^{-3}$$

$$R(\omega) := \int_0^{\infty} f(t) \cdot \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) dt$$

$$I(\omega) := - \int_0^{\infty} f(t) \cdot \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) dt$$

$$F(i, \omega) := R(\omega) + i \cdot I(\omega) \rightarrow \frac{-3000000}{(1000 \cdot \omega + 3000 - i) \cdot (1000 \cdot \omega - 3000 - i)}$$

$$F(\omega) := \left| \frac{-3000000}{(1000 \cdot \omega - 3000 - i) \cdot (1000 \cdot \omega + 3000 - i)} \right|$$

$$\phi(\omega) := \arg \left[\frac{-3000000}{(1000 \cdot \omega - 3000 - i) \cdot (1000 \cdot \omega + 3000 - i)} \right]$$

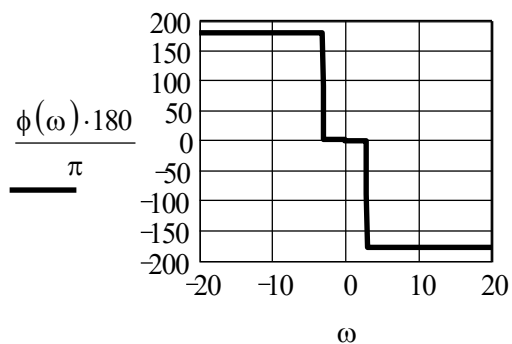
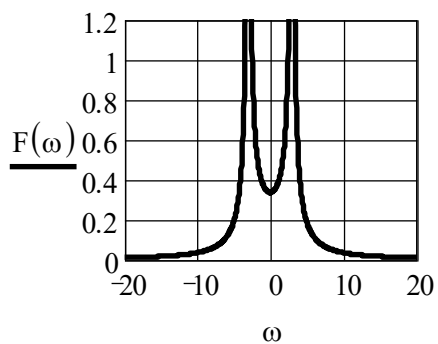
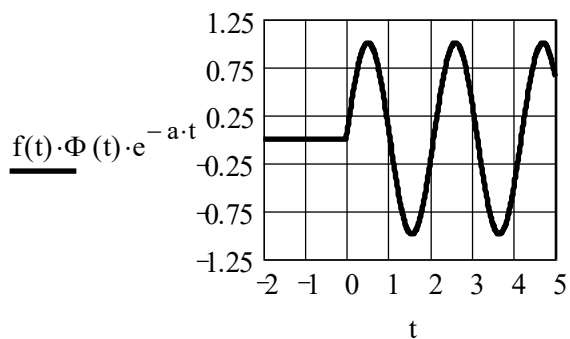


Рис. 37. Спектр гармонического сигнала $f(t)=\sin 3t, t \geq 0$

Установим взаимосвязь между рядом Фурье $F(t)$ и спектром $F(j\omega)$ для одной и той же функции $f(t)$. Для этого представим ряд (11.2) в комплексной форме:

$$F(t) = \frac{1}{2\ell} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{n\pi t}{\ell}} = \frac{1}{2\ell} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-j\frac{n\pi x}{\ell}} dx \right) \cdot e^{j\frac{n\pi t}{\ell}}. \quad (11.17)$$

Сравнивая (11.17) с интегралом Фурье (11.11) и прямым преобразованием (11.14):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \right) e^{j\omega t} d\omega;$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

получаем: $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=\frac{n\pi}{\ell}}$, или $c_n = F(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{n\pi}{\ell}}$,

т.е. комплексные коэффициенты c_n ряда Фурье для периодической функции с периодом 2ℓ определяют значение преобразования Фурье (11.14) в дискретных точках $\omega = \frac{n\pi}{\ell}$ для непериодической функции такой же формы, заданной на интервале $[0, \ell]$ и доопределённой до периода 2ℓ на интервале $[-\ell, \ell]$.

Это же соотношение распространяется и на модули указанных величин (см. также (11.2)):

$$|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |F(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{n\pi}{\ell}},$$

или $|c_n| = F(\omega) \Big|_{\omega=\frac{n\pi}{\ell}}$.

Покажем справедливость этого вывода на примере 7.

Пример 7.

Воспользуемся материалом примера 5, в котором рассматривался одиночный прямоугольный импульс:

$$f(t)=5(\Phi(t)-\Phi(t-2)),$$

длительностью 2 с. Периодически дополним эту функцию нечётным образом с периодом $2\ell=4$ с (см. рис. 38):

$$F(t) = \begin{cases} -5 & \text{при } -2 < t < 0; \\ 5 & \text{при } 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Представим функцию $F(t)$ рядом Фурье:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi t}{\ell} \right), \text{ где } \ell=2.$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F(t) dt = 0;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F(t) \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{5}{2} \left(\int_{-2}^0 (-1) \cos \frac{n\pi t}{2} dt + \int_0^2 1 \cdot \cos \frac{n\pi t}{2} dt \right) = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{n\pi} \left(-\sin \frac{n\pi t}{2} \Big|_{-2}^0 + \sin \frac{n\pi t}{2} \Big|_0^2 \right) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F(t) \sin \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{5}{2} \left(\int_{-2}^0 (-1) \sin \frac{n\pi t}{2} dt + \int_0^2 1 \cdot \sin \frac{n\pi t}{2} dt \right) = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi t}{2} \Big|_{-2}^0 - \cos \frac{n\pi t}{2} \Big|_0^2 \right) = \frac{10}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при чётных } n; \\ \frac{20}{n\pi} & \text{при нечётных } n. \end{cases} \end{aligned}$$

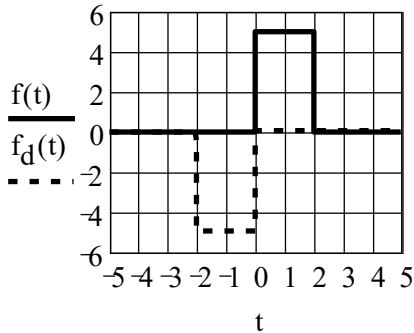
Как и следовало ожидать, коэффициенты a_n для нечётным образом доопределённой функции $F(t)$ равны нулю, т.е. $|c_n|=b_n$.

Искомый ряд Фурье приобретает вид:

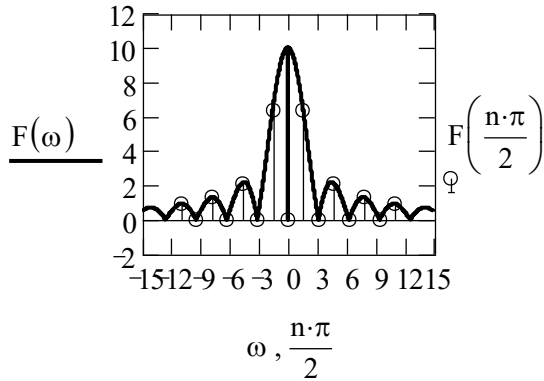
$$F(t) = \frac{20}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right).$$

Результаты численного сопоставления $|c_n|$ и $F(\omega)$ представлены на рис. 36.

$$\begin{aligned} \tau &:= 2 & a &:= 1 \cdot 10^{-3} \\ f(t) &:= 5 \cdot \left[\Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} - \Phi(t - \tau) \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)} \right] \\ f_d(t) &:= 5 \cdot \left[\Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} - \Phi(t + \tau) \cdot e^{-a \cdot (t + \tau)} \right] \\ F(i, \omega) &:= 5 \cdot \frac{1000 \cdot i}{(-1000) \cdot \omega + i} \cdot \left(1 - e^{-i \cdot \omega \cdot \tau} \right) \\ F(\omega) &:= \left| 5 \cdot \frac{1000 \cdot i}{(-1000) \cdot \omega + i} \cdot \left(1 - e^{-i \cdot \omega \cdot \tau} \right) \right| \\ t &:= -5, -4.99 \dots 5 \end{aligned}$$



$$n := -7, -6..7 \quad \omega := -15, -14.99..15$$



$$n := 1, 3..7 \quad c_n := \frac{20}{n \cdot \pi} \quad F_{m_n} := F\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)$$

$$c^T = (0 \ 6.366 \ 0 \ 2.122 \ 0 \ 1.273 \ 0 \ 0.909)$$

$$F_m^T = (0 \ 6.366 \ 0 \ 2.122 \ 0 \ 1.273 \ 0 \ 0.909)$$

Рис. 38. Сопоставление ряда Фурье и преобразования Фурье для функции одиночного импульса (продолжение)

11.1.3. Использование преобразования Фурье для спектрального анализа сигналов и систем

Преобразование Фурье в технических приложениях наиболее часто используется для решения распространённой задачи обработки информации: определить, как изменяется сигнал $f(t)$ и его спектр при прохождении через некоторую систему, осуществляющую преобразование этого сигнала. Эту задачу называют также задачей фильтрации.

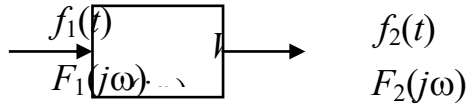


Рис. 39. Постановка задачи фильтрации

Для решения этой задачи в теории информации вводится понятие частотной функции $W(j\omega)$, равной отношению спектра (преобразования Фурье) $F_2(j\omega)$ сигнала $f_2(t)$ на выходе системы к спектру (преобразованию Фурье) $F_1(j\omega)$ сигнала $f_1(t)$ на её входе:

$$W(j\omega) = \frac{F_2(j\omega)}{F_1(j\omega)}. \quad (11.18)$$

Представляя указанные спектры в виде:

$$F_2(j\omega) = F_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)} \quad \text{и} \quad F_1(j\omega) = F_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)},$$

получим:

$$W(j\omega) = \frac{F_2(\omega)}{F_1(\omega)} e^{j(\varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega))} = W(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \quad (11.19)$$

Выражение для частотной функции (11.19) содержит в себе модуль (амплитудную частотную характеристику) $W(\omega)$ системы:

$$W(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2 W(j\omega) + \operatorname{Im}^2 W(j\omega)},$$

и фазу (фазовую частотную характеристику) $\varphi(\omega)$ системы:

$$\varphi(\omega) = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} W(j\omega)}{\operatorname{Re} W(j\omega)}.$$

Из определения частотной функции (11.18) вытекает физический смысл введённых величин: модуль $W(\omega)$ частотной функции $W(j\omega)$ показывает, во сколько раз изменится амплитуда гармонического сигнала с частотой ω при прохождении сигнала через систему, а фаза $\varphi(\omega)$ равна его фазовому сдвигу.

Пример 8.

Рассмотрим систему с частотной характеристикой:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\omega}.$$

Найдём модуль и фазу этой характеристики:

$$W(j\omega) = \frac{1 - j2\omega}{(1 + j2\omega)(1 - j2\omega)} = \frac{1}{1 + 4\omega^2} - j \frac{2\omega}{1 + 4\omega^2},$$

$$\text{или } \operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{1}{1 + 4\omega^2}; \quad \operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{-2\omega}{1 + 4\omega^2}.$$

Отсюда получаем:

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-2\omega).$$

Графическое представление частотных характеристик системы приведено на рис. 40, из которого следует, что данная система представляет собою фильтр низкой частоты (ФНЧ), подавляющий высокочастотную часть спектра входного сигнала. Фаза выходного сигнала с ростом частоты отстаёт от входного вплоть до (-90 град).

$$W(i, \omega) := \frac{1}{1 + i \cdot 2\omega}$$

$$\frac{1}{1 + i \cdot 2\omega} \text{ complex} \rightarrow \frac{1}{1 + 4 \cdot \omega^2} - 2 \cdot i \cdot \frac{\omega}{1 + 4 \cdot \omega^2}$$

$$|W(\omega)| := \left| \frac{1}{1 + i \cdot 2\omega} \right| \rightarrow \frac{1}{(1 + 4 \cdot \omega^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\varphi(\omega) := \operatorname{atan}(-2\omega)$$

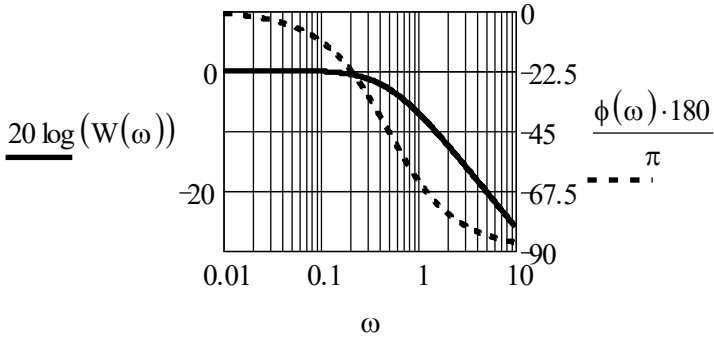


Рис. 40. Частотные характеристики фильтра низких частот

Пример 9.

Определим свойства системы с частотной характеристикой:

$$W(j\omega) = \frac{j2\omega}{1 + j2\omega}.$$

Порядок анализа в пакете Mathcad и его результаты представлены на рис. 41.

$$W(i, \omega) := \frac{i \cdot 2\omega}{1 + i \cdot 2\omega}$$

$$\frac{i \cdot 2\omega}{1 + i \cdot 2\omega} \text{ complex} \rightarrow 4 \cdot \frac{\omega^2}{1 + 4 \cdot \omega^2} + 2 \cdot i \cdot \frac{\omega}{1 + 4 \cdot \omega^2}$$

$$W(\omega) := \left| \frac{i \cdot 2\omega}{1 + i \cdot 2\omega} \right| \text{ factor} \rightarrow 2 \cdot \left(\frac{\omega^2}{1 + 4 \cdot \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi(\omega) := \text{atan} \left(\frac{1}{2\omega} \right)$$

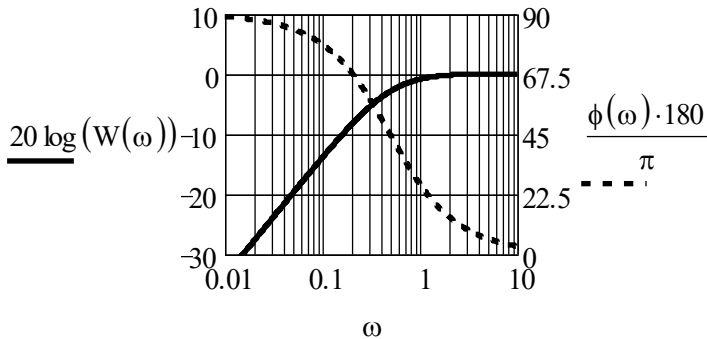


Рис. 41. Частотные характеристики фильтра высоких частот

Рассматриваемое устройство, в отличие от системы из примера 11.8, подавляет низкочастотную часть спектра входного сигнала и называется фильтром высоких частот (ФВЧ).

Фазовый сдвиг этого фильтра изменяется от +90 град на низких частотах до 0 град в диапазоне высоких частот.

Пример 10.

Возьмём систему с более сложной частотной функцией:

$$W(j\omega) = \frac{36 - 4\omega^2}{27 - 9\omega^2 + j(27 - \omega^3)}.$$

Эта характеристика описывает собою узкополосный заграждающий фильтр (фильтр-пробку), не пропускающий частоту $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$. Кроме этого свойства, как следует из рис. 42, система подавляет высокие частоты $\omega > 10 \text{ с}^{-1}$ (ФВЧ). Следует обратить внимание, что разрыв фазовой характеристики происходит не на частоте заграждения $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$, а на частоте $\omega = 1,7 \text{ с}^{-1}$, характеризующейся небольшими резонансными свойствами системы, проявляющимися на рисунке амплитудной частотной характеристики $W(\omega)$. На самой частоте заграждения значение фазового сдвига равно нулю. Полные выражения для $W(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, в силу их громоздкости, на рис. 42 не приведены.

$$W(i, \omega) := \frac{36 - 4\omega^2}{27 - 9\omega^2 + i \cdot (27 - \omega^3)}$$

$$R(\omega) := \operatorname{Re} \left[\frac{36 - 4\omega^2}{27 - 9\omega^2 + i \cdot (27 - \omega^3)} \right]$$

$$I(\omega) := \operatorname{Im} \left[\frac{36 - 4\omega^2}{27 - 9\omega^2 + i \cdot (27 - \omega^3)} \right]$$

$$W(\omega) := \left| \frac{36 - 4\omega^2}{27 - 9\omega^2 + i \cdot (27 - \omega^3)} \right| \quad \phi(\omega) := \operatorname{atan} \left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)} \right)$$

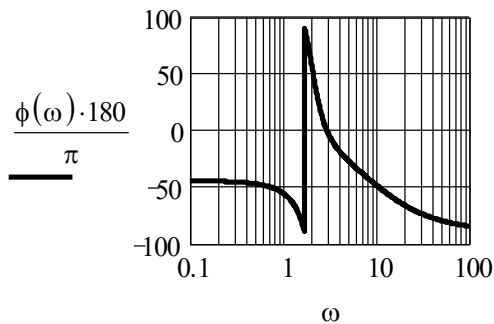
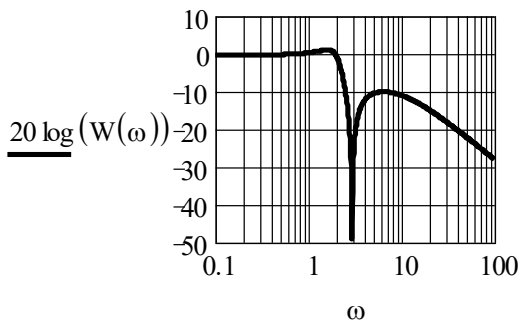


Рис. 42. Частотные характеристики заграждающего фильтра

Рассмотрим теперь, как воспользоваться частотными характеристиками системы для анализа прохождения через неё сигнала.

В соответствии с определением (11.18) частотной функции $W(j\omega)$ спектр выходного сигнала $F_2(j\omega)$ вычисляется из равенства:

$$F_2(j\omega) = W(j\omega)F_1(j\omega), \quad (11.20)$$

из которого вытекает порядок анализа преобразований:

1. К известному входному сигналу, представленному функцией времени $f_1(t)$, применить преобразование Фурье и получить спектр $F_1(j\omega)$:

$$F_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t} dt.$$

2. По известной частотной функции $W(j\omega)$ системы, преобразующей сигнал $f_1(t)$, найти спектр $F_2(j\omega)$ выходного сигнала $f_2(t)$:

$$F_2(j\omega) = W(j\omega)F_1(j\omega).$$

3. Применив к полученному спектру $F_2(j\omega)$ обратное преобразование Фурье, определить выходной сигнал в виде функции времени $f_2(t)$:

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

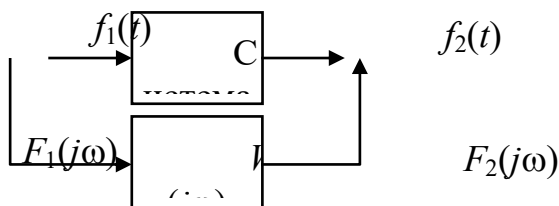


Рис. 43. Порядок анализа частотного преобразования сигнала

Пример 11.

Определить, как изменится сигнал, имеющий форму одиночного прямоугольного импульса длительностью 2 с и амплитуду 5 В (см. пример 5) при прохождении его через фильтр низких частот, описанный в примере 8.

Вычисления, проведённые в пакете Mathcad, представлены на рис. 44.

$$\begin{aligned} \tau &:= 2 & a &:= 1 \cdot 10^{-3} \\ f_1(t) &:= 5 \cdot \left[\Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} - \Phi(t - \tau) \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)} \right] \\ F_1(i, \omega) &:= 5 \cdot \frac{1000 \cdot i}{(-1000) \cdot \omega + i} \cdot (1 - e^{-i \cdot \omega \cdot \tau}) \\ W(i, \omega) &:= \frac{1}{1 + i \cdot 2\omega} \\ F_2(i, \omega) &:= W(i, \omega) \cdot F_1(i, \omega) \rightarrow \frac{(-5000) + 5000 \cdot e^{(-2) \cdot i \cdot \omega}}{(-1002) \cdot i \cdot \omega - 1 + 2000 \cdot \omega^2} \\ F_1(\omega) &:= \left| 5 \cdot \frac{1000 \cdot i}{(-1000) \cdot \omega + i} \cdot (1 - e^{-i \cdot \omega \cdot \tau}) \right| \\ F_2(\omega) &:= \left| \frac{(-5000) + 5000 \cdot e^{(-2) \cdot i \cdot \omega}}{(-1002) \cdot i \cdot \omega - 1 + 2000 \cdot \omega^2} \right| \\ f_2(t) &:= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-5000) + 5000 \cdot e^{(-2) \cdot i \cdot \omega}}{(-1002) \cdot i \cdot \omega - 1 + 2000 \cdot \omega^2} e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega \end{aligned}$$

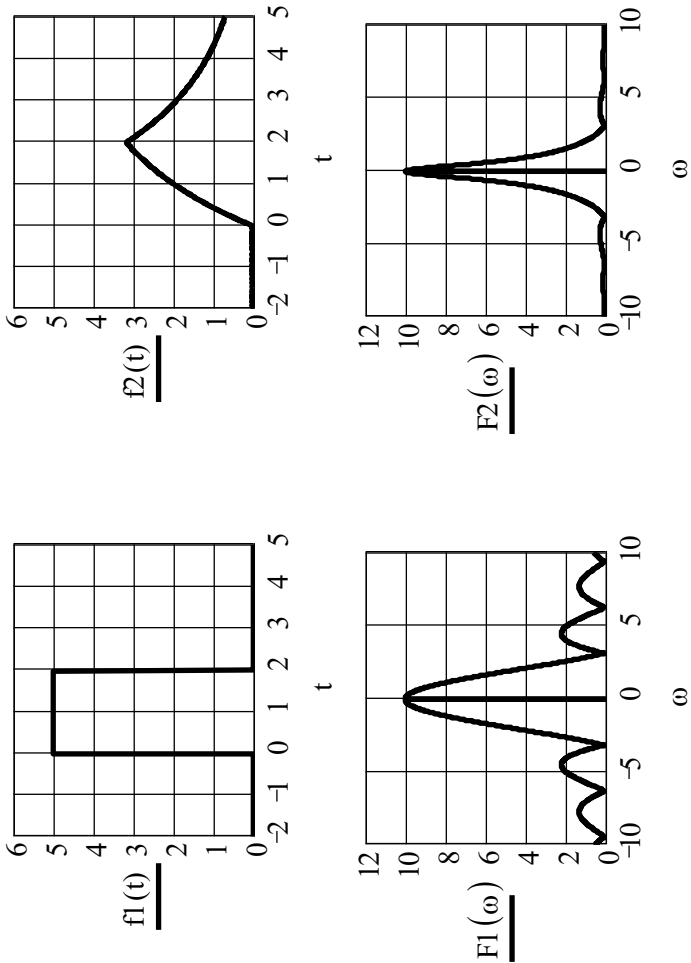


Рис. 44. Частотный анализ преобразования прямоугольного импульса фильтром низких частот

Анализ рис. 45 показывает, что в результате подавления фильтром низких частот высокочастотной части спектра исходного сигнала происходит искажение (затягивание) фронта и спада импульса.

Пример 12.

Определить, как изменится сигнал, имеющий форму одиночного прямоугольного импульса длительностью 2 с и амплитуду 5 В (см. пример 5) при прохождении его через фильтр высоких частот, описанный в примере 9.

Вычисления в пакете Mathcad, представлены на рис. 45.

$$\begin{aligned} \tau &:= 2 & a &:= 1 \cdot 10^{-3} \\ f1(t) &:= 5 \cdot [\Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} - \Phi(t - \tau) \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)}] \\ F1(i, \omega) &:= 5 \cdot \frac{1000 \cdot i}{(-1000) \cdot \omega + i} \cdot (1 - e^{-i \cdot \omega \cdot \tau}) \\ W(i, \omega) &:= \frac{i \cdot 2\omega}{1 + i \cdot 2\omega} \\ W(i, \omega) \cdot F1(i, \omega) &\rightarrow 10000 \cdot i \cdot \frac{(-\omega) + \omega \cdot e^{(-2) \cdot i \cdot \omega}}{(-1002) \cdot i \cdot \omega - 1 + 2000 \cdot \omega^2} \\ F1(\omega) &:= \left| 5 \cdot \frac{1000 \cdot i}{(-1000) \cdot \omega + i} \cdot (1 - e^{-i \cdot \omega \cdot \tau}) \right| \\ F2(\omega) &:= \left| 10000 \cdot i \cdot \frac{(-\omega) + \omega \cdot e^{(-2) \cdot i \cdot \omega}}{(-1002) \cdot i \cdot \omega - 1 + 2000 \cdot \omega^2} \right| \\ f2(t) &:= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-200}^{200} 10000 \cdot i \cdot \frac{(-\omega) + \omega \cdot e^{(-2) \cdot i \cdot \omega}}{(-1002) \cdot i \cdot \omega - 1 + 2000 \cdot \omega^2} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega \end{aligned}$$

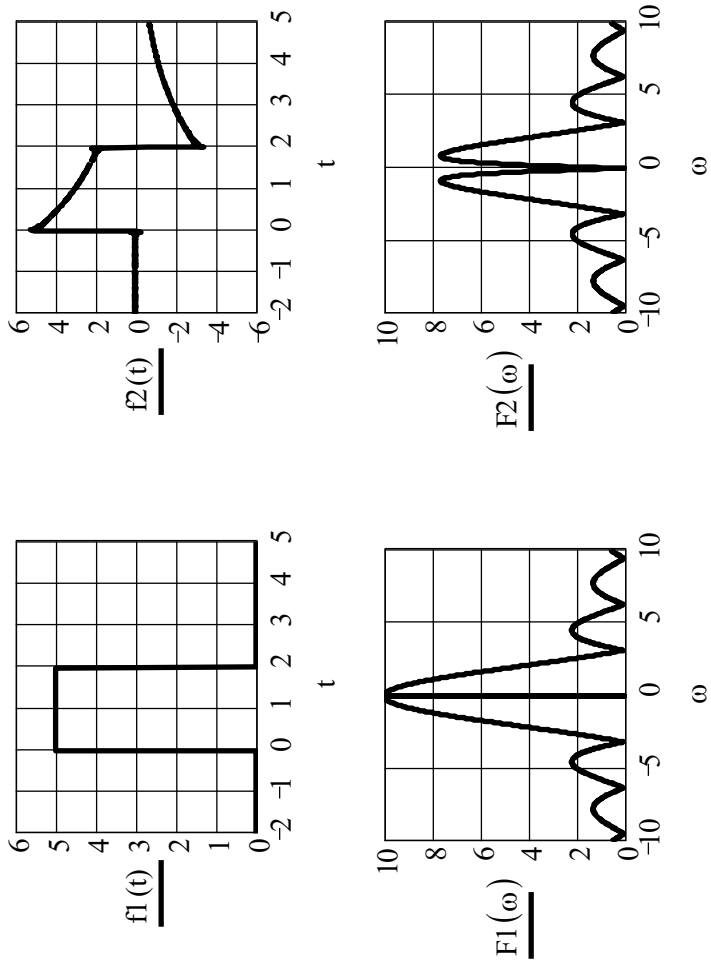


Рис. 45. Частотный анализ преобразования прямоугольного импульса фильтром высоких частот

Результат вычислений показывает, что фильтр высоких частот, подавляя низкочастотный диапазон спектра входного сигнала, приводит к искажению импульса на тех интервалах времени, где его амплитуда не изменяется во времени.

Следует обратить внимание, что для уменьшения времени расчётов на практике целесообразно сокращать пределы интегрирования в преобразованиях Фурье, ограничиваясь, как, показано на рис. 45 полосой спектра с диапазоном частот, в котором значения $F_2(\omega)$ отличаются на два-три порядка.

Пример 13.

Определить изменение сигнала $f(t)=e^{-2t}$, $t \geq 0$ (пример 1) при прохождении через узкополосный заграждающий фильтр, настроенный на частоту $\omega=3 \text{ с}^{-1}$ (пример 10), рис. 46:

$$W(j\omega) = \frac{36 - 4\omega^2}{27 - 9\omega^2 + j(27 - \omega^3)}$$

Результаты анализа представлены на рис. 11.15.

$$a := 2 \quad f_1(t) := \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$F_1(i, \omega) := \frac{-i}{\omega - 2 \cdot i} \quad W(i, \omega) := \frac{36 - 4\omega^2}{27 - 9\omega^2 + i \cdot (27 - \omega^3)}$$

$$F_2(i, \omega) := W(i, \omega) \cdot F_1(i, \omega) \quad F_1(\omega) := \left| \frac{-i}{\omega - 2 \cdot i} \right|$$

$$F_2(\omega) := \left| \frac{36 - 4\omega^2}{27 - 9\omega^2 + i \cdot (27 - \omega^3)} \cdot \frac{-i}{\omega - 2 \cdot i} \right|$$

$$f_2(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-150}^{150} \frac{36 - 4\omega^2}{27 - 9\omega^2 + i \cdot (27 - \omega^3)} \cdot \frac{-i}{\omega - 2 \cdot i} e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

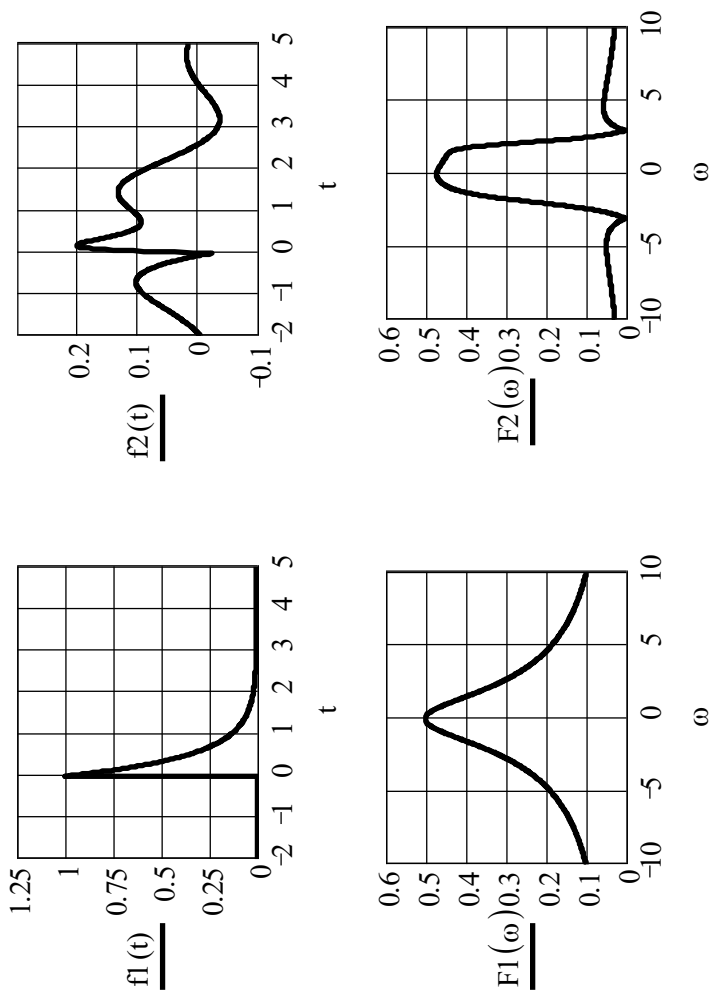


Рис. 46. Частотный анализ преобразования сигнала $f(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$ заграждающим фильтром

На рис. 46 видно, что в спектре $F_2(\omega)$ выходного сигнала гармоника с частотой $\omega=3 \text{ с}^{-1}$ подавлена. Это привело к существенному искажению формы выходного сигнала $f_2(t)$ по сравнению с входным $f_1(t)$.

Пример 14.

Рассмотрим пример фильтрации сигнала $f_1(t)$, являющегося суммой двух гармоник:

$$f_1(t) = \sin 3t + \sin t, \quad t \geq 0.$$

В результате прохождения этого сигнала через заграждающий фильтр, настроенный на частоту $\omega=3 \text{ с}^{-1}$, гармоника $\sin 3t$ подавляется, и на выходе фильтра остаётся гармоника $f_2(t)=\sin t$ с частотой $\omega=1 \text{ с}^{-1}$ и периодом $T=2\pi=6,28 \text{ с}$

(см. рис. 46).

Громоздкие выражения на рис. 46 помещены в скрытые области Mathcad'a, отображённые на рисунке серыми горизонтальными участками.

Кроме того, следует заметить, что в математических пакетах, в том числе и в Mathcad'е, есть встроенные операции прямого и обратного преобразований Фурье, однако непосредственные преобразования сложных функций с помощью этих процедур не всегда возможно.

$$a := 0.001$$

$$f1(t) := (\sin(3 \cdot t) + \sin(t)) \cdot \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$R11(\omega) := \int_0^{\infty} \sin(3t) \cdot \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) dt$$

$$I11(\omega) := - \int_0^{\infty} \sin(3t) \cdot \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) dt$$

$$F11(i, \omega) := R11(\omega) + i \cdot I11(\omega)$$

$$F11(i, \omega) := \frac{-3000000}{(1000 \cdot \omega - 3000 - i) \cdot (1000 \cdot \omega + 3000 - i)}$$

$$R12(\omega) := \int_0^{\infty} \sin(t) \cdot \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) dt$$

$$I12(\omega) := - \int_0^{\infty} \sin(t) \cdot \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) dt$$

$$F12(i, \omega) := R12(\omega) + i \cdot I12(\omega)$$

$$F1(i, \omega) := R11(\omega) + R12(\omega) + i \cdot (I11(\omega) + I12(\omega))$$

$$W(i, \omega) := \frac{36 - 4\omega^2}{27 - 9\omega^2 + i \cdot (27 - \omega^3)}$$

$$F2(i, \omega) := W(i, \omega) \cdot F1(i, \omega)$$

$$F1(\omega) := |R11(\omega) + R12(\omega) + i \cdot (I11(\omega) + I12(\omega))|$$

$$F2(\omega) = |F2(i, \omega)|$$

$$f2(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-15}^{15} F2(i, \omega) e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

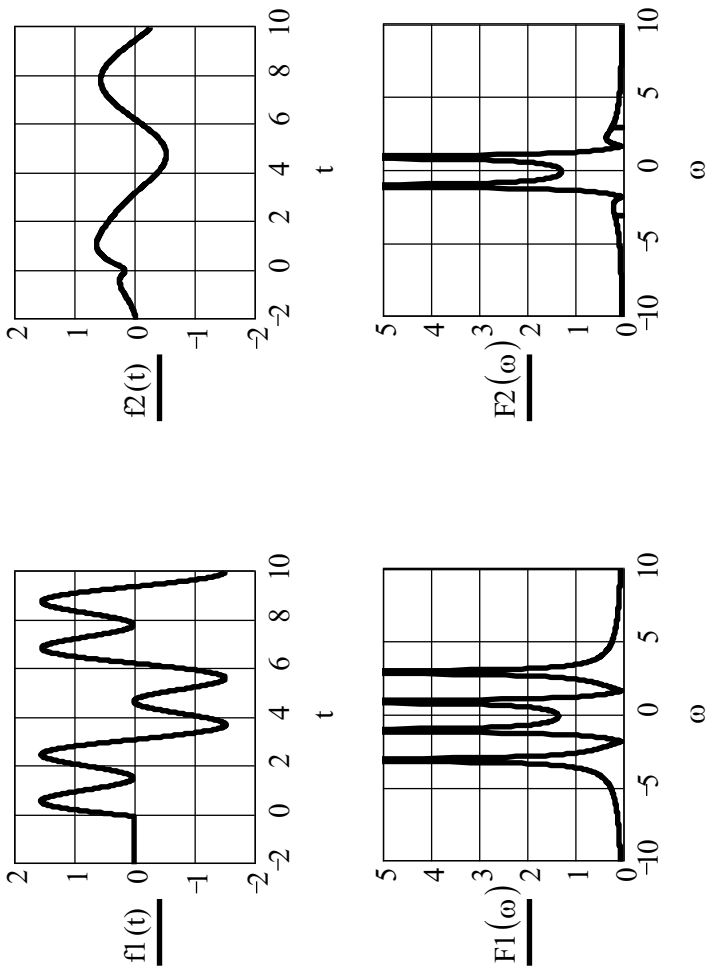


Рис. 47. Преобразование суммы двух гармоник узкополосным заграждающим фильтром

11.2. Дискретные интегральные преобразования

11.2.1. Интегральные преобразования дискретных сигналов

При обработке физических сигналов, заданных не аналитически, а обычной последовательностью (массивом) из N зафиксированных с шагом Δt данных в форме действительных чисел:

$$f^*(t) = \{f(0), f(\Delta t), f(2\Delta t), \dots, f((N-1) \cdot \Delta t)\} = \{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$$

спектр сигнала может быть получен преобразованием Фурье (11.14):

$$F^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt,$$

путём дискретизации времени $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = (-\infty, \infty)$ и переходом от интегрирования к суммированию:

$$F^*(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) e^{-j\omega t_k} \cdot \Delta t, \quad (11.21)$$

где $f(t_k)$ – дискретные значения сигнала $f(t)$; множитель Δt введён для практически удобного доопределения функции $f(t_k)$ в интервалах времени $t_k \leq t < t_{k+1}$ своим последним значением $f(t_k)$ (экстраполяция нулевого порядка).

Учитывая, что в реальных наборах данных $f(k \cdot \Delta t) = 0$ при $k < 0$ и $k > N-1$, то переменную k при суммировании достаточно изменять в интервале $k = [0, N-1]$, и выражение (11.21) можно переписать в виде:

$$F^*(j\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k \cdot \Delta t) e^{-j\omega k \Delta t} \cdot \Delta t. \quad (11.22)$$

Выражение (11.22) является практически используемой формулой преобразования Фурье для дискретных сигналов.

Принципиальной особенностью спектра $F^*(j\omega)$ дискретного сигнала $f^*(t)$ является его периодичность по частоте с периодом $\omega_u = \frac{2\pi}{\Delta t}$. Чтобы показать это, представим $f^*(t)$ в виде суммы единичных импульсов, описываемых функцией Дирака: $\delta(t - k\Delta t)$, – смещённых по времени на $k\Delta t$ и умноженных на значения непрерывного сигнала $f(t)$ в моменты времени $k\Delta t$:

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \cdot \delta(t - k\Delta t). \quad (11.23)$$

Поскольку $\delta(t - k\Delta t) = 0$ при $t \neq k\Delta t$, то (3.23) можно переписать:

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t). \quad (11.24)$$

Представив периодическую с периодом $\omega_u = \frac{2\pi}{\Delta t}$ последовательность единичных импульсов в виде ряда Фурье в комплексной форме:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{jr\omega_u t}, \quad (11.25)$$

где

$$c_r = \int_0^{\Delta t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \right) e^{-jr\omega_u t} dt,$$

причём $c_r = 1$ по свойству функции Дирака: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

Тогда, подставляя (11.25) в (11.24), получим:

$$f^*(t) = f(t) \frac{1}{\Delta t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{jr\omega_u t}. \quad (11.26)$$

Непрерывный спектр $F^*(j\omega)$ дискретного сигнала $f^*(t)$ получаем прямым преобразованием Фурье (11.4):

$$\begin{aligned}
 F^*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{jr\omega_u t} \right) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - r\omega_u)t} dt,
 \end{aligned}$$

или, окончательно:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - r\omega_u)]. \quad (11.27)$$

Выражение (11.27) показывает, что спектр дискретного сигнала $f^*(t)$ с точностью до множителя $1/\Delta t$ равен сумме спектра $F(j\omega)$ исходного – непрерывного сигнала $f(t)$ с транспонированными составляющими, равными $F(j\omega)$, но периодически смещёнными на частоту $r\omega_u$, $r \neq 0$ (заметим, что при использовании доопределения в (11.2), получим точное равенство):

$$F^*(j\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - r\omega_u)].$$

$$\tau := 2 \quad a := 1 \cdot 10^{-3}$$

$$f(t) := 5 \cdot [\Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} - \Phi(t - \tau) \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)}]$$

$$F(i, \omega) := 5 \cdot \frac{1000 \cdot i}{(-1000) \cdot \omega + i} \cdot (1 - e^{-i \cdot \omega \cdot \tau})$$

$$F(\omega) := \left| 5 \cdot \frac{1000 \cdot i}{(-1000) \cdot \omega + i} \cdot (1 - e^{-i \cdot \omega \cdot \tau}) \right|$$

$$\Delta t := 0.2 \quad N := 11$$

$$fN := (5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5)$$

$$FN(i, \omega) = \sum_{k=0}^{N-1} (fN_{0,k} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot k \cdot \Delta t}) \cdot \Delta t$$

▣Выражение для FN(омега)

$$FN(\omega) = |FN(i, \omega)|$$

▣Выражение для FN(омега)

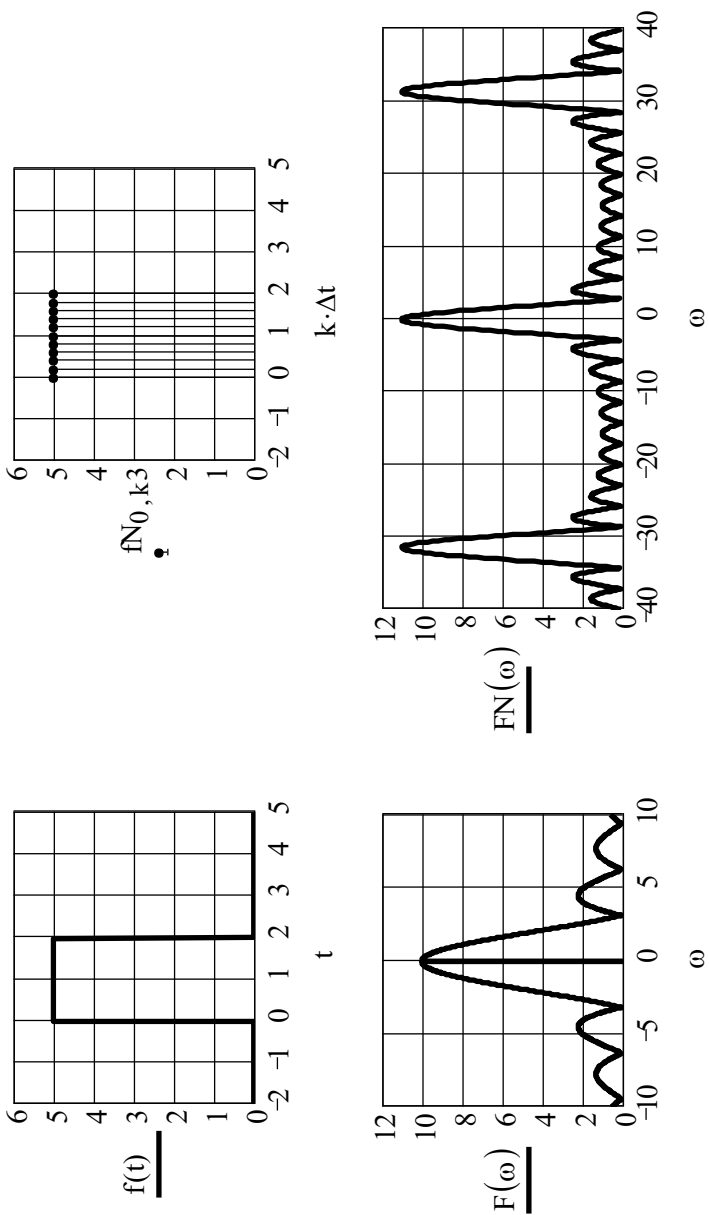


Рис. 48. Иллюстрация свойства периодичности спектра

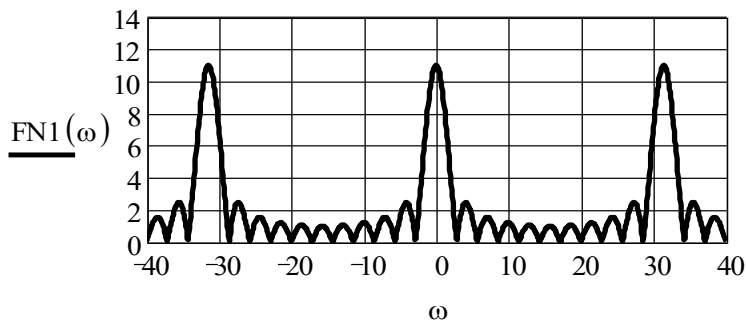
Из свойства периодичности $F^*(j\omega)$ вытекает важное практическое следствие: для восстановления непрерывного сигнала $f(t)$ из спектра $F^*(j\omega)$ дискретного сигнала $f^*(t)$ необходимо, чтобы транспонированные составляющие $F^*(j\omega)$ не перекрывались, рис. 49. Этот вывод сформулирован в известной импульсной теореме Котельникова:

$$\omega_u \geq 2\omega_{zp}, \quad (11.28)$$

где ω_{zp} – граничная частота спектра $F(j\omega)$.

$$\omega = 31.4\text{c}^{-1}$$

и



$$\omega = 12.56\text{c}^{-1}$$

и

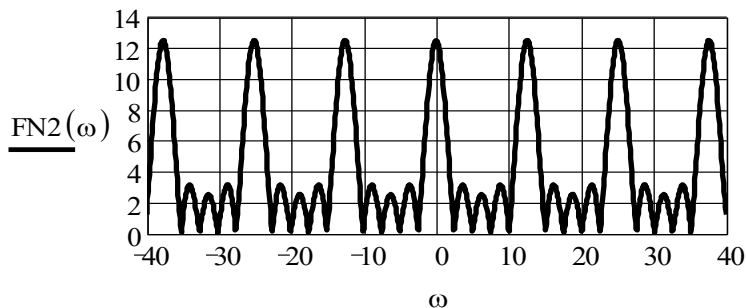


Рис. 49. Иллюстрация влияния частоты квантования ω_u на эффект перекрытия транспонированных составляющих

Сравнивая спектры на рис. 56 с $\omega_u=31,4 \text{ с}^{-1}$ и с $\omega_u=12,56 \text{ с}^{-1}$, можно увидеть:

восстановить исходный сигнал $f(t)$ из спектра $F^*(j\omega)$ с достаточной для практики точностью можно, если пропустить $F^*(j\omega)$ через фильтр низких частот, подавляющий частоты в диапазоне, выше $\omega_{cp} \approx 10 \dots 15 \text{ с}^{-1}$;

если $\omega_u < 2\omega_{cp}$, то спектр $F^*(j\omega)$ из-за наложения транспонированных составляющих искажается по сравнению с $F(j\omega)$, и даже после фильтрации частот $\omega \leq \omega_{cp}$ исходный сигнал $f(t)$ будет восстановлен с искажениями.

Формула (11.22) определяет собою прямое преобразование Фурье для дискретного сигнала $f^*(t)$, позволяющее получить непрерывный спектр $F^*(j\omega)$ сигнала $f(t)$, дискретизированного во времени с интервалами Δt .

Зададимся теперь обратной задачей: по известному спектру $F^*(j\omega)$ дискретного сигнала $f^*(t)$, перейти к исходной функции $f(t)$, т.е поставим задачу обратного преобразования Фурье.

Как было установлено в (11.15):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

где $F(j\omega)$ – непрерывный спектр сигнала $f(t)$. Если в это выражение подставить спектр $F^*(j\omega)$ дискретного сигнала $f^*(t)$, то в результате обратного преобразования Фурье можно получить, с той или иной степенью точности исходный сигнал $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{cp}}^{\omega_{cp}} F^*(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

На рис. 50 и 51 представлены примеры таких обратных преобразований для случаев, когда теорема Котельникова выполняется (рис. 50) и не выполняется

(рис. 51).

$$\Delta t1 := 0.2 \quad N1 := 11$$

$$fN1 := (5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5)$$

$$FN1(i, \omega) = \sum_{k=0}^{N1-1} \left(fN1_{0,k} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot k \cdot \Delta t1} \right) \cdot \Delta t1$$

▸Выражение для FN1(i,omega)

$$FN1(\omega) = |FN1(i, \omega)|$$

▸Выражение для FN1(omega)

$$f1(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-12}^{12} FN1(i, \omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega \right)$$

▸Выражение для f1(t)

$$\Delta t2 := 0.5 \quad N2 := 5$$

$$fN2 := (5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5)$$

$$FN2(i, \omega) = \sum_{k=0}^{N2-1} \left(fN2_{0,k} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot k \cdot \Delta t2} \right) \cdot \Delta t2$$

▸Выражение для FN2(i,omega)

$$FN2(\omega) = |FN2(i, \omega)|$$

▸Выражение для FN2(omega)

$$f2(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-12}^{12} FN2(i, \omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega \right)$$

▸Выражение для f2(t)

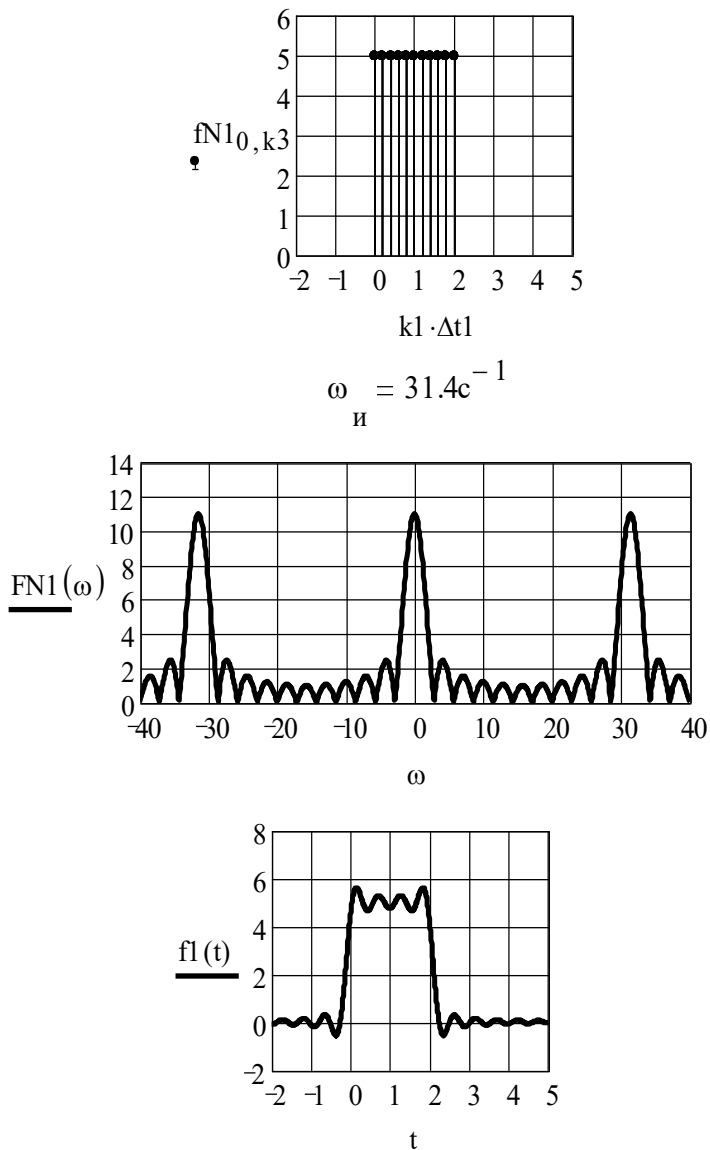


Рис. 50. Восстановление сигнала $f_1(t)$ обратным преобразованием Фурье при выполнении теоремы Котельникова

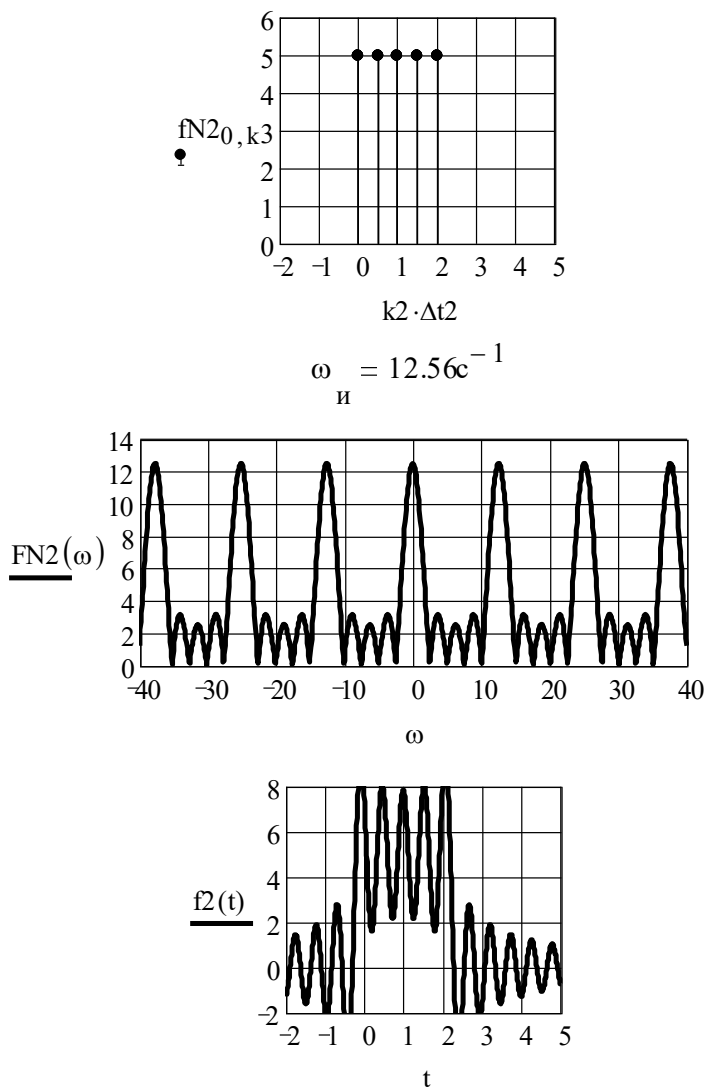


Рис. 51. Восстановление сигнала $f_2(t)$ обратным преобразованием Фурье при невыполнении теоремы Котельникова

11.2.2. Дискретное преобразование Фурье

Необходимость применения цифровых вычислительных машин для спектрального анализа систем и сигналов требует перехода от классических непрерывных преобразований Фурье (11.14) и (11.15) к их дискретным аналогам.

В п.11.2.1. было показано, что дискретизация непрерывного сигнала $f(t)$ во временной области осуществляется его квантованием с шагом во времени Δt . В результате получается конечное множество дискретных значений функции $f^*(t_k)=f(k\Delta t)$, $k = \overline{0, N-1}$, где $[0, (N-1)\Delta t]$ – временной интервал рассмотрения $f(t)$.

Аналогичным образом можно осуществить дискретизацию непрерывного спектра $F(j\omega)$ в частотной области путём его квантования с шагом $\Delta\omega$ по частоте. В результате получится множество дискретных значений спектра $F^*(j\omega_n) = F(jn\Delta\omega)$, где $[0, (N-1)\Delta\omega]$ – частотный интервал рассмотрения $F(j\omega)$.

Взаимное соответствие между установленными указанным образом величинами $f^*(t_k)$ и $F^*(j\omega_n)$ определяется прямым (11.29) и обратным (11.30) дискретными преобразованиями Фурье:

$$F^*(j\omega_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^*(t_k) e^{-j\omega_n t_k} \cdot \Delta t, \quad (11.29)$$

$$f^*(t_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F^*(j\omega_n) e^{j\omega_n t_k} \cdot \Delta\omega. \quad (11.30)$$

Ранее было показано, что дискретизация $f(t)$ с шагом Δt приводит к периодизации спектра $F^*(j\omega)$ с периодом $\omega_u = \frac{2\pi}{\Delta t} \text{ с}^{-1}$. Аналогичный эффект обнаруживается при переходе от частотной области к временной: дискретизация $F(j\omega)$

с шагом $\Delta\omega$ приводит к периодизации $f(t)$ с периодом $T_u = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ с. Таким образом, следует различать:

$F(j\omega)$ – непрерывный спектр непрерывной функции $f(t)$;

$F^*(j\omega)$ – периодический с периодом ω_u непрерывный спектр дискретной функции $f^*(t_k)$;

$F^*(j\omega_n)$ – периодический с периодом ω_u и дискретный с шагом $\Delta\omega$ спектр дискретной функции $f^*(t_k)$;

$f^*(t_k)$ – периодическая с периодом T_u и дискретная с шагом Δt функция времени.

Сравнение периодов дискретного спектра $F^*(j\omega_n)$ и дискретной функции времени $f^*(t_k)$:

$$\omega_u = \frac{2\pi}{\Delta t}, \text{ или } \frac{2\pi}{\Delta t} = (N-1)\Delta\omega;$$

$$T_u = \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \text{ или } \frac{2\pi}{\Delta\omega} = (N-1)\Delta t,$$

показывает, что равенство $(N-1)\Delta\omega\Delta t = (N-1)\Delta t\Delta\omega$ может выполняться только при одинаковом числе N отсчётов функции и её спектра. Поскольку в реальных сигналах диапазон времени неотрицателен, то практическая форма выражений (11.29) и (11.30) имеет вид:

$$F^*(j\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t) e^{-j\omega_n k\Delta t} \cdot \Delta t; \quad (11.31)$$

$$n = -\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}; \quad \omega_n = n\Delta\omega,$$

$$f^*(t_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} F^*(jn\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t_k} \cdot \Delta\omega; \quad (11.32)$$

$$k = \overline{0, N-1}; \quad t_k = k\Delta t.$$

Числовая иллюстрация преобразований (11.31) и (11.32) представлена на рис. 52.

$$\begin{aligned}
 N &:= 51 & k &:= 0..N-1 & n &:= -\frac{N-1}{2}.. \frac{N-1}{2} & L &:= 10 \\
 t_{N-1} &:= 0 & FN_{N-1} &:= 0 & f_{N-1} &:= 0 & f_{N_0, N-1} &:= 0 & \omega_{N-1} &:= 0 \\
 \Delta t &:= \frac{L}{N-1} & \Delta \omega &:= \frac{2\pi}{(N-1)\cdot\Delta t} & \omega_{n+\frac{N-1}{2}} &:= n\cdot\Delta\omega & t_k &:= k\cdot\Delta t \\
 \Delta t &= 0.2 & \Delta \omega &= 0.628
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 fN &:= \begin{cases} \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad fN_{0,i} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..10 \\ \quad fN_{0,i} \leftarrow 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\left[FN(i, \omega)_{n+\frac{N-1}{2}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[fN_{0,k} \cdot e^{-i \cdot \left(n + \frac{N-1}{2} \right) \cdot k \cdot \Delta t} \right] \cdot \Delta t \right]$$

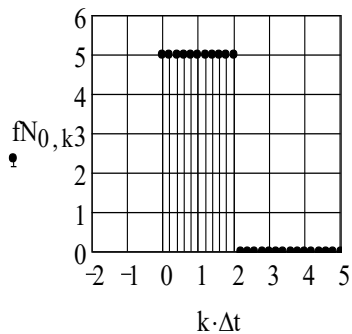
▣Выражение для FN(i,omega)▣

$$FN(\omega)_{n+\frac{N-1}{2}} = \left| FN(i, \omega)_{n+\frac{N-1}{2}} \right|$$

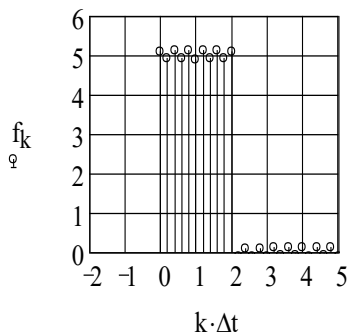
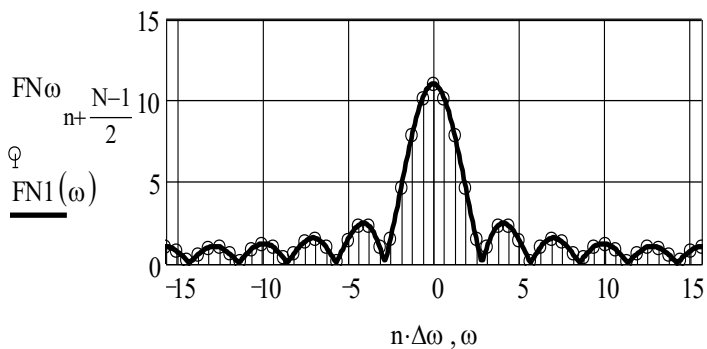
▣Выражение для FN(omega)▣

$$f(t)_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \left(FN(i, \omega)_{n+\frac{N-1}{2}} e^{i \cdot n \cdot \Delta\omega \cdot t_k} \cdot \Delta\omega \right)$$

▣Выражение для f(t)k▣



$$n := -\frac{N-1}{2} .. \frac{N-1}{2} \quad \omega := -20, -19.9 .. 20 \quad \omega_i = 31.4c^{-1}$$



$$T = 10c$$

Рис. 52. Иллюстрация прямого и обратного дискретных преобразований Фурье

11.2.3. Частотный анализ обработки информации в дискретных системах

Рассмотрим импульсную систему, представленную на рис. 53, где ИЭ – импульсный элемент, осуществляющий дискретизацию сигнала $f_1(t)$ с интервалом Δt ; $W(j\omega)$ – частотная характеристика системы.

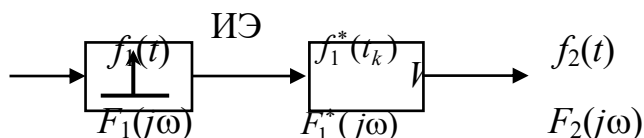


Рис. 53. Прохождение сигнала через импульсную систему

Спектр $F_2(j\omega)$ сигнала $f_2(t)$ на выходе системы определится из выражения:

$$F_2(j\omega) = W(j\omega) \cdot F_1^*(j\omega), \quad (11.33)$$

где, в соответствии с (3.27): $F_1^*(j\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_1[j(\omega - r\omega_u)]$.

Выделив в (11.33) слагаемое, соответствующее $r=0$, получим:

$$F_2(j\omega) = \frac{1}{\Delta t} W(j\omega) F_1(j\omega) + \frac{1}{\Delta t} W(j\omega) \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} F_1[j(\omega - r\omega_u)]. \quad (11.34)$$

В выражении 11.34 первое слагаемое представляет собою спектр сигнала $f_2(t)$, который имел бы место в непрерывной системе с частотной функцией $\frac{1}{\Delta t} W(j\omega)$. Второе слагаемое свидетельствует о появлении на выходе системы высокочастотных составляющих, которых не было в спектре входного сигнала $F_1(j\omega)$.

Таким образом, введение в систему импульсного элемента существенно изменяет спектр выходного сигнала по сравнению с непрерывной системой без ИЭ. Однако, если последовательно с $W(j\omega)$ включить фильтр низкой частоты $W_{нч}(j\omega)$ (рис. 54), подавляющий транспонированные составляющие, то в спектре $F_2(j\omega)$ останется только первое слагаемое из (11.34):

$$F_2(j\omega) = \frac{1}{\Delta t} W_{нч}(j\omega)W(j\omega)F_1(j\omega),$$

или, с учётом экстраполяции нулевого порядка в ИЭ:

$$F_2(j\omega) = W(j\omega)W_{нч}(j\omega)F_1(j\omega),$$

из чего следует, что при $|W_{нч}(j\omega)|_{\omega < \omega_{cp}} \approx 1$ импульсная система становится эквивалентной непрерывной системе с частотной функцией $W(j\omega)$.

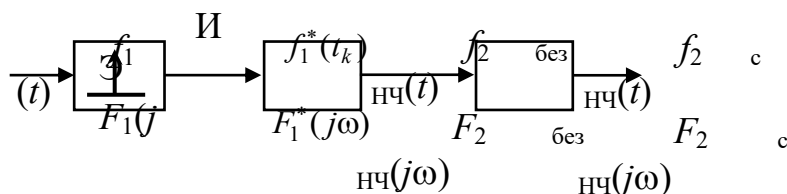


Рис. 54. Обеспечение условия квазинепрерывности в импульсной системе

Иллюстрация этого положения представлена на рис. 55, в котором:

$$f_1(t) = \Phi(t)e^{-2t}; \quad W(j\omega) = \frac{1}{1 + 0.05j\omega};$$

$$W_{нч}(j\omega) = \frac{1}{1 - 0.0025\omega^2 + 0.1j\omega},$$

входной сигнал определён на отрезке $t=[0,10]$ с шагом $\Delta t=0,1$ с; частота дискретизации во времени $\Delta\omega=62,8$ с⁻¹.

$$\begin{aligned}
 a &:= 2 & f(t) &:= \Phi(t) \cdot e^{-a \cdot t} \\
 F(i, \omega) &:= \frac{-i}{\omega - 2 \cdot i} & F(\omega) &:= \sqrt{\frac{1}{4 + \omega^2}} \\
 N &:= 101 & L &:= 10 & \Delta t &:= \frac{L}{N - 1} & \Delta t &= 0.1 \\
 fN &:= \text{for } i \in 0..N - 1 \\
 & & fN_{0,i} &\leftarrow f(i \cdot \Delta t) \\
 FN1(i, \omega) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(fN_{0,k} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot k \cdot \Delta t} \right) \cdot \Delta t
 \end{aligned}$$

▣Выражение для FN1(i,omega)

$$FN1(\omega) = |FN1(i, \omega)|$$

▣Выражение для FN1(omega)

$$\begin{aligned}
 W(i, \omega) &:= \frac{1}{1 + 0.05 \cdot i \cdot \omega} & W_{\text{HЧ}}(i, \omega) &:= \frac{1}{(1 + 0.05 \cdot i \cdot \omega)^2} \\
 W(\omega) &:= \left| \frac{1}{1 + 0.05 \cdot i \cdot \omega} \right| & W_{\text{HЧ}}(\omega) &:= \left| \frac{1}{(1 + 0.05 \cdot i \cdot \omega)^2} \right| \\
 F2_{\text{безHЧ}}(i, \omega) &= W(i, \omega) \cdot FN1(i, \omega)
 \end{aligned}$$

▣Выражение для F2безHЧ(i,omega)

$$F2_{\text{безHЧ}}(\omega) = |F2_{\text{безHЧ}}(i, \omega)|$$

▣Выражение для F2безHЧ(omega)

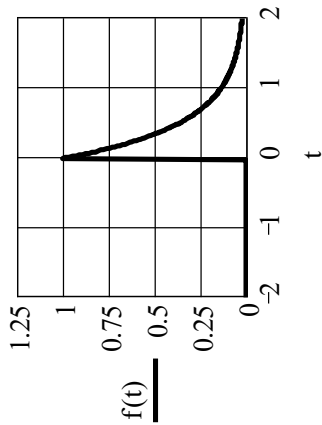
$$F2_{\text{сHЧ}}(i, \omega) = W(i, \omega) \cdot FN1(i, \omega) W_{\text{HЧ}}(i, \omega)$$

▣Выражение для F2сHЧ(i,omega)

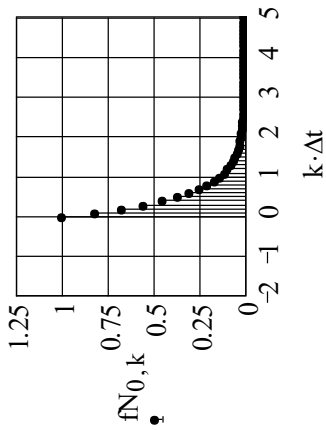
$$F2_{\text{сHЧ}}(\omega) = |F2_{\text{сHЧ}}(i, \omega)|$$

▣Выражение для F2сHЧ(omega)

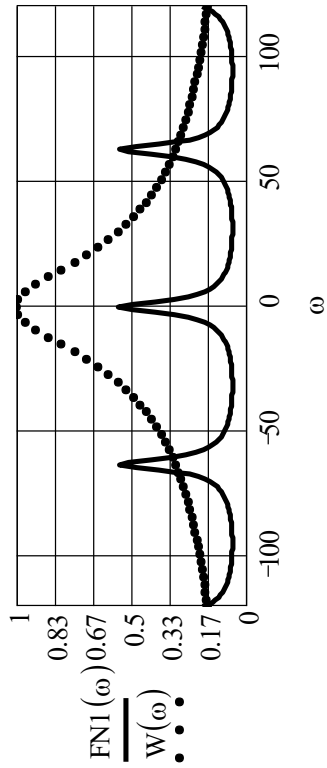
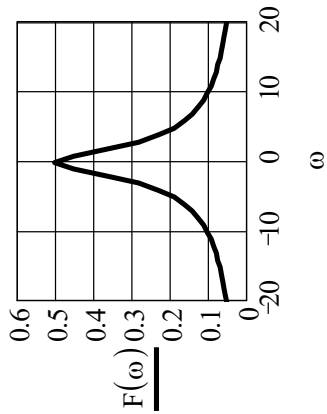
$t := -2, -1.99 \dots 2$



$k := 0 \dots N - 1$



$\omega := -120 \dots 120$



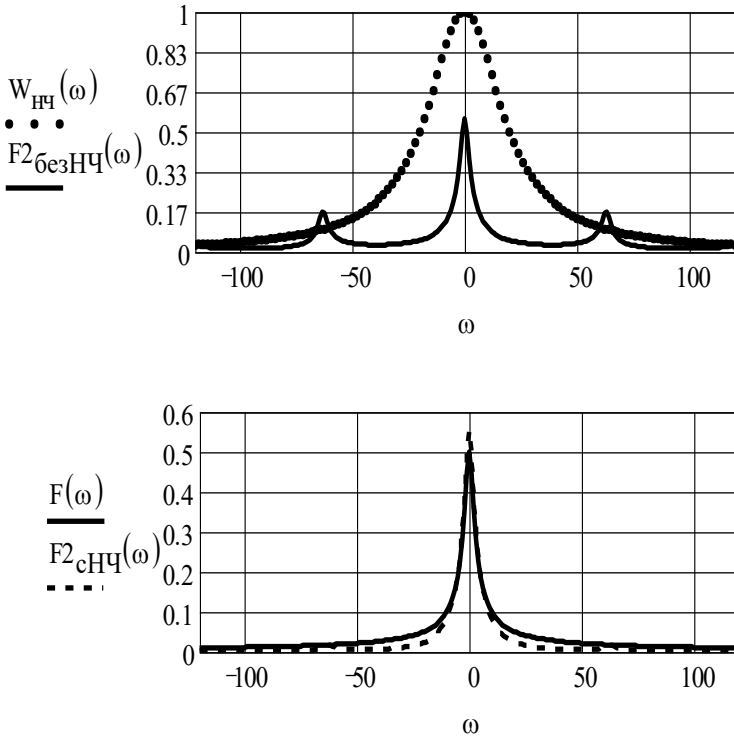


Рис. 55. Обеспечение условий квазинепрерывности в импульсной системе

Следует обратить внимание, что условие квазинепрерывности может нарушаться, даже если в системе выполняется импульсная теорема Котельникова. Можно сказать, что выполнение импульсной теоремы $\omega_u \geq \omega_{cp}$ является необходимым условием квазинепрерывности, тогда как достаточное условие квазинепрерывности требует соблюдения неравенства:

$$\omega_u \geq \omega_{cp} + \omega_{cp.W},$$

где $\omega_{cp.W}$ – полоса пропускания частотной характеристики $W(j\omega)$ системы.

11.2.4. Быстрое преобразование Фурье

Рассмотрение процедур дискретных преобразований Фурье показывает, что для осуществления, например, прямого преобразования:

$$F^*(j\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t) e^{-j\omega_n k\Delta t} \cdot \Delta t; \quad (11.35)$$

$$n = -\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}; \quad \omega_n = n\Delta\omega,$$

необходимо матрицу $e^{-j\omega_n k\Delta t}$ размерностью $[N \times N]$ умножить на вектор $f(k\Delta t)$ размерностью $[N \times 1]$. Трудоёмкость этих вычислений составляет N^2 операций, каждая из которых содержит умножение и сложение. При малых значениях шагов дискретизации значение N быстро возрастает и возникает необходимость уменьшения трудоёмкости преобразований.

С этой целью используют так называемое быстрое преобразование Фурье (FFT – Fast Fourier Transform), суть которого состоит в следующем.

Исходный массив $f^*(t) = f(t_k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ из N дискретных отсчётов (примем для определённости, что N чётное число), разбивается на две части:

$$f(t_{2k}) = \{f_0, f_2, \dots, f_{N-2}\}; \quad k = \left[0; \frac{N}{2} - 1 \right] \text{ – чётные отсчёты;}$$

$$f(t_{2k+1}) = \{f_1, f_3, \dots, f_{N-1}\}; \quad k = \left[0; \frac{N}{2} - 1 \right] \text{ – нечётные отсчёты.}$$

К каждой полученной последовательности применяется дискретное преобразование (11.35):

$$F_{\text{чём}}^*(j\omega_n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k\Delta t) e^{-j\omega_n 2k\Delta t} \cdot \Delta t; \quad (11.36)$$

$$n = 0, \frac{N}{2} - 1; \quad \omega_n = n\Delta\omega,$$

$$F_{\text{неч}}^*(j\omega_n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f[(2k+1)\Delta t] e^{-j\omega_n(2k+1)\Delta t} \cdot \Delta t; \quad (11.37)$$

$$n = 0, \frac{N}{2} - 1; \quad \omega_n = n\Delta\omega.$$

Сложение полученных спектров (11.36) и (11.37) с учётом сдвига во временной области:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega(N-1)} = \frac{2\pi n}{\omega_n(N-1)},$$

осуществляется с умножением $F_{\text{неч}}^*(j\omega_n)$ на вектор:

$$e^{-j\omega_n \frac{2\pi n}{\omega_n(N-1)}} = e^{-j \frac{2\pi n}{N-1}},$$

(см. табл. 1):

$$F_1^*(j\omega_n) = F_{\text{чём}}^*(j\omega_n) + F_{\text{неч}}^*(j\omega_n) e^{-j \frac{2\pi n}{N-1}}, \quad (11.38)$$

$$n = 0, \frac{N}{2} - 1; \quad \omega_n = n\Delta\omega.$$

Выражение (11.38) даёт половину спектра $F^*(j\omega_n)$, для вычисления которой потребуется $\frac{N}{2} + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2$ операций.

Можно показать, что для вычисления второй половины $F_2^*(j\omega_n)$ спектра $F^*(j\omega_n)$ для $n = \frac{N}{2}; N-1$ достаточно уже известных значений $F_{\text{чём}}^*(j\omega_n)$ и $F_{\text{неч}}^*(j\omega_n)$ в виде:

$$F_2^*(j\omega_n) = F_{\text{чём}}^*(j\omega_n) - F_{\text{неч}}^*(j\omega_n) e^{-j \frac{2\pi n}{N-1}}, \quad (11.39)$$

$$n = \frac{N}{2}, N-1; \quad \omega_n = n\Delta\omega.$$

Совокупность (11.38) и (11.39) образуют полный спектр $F^*(j\omega_n)$, для вычисления которого требуется $N + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2$, а не N^2 операций, как в обычном дискретном преобразовании. Описанный приём применяется далее к каждой из последовательностей $f(t_{2k})$ и $f(t_{2k+1})$ разделением их на чётное и нечётное подмножества до тех пор, пока в каждом подмножестве не останется по одному элементу.

В итоге общее число требуемых операций будет равно: $O=N\log_2 N$, что, например, при $N=64$ составит $O=N\log_2 N=384$ по сравнению с $N^2=4096$, т.е. на порядок меньше. Для $N=1024$ достигается уже стократный выигрыш по объёму вычислений. Заметим, что для удобства последовательного деления на чётные и нечётные подмножества обычно используют N , равные целым степеням двух, хотя в универсальных алгоритмах быстрого преобразования Фурье эта рекомендация уже не является обязательной.

На рис. 56 представлен пример использования прямого и обратного быстрого преобразований Фурье в пакете Mathcad. Следует обратить внимание, что в массивах данных и по оси абсцисс рисунков применяются только неотрицательные номера отсчётов, а не истинные значения моментов времени и частот. Это особенность значительно упрощает формальное применение аппарата быстрого преобразования Фурье для разнообразных практических задач, но в каждом конкретном случае требует установления соответствия формальных величин физическим.

Преимуществом быстрого преобразования Фурье является не только существенное сокращение трудоёмкости вычислений, но заметное снижение ошибок округлений, накапливаемых с ростом числа операций.

$$N := 64 \quad k := 0..N - 1 \quad f1(k) := \begin{cases} 0 \\ 5 \text{ if } k \leq 10 \end{cases}$$

$$f1_k := f1(k) \quad F := \text{fft}(f1) \quad f2 := \text{ifft}(F)$$

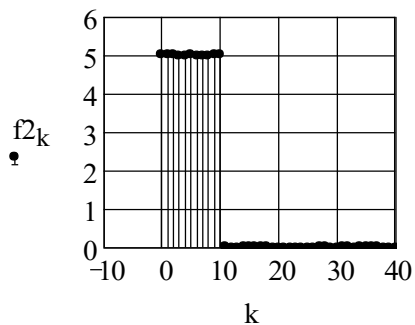
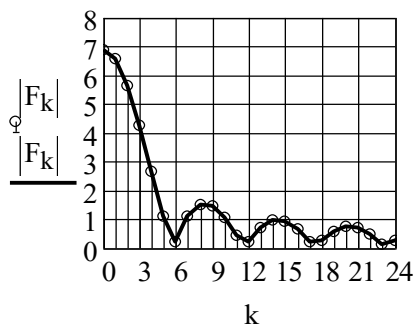
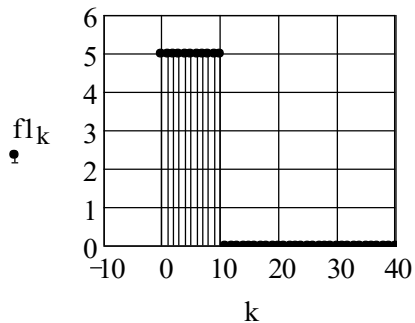


Рис. 56. Иллюстрация применения быстрых преобразований Фурье в пакете Mathcad

Контрольные вопросы и задания к разделу

1. Какие физические процессы удобно моделировать с помощью интегральных преобразований Фурье?
2. Для каких функций можно осуществить интегральное преобразование Фурье?
3. В чём физический смысл условия Дирихле?
4. Что такое интеграл Фурье? В чём его сходство и отличие от ряда Фурье?
5. Какие практические приёмы используют при вычислении интеграла Фурье для функций, описывающих реальные сигналы?
6. Как вычислить интеграл Фурье для функции, не удовлетворяющей условию абсолютной интегрируемости?
7. Вычислить интегралы Фурье для функций:
$$f(t) = 1 - e^{-3t}; \quad f(t) = \frac{1}{t+1}; \quad f(t) = \frac{1 - e^{-3t}}{t+1}; \quad f(t) = \frac{t}{t^2 + 1}.$$
8. В чём заключается практическая ограниченность непосредственного применения интеграла Фурье?
9. Как получить комплексную форму интеграла Фурье?
10. Каким образом комплексная форма интеграла Фурье позволяет перейти к частотному представлению функций времени?
11. Что такое прямое и обратное преобразования Фурье?
12. Как связан спектр функции времени с косинус- и синус-преобразованиями Фурье? Как применяется эта взаимосвязь в практическом частотном анализе сигналов?
13. Вычислить спектры сигналов, описываемых функциями, указанными в задании 7.
14. Какое практическое применение имеют свойства преобразований Фурье?
15. В чём физический смысл равенства Парсеваля?
16. Найти спектры функций:

$$f(t) = 3 \cos 2\omega t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \quad f(t) = 2 \sin 3\omega t, \quad 0 \leq t \leq \pi;$$

$$f(t) = 2t, \quad 0 \leq t \leq 3; \quad f(t) = 2 - t, \quad 0 \leq t \leq 2;$$

$$f(t) = (1 - e^{-2t}) \cdot (2 - t), \quad 0 \leq t \leq 3; \quad f(t) = (1 - e^{-2t}) \cdot e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

17. Как связаны ряд Фурье со спектром Фурье для одной и той же функции?

18. Что такое частотная функция системы? Какой физический смысл её модуля и фазы?

19. Построить амплитудные и фазовые частотные характеристики систем:

$$W(j\omega) = \frac{5}{1 - 4\omega^2 + 0.2j\omega}; \quad W(j\omega) = \frac{5 + j\omega}{1 - 4\omega^2 + 0.2j\omega};$$

$$W(j\omega) = \frac{5 + 2j\omega}{1 + 0.2j\omega}; \quad W(j\omega) = \frac{5}{(1 + 0.2j\omega)j\omega};$$

$$W(j\omega) = \frac{5e^{-j2\omega}}{1 + 0.2j\omega}; \quad W(j\omega) = \frac{5e^{-j2\omega}}{j\omega}.$$

20. Провести спектральный анализ прохождения сигналов, указанных в задании 16, через системы, приведённые в задании 19.

21. Каким образом можно получить спектр дискретной функции времени?

22. Какое практическое следствие вытекает из свойства периодичности спектра дискретного сигнала?

23. Объяснить импульсную теорему Котельникова и привести пример, раскрывающий её практическое значение.

24. Что такое дискретное преобразование Фурье, и чем оно отличается от непрерывного преобразования?

25. Выполнить прямое и обратное дискретное преобразование Фурье для сигналов, указанных в задании 16, и сравнить полученные результаты с непрерывным преобразованием.

26. Каким образом частотное представление сигналов позволяет судить о свойстве квазинепрерывности импульсных систем?

27. В примерах из задания 20 ввести дискретизацию сигналов во времени и проверить выполнение условия квазинепрерывности дискретных систем.

28. В чём заключается быстрое преобразование Фурье?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа, которая содержит четкое и краткое изложение теории, большое количество задач и разобранных примеров, существенно восполнит имеющиеся пробелы в учебной литературе по вышеуказанным разделам математики, особенно при использовании учебного пособия в качестве задачника.

Издание рекомендуется для работы на практических занятиях, при подготовке к контрольным работам, а также при выполнении типовых расчетов и при составлении комплексных заданий, аттестационных контрольных заданий по указанным темам.

Считаем, что данное пособие поможет более глубокому и полному усвоению студентами учебного материала по данным в пособии разделам и будет соответствовать эффективной организации учебного процесса по курсу «Математика».

Ограниченный объём пособия не позволяет охватить весь обширный научный и прикладной материал, накопленный в настоящее время по теории преобразований Фурье и их приложениям. В частности, в пособии не освещены актуальные вопросы применения оконных преобразований Фурье и вейвлет преобразований, рассмотрение которых требует отдельного обстоятельного рассмотрения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Толстов Г.П. Ряды Фурье / Г. П. Толстов. – М.: Наука. 1980.
2. Ильин В.А. Математический анализ / В. А. Ильин, В. А. Садовский, Б.Х. Сендов. - М. : Издат. МГУ, 2004. Ч.2.
3. Гусек А.А. Высшая математика / А. А. Гусек. - Минск: ТетраСистемс, 2004. Ч.2
4. Титчмарш Э.Ч. Введение в теорию интегралов Фурье / Э.Ч. Титчмарш. – М-Л.: ОГИЗ, 1948. – 418 с.
5. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. М.: Наука, 1986. –543 с.
6. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения / Н. Винер. – М.: Физматгиз, 1963. – 253 с.
7. Никулин Е.А. Основы теории автоматического управления. Частотные методы анализа и синтеза систем: учеб. пособие для вузов / Е.А. Никулин. – СПб.: БВХ –Петербург, 2004. – 604 с.
8. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие для вузов / Л.М. Голденберг и др. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.
9. Оппенгейм А.В. Цифровая обработка сигналов /А.В. Оппенгейм, Р.В. Шафер. – М.: Связь, 1979. – 416 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. Тригонометрические ряды Фурье	4
1.1. Периодические функции	4
1.2. Гармоники.	6
1.3. Тригонометрические многочлены и ряды	10
1.4. Уточнение терминологии. Интегрируемость.	
Функциональные ряды	12
1.5. Основная тригонометрическая система. Ортогональность синусов и косинусов	16
1.6. Ряд Фурье для функции периода 2π	18
1.7. Ряд Фурье для функции, заданной на отрезке длины 2π	22
1.8. Правый и левый пределы функции в точке. Точки разрыва первого рода	25
1.9. Гладкие и кусочно-гладкие функции	27
1.10. Признак сходимости ряда Фурье	28
1.11. Четные и нечетные функции	31
1.12. Ряды по косинусам и ряды по синусам	32
1.13. Примеры разложений в ряд Фурье	35
1.14. Комплексная форма ряда Фурье	45
2. Сходимость рядов Фурье	48
2.1. Неравенство Бесселя и его следствие	48
2.2. Предел при $n \rightarrow \infty$ тригонометрических интегралов	50
2.3. Формула для суммы косинусов. Вспомогательные интегралы	55
2.4. Интегральная формула для частной суммы ряда Фурье.	57
2.5. Правая и левая производные	58
2.6. Достаточное условие для сходимости ряда. Фурье в точке непрерывности функции	61
2.7. Достаточное условие для сходимости ряда Фурье в точке разрыва функции	63

2.8. Обобщение достаточных условий Сходимости ряда Фурье	65
2.9. Сходимость ряда Фурье для кусочно-гладкой функции (непрерывной или разрывной)	66
2.10. Абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье непрерывной и кусочно-гладкой функции периода 2π	68
2.1. Равномерная сходимость ряда Фурье непрерывной функции периода 2π , обладающей абсолютно интегрируемой производной	71
2.2. Примеры разложения в ряд Фурье неограниченных функций	75
3. Сложение и вычитание рядов Фурье. Умножение на число	81
3.1. Умножение рядов Фурье	81
4. Интегрирование рядов Фурье. Дифференцирование рядов Фурье	83
4.1. Интегрирование рядов Фурье	83
4.2. Дифференцирование рядов Фурье. Случай непрерывной функции периода 2π	87
4.3. Дифференцирование рядов Фурье. Случай функции, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$	89
4.4. Дифференцирование рядов Фурье. Случай функции, заданной на отрезке $[0, \pi]$	94
5. Улучшение сходимости рядов Фурье	100
6. Таблица некоторых тригонометрических разложений	104
7. Приближенное вычисление коэффициентов Фурье	107
8. Интеграл Фурье	112
8.1. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье	112
8.2. Доказательство интегральной формулы Фурье	114
8.3. Различные виды интегральной формулы Фурье	115
8.4. Преобразование Фурье	117
8.5. Спектральная функция	121
9. Уравнение колебания струны и стержня	122

9.1. Вывод уравнения колебания струны	122
9.2. Свободные колебания струны	124
9.3. Вынужденные колебания струны	128
9.4. Свободные колебания стержня	130
9.5. Вынужденные колебания стержня	133
10. Уравнение распространения тепла в стержне	135
10.1. Уравнение теплопроводности	135
10.2. Распространение тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре.	137
10.3. Распространение тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре	139
10.4. Распространение тепла в бесконечном стержне	141
10.5. Распространение тепла в круглом цилиндре; случай установившейся температуры	146
11. Интегральные преобразования Фурье и их применение в задачах обработки информации	149
11.1. Непрерывное преобразование Фурье	149
11.1.1. Интеграл Фурье и способы его вычисления	149
11.1.2. Свойства преобразований Фурье	162
11.1.3. Использование преобразования Фурье для спектрального анализа сигналов и систем	172
11.2. Дискретные интегральные преобразования	188
11.2.1. Интегральные преобразования дискретных сигналов	188
11.2.2. Дискретное преобразование Фурье	197
11.2.3. Частотный анализ обработки информации в дискретных системах	201
11.2.4. Быстрое преобразование Фурье	206
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	212
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	213

Учебное издание

Катрахова Алла Анатольевна
Васильев Евгений Михайлович
Купцов Валерий Семенович
Купцов Андрей Валериевич

РЯДЫ ФУРЬЕ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И
ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

В авторской редакции

Компьютерный набор

А.А. Катраховой
Е.М. Васильева,
В.С. Купцова,
А.В. Купцова.

Подписано к изданию 14.05. 2014.
Объем данных 3,7 Мб

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп.,14