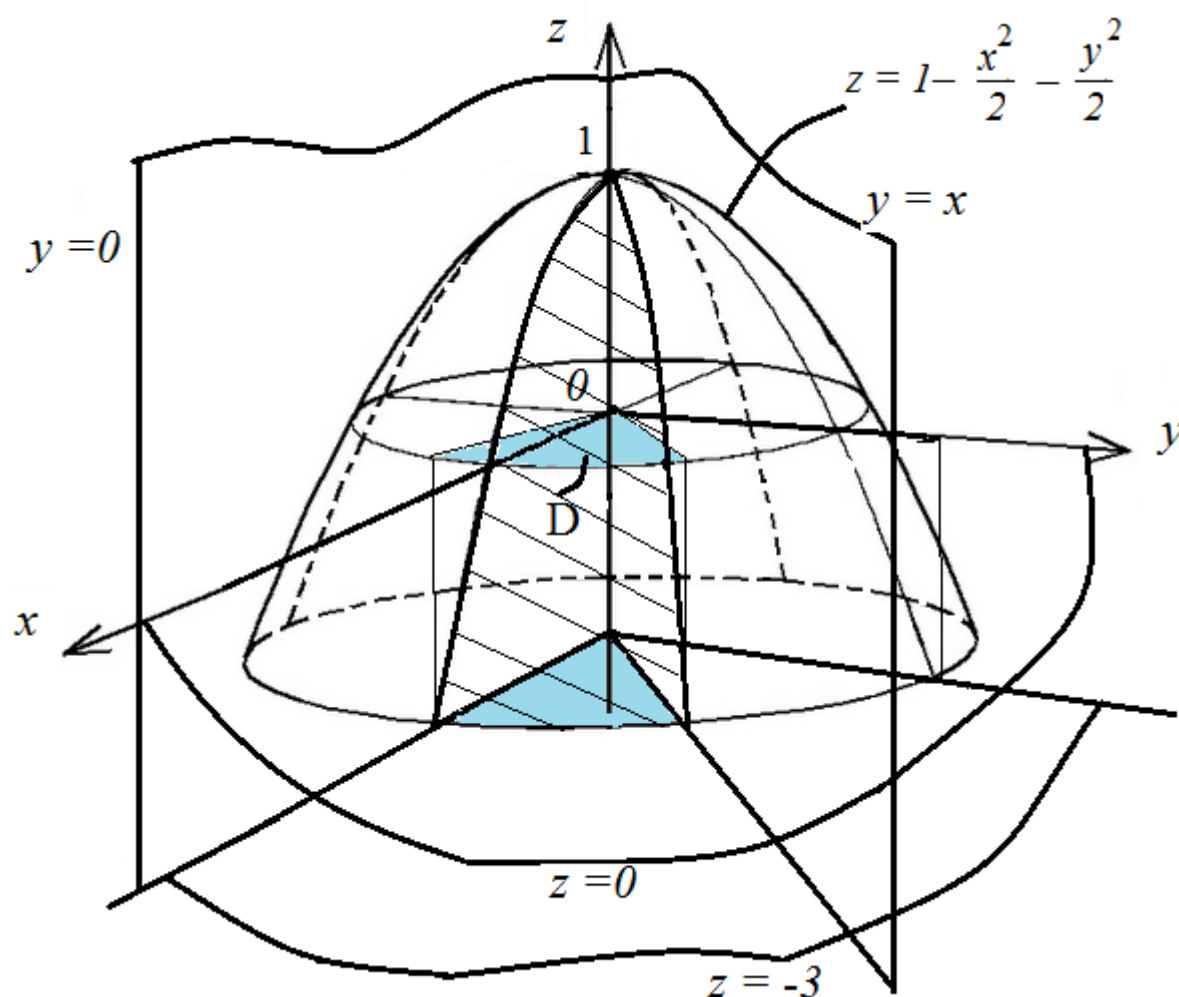


А. Б. Кущев, С. С. Сумера, Л. В. Акчурина

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Функции нескольких переменных и их интегрирование.

Элементы теории поля



Воронеж 2024

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

«Воронежский государственный технический университет»

А. Б. Кущев, С. С. Сумера, Л. В. Акчурина

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Функции нескольких переменных и их интегрирование.

Элементы теории поля

Учебное пособие

Воронеж 2024

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.12я7
К967

Рецензенты:

*кафедра математического анализа
Воронежского государственного университета
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, доц. С. А. Шабров);
Е. М. Семенов, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры теории функций
и геометрии Воронежского государственного университета*

Кущев, А. Б.

**Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных и их
K967 интегрирование. Элементы теории поля : учебное пособие / А. Б. Кущев,
С. С. Сумера, Л. В. Акчурина; ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет». — Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2024. — 103 с.**

ISBN 978-5-7731-1181-8

В данном учебном пособии изложен материал, соответствующий разделу «Интегрирование», изучаемому на младших курсах предмета «Математика». Каждая рассматриваемая тема снабжена подробно разобранными примерами, поэтому пособие полезно студентам как для работы в семестре, так и для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов 1-го курса тех специальностей очной формы обучения, для которых соответствующие разделы математики есть в рабочей программе, также может быть полезно магистрам.

Ил. 65. Табл. 3. Библиогр.: 9 назв.

**УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.12я7**

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ISBN 978-5-7731-1181-8

© Кущев А. Б., Сумера С. С.,
Акчурина Л. В., 2024
© ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический
университет», 2024

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание является продолжением первой части пособия «Интегральное исчисление. Неопределенный и определенный интеграл» [1], первая и вторая главы которого посвящены неопределенному и определенному интегралам. В данном пособии «Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных и их интегрирование. Элементы теории поля» рассматриваются различные обобщения интеграла Римана (двойные, тройные, криволинейные и поверхностные интегралы) для функции многих переменных.

В третьей главе рассматриваются функции многих переменных. На примере функций двух переменных можно увидеть, как при переходе от одной независимой переменной ко многим появляется качественно новое понятие, например, градиента. Можно увидеть и то, как основные понятия введения в математический анализ: предел, непрерывность, производная, дифференциал — переносятся или обобщаются. Но многое расширяется: область определения надо строить на чертеже; производные брать по любому направлению. Очень важным для обработки результатов измерений и опытов являются оценка погрешностей (§3) и метод наименьших квадратов (§7). В четвертой главе вводится двойной интеграл (для решения задач о нахождении объемов тел) и затем его сведения к уже изученным интегралам Римана за счет кратных интегралов, но при этом появляются такие новые моменты, как построение областей интегрирования, расстановка пределов интегрирования и разнообразие возможностей: порядок интегрирования, выбор системы координат. И как всегда, многочисленные приложения в геометрии и механике. В пятой главе обобщение интеграла идет в направлении усложнения множества, по которому ведется интегрирование, а именно: отрезки на оси Ox заменяются на гладкие кривые. В начале главы (§1) рассматривается общий подход к определенным интегралам, а в конце её с помощью формулы Грина, связывающей криволинейный интеграл по замкнутому контуру с двойным интегралом по ограниченной этим контуром областью, выводятся легко проверяемые условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования и вводится понятие потенциала, далее выводится формула для его нахождения. В шестой главе изучаются тройные интегралы, их сведение к кратным, замена переменных и появление якобиана, переход к цилиндрической и сферической системам координат, приложения тройных интегралов. В седьмой главе соединяются оба обобщения интеграла Римана (и по размерности, и по искривлению области интегрирования) в виде поверхностных интегралов, изучаются способы их вычисления и приложения. В конце главы выводятся два обобщения формулы Грина: по искривленности множества интегрирования — формула Стокса, повышения размерности на единицу — формула Остроградского–Гаусса. Наконец, в последней, восьмой главе, излагается теория поля, в основном она понадобится студентам ФИСиС и авиаракетных специальностей, а также магистрам. Но вопросы, связанные с потенциалом сил тяготения (§3), будут интересны всем.

Представленные в учебном пособии рисунки являются авторскими. Авторы выражают благодарность за помощь в издании пособия Казаковой Анне Владимировне и Ярцевой Юлии Алексеевне.

ГЛАВА 3. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Определение функции нескольких переменных.

Область определения, график и линии уровня функции двух переменных, их предел и непрерывность

При изучении физики и других наук вам приходилось часто сталкиваться с ситуацией, когда одна величина зависит от нескольких независимых величин. Например, закон Джоуля-Ленца о количестве тепла, выделяемого током в проводнике: $Q = 0,24I^2Rt$.

Определение 1. Переменная z называется **функцией n независимых переменных** $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.1)$$

если каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из некоторого множества D n -мерного пространства ставится в соответствие единственное значение z . Это множество точек D , в которых функция существует — есть **область определения функции**.

В этой главе мы обобщим основные понятия функции одной переменной: предел, непрерывность, производная, дифференциал на функции нескольких переменных, при этом появятся и качественно новые понятия, например, градиент функции. Изучать будем на примере функции двух переменных

$$z = f(x, y). \quad (3.2)$$

Отметим, что графиком функции двух переменных будет множество точек пространства $(x, y, f(x, y))$, где $(x, y) \in D$, задающих поверхность над данной областью D (рис. 1), что обобщает график функции одной переменной $y = f(x)$ — кривую на плоскости. Так как мы живем в трехмерном мире, то для функции трех $f(x, y, z)$ или большего количества переменных график мы уже построить не сможем.

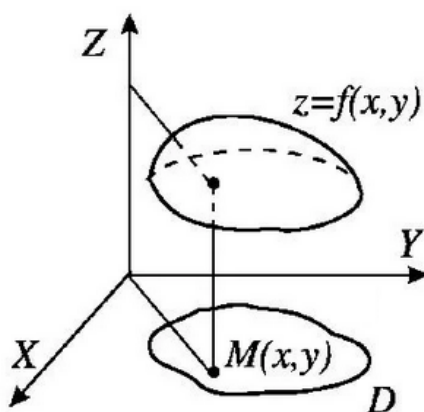


Рис. 1

Для функции двух переменных (а также трех и большего конечного количества переменных) вводится еще один способ геометрического описания – это **линии уровня**

$$f(x, y) = c = \text{const}. \quad (3.3)$$

Все видели географические карты, на которых рельеф (например, горы) описывается кривыми на плоскости, соответствующими одинаковым высотам, а множество замкнутых линий соответствуют разной высоте: 100 м, 200 м и так далее.

Поверхности уровня $f(x, y, z) = c = \text{const}$ или $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ (для n переменных) — эквипотенциальные поверхности, которые широко используются в гравитационных и электрических полях.

Пример 1. Для функции $z = \ln xy$:

- 1) построить область определения функции D ;
- 2) найти область значения функции E ;
- 3) найти и построить линии уровня.

Решение.

1) Так как выражение внутри логарифма должно быть положительно, то областью определения D будет множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy > 0$. Очевидно, это множество точек, лежащих в первой и третьей четвертях (рис. 2).

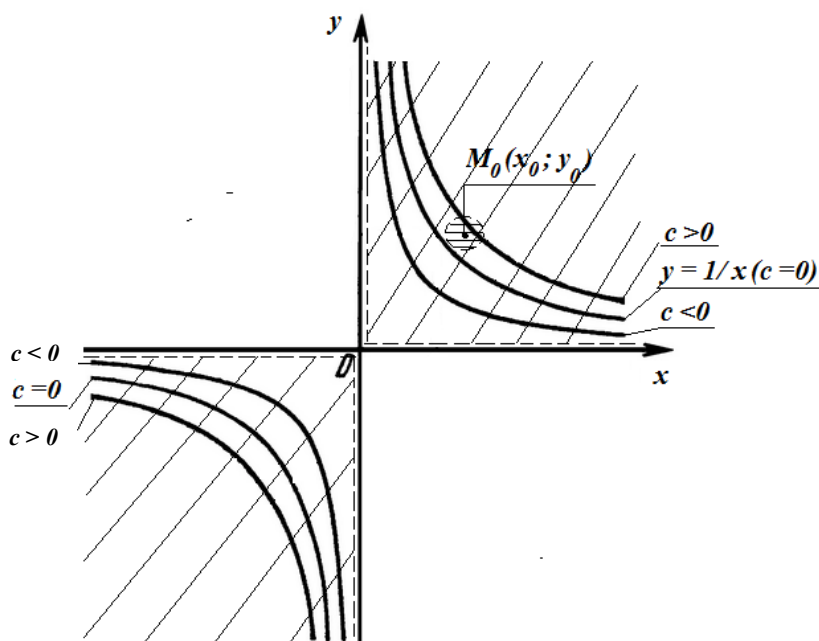


Рис. 2

Отметим, что граница (оси Ox и Oy) в неё не входит. Такая область является *открытой*, т. е. вместе с каждой точкой $M_0(x_0, y_0) \in D$ в неё входят все точки $M(x, y)$ такие, что $M_0M < \varepsilon$ — на чертеже это открытый заштрихованный круг без границ. В этом случае границу рисуют пунктиром. В случае, когда множество содержит все предельные точки (граница тоже принадлежит этому

множеству, так будет, например, для функции $\sqrt{xy}$, то её рисуют сплошной линией.

Еще одна особенность данной области D : она состоит из двух частей D_1 (множество точек в первой четверти) и D_2 (третья четверть) и они изолированы друг от друга — такая область называется **двусвязной**.

1) Для данной функции ответить на вопрос об области значений функции E очень легко. Достаточно взять $y=1$ и выписать значения для основной элементарной функции $z = \ln x: z \in \mathbb{R}$.

2) Для нахождения линий уровня положим $z = c = \text{const}$, что дает $\ln xy = c$, $xy = e^c$, обозначив $e^c = k > 0$, получим линии уровня данной функции: $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ — множество гипербол, ветви которых лежат в первой и третьей четвертях (рис. 2).

Предел и непрерывность функции двух переменных

Определение 2. Число A называется **пределом функции** $z = f(x, y)$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число δ , что для всех точек $M(x, y)$ таких, что расстояние $M_0 M = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ (называемых δ -окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$) будет выполняться неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, что обозначается $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$.

Замечание. Это определение обобщает понятие предела для функции одного переменного, в частности, при $y = y_0$ имеем $\sqrt{(x - x_0)^2} = |x - x_0| < \delta$, и поэтому обычные свойства предела остаются в силе.

Определение 3. Функция $z = f(x, y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (3.4)$$

то есть предел функции равен значению функции в этой точке.

Для случая конечного числа n переменных $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$, где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -мерный вектор.

Естественно, что все хорошие свойства непрерывных функций остаются в силе: сохраняются свойства непрерывности при арифметических операциях над функциями, сохраняются свойства непрерывности для сложных функций.

Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в каждой точке замкнутой области, то она там ограничена, достигает наименьшего и наибольшего значения и пробегает (хотя бы один раз) все промежуточные значения между ними.

В то же время в области разрывов ситуация гораздо сложнее и богаче по сравнению с функцией от одной переменной. Например, функция $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ существует во всех точках плоскости кроме начала координат (т.к. $x^2 + y^2 \neq 0$). Если входить в начало координат по прямым $y = kx$, то

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot k}{x^2 \cdot (1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}$, то есть по каждому направлению будет свой ответ.

§2. Частные производные и их геометрический смысл.

Частные производные высших порядков

Аналогичная ситуация с производными, которых при подходе к точке по разным направлениям будет бесчисленное множество. Поэтому для $f(x, y)$ выделяют два основных направления, параллельные осям координат (при этом одна из переменных будет константой).

Для функции $z = f(x, y)$ **полным приращением** функции называют $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, а приращения только по одной переменной есть **частные приращения**

а) по переменной x имеем $\Delta z_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$;

б) по переменной y имеем $\Delta z_y = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Определение 4. **Частной производной** называется предел отношения частного приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последний стремится к нулю:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (3.5)$$

частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x ;

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (3.6)$$

частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y .

Считая производную по одной из переменных, фиксируем другую (или другие переменные, если функция большего количества переменных) переменную, то эти определения совпадают с определением производной для функции одной переменной, а значит все правила дифференцирования остаются справедливыми. Единственная трудность — психологическая: надо привыкнуть смотреть на другую (другие) переменную как на константу.

Пример 2. Найти частные производные от функции $z = x^y$.

Вычислим частную производную по переменной x : $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^y)$. Показатель $y = const$, меняется только x , следовательно, функция z — это степенная функция вида x^p , значит $\frac{\partial}{\partial x}(x^y) = yx^{y-1}$.

Вычислим частную производную по переменной y : $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y)$. Основание $x = const$, меняется только показатель y , следовательно, функция z — это показательная функция вида a^y , значит $\frac{\partial}{\partial y}(x^y) = x^y \ln x$.

Геометрический смысл частных производных

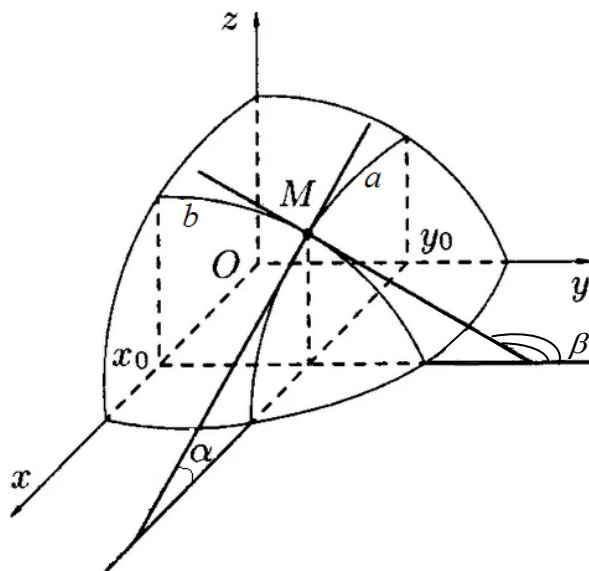


Рис. 3

а) При $y = const$ проведем через точку M вертикальную плоскость, параллельную оси Ox , которая пересечет поверхность $z = f(x, y)$ по кривой a , из геометрического смысла производной $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M(x,y)} = tg \alpha$ — тангенс угла наклона касательной к этой кривой в данной вертикальной плоскости; аналогично $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M(x,y)} = tg \beta$.

Справедливы теоремы о поведении функции в зависимости от знака производной: если некоторая частная производная положительна, то по направлению, параллельному соответствующей оси, функция возрастает; а если отрицательна, то убывает.

Частные производные высших порядков

По определению вторая производная есть производная от первой производной. Для функции двух переменных формально возможно четыре варианта: дважды дифференцировать по x , дважды продифференцировать по y , и пара смешанных производных — сначала продифференцировать по x , затем по y и наоборот. Обозначают эти производные второго порядка соответственно, как

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Пример 3. Найти вторые смешанные производные от функции $z = \sin(x^{10} e^y)$.

Найдем частные производные первого порядка

$$z'_x = \cos(x^{10} e^y) \frac{\partial}{\partial x}(x^{10} e^y) = e^y \frac{\partial}{\partial x}(x^{10}) \cos(x^{10} e^y) = 10x^9 e^y \cos(x^{10} e^y),$$

$$z'_y = \cos(x^{10} e^y) \frac{\partial}{\partial y}(x^{10} e^y) = e^y x^{10} \cos(x^{10} e^y).$$

Теперь, зная производные первого порядка, найдем смешанные производные второго порядка.

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(10x^9 e^y \cos(x^{10} e^y)) = 10x^9 e^y [\cos(x^{10} e^y) - \sin(x^{10} e^y) x^{10} e^y],$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^{10} e^y \cos(x^{10} e^y)) = 10x^9 e^y [\cos(x^{10} e^y) - \sin(x^{10} e^y) x^{10} e^y].$$

Замечание. Отметим без доказательства, что не только в этом примере, но и всегда ответ для смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Это правило верно для смешанных производных любого

порядка. Поэтому, если требуется найти $\frac{\partial^7 z}{\partial x^4 \partial y^3}$, это означает что нужно четыре раза продифференцировать по x и три раза по y , причем в любом порядке.

§3. Полный дифференциал функции двух переменных, его геометрический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях и для оценки погрешностей. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

Полное приращение функции двух переменных представим в виде

$$\Delta z = A_1 \Delta x + B_1 \Delta y + A_2 (\Delta x)^2 + B_2 \Delta x \Delta y + C_2 (\Delta y)^2 + \dots \quad (3.7)$$

Положим $\Delta y = 0$. Тогда $\Delta z_x = A_1 \Delta x + A_2 (\Delta x)^2 + \dots$, разделив на Δx и перейдя к пределу, найдем $A_1 = \frac{\partial z}{\partial x}$; аналогично, при $\Delta x = 0$, получим $B_1 = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Определение 5. Дифференциал dz называется главная линейная часть приращения функции. Подставив в (3.7) найденные значения A_1 , B_1 и отбросив слагаемые более высоких порядков малости по сравнению с Δx и Δy , получим

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (3.8 \text{ а})$$

Формула применяется в приближенных вычислениях. Поскольку для независимых переменных дифференциал совпадает с приращением $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то (3.8 а) принимает вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (3.8 \text{ б})$$

Выражение (3.8 б) называют еще **полным дифференциалом**. В случае трех и большего числа переменных в формуле для дифференциала будет такое же количество слагаемых.

Замечание. Для функции одной переменной $y = \varphi(x)$ производную можно выразить через отношение дифференциалов. Для функций даже только двух переменных это неверно, например, при подстановке (3.8 б) отношений дифференциалов после сокращения на dx получится $dz = 2dz$, поэтому для обозначения частных производных используется в отличие от печатного d , которое закреплено за дифференциалом, рукописное ∂ .

Геометрический смысл дифференциала

Из геометрического смысла дифференциала функции одной переменной приращение в нашем случае аппликаты касательных к кривым a и b (для соответствующих вертикальных плоскостей, параллельных осям координат см. рис. 3), поэтому, так как проведенная через касательные для частных приращений Δx и Δy плоскость будет касательной плоскостью к поверхности $z = f(x, y)$ и **геометрический смысл дифференциала** для произвольных приращений $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ — приращение аппликаты касательной плоскости.

Следствие. Сменим обозначения: будем считать, что дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется в точке $M_0(x_0, y_0)$, а точка $M(x, y, z)$ лежит на касательной плоскости, тогда $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$,

$$dz = z - z_0 = z - f(x_0, y_0), \text{ частные производные будут } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{M_0}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{M_0},$$

тогда из (3.8 а) после подстановки новых обозначений, мы выведем **уравнение касательной плоскости** к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $C_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (для точки $M_0(x_0, y_0) \in D$)

$$z - f(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{M_0(x_0, y_0)} \cdot (y - y_0). \quad (3.9)$$

Если перенести все слагаемые в правую часть, тогда коэффициент перед z будет равен (-1) , значит, вектор нормали $\bar{n}$ к плоскости будет

$$\bar{n} = \left\{ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0(x_0, y_0)}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{M_0(x_0, y_0)}, -1 \right\}$$

и уравнения нормали к поверхности $z = f(x, y)$ для точки $M_0(x_0, y_0)$ будет

$$\frac{x - x_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (3.10)$$

Пример 4. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^3 \operatorname{tg} y$ для точки $M_0(2; \frac{\pi}{4})$.

$$\begin{aligned} \text{В нашем случае } f(x, y)|_{M_0} = x^3 \operatorname{tg} y|_{M_0} = 8 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 8. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \operatorname{tg} y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \frac{1}{\cos^2 y}. \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0} = 3 \cdot 4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 12; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{M_0} = 8 \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 8 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 16. \end{aligned}$$

Подставив вычисленные коэффициенты в уравнения (3.9) и (3.10), получим уравнения касательной плоскости $z - 8 = 12(x - 2) + 16(y - \frac{\pi}{4})$ после упро-

щения $12x + 16y - z - 16 - 4\pi = 0$ и нормали к поверхности $\frac{x - 2}{12} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{16} = \frac{z - 8}{-1}$.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Как и для функции одной переменной $\Delta z \approx dz$, (при $|x| \ll 1, |y| \ll 1$) то есть $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx dz$, тогда

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz, \quad (3.11)$$

где dz вычисляется по формуле (3.8 а).

Пример 5. Вычислить приближенно $0,98^{3,01}$.

Введем функцию $z = f(x, y) = x^y$, тогда нас интересует значение этой функции $f(0,98; 3,01)$.

Заметим, что её значение в близкой точке $M(1; 3)$ легко вычисляется $f(1, 3) = 1^3 = 1$. В примере 2 были найдены частные производные, тогда вычис-

лим их значения при $x=1$, $y=3$: $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,3)} = (y \cdot x^{y-1})|_{(1,3)} = 3$;

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,3)} = (x^y \ln x)|_{(1,3)} = 0, \Delta x = -0,02, \Delta y = 0,01.$$

По формуле (3.8 а) имеем

$$dz = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \cdot \Delta y = 3 \cdot (-0,02) + 0 \cdot 0,01 = -0,06,$$

из чего по формуле (3.11) получим $f(0,98;3,01) \approx f(1;3) + dz = 1 - 0,06 = 0,94$.

Применение дифференциала для оценки погрешности

Пусть для вычисленной величины $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ независимые переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ измерены с точностью $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ (или мы задаем их с такой точностью).

Оценим погрешность результата с помощью дифференциала функции n переменных:

$$|\Delta z| \approx |dz| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right|,$$

окончательно,

$$|\Delta z| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| |\Delta x_1| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| |\Delta x_2| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| |\Delta x_n|. \quad (3.12)$$

Пример 6. Определить ускорение силы тяжести g с помощью маятника.

Воспользуемся формулой Томпсона $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, где T — период колебания

маятника, а l — его длина. Из формулы выразим g : $T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$, $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$.

Возьмем маятник длиной $l = 1$ м при точности измерения $\Delta l = 1$ мм = 0,001 м, а с помощью секундомера измерим период $T = 2$ сек., тогда точность измерения $\Delta T = 0,01$ сек.

$$\text{Вычислим } g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \Big|_{\substack{l=1 \\ T=2}} = 4\pi^2 \frac{1}{4} = \pi^2 = 9,8702286.$$

Возникает вопрос, какова погрешность полученного результата? Вычислим значения частных производных:

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} \right) = \frac{4\pi^2}{T^2}, \quad \left. \frac{\partial g}{\partial l} \right|_{(1,2)} = \frac{4\pi^2}{T^2} \Big|_{T=2} = \pi^2;$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} \right) = -\frac{8\pi^2 l}{T^3}, \quad \left. \frac{\partial g}{\partial T} \right|_{(1,2)} = -\frac{8\pi^2 l}{T^3} \Big|_{\substack{l=1 \\ T=2}} = -\pi^2.$$

В нашем случае в правой части (3.12) будет два слагаемых:

$$|\Delta g| \leq \left| \frac{\partial g}{\partial l} \right|_{(1,2)} \cdot |\Delta l| + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right|_{(1,2)} \cdot |\Delta T| = \pi^2 \cdot 0,001 + \pi^2 \cdot 0,01 = 0,011\pi^2 < 0,11.$$

Следовательно, $g = 9,87 \pm 0,11$ или $g \in (9,76; 9,98)$.

Замечание. Предположим, что мы хотим повысить точность. Так как в данном примере точность для измерения времени $\Delta T = 0,01$ сек. в десять раз хуже, чем точность измерения длины $\Delta l = 1 \text{ мм} = 0,001 \text{ м}$, а частные производные по абсолютной величине одинаковы, то прежде всего надо поднять точность измерения времени в десять раз, а затем можно синхронно улучшать точность и по времени, и по длине.

§4. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование неявных функций

Пусть дана функции $z = f(x, y)$, где $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases}$ и каждая из функций имеет частную производную по каждой из переменных, тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Доказательство. Полное приращение

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right),$$

где α — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем Δx и Δy . Разделим обе части равенства на Δu и перейдем к пределу

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta u} + \frac{\alpha \left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right)}{\Delta u} \right) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

аналогично для второй новой переменной v :

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta v} + \frac{\alpha \left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right)}{\Delta v} \right) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v},$$

что доказывает равенства (3.13).

В качестве примера рассмотрим обычную неявную функцию $F(x, y) = 0$ и продифференцируем обе части по x .

По формуле (3.13) получим $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$, т. е.

$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0$, отсюда производная

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (3.14)$$

Пример 7. Найти производную неявной функции

$$\operatorname{tg} x^{\operatorname{ctg} y} + 2x + 3y - x^4 y^5 = 0.$$

По формуле (3.14)

$$y' = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{tg} x^{\operatorname{ctg} y} + 2x + 3y - x^4 y^5)}{\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{tg} x^{\operatorname{ctg} y} + 2x + 3y - x^4 y^5)} = \frac{\operatorname{ctg} y \cdot \operatorname{tg} x^{\operatorname{ctg} y - 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 2 - 4x^3 y^5}{-\operatorname{tg} x^{\operatorname{ctg} y} \cdot \ln(\operatorname{tg} x) \cdot \frac{1}{\sin^2 y} + 3 - 5x^4 y^4}.$$

§5. Производная по направлению.

Градиент функции, его геометрический смысл

Когда мы вводили частные производные, то отмечали, что вычисляли их по одному из двух направлений, параллельных осям координат.

Сейчас найдем производную по направлению прямой, образующую угол α с положительным направлением оси Ox , обозначим длину направляющего вектора $\vec{l}$ через l (рис. 4).

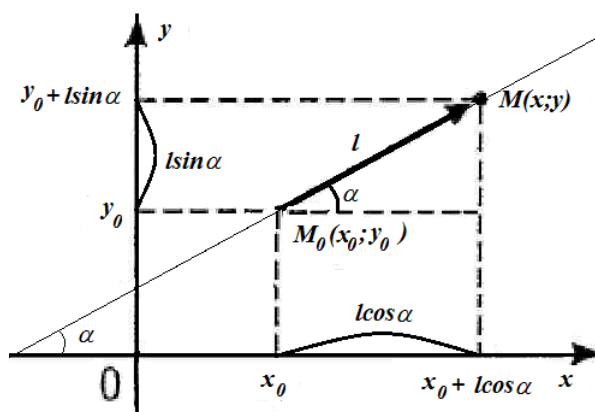


Рис. 4

Из чертежа легко видеть, что для точки $M(x, y)$ на прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cos \alpha, \\ y = y_0 + l \sin \alpha. \end{cases}$$

По формуле (3.13) $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial l}(x_0 + l \cos \alpha) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial l}(y_0 + l \sin \alpha)$, т. е.

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin \alpha$$

или, что тоже самое

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin \alpha. \quad (3.15)$$

Формула (3.15) и есть **производная** функции $z = f(x, y)$ **по направлению вектора** $\bar{l}$.

Определение 6. Вектором **градиента** функции $z = f(x, y)$ называется вектор, состоящий из частных производных

$$\text{grad} f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\}. \quad (3.16 \text{ а})$$

Для функции трех переменных $u = \varphi(x, y, z)$

$$\text{grad} \varphi = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\}. \quad (3.16 \text{ б})$$

Выясним геометрический смысл градиента. Рассмотрим единичный вектор $\bar{l}_1 = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ по направлению вектора $\bar{l}$. Тогда по формуле скалярного произведения равенство (3.15) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha = \text{grad} f \cdot \bar{l}_1 = |\text{grad} f| \cdot |\bar{l}_1| \cos \varphi = |\text{grad} f| \cdot \cos \varphi.$$

Так как $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$ и $\cos 0 = 1$, то $\left(\frac{\partial f}{\partial l} \right)_{\max} = |\text{grad} f|$ по направлению вектора $\text{grad} f$, то есть по этому направлению функция растет быстрее всего (когда вы поднимаетесь на гору, то направление градиента — это направление наибольшей крутизны, следуя которым можно быстрее всего выйти на вершину). Есть соответствующий градиентный метод нахождения наибольшего значения функции.

Отметим еще одну геометрическую связь: $\text{grad} f$ перпендикулярен линиям уровня $f(x, y) = c$ (с одной стороны $c' = 0$, с другой стороны $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ и поэтому векторы нормали к касательным этих линий совпадает с векторами градиента). Поэтому, если уравнение поверхности в пространстве задается в неявном виде: $\Phi(x, y, z) = 0$, то векторы градиента этой функции

$\text{grad} \Phi = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\}$ являются векторами нормали в соответствующих точ-

ках поверхности. Отсюда, если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на этой поверхности, то **уравнение нормали** к ней имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{M_0}}, \quad (3.17)$$

а **уравнением касательной плоскости** будет

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot (y - y_0) + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{M_0} \cdot (z - z_0) = 0. \quad (3.18)$$

Сравните с (3.10) и (3.9) соответственно, когда уравнение поверхности задано в явном виде.

Замечание. Обобщим для функции трех переменных $f(x, y, z)$ кроме вектора градиента $gradf = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}$, задающим в пространстве прямую, вдоль которой функция $f(x, y, z)$ быстрее всего изменяется (растет по направлению градиента и убывает в противоположном направлении), а также формулу производной по направлению вектора $\bar{l}$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot \cos \beta + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{M_0} \cdot \cos \gamma,$$

где $\frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ — есть единичный вектор по направлению вектора $\bar{l}$.

Пример 8. В условиях примера 4 на стр. 11 найти:

а) $gradf \Big|_{\left(2; \frac{\pi}{4}\right)}$;

б) производную под углом $\alpha = \frac{\pi}{3}$ к оси Ox ;

в) $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\max}$ в точке $M_0 \left(2; \frac{\pi}{4} \right)$.

В примере 4 были найдены $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\left(2; \frac{\pi}{4}\right)} = 12$; $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\left(2; \frac{\pi}{4}\right)} = 16$.

Следовательно, теперь можем найти:

а) $gradf \Big|_{\left(2; \frac{\pi}{4}\right)} = \{12, 16\}$;

б) $\frac{\partial f}{\partial l} = 12 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 16 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 12 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 + 8\sqrt{3} \approx 19,86$;

в) $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\max} = \left| gradf \Big|_{M_0} \right| = 4\sqrt{3^2 + 4^2} = 20$.

§6. Экстремум функции двух переменных, его необходимое и достаточное условия. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, заданную в некоторой области D плоскости xOy .

Определение 7. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой **локального максимума (минимума)**, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем её значения в некоторой окрестности этой точки (рис. 5). Точки локального максимума и минимума называются **экстремумами функции**.

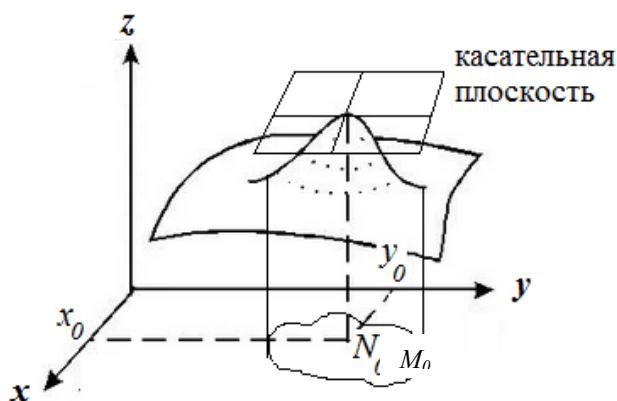


Рис. 5. Точка локального максимума

Необходимое условие экстремума. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума. Пусть экстремум гладкий, то есть существует касательная плоскость (рис. 5) и она горизонтальна (т. е. параллельна плоскости xOy), тогда $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = 0$, а значит, выполнены условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

или одна из производных, или обе не существует (например, для «горы в виде пика»). Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума (3.19) называются **стационарными точками**.

Достаточное условие экстремума. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка и, кроме того, в некоторой окрестности этой точки существуют непрерывные частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{M_0}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{M_0}.$$

Тогда:

1) если

$$B^2 - AC < 0, \quad (3.20)$$

то точка M_0 – это точка экстремума, при $A > 0$, $C > 0$ – локального минимума, а при $A < 0$, $C < 0$ – локального максимума;

2) если $B^2 - AC > 0$, то локального экстремума не существует;

3) если $B^2 - AC = 0$, то необходимы дополнительные исследования с привлечением производных высших порядков.

Доказательство. Если сменить обозначения в формуле (3.11) на стр. 11, заменив $(x_0 \rightarrow x, y_0 \rightarrow y, x \rightarrow x_0 + \Delta x, y \rightarrow y_0 + \Delta y)$, то

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x, y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot (y - y_0),$$

где мы ограничиваемся полным дифференциалом. Можно продолжать эту формулу с помощью дифференциалов второго, третьего и большего порядков, в результате получится ряд Тейлора, который мы приведем без доказательства:

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2!} \left(\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{M_0} \cdot (x - x_0)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{M_0} \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{M_0} \cdot (y - y_0)^2 \right) + \frac{1}{3!} \left(\left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{M_0} \cdot (x - x_0)^3 + \right. \\ \left. + 3 \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right|_{M_0} \cdot (x - x_0)^2 (y - y_0) + 3 \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right|_{M_0} \cdot (x - x_0)(y - y_0)^2 + \right. \\ \left. + \left. \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right|_{M_0} \cdot (y - y_0)^3 \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Вернемся от формулы (3.21) к первоначальной записи (3.11), где $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$; так как кроме того в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ в силу (3.19) линейные слагаемые пропадут, получим

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left(A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2 \right) + \alpha \left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right),$$

где α – бесконечно малая: $\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha = 0$, где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{(\Delta y)^2}{2} \left(At^2 + 2Bt + C \right) + \alpha \left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right), \text{ где } t = \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

1) Пусть дискриминант квадратного трехчлена

$$D = B^2 - AC < 0.$$

Тогда при $\alpha \rightarrow 0$ в малой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ можно сделать второе слагаемое меньше первого и, следовательно, знак правой части совпада-

ет со знаком квадратного трехчлена. Так как из $B^2 - AC < 0$ следует, что A и C одного знака, что приводит к двум возможным случаям:

- а) $A > 0$, $C > 0$, тогда $f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$ и $M_0(x_0, y_0)$ — это точка минимума;
 б) $A < 0$, $C < 0$, тогда $f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0$ и $M_0(x_0, y_0)$ — это точка максимума.

2) При $D = B^2 - AC > 0$ квадратный трехчлен может быть разных знаков, то есть функция возрастает на одних направлениях, и убывает по другим.

3) При $D = B^2 - AC = 0$ будет корень t_0 , при котором останутся слагаемые (дифференциалы) третьего и более высокого порядка, что требует дополнительных исследований.

Пример 9. Исследовать функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$ на экстремум.

1) Найдем стационарные точки из условия (3.19):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3 - 3xy) = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3 - 3xy) = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ 3(x^4 - x) = 0, \quad x(x^3 - 1) = 0. \end{cases}$$

Откуда $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $x_2 = 1$, $y_2 = 1$, т.е. найдены две стационарные точки $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$.

2) Вычислим вторые производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3y) = -3; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 - 3x) = 6y$$

и вычислим их значения в стационарных точках:

в точке $M_1(0, 0)$ получим $A_1 = 0$, $B_1 = -3$, $C_1 = 0$, тогда $D_1 = B_1^2 - A_1 C_1 = 9 > 0$, следовательно, в начале координат экстремума нет;

в точке $M_2(1, 1)$ получим $A_2 = 6$, $B_2 = -3$, $C_2 = 6$, $D_2 = B_2^2 - A_2 C_2 = 9 - 36 < 0$, следовательно, в силу (3.20), и положительности A_2, C_2 следует, что точка $M_2(1, 1)$ — точка минимума.

Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

В случае функции одной переменной наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке достигаются или в точках экстремума внутри интервала или на концах отрезка. Аналогично для функции нескольких переменных в замкнутой области наибольшее и наименьшее значения функции могут достигаться или в стационарных точках внутри области (мы ограничиваемся гладким случаем) или на границе области. Поэтому необходимо:

1) найти все стационарные точки, но оставить из них только точки, принадлежащие области;

2) подставив по очереди уравнения границы области в заданную функцию (их может быть несколько), исследовать на экстремум получившиеся функции одной переменной, что добавит еще точки, подозрительные на экстремум;

3) вычислить значения функции в точках из первого и второго пунктов и на границах выделенных интервалов 2-го пункта (если они есть) и, наконец, выбрать из них самое большое или самое маленькое.

Пример 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $D: y \geq 0, x \geq 0, x^3 + y^3 \leq 8$.

Построим область D .

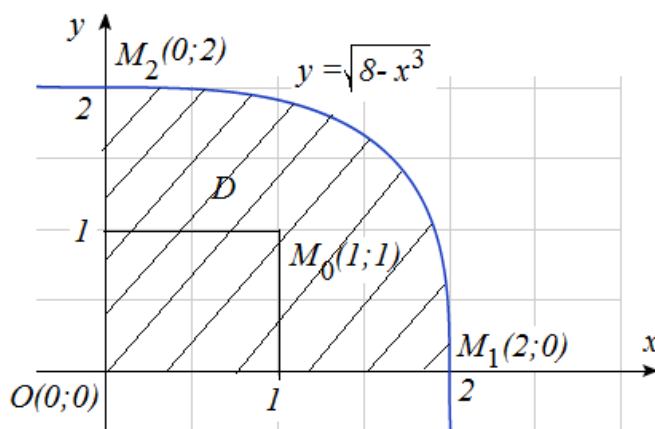


Рис. 6

Граница области состоит из трех частей:

а) $y = 0$ — ось Ox ; б) $x = 0$ — ось Oy ; в) $x^3 + y^3 = 8$ — кривая, которая пересекает оси координат в точках $M_1(2, 0)$ и $M_2(0, 2)$, так как точка $O(0, 0)$ даёт $0^3 + 0^3 = 0 < 8$, то область D в первой четверти лежит под кривой $y = \sqrt[3]{8 - x^3}$ (рис. 6).

1) Найдем стационарные точки (см. пример 9 пункт 1) — это точки $O(0, 0)$, $M_0(1, 1)$, которые принадлежат области D , так как $1^3 + 1^3 = 2 < 8$.

2) Исследуем поведение функции на границе:

а) $y = 0, (0 \leq x \leq 2)$, $z|_{y=0} = (x^3 + y^3 - 3xy)|_{y=0} = x^3$. Так как x^3 возрастает, то наименьшее значение на отрезке OM_1 достигается в точке $O(0, 0)$, а наибольшее в точке $M_1(2, 0)$;

б) в силу симметрии функции $f(x, y) = f(y, x)$ ситуация на оси Oy аналогична пункту а), поэтому нужно еще добавить точку $M_2(0, 2)$;

в) на границе $x^3 + y^3 = 8$ или $y = \sqrt[3]{8 - x^3} (0 \leq x \leq 2)$

$z|_{\cup M_1 M_2} = (x^3 + y^3 - 3xy)|_{y=\sqrt[3]{8-x^3}} = 8 - 3x\sqrt[3]{8-x^3}$, продифференцируем

$$z' = -3 \left[\sqrt[3]{8-x^3} - \frac{x^3}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}} \right] = 6 \frac{x^3 - 4}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}}. \quad z' = 0, \quad x^3 - 4 = 0, \quad x_3 = \sqrt[3]{4}, \quad y_3 = \sqrt[3]{4},$$

откуда получим точку $M_3(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4})$; z' не существует при $x = 2$, отметим, что точка $M_1(2, 0)$ была в пункте 2.

3) Вычислим значения заданной функции в выделенных точках: $f(x, y)|_{O(0,0)} = 0$, $f(x, y)|_{M_0(1,1)} = -1$, $f(x, y)|_{M_1(2,0)} = 8$, $f(x, y)|_{M_2(0,2)} = 8$, $f(x, y)|_{M_2(0,2)} = 8$, $f(x, y)|_{M_3(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4})} \approx 0,441$, сравнивая значения, очевидно, наименьшее значение функции $f_* = -1$ достигается в точке минимума $M_0(1,1)$; наибольшее значение функции $f^* = 8$ достигается в двух точках $M_1(2,0)$ и $M_2(0,2)$ на границе области

§7. Метод наименьших квадратов

Предположим, что известно табличное задание функции (табл. 1).

Таблица 1

x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
y_1	y_2	...	y_k	...	y_n

Пусть требуется найти зависимость $y = f(x)$. Отметим, что можно выписать интерполяционный многочлен $L_{n-1}(x)$ Лагранжа (или Ньютона) степени $n-1$, проходящий через все n точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$. В то же время, если значения y_k получены в результате опытов, то в силу погрешностей эти значения отклоняются от истинных. Поэтому, если построить эти n точек на плоскости, можно выдвинуть гипотезу о виде функции $f(x)$. Предположим, что у нас случай линейной зависимости $y = ax + b$, так как точки ложатся вдоль некоторой прямой (рис. 7).

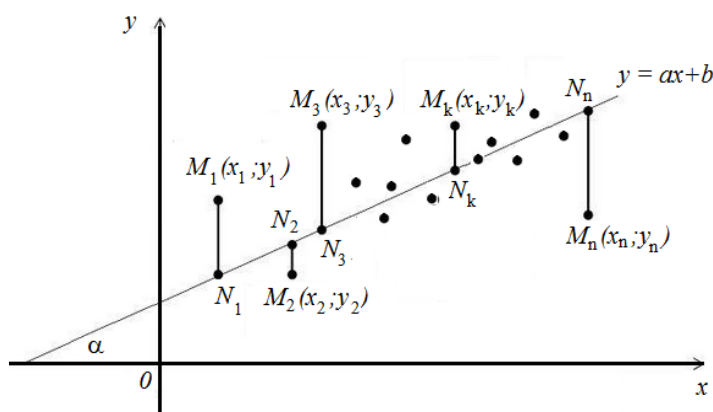


Рис. 7

Наша цель — подобрать прямую, наиболее близко проходящую к точкам заданного множества $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$. Для этого берут сумму квадратов расстояний (по вертикали) от точек $M_k(x_k, y_k)$ до точек N_k на прямой (вообще, расстояния измеряются по перпендикуляру, но брать сумму модулей таких расстояний и минимизировать её технически сложно; можно брать сумму модулей по вертикали, но эта сумма отличается в $\cos \alpha$ раз; слож-

ности еще в том, что модуль не везде дифференцируемая функция). Поэтому далее будем суммировать суммы квадратов отклонений по вертикали, отсюда и

название самого метода: $\sum_{k=1}^n M_k N_k^2 \rightarrow \min$, из чего

$$f(a, b) = \sum_{k=1}^n (y_k - ax_k - b)^2 \rightarrow \min \text{ (очевидно, такой минимум существует). Вос-}$$

пользуемся необходимым условием экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = -\sum_{k=1}^n 2(y_k - ax_k - b)x_k = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial b} = -\sum_{k=1}^n 2(y_k - ax_k - b) = 0. \end{cases}$$

Упростив и раскрыв скобки, получим:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot a + \sum_{k=1}^n x_k \cdot b = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \\ \sum_{k=1}^n x_k \cdot a + n \cdot b = \sum_{k=1}^n y_k. \end{cases} \quad (3.22)$$

Решив систему (3.22), мы и получим коэффициенты a , b линейной зависимости.

Замечание. Если множество точек $M_k(x_k, y_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), нанесенных на плоскость, напоминает другую известную кривую, например, параболу $y = ax^2 + bx + c$, то аналогично можно получить систему — в этом случае трех линейных уравнений относительно коэффициентов a, b, c (добавится ещё одно условие $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n x_k^4 \cdot a + \sum_{k=1}^n x_k^3 \cdot b = \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot c = \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k, \\ \sum_{k=1}^n x_k^3 \cdot a + \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot b + \sum_{k=1}^n x_k \cdot c = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot a + \sum_{k=1}^n x_k \cdot b + nc = \sum_{k=1}^n y_k, \end{cases}$$

и так далее. Можно показать, что полученные системы всегда имеют единственное решение.

Пример 11. По данным табл. 2 методом наименьших квадратов найти линейную функцию $y = ax + b$.

Таблица 2

x_k	1	2	3	4	5
y_k	3	4	2,5	0,5	1

Для того чтобы составить систему (3.22), выпишем табл. 3 для подсчета соответствующих сумм.

Таблица 3

№	x_k	y_k	x_k^2	$x_k y_k$
1	1	3	1	3
2	2	4	4	8
3	3	2,5	9	7,5
4	4	0,5	16	2
5	5	1	25	5
$\sum_{k=1}^5$	15	11	55	25,5

По данным табл. 3 составим систему уравнений

$$\begin{cases} 55a + 15b = 25,5, \\ 15a + 5b = 11. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы утроенное второе, получим: $10a = -7,5$; $a = -0,75$. Из второго уравнения, зная a , найдем $b = \frac{11 - 15a}{5} = 4,45$. Найдем координаты по y на этой прямой:

$$\tilde{y}_1 = -0,75 + 4,45 = 3,7, \quad \tilde{y}_2 = -1,5 + 4,45 = 2,95.$$

Заметив, что при увеличении x на единицу значения y для данной линейной функции уменьшаются на 0,75, проще найти $\tilde{y}_3 = \tilde{y}_2 - 0,75 = 2,95 - 0,75 = 2,2$, $\tilde{y}_4 = 2,2 - 0,75 = 1,45$, $\tilde{y}_5 = 1,45 - 0,75 = 0,7$ (сравните с исходными y_k).

На рис. 8 построены первоначальные точки $M_1(1,3)$, $M_2(2,4)$, $M_3(3;2,5)$, $M_4(4;0,5)$, $M_5(5,1)$ и линейная функция $y = -0,75x + 4,45$.

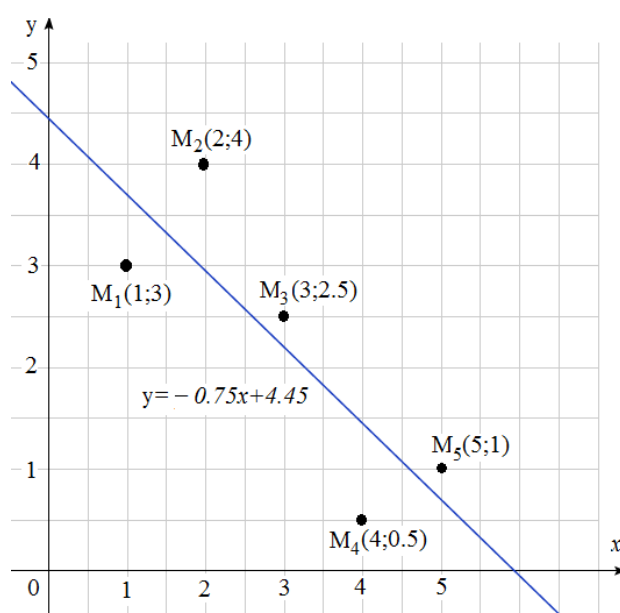


Рис. 8

ГЛАВА 4. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Двойной интеграл, его геометрический смысл и свойства

Чтобы обобщить интеграл Римана от функции одной переменной на функцию от двух переменных, рассмотрим задачу о вычислении объема V тела, ограниченного сверху графиком положительной непрерывной функции $z = f(x, y)$ над данной областью D (рис. 9).

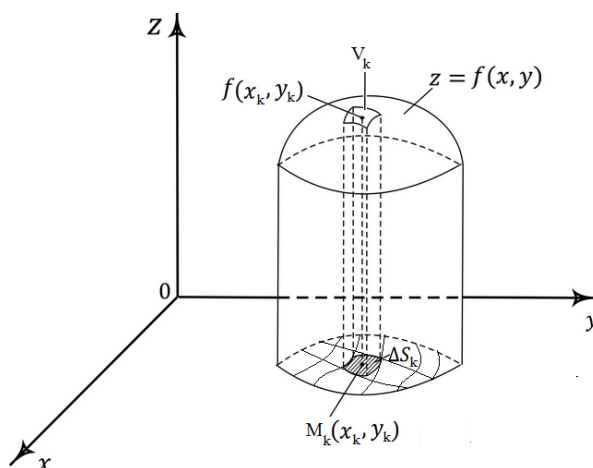


Рис. 9

1) Разобьем область D на n произвольных частей, где ΔS_k есть площадь k -ой части, и разобьем тело на n частей с вертикальными стенками, где ΔV_k – объем k -ой части. Очевидно,

$$V = \sum_{k=1}^n \Delta V_k.$$

2) Выберем в каждой части ΔS_k точку $M_k(x_k, y_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ и заменим каждую часть на цилиндры с высотами $h_k = f(x_k, y_k)$, тогда

$$V \approx \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k,$$

полученная сумма называется **интегральной суммой**.

3) Чем на большее число частей «разбивается» область D , тем меньше будут соответствующие ΔS_k , тем точнее мы сможем найти объем V . Поэтому для получения точного ответа пусть n будет неограниченно расти, при этом все площади ΔS_k должны быть близки к нулю.

Определение 1. Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральных сумм, когда число разбиений n стремится к бесконечности, а максимальные площади разбиений стремятся к нулю:

$$\iint_D f(x, y) ds = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta s_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta s_k . \quad (4.1)$$

Геометрическим смыслом двойного интеграла для непрерывной положительной функции $f(x, y)$ является объем тела под поверхностью $z = f(x, y)$ над заданной областью D . В силу существования объема тела, который на практике можно найти с помощью закона Архимеда, естественна теорема существования предела (4.1), который для непрерывных функций не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек M_k в каждой части. По аналогии с определенным интегралом Римана сформулируем **свойства двойного интеграла**:

1. $\iint_D cf(x, y) ds = c \iint_D f(x, y) ds$, $c = const$.
2. $\iint_D [f_1(x, y) + f_2(x, y)] ds = \iint_D f_1(x, y) ds + \iint_D f_2(x, y) ds$.
3. $\iint_D f(x, y) ds = \iint_{D_1} f(x, y) ds + \iint_{D_2} f(x, y) ds$, где $D_1 \cup D_2 = D$. (4.2)

Первые два свойства непосредственно вытекают из свойств предела, а третье свойство очевидно геометрически: если разрезать тело вертикальным цилиндром вдоль границы между D_1 и D_2 , то $V = V_1 + V_2$ (рис. 10).

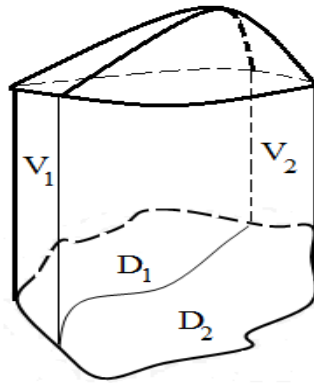


Рис. 10

Можно сформулировать еще два свойства, аналогичные свойствам 4, 5 у определенного интеграла (пункт 2.1 [1]), но при вычислении двойных интегралов они нам не понадобятся.

§2. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

Так как двойной интеграл не зависит от способа разбиения области D на части, то будем разбивать её на прямоугольники (во внутренней части области D) со сторонами параллельными осям координат (рис. 11).

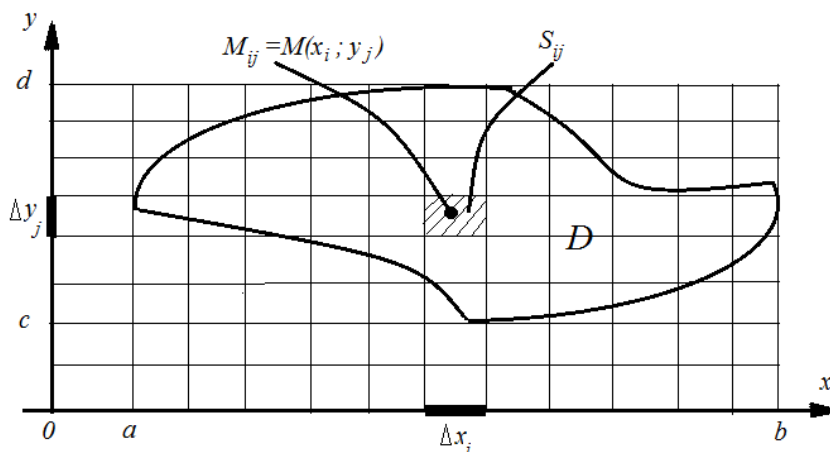


Рис. 11

Так как площадь прямоугольника $\Delta s_{ij} = S_{\square ij} = \Delta x_i \Delta y_j$, а внутри каждого такого прямоугольника мы можем выбрать по точке $M_{ij} = M(x_i, y_j)$, то тогда естественно записать $ds = dxdy$ и заменить двойной интеграл кратным

$$\iint_D f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) dxdy = \lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i, \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j. \quad (4.3)$$

Пусть сначала мы будем интегрировать по y , а затем по x .

Определение 2. Область D называется **правильной областью** по y , если в интервале (a, b) (внутренних точек отрезка $[a, b]$, которому принадлежат значения абсцисс точек из D) каждая вертикальная прямая пересекает границу области D не более двух раз.

Отметим, что при $x = a$ или $x = b$ (рис. 12) границей может быть даже вертикальный отрезок.

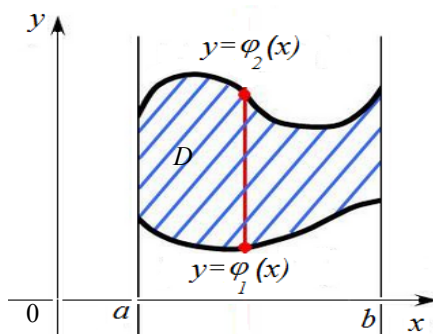


Рис. 12

Тогда область D можно задать системой неравенств:

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \quad (x \in [a, b]), \quad (4.4)$$

при этом пределы изменения y при каждом фиксированном x свои. Поэтому можно однозначно расставить пределы интегрирования:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (4.5)$$

Последнее обозначение придумано, чтобы без лишних скобок было понятно, какие пределы к каким неизвестным относятся. Сначала берется внутренний интеграл по y , при этом мы двигаемся по вертикали, где x считается константой (эта операция является обратной к взятию частной производной по переменной y), затем, после подстановки по формуле Ньютона-Лейбница переменных пределов интегрирования внутреннего интеграла, останется взять обычный интеграл от получившейся функции от одной переменной x .

Пример 1. Вычислить $\iint_D x^2 y dx dy$, где область D ограничена линиями $x^2 + y^2 = 2$, $x = 0$, $y = x$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

1) Нарисуем чертеж (рис. 13).

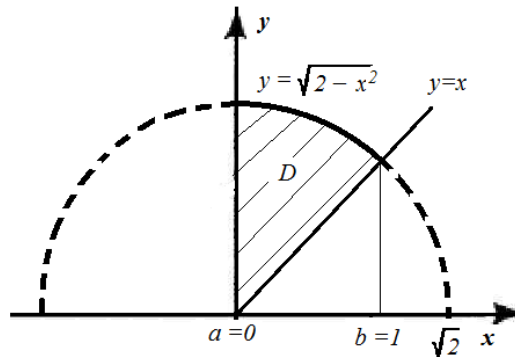


Рис. 13

2) Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2$, разрешенное относительно y при условии $y \geq 0$, описывается зависимостью $y = \sqrt{2 - x^2}$, где корень взят со знаком плюс.

3) Область D , очевидно, правильная по y . Чтобы найти верхний (правый) предел интегрирования для переменной x , надо решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x, \end{cases}$ откуда $x_{1,2} = \pm 1$. Из условия $x \geq 0$ следует, что $x = b = 1$, тогда область D можно задать условием $x \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$, $x \in [0, 1]$.

Итак, расставим пределы интегрирования и возьмем сначала внутренний интервал по y (считая x^2 константой)

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y dx dy &= \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} x^2 y dy = \int_0^1 x^2 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} y dy = \int_0^1 x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_x^{\sqrt{2-x^2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (\sqrt{2-x^2}^2 - x^2) dx = \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

Пример 2. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

В данных двух интегралах внутренние интегралы берутся по y , а внешние — по x , требуется внутренний брать по x , а внешний — по y . В некоторых случаях такое изменение направления интегрирования значительно упрощает вычисление интеграла.

Сначала, по пределам интегрирования, восстановим подобласти интегрирования и построим их:

- а) для первого интеграла область D_1 : $0 \leq y \leq \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ (рис. 14);
- б) для второго интеграла область D_2 : $0 \leq y \leq 2 - x$, $x \in [1, 2]$ (рис. 14);

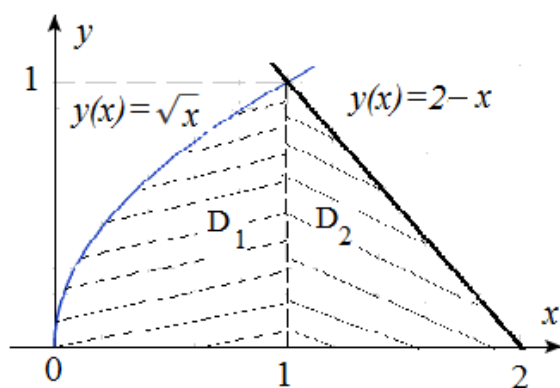


Рис. 14

Заметим, что при $x=1$ области D_1 и D_2 сходятся на одной высоте $y_1 = \sqrt{x} \Big|_{x=1} = \sqrt{1} = 1$ и $y_2 = (2-x) \Big|_{x=1} = 2-1=1$. Следовательно, для нового интеграла, при смене порядка интегрирования, можно будет обойтись одним интегралом, для которого внешние пределы по y будут от 0 до 1. Из чертежа (рис. 14) очевидно, что область $D = D_1 \cup D_2$ правильная по x . Так как x и y меняются ролями, при этом внутренний интеграл берется по x , требуется выра-

зить x через y : для левой границы $y = \sqrt{x}$, следовательно, $x = y^2$; для правой границы $y = 2 - x$, следовательно, $x = 2 - y$.

Итак, во внутреннем интеграле x меняется при движении вдоль оси Ox от параболы $x = y^2$ до прямой $x = 2 - y$. Окончательно получим

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx.$$

Замечание. Второй вариант расстановки пределов интегрирования предпочтителен по двум причинам:

- 1) вычисляется один интеграл, а не два;
- 2) в пределах интегрирования пропал $\sqrt{x}$ — что может упростить вычисления; конечно, вычисления еще зависят и от подынтегральной функции, и знак корня может уничтожаться в вычислениях, как, например, в примере 1, поэтому при решении, в каком порядке интегрировать, надо смотреть и на подынтегральную функцию тоже.

В том же первом примере, если брать внутренний интеграл по x , то табличный интеграл $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$, и нечетная степень оставит знак корня.

Из вышесказанного замечания следует, что в первую нужно проверить, будет ли область правильной. Например, для области, изображенной на рис. 15 а, нужно брать внешний интеграл по y , а внутренний — по x .

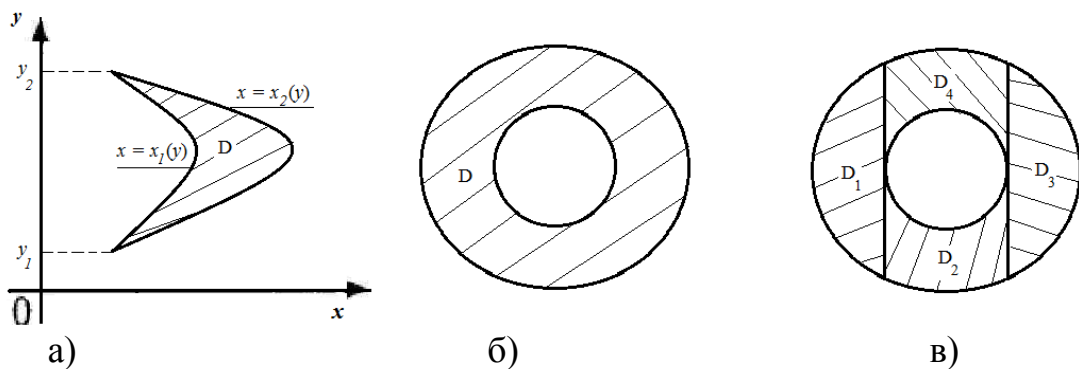


Рис. 15

В общем случае, область может не быть правильной ни по y , ни по x . Примером такой области может быть «кольцо» (рис. 15 б), и тогда её надо будет разрезать на несколько правильных подобластей (рис. 15 в). Затем применить формулу (4.2), которая справедлива для любого конечного числа подобластей. Для того же «кольца», разбитого на четыре части, в формуле будет четыре интеграла.

Однако, для интегралов, граница области интегрирования которых является окружностью (или ее сектором) с центром в начале координат, полезным является способ, переводящий вычисления в полярную систему координат. Он рассматривается в следующем параграфе.

§3. Интегрирование двойного интеграла в полярной системе координат

Напомним, что формулы, связывающие полярную систему координат с декартовой, имеют вид
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Выполнив замену переменных, получим

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi, \quad (4.6)$$

осталось показать, что $ds = r dr d\varphi$ (последняя формула отражает неравномерность координатной сетки в полярной системе координат, для которой при одних и тех же $\Delta\varphi$ и Δr площадь ΔS растет пропорционально радиусу).

Воспользуемся дифференциальным методом (рис. 16): для части сектора ABCD между двумя окружностями радиуса r и $r + \Delta r$
$$\Delta S = S_{ODC} - S_{OAB} = \frac{(r + \Delta r)^2}{2} \cdot \Delta\varphi - \frac{r^2}{2} \cdot \Delta\varphi = r \cdot \Delta r \cdot \Delta\varphi + \frac{(\Delta r)^2}{2} \cdot \Delta\varphi,$$
 и $ds = r dr d\varphi$.

Пусть область D ограничена двумя лучами $\varphi = \alpha_1$, $\varphi = \alpha_2$, и $r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$ (теперь $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ заданные функции на границе области), она будет **правильной** по r , если любой луч ($\alpha_1 < \varphi < \alpha_2$) пересекает границу не более двух раз (рис. 16). Тогда можно расставить пределы интегрирования

$$\iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (4.7)$$

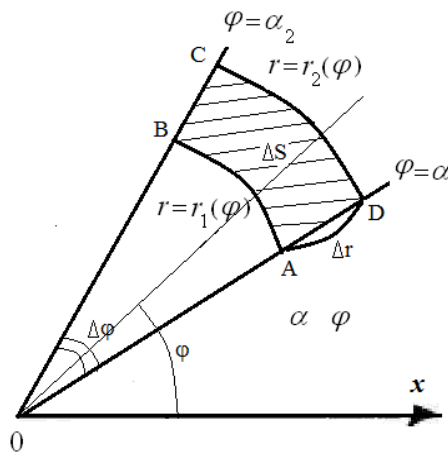


Рис. 16

Пример 3. Вычислить интеграл $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$ по области D , ограничен-

ной двумя окружностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ и двумя лучами $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и расположенной в первой четверти.

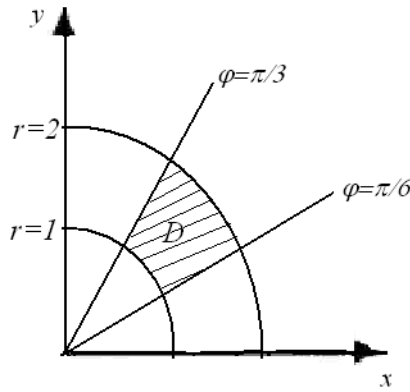


Рис. 17

Построим область D (рис. 17). Когда границы области содержат окружности с центром в начале координат, удобно перейти к полярной системе координат. Переходя по формуле (4.7) к полярным координатам, учитывая, что область D правильная, получим

$$\begin{aligned} \iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy &= \iint_D \operatorname{arctg} \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} r dr d\varphi = \iint_D \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi) r dr d\varphi = \iint_D \varphi r dr d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi \int_1^2 r dr. \end{aligned}$$

Так как после вынесения φ как константы за знак внутреннего интеграла в этом интеграле подынтегральная функция зависит только от r , а пределы интегрирования постоянны, то двойной интеграл равен произведению интегралов

$$\text{от } \varphi \text{ и от } r. \text{ Тогда } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi \int_1^2 r dr = \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36} \right) (4 - 1) = \frac{\pi^2}{16}.$$

Пример 4. Вычислить несобственный интеграл первого рода $A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Отметим, что этот интеграл используется в теории вероятностей, но соответствующий неопределенный интеграл $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ относится к «неберущимся».

Возьмем такой же интеграл $A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$, и перемножив их, получим

$A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$. Перейдем к полярной системе координат, отметим, что $x^2 + y^2 = r^2$ и интеграл берется по всей плоскости.

$$\begin{aligned}
A^2 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-\frac{r^2}{2}} d\left(\frac{r^2}{2}\right) = -2\pi \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-\frac{r^2}{2}} d\left(-\frac{r^2}{2}\right) = -2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^N = \\
&= -2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \left[e^{-\frac{N^2}{2}} - e^0 \right] = 2\pi.
\end{aligned}$$

Следовательно, $A = \sqrt{2\pi}$.

Замечание. Из геометрического смысла определенного интеграла (он может быть и несобственным) следует, что площадь под кривой $e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ будет равна $\sqrt{2\pi}$, а так как площадь под функцией плотности $f(x)$ на всей оси есть достоверное событие, вероятность которого равна единице, то в простейшем нормальном законе распределения в качестве функции плотности берут функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, её график есть кривая Гаусса.

§4. Вычисление площадей плоских фигур с помощью двойного интеграла

Ранее мы отмечали, что интеграл от дифференциала позволяет вычислять изменение величины под знаком дифференциала на множестве, по которому берется интеграл, например, $\int_a^b dx = b - a$, для двойного интеграла

$$\iint_D ds = S_D, \quad (4.8)$$

то есть интеграл от дифференциала площади равен площади области D . Но по сравнению с использованием одномерного определенного интеграла Римана использование двойного интеграла даёт гораздо больше возможностей его вычисления: можно брать внутренний интеграл по y , внешний — по x , а можно наоборот. Также можно перейти к полярной системе координат или сделать замену переменных, при которой получаются простые пределы интегрирования или упрощение подынтегральной функции.

Пример 5. Пусть область D задана двумя лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ и кривой $r = r(\varphi)$, заданной в полярной системе координат (рис. 18). Тогда при переходе к полярной системе координат

$$S_D = \iint_D dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{r(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi,$$

и мы вывели (как частный случай перехода к полярной системе координат для таких областей D) формулу (2.10) [1], соответствующая область указана на рис. 18.

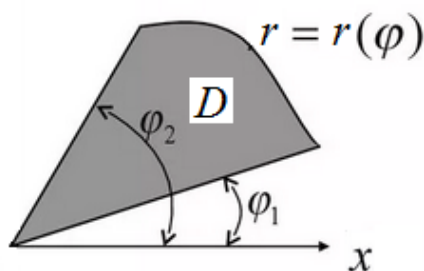


Рис. 18

Пример 6. Вычислить площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Мы перейдем к обобщенной полярной системе координат: $\begin{cases} x = ar \cos \varphi, \\ y = br \sin \varphi, \end{cases}$ в

ней уравнение эллипса будет $r^2 = 1$, так как r — расстояние, то $r \geq 0$, а значит $r = 1$.

Геометрический смысл φ — угол с положительным направлением к оси ОХ и, чтобы «обежать» эллипс, надо сделать полный оборот вокруг начала координат, то есть $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Без доказательства приведем формулу перехода к

новой системе координат в двойном интеграле при замене $\begin{cases} x = x(r, \varphi), \\ y = y(r, \varphi). \end{cases}$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) |I| dr d\varphi, \quad (4.9)$$

где определитель

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \quad (4.10)$$

называют якобианом, который показывает, во сколько раз изменяются площади при данном преобразовании (обоснование см. на стр. 65-66).

В нашем случае

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} (a \cos \varphi) & \frac{\partial}{\partial r} (b r \sin \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (a \cos \varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi} (b r \sin \varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & b \sin \varphi \\ -a r \sin \varphi & b r \cos \varphi \end{vmatrix} = a b r,$$

отметим, что при $a = b = 1$ у нас получится полярная система координат, порожденная единичной окружностью с центром в начале координат.

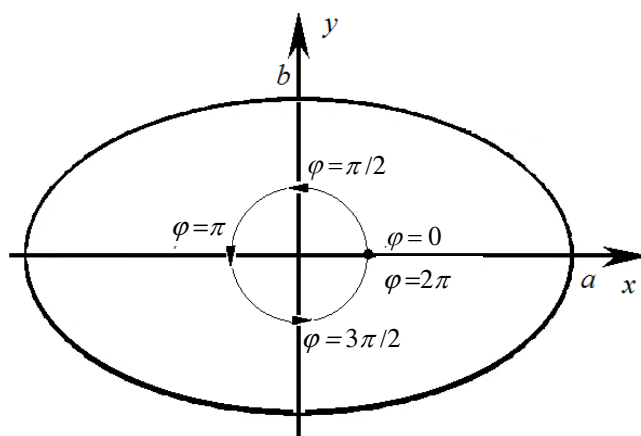


Рис. 19

Подставив I в (4.9), получим площадь эллипса: $S_{\text{эллипса}} = \iint_D dx dy =$
 $= ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr = \pi ab$ (рис. 19). Отметим, если рассмотреть частный случай
 эллипса при $a = b = R$, то мы получим для круга радиуса R площадь $S_{\text{круга}} = \pi R^2$.

§5. Вычисление объемов тел с помощью двойного интеграла

Пусть тело ограничено поверхностями $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$ над областью D (рис. 20).

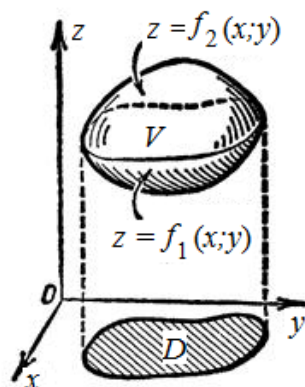


Рис. 20

Тогда

$$V = \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dx dy. \quad (4.11)$$

Используя геометрический смысл двойного интеграла, проведите доказательство самостоятельно, которое аналогично выводу формулы вычисления площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла (2.9) [1].

Пример 7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$.

Построим чертеж (рис. 21): $z=0$ — горизонтальная координатная плоскость xOy ; $z=4-x$ — плоскость, параллельная оси Oy , так как в уравнении отсутствует переменная y ; $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ — параболические цилиндры, параллельные оси Oz . В данном случае верхняя плоскость $z=f_2(x,y)=4-x$, нижняя — $z=f_1(x,y)=0$, хотя при $f_1(x,y)=0$ можно воспользоваться геометрическим смыслом интеграла для наклонной плоскости, поэтому $V = \iint_D (4-x) dx dy$.

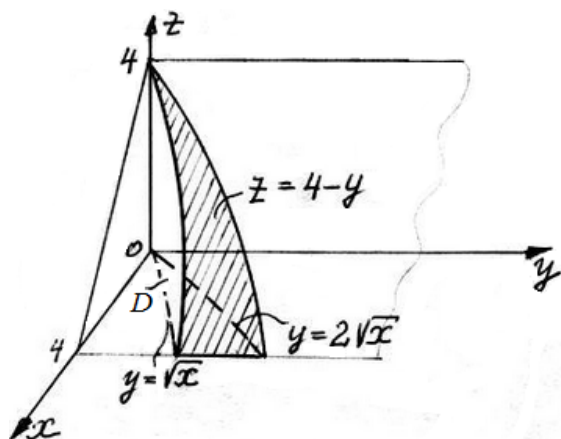


Рис. 21

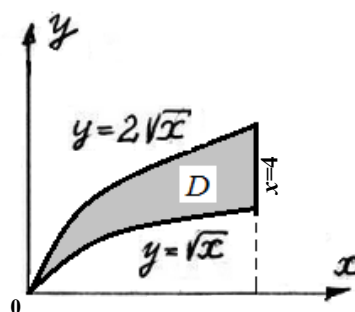


Рис. 22

Область D рекомендуется построить отдельно (рис. 22) на плоскости xOy , так как оси в пространстве повернуты по-другому. Область D — правильная по y , расставим пределы интегрирования и затем вычислим полученный кратный интеграл:

$$V = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x) dy = \int_0^4 (4-x) \cdot y \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^4 (4\sqrt{x} - x\sqrt{x}) dx = \frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^4 = 8 \frac{8}{15}$$

(куб. ед.). Если вы не видите, почему верхний предел $x=4$, то см. пункт 2б) на стр. 36.

Замечание. Часто можно найти объем тела, не делая чертеж тела в пространстве. Для того достаточно ответить на два вопроса:

1) от какой функции брать интеграл — для этого нужно из двух уравнений, содержащих z в явном виде, из правой части уравнения «верха» вычесть правую часть уравнения «низа»;

2) по какой области брать интеграл: для этого нужно взять уравнения вертикальных стенок (не содержащих z) и добавить пересечение «верха» с «низом».

Например, в примере 7:

1) из верха $f_2 = 4-x$ вычесть низ $f_1 = 0$, следовательно, будет $\iint_D (4-x) dx dy$,

2а) $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ — вертикальные стенки;

2б) $z = 4 - x$, $z = 0$ – пересечение «верха» с «низом», значит $4 - x = 0$, $x = 4$. Сразу на плоскости строим три функции, (две половинки парабол из 2а) и вертикальную прямую из 2б) ограничивающие область D (рис. 22).

Пример 8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = -3$, $0 \leq y \leq x$.

Попробуем ответить на два основных вопроса (см. замечание выше).

1) Подынтегральная функция будет $f_2(x, y) - f_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2 + 3 = 4 - x^2 - y^2$,

очевидно, $f_2(0, 0) = 1 > -3$, поэтому $z = -3$ – низ тела.

2) $0 \leq y \leq x$ задает множество точек между осью Ox ($y = 0$) и прямой $y = x$; пересечение «верха» с «низом» $1 - x^2 - y^2 = -3$, что дает окружность

$x^2 + y^2 = 4$ радиуса 2 с центром в начале координат, следовательно, объем $V = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ по области D (рис. 23), являющегося сектором круга

$x^2 + y^2 \leq 4$. Поэтому, выгодно перейти к полярной системе координат:

$$V = \iint_D (4 - r^2) r dr d\varphi = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 (4r - r^3) dr = \varphi \Big|_0^{\pi/4} \cdot \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \pi \text{ (куб. ед.)}$$

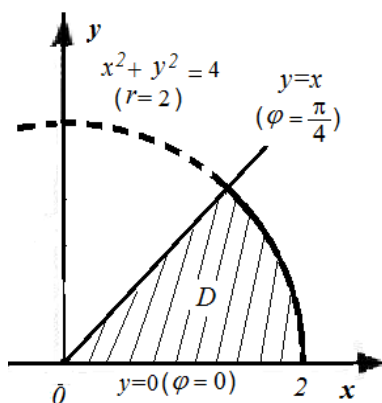


Рис. 23

Замечание. Для того, чтобы нарисовать тело, нужно уметь начертить одну из поверхностей второго порядка (рис. 24): параболоид вращения $z = 1 - x^2 - y^2$, затем построить горизонтальную плоскость $z = -3$ и две вертикальные плоскости xOz ($y = 0$) и $y = x$, которые при $0 \leq y \leq x$ вырезают $\frac{1}{8}$ часть тела между параболоидом вращения и горизонтальной плоскостью; наконец, чтобы построить область D на плоскость xOy нужно основание нашего тела (заштрихованный круг радиуса два) поднять вверх на три единицы.



37

§ 6. Применение двойных интегралов в механике

1. Масса плоской пластинки.

Пусть в каждой точке $M(x, y)$ области D известна плотность однородной пластинки $\mu(x, y)$. Воспользуемся дифференциальным методом. Возьмем точку $M(x, y) \in D$ (рис. 26), дадим приращения Δx и Δy аргументам и оценим массу Δm полученного прямоугольника.

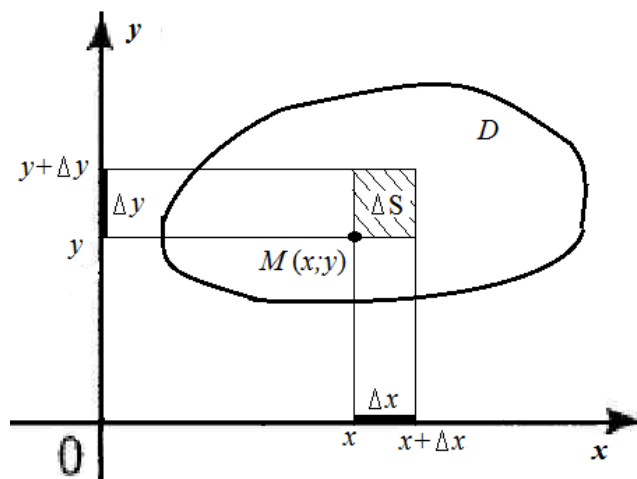


Рис. 26

Так как его площадь равна $\Delta s = \Delta x \cdot \Delta y$, то, считая плотность $\mu(x, y) = c = \text{const}$ на этом прямоугольнике, получим $\Delta m \approx dm = \mu(x, y) \Delta s = \mu(x, y) ds$, следовательно, масса

$$m = \iint_D \mu(x, y) ds = \iint_D \mu(x, y) dx dy. \quad (4.12)$$

2. Статические моменты.

По определению, **статический момент** для точки $M(x, y)$ массой m относительно оси — это произведение массы m на расстояние d до данной оси. Отсюда (рис. 26) $\Delta S_x \approx y \cdot \Delta m = y \cdot \mu(x, y) ds$, $\Delta S_y \approx x \cdot \Delta m = x \cdot \mu(x, y) ds$

и при переходе к интегралам, получим

$$S_x = \iint_D y \cdot \mu(x, y) ds, \quad (4.13 \text{ а})$$

$$S_y = \iint_D x \cdot \mu(x, y) ds. \quad (4.13 \text{ б})$$

3. Координаты центра тяжести (центра масс).

Центром тяжести называется такая точка $M_{\text{цт}}(x_{\text{цт}}, y_{\text{цт}})$, что если сосредоточить всю массу тела в этой точке, то эта точка с массой тела m ведет себя по

отношению к другим телам, как целиком все это тело. Отсюда $S_y = x_{\text{цт}} \cdot m$,

$$x_{\text{цт}} = \frac{S_y}{m}, \text{ аналогично } y_{\text{цт}} = \frac{S_x}{m}:$$

$$x_{\text{цт}} = \frac{\iint_D x \mu(x, y) ds}{\iint_D \mu(x, y) ds}, \quad y_{\text{цт}} = \frac{\iint_D y \mu(x, y) ds}{\iint_D \mu(x, y) ds}. \quad (4.14)$$

В частном случае однородной пластинки, когда $\mu(x, y) = \mu = \text{const}$, μ можно вынести за знак интегралов и сократить:

$$x_{\text{цт}} = \frac{\iint_D x ds}{S_D}, \quad y_{\text{цт}} = \frac{\iint_D y ds}{S_D}. \quad (4.15)$$

4. Моменты инерции.

По определению **моментом инерции** относительно оси (точки) называется произведение массы на квадрат расстояния до оси (точки). Поэтому, если заменить неизвестные y и x (расстояния до осей координат) на их квадраты в формулах (4.13 а) и (4.13 б), получим соответствующие формулы моментов инерции относительно осей Ox и Oy :

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) ds, \quad (4.16 \text{ а})$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) ds. \quad (4.16 \text{ б})$$

Для момента инерции I_0 относительно начала координат точки $O(0,0)$, так как квадрат расстояния $d^2 = OM^2 = x^2 + y^2$ (рис. 26), то $\Delta I_0 = (x^2 + y^2) \Delta m = (x^2 + y^2) \mu(x, y) ds$ и

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \mu(x, y) ds. \quad (4.17)$$

Отметим, что в силу линейного свойства — интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций — следует известная в теоретической механике теорема: момент инерции относительно точки равен сумме моментов относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

Рассматривают также центробежный момент инерции

$$I_{xy} = \iint_D xy \mu(x, y) ds.$$

Пример 10. Найти центр тяжести верхней половины однородного эллипса.

Разрешим уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно y :

$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$, для верхней половины эллипса надо взять знак плюс (рис. 27).

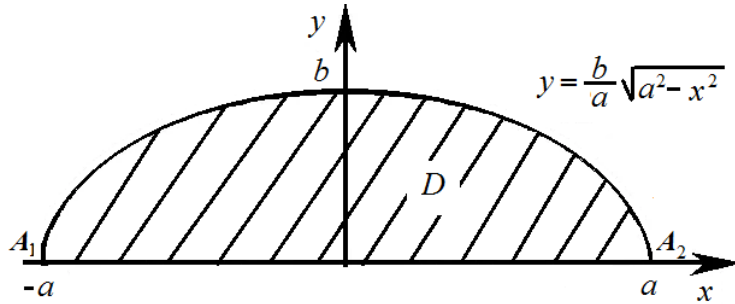


Рис. 27

В силу симметрии эллипса относительно оси Oy и однородности пластинки $x_{\text{цт}} = 0$. По формуле (4.15)

$$\begin{aligned} y_{\text{цт}} &= \frac{\iint_D y ds}{S_D} = \frac{\iint_D y dx dy}{\frac{S_{\text{элл}}}{2}} = \frac{\int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} y dy}{\frac{\pi ab}{2}} = \frac{2}{\pi ab} \int_{-a}^a \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= \frac{2b}{\pi a^3} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2b}{\pi a^3} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{3\pi} b. \end{aligned}$$

Следовательно, $x_{\text{цт}} = 0$, $y_{\text{цт}} = \frac{4}{3\pi} b$.

Замечание. Отметим, что ответ для $y_{\text{цт}}$ зависит только от b и не зависит от a . Это понятно, если считать, что эллипс можно получить как бы растягивая резиновый круг за точки A_1 и A_2 по горизонтали, кроме того, очевидно, что

$y_{\text{цт}} < \frac{b}{2}$, действительно $\frac{4}{3\pi} \approx 0,4$.

Пример 11. Найти момент инерции круга радиуса $R=1$ относительно центра с плотностью $\mu(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

По формуле (4.17) $I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$.

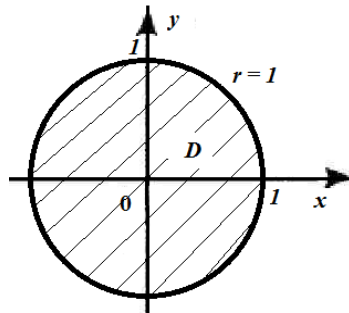


Рис. 28

Перейдем к полярной системе координат (рис. 28), уравнение окружности радиуса единица $r=1$, а при переходе к полярной системе координат $x^2 + y^2 = r^2$.

$$I_0 = \iint_D r^2 (1-r) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3 - r^4) dr = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{10}.$$

§7. Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, где сама функция и её частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в области D , такие поверхности называются гладкими. Воспользуемся дифференциальным методом. Возьмем кусок поверхности $\Delta\sigma$ (рис. 29), проведем касательную плоскость в точке $M(x, y, f(x, y))$, из уравнения этой плоскости (3.9) (стр. 11) для вектора нормали $\vec{n} = \left\{ -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right\}$ направляющий косинус с вертикальной

осью $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}}.$

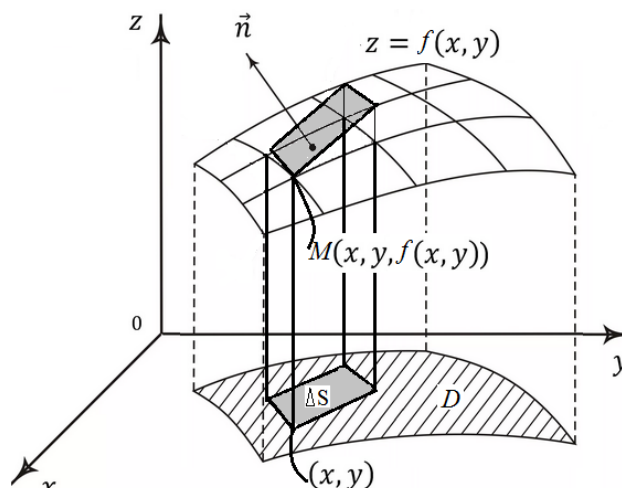


Рис. 29

Так как $\bar{n}$ перпендикулярно касательной плоскости, а ось Oz – плоскости xOy , то если спроектировать кусочек касательной плоскости на горизонтальную плоскость, между ними будет тот же угол γ , поэтому $\Delta\sigma \cos \gamma \approx \Delta s$ и

$$\Delta\sigma \approx \frac{\Delta s}{\cos \gamma} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} ds.$$

Переходя к двойному интегралу по области D , получим, что площадь поверхности

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} ds. \quad (4.18)$$

Замечание. Формула (4.18) обобщает формулу (2.12а) [1] для дуги плоской кривой.

Пример 12. Найти площадь поверхности сферы радиуса R .

Разрешим уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ относительно z . Для верхней половины сферы нужно извлечь квадратный корень и взять его со знаком плюс: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

По формуле (4.18) (естественно, для всей сферы ответ нужно удвоить)

$$\begin{aligned} S_{c\phi} &= 2 \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy = 2 \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy = \\ &= 2R \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \end{aligned}$$

где область D — проекция сферы на горизонтальную плоскость xOy , а это есть круг радиуса R с центром в начале координат (рис. 30).

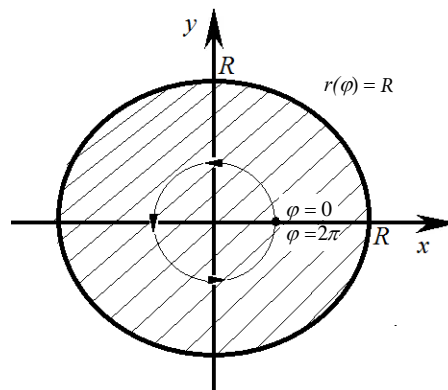


Рис. 30

В этом случае выгодно перейти к полярной системе координат, что дает

$$\begin{aligned} S_{c\phi} &= 2R \iint_D \frac{rdrd\phi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{2rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R \cdot \phi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R \frac{d(r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -2\pi R \int_0^R \frac{d(R^2 - r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\ &= -4\pi R \sqrt{R^2 - r^2} \Big|_0^R = -4\pi R(0 - R) = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Замечание. Если взять производную от объема шара радиуса R

$$(V_{\text{шара}})' = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)' = \frac{4}{3} \pi \cdot 3R^2 = 4\pi R^2 = S_{\text{сф}}. \text{ Понятно, что это не случайно, про-}$$

верьте аналогичный факт для площади круга и длины окружности радиуса R .

Этот удивительный по красоте факт можно обосновать из определения производной. Представьте, что мы покроем сферу тонким слоем краски толщиной ΔR , тогда приращение объема шара $\Delta V_{\text{шара}} \approx S_{\text{сферы}} \cdot \Delta R$, то есть

$$S_{\text{сферы}} \approx \frac{\Delta V_{\text{шара}}}{\Delta R} \text{ и ответ для } S_{\text{сферы}} \text{ будет тем точнее, чем тоньше слой краски.}$$

Поэтому, переходя к пределу, мы получим точный ответ:

$$S_{\text{сферы}} = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{\text{шара}}}{\Delta R} = V'_{\text{шара}}.$$

ГЛАВА 5. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Криволинейный интеграл первого рода, его свойства и вычисление

В предыдущей главе мы рассмотрели обобщение интеграла Римана $\int_a^b f(x)dx$ от функции одной переменной к интегралу от функции двух переменных по некоторой плоской области D , то есть перешли от одномерного интеграла к двумерному (в следующей главе мы рассмотрим и тройные интегралы). В этой главе мы рассмотрим обобщение интеграла Римана, когда интегрирование будет вестись не по отрезку $[a, b]$, а по некоторой кривой L или, как говорят — по дуге $\cup AB$. Подынтегральную функцию $f(x, y)$ надо будет брать от двух переменных. Но прежде чем давать новое определение $\int_L f(x, y)dl$, (мы еще будем определять тройные и поверхностные интегралы, а есть еще интегралы Стильтьеса и Лебега, n -мерные и так далее), полезно понять, как строится любой классический определенный интеграл:

1) Задается некоторое замкнутое множество D , по которому берется интеграл, и подынтегральная функция $f(M)$, непрерывная во всех точках $M \in D$.

2) Множество точек M разбивается на n произвольных частей $D_1, D_2, \dots, D_n$. Обозначим через $\mu(D_k)$ — длину части D_k , в одномерном случае; площадь или объём соответственно для двух или трехмерного пространства. Эта величина часто называется мерой множества D_k .

3) В каждой части выбирается произвольно точка $M_k \in D_k$, $k = 1, \dots, n$ и составляется интегральная сумма $\sum_{k=1}^n f(M_k)\mu(D_k)$.

4) Далее переходим к пределу, когда $n \rightarrow \infty$ и все $\mu(D_k) \rightarrow 0$. Назовем диаметром ограниченной фигуры максимально возможное расстояние между двумя точками этой фигуры (например, для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ диаметр $d = 2a$, то есть будет большая ось). Пусть диаметры разбиений $d_k \rightarrow 0$, тогда любой определенный интеграл

$$\iint_D f(M) d\mu = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(M_k)\mu(D_k). \quad (5.1)$$

есть предел интегральных сумм, когда число разбиений стремится к бесконечности, а максимальные диаметры разбиений стремятся к нулю.

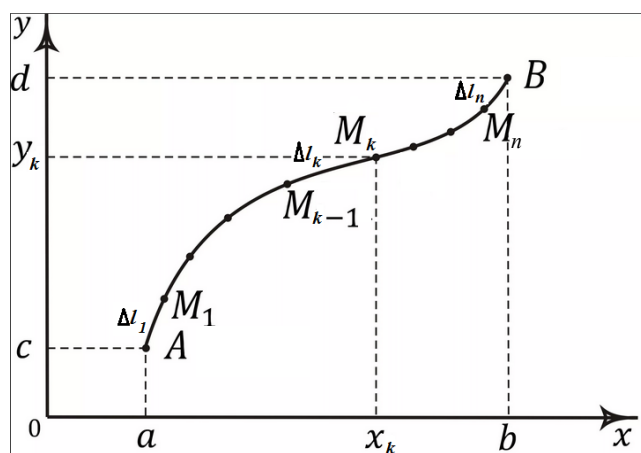


Рис. 31

В частности, для множества D — кривой L (рис. 31)

$$\int_L f(x, y) dl = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta l_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta l_k, \quad (5.2)$$

так как интеграл одномерный, то словесное определение слово в слово совпадает с определением интеграла Римана $\int_a^b f(x) dx$. Но так как функция $f(x, y)$ на

L зависит от двух переменных, то есть и отличие: она должна быть непрерывна в некоторой двумерной области $D_2 \supset L$, содержащей L . Мы еще будем предполагать, что кривая L будет гладкой или кусочно-гладкой. При этих условиях криволинейный интеграл второго рода существует, то есть предел (5.2) имеет конечный ответ и не зависит ни от способа разбиения кривой L на части, ни от выбора точек в каждой части.

Так как определение и, конечно, свойства предела одни и те же, то можно по аналогии сформулировать основные **свойства криволинейного интеграла первого рода**:

- 1) $\int_L c f(x, y) dl = c \cdot \int_L f(x, y) dl$;
 - 2) $\int_L (f_1(x, y) + f_2(x, y)) dl = \int_L f_1(x, y) dl + \int_L f_2(x, y) dl$;
 - 3) $\int_L f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl$,
- (5.3)

где $L = L_1 \cup L_2$ (рис. 32); может быть, что $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m$, тогда

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl + \dots + \int_{L_m} f(x, y) dl.$$

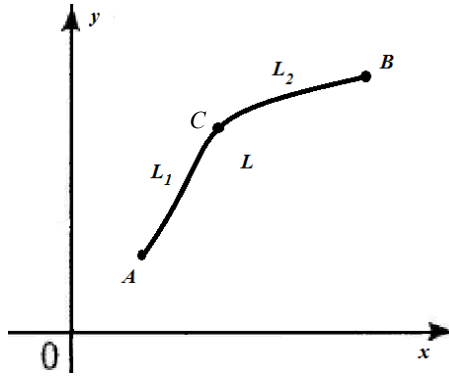


Рис. 32

Эти свойства непосредственно вытекают из линейных свойств предела, и только для доказательства третьего свойства разбивать дугу каждый раз нужно так, чтобы при увеличении количества разбиений $n \rightarrow \infty$ точка C (на границе L_1 и L_2) всегда попадала на границу соответствующих разбиений.

Для вычисления криволинейных интегралов первого рода естественно выразить подынтегральную функцию с помощью уравнения кривой L через ту одну переменную, с помощью которой L задана и воспользоваться нужной формулой для dl (которые были выведены ранее), и в результате свести вычисления к интегралу Римана.

1. Пусть L задана в декартовой системе координат

а) $L: y = y(x), x_1 \leq x \leq x_2$, тогда

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (5.4)$$

б) $L: x = x(y), y_1 \leq y \leq y_2$, тогда

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{y_1}^{y_2} f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (5.5)$$

2. Пусть L задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t_1 \leq t \leq t_2$, тогда

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (5.6)$$

Замечание. С помощью параметрического задания кривой L можно интегрировать функцию от трех переменных в пространстве,

а именно для $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2, \\ z = z(t), \end{cases}$

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (5.7)$$

3. Пусть L задана в полярной системе координат: $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Тогда

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (5.8)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_L \frac{dl}{x + 4y + 13}$, где L : ломаная ABC с вершинами $A(0; -3)$, $B(4; 0)$, $C(4; 4)$.

Решение. Нарисуем путь интегрирования (рис. 33) и найдем уравнения отрезков.

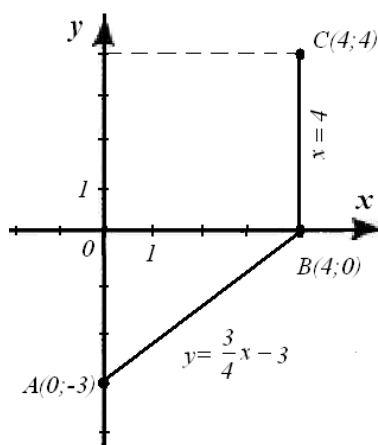


Рис. 33

Угловой коэффициент прямой AB равен $k_{AB} = \frac{3}{4}$, $b = -3$, $y = \frac{3}{4}x - 3$, $0 \leq x \leq 4$; $y' = \frac{3}{4}$. Уравнение BC : $x = 4$, $0 \leq y \leq 4$. По формуле (5.3) получим

$$\begin{aligned} \int_{ABC} \frac{dl}{x + 4y + 13} &= \int_{AB} \frac{dl}{x + 4y + 13} + \int_{BC} \frac{dl}{x + 4y + 13} = \int_0^4 \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} dx}{x + 4 \cdot \frac{3}{4}x - 3 \cdot 4 + 13} + \int_0^4 \frac{dy}{4 + 4y + 13} = \\ &= \frac{5}{4} \int_0^4 \frac{dx}{4x + 1} + \int_0^4 \frac{dy}{4y + 17} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} \int_0^4 \frac{d(4x + 1)}{4x + 1} + \frac{1}{4} \int_0^4 \frac{d(4y + 17)}{4y + 17} = \frac{5}{16} \ln(4x + 1) \Big|_0^4 + \\ &+ \frac{1}{4} \ln(4y + 17) \Big|_0^4 = \frac{5}{16} (\ln 17 - \ln 1) + \frac{1}{4} (\ln 33 - \ln 17) = \frac{1}{16} \ln 17 + \frac{1}{4} \ln 33. \end{aligned}$$

Замечание. Отметим, что для отрезка прямой AB $\frac{dl}{dx} = \frac{AB}{OB} = \frac{\sqrt{9+16}}{4} = \frac{5}{4}$,

то есть $dl = \frac{5}{4}dx$. Геометрический смысл $\sqrt{1+(y'(x))^2}$ показывает, во сколько раз длина dl больше длины dx в окрестности точки x (для кривых это число в каждой точке своё); для второго интеграла очевидно, что по вертикальному отрезку мы можем интегрировать только по y (но и формально $dl = \sqrt{1+(x'(y))^2}dy = \sqrt{1+(4')^2}dy = dy$).

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_L (x^4 + y^4 + 2z + 1,25)dl$, где L – первый

ВИТОК ВИНТОВОЙ ЛИНИИ
$$\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin 2t, \\ z = \sqrt{5}t. \end{cases}$$

Решение. Так как основной период $\sin 2t, \cos 2t$ $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, то $0 \leq t \leq \pi$.

По формуле (5.7)
$$\int_L (x^4 + y^4 + 2z + 1,25)dl = \int_0^\pi (\cos^4 2t + \sin^4 2t + 2\sqrt{5}t + 1,25) \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sqrt{[(\cos 2t)']^2 + [(\sin 2t)']^2 + [(\sqrt{5}t)']^2} dt = \int_0^\pi ((\cos^2 2t + \sin^2 2t)^2 - 2\sin^2 2t \cos^2 2t + \\ & + 2\sqrt{5}t + 1,25) \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t + 5} dt = \int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin^2 4t}{2} + 2\sqrt{5}t + 1,25\right) \sqrt{9} dt = \\ & = 3 \int_0^\pi \left(2,25 - \frac{1 - \cos 8t}{4} + 2\sqrt{5}t\right) dt = \left| \text{интеграл от } \cos 8t \text{ по длине периода равен} \right. \\ & \left. \text{нулю} \right| = 3 \int_0^\pi (2\sqrt{5}t + 2) dt = 3 \left(\sqrt{5}t^2 + 2t \right) \Big|_0^\pi = 3(\pi^2 \sqrt{5} + 2\pi). \end{aligned}$$

§2. Приложения криволинейного интеграла первого рода

I. Вычисление длины дуги l кривой L :

$$l = \int_L dl. \quad (5.9)$$

Пример 3. Вычислить длину дуги кардиоиды $r = 1 + \cos \varphi$.

Решение. Чтобы обежать замкнутую кривую вокруг начала координат (рис. 34), надо сделать полный оборот, то есть $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, но так как $\cos \varphi$ –

четная функция и, следовательно, ось Ox является осью симметрии кривой, то можно взять $0 \leq \varphi \leq \pi$ и ответ умножить на два.

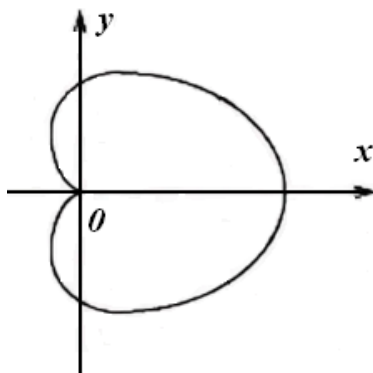


Рис. 34

По формуле (5.8)

$$\begin{aligned}
 l &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + (-\sin \varphi)^2} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi = \\
 &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} 2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 8 \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \\
 &= 8 \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 8.
 \end{aligned}$$

II. Приложения криволинейного интеграла первого рода в механике.

Пусть в каждой точке $M(x, y) \in L$ на дуге L известна плотность $\mu(x, y)$. Тогда, аналогично приложениям двойного интеграла в механике (стр. 38-39) можно вывести формулы для дуги L , нужно только заменить везде знак двойного интеграла $\iint_D$ на знак криволинейного $\int_L$, а дифференциал площади ds на дифференциал дуги dl . В результате получим:

1. Масса пластинки L

$$m = \int_L \mu(x, y) dl. \quad (5.10)$$

2. Статические моменты

$$S_x = \int_L y \mu(x, y) dl, \quad S_y = \int_L x \mu(x, y) dl, \quad (5.11)$$

3. Координаты центра тяжести

$$x_{\text{цт}} = \frac{\int_L x \mu(x, y) dl}{\int_L \mu(x, y) dl}, \quad y_{\text{цт}} = \frac{\int_L y \mu(x, y) dl}{\int_L \mu(x, y) dl}. \quad (5.12)$$

В частности, для однородной нити ($\mu(x, y) = \mu = \text{const}$)

$$x_{\text{цт}} = \frac{\int_L x dl}{l}, \quad y_{\text{цт}} = \frac{\int_L y dl}{l}, \quad (5.13)$$

где l – длина нити.

4. Моменты инерции относительно осей координат

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x, y) dl, \quad I_y = \int_L x^2 \mu(x, y) dl, \quad (5.14)$$

и относительно начала координат

$$I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \mu(x, y) dl. \quad (5.15)$$

Замечание. Можно рассматривать нить и в пространстве (конечно, в этом случае плотность $\mu(x, y, z)$ будет зависеть от трех пространственных координат), а кривую L мы будем задавать параметрически (формула (5.7)), при этом в некоторых формулах, (например, для моментов инерции) добавится по квадрату соответствующей переменной).

Пример 4. Найти момент инерции однородной кривой $y = \ln x$, ($\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$) относительно оси Oy .

Решение. Если плотность не оговорена, то принимают $\mu(x, y) = 1$.

По формуле (5.14)

$$\begin{aligned} I_y &= \int_L x^2 \cdot \sqrt{1 + \left[(\ln x)' \right]^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + x^2} x dx = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d(x^2 + 1) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = \frac{1}{3} \left[(\sqrt{9})^3 - (\sqrt{4})^3 \right] = 6 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

§3. Криволинейный интеграл второго рода, его физический смысл, свойства, вычисление

В пункте 2.9 [1] мы рассматривали работу переменной силы $F(x)$ на отрезке при условии, что сила $F(x)$ лежит на прямой, порожденной этим отрезком (формула 2.21) [1]. Сейчас мы сможем решить задачу о вычислении работы произвольной непрерывной силы $\vec{F}(x) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ при движении под действием этой силы вдоль любой кривой L (рис. 35). Воспользуемся дифференциальным методом. Возьмем точку $M(x, y) \in L$ и найдем элементарную работу ΔA вектора силы $\vec{F}(x)$ на $\cup MN$, заменив её на вектор $\overline{MN} = \overline{\Delta l} = \{\Delta x, \Delta y\}$.

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \overline{MN} = P(x, y)\Delta x + Q(x, y)\Delta y.$$

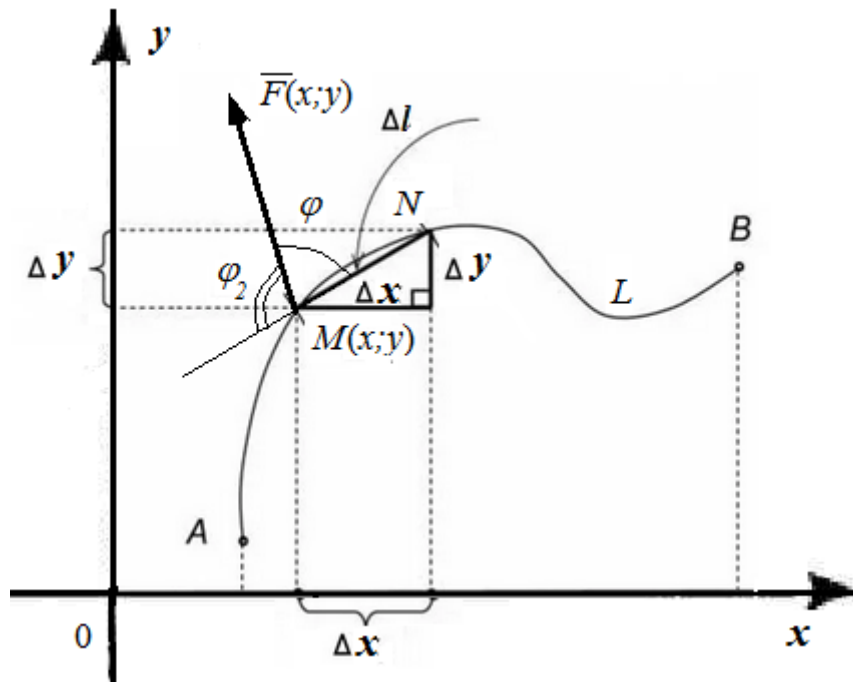


Рис. 35

Переходя к интегралу, получим

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L \vec{F}d\vec{l}. \quad (5.16)$$

Физический смысл криволинейного интеграла второго рода – работа силы $\vec{F}$ на пути L .

Свойства криволинейного интеграла второго рода

1. $\int_L c\vec{F}d\vec{l} = c \cdot \int_L \vec{F}d\vec{l}$ (работа пропорциональна силе),
2. $\int_L (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)d\vec{l} = \int_L \vec{F}_1d\vec{l} + \int_L \vec{F}_2d\vec{l}$ (работа двух сил равна сумме работ),
3. $\int_L \vec{F}d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{F}d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{F}d\vec{l}$, ($L = L_1 \cup L_2$) (работа на всем пути равна сумме работ на каждой части пути),

$$\int_{\cup AB} \vec{F}d\vec{l} = - \int_{\cup BA} \vec{F}d\vec{l}. \quad (5.17)$$

(При смене направления обхода работа (и интеграл) меняют знак).

Замечание. Если $\angle \varphi$ между $\vec{F}$ и $d\vec{l}$ острый (по дуге $\cup AB$, рис. 35), то материальная точка M при движении по дуге $\cup AB$ ускоряется и работа поло-

жительна, при движении в противоположном направлении по $\cup BA$ угол $\varphi_2 = \pi - \varphi$ – тупой (соответственно $\cos \varphi_2 = \cos(\pi - \varphi) < 0$) и точка M замедляется, и работа считается отрицательной. Кстати, если в обычном интеграле поменять пределы интегрирования местами, то из формулы Ньютона-Лейбница

следует, что $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Но если в интеграле Римана и в криволинейном интеграле первого рода всегда берут $a < b$, то в криволинейном интеграле по пути L (или $\cup AB$) стрелкой показывают направление обхода и в соответствии с этим расставляют пределы интегрирования (то есть при переходе, например, к переменной x b может быть меньше a , или если как обычно $a < b$, по формуле (5.17) перед интегралом ставится знак минус).

При вычислении криволинейного интеграла второго рода мы выражаем все под знаком интеграла через ту переменную, с помощью которой задано уравнение кривой L , и в результате получим (с учетом направления обхода, где может быть $b < a$) интеграл Римана.

Возможно три случая задания кривой L :

- 1) $L: y = y(x)$, где x меняется от x_1 до x_2 , тогда

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_1}^{x_2} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)] dx; \quad (5.18)$$

- 2) $L: x = x(y)$, где y меняется от y_1 до y_2 , тогда

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{y_1}^{y_2} [P(x(y), y) \cdot x'(y) + Q(x(y), y)] dy; \quad (5.19)$$

- 3) $L: x = x(t), y = y(t)$, где t меняется от t_1 до t_2 , тогда

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt. \quad (5.20 \text{ а})$$

На практике нужно просто подставить в подынтегральное выражение неизвестных через ту одну неизвестную, которая используется для задания L , а в теории мы пользуемся формулой для дифференциала, например, $d(x(t)) = x'(t)dt$.

Замечание. С помощью параметрического задания кривой L легко обобщить формулу (5.20а) на случай пространства, как известно, для скалярного произведения $\vec{F}d\vec{l}$ добавится еще одно слагаемое и, естественно, координатные функции для силы $\vec{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ будут тоже зависеть от трех переменных:

$$\int_L \bar{F} d\bar{l} = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)] dt. \quad (5.20 \text{ б})$$

Пример 5. Вычислить $\int_L x(y - x^2) dx + x^2 y dy$, где путь L

1) отрезок AB , где $A(2, 4)$, $B(1, 1)$; 2) $\cup AB$ – часть параболы $y = x^2$.

Решение. Построим пути L_1 и L_2 (рис. 36) с учетом направления обхода (стрелки):

1) L_1 : уравнение AB : $\frac{y-1}{4-1} = \frac{x-1}{2-1}$, $y = 3x - 2$, (x убывает от 2 до 1),

$$\int_{L_1} x(y - x^2) dx + x^2 y dy = \int_2^1 x(3x - 2 - x^2) dx + x^2(3x - 2) d(3x - 2) = - \int_1^2 (8x^3 - 3x^2 - 2x) dx = - \left(2x^4 - x^3 - x^2 \right) \Big|_1^2 = - [(32 - 8 - 4) - (2 - 1 - 1)] = -20.$$

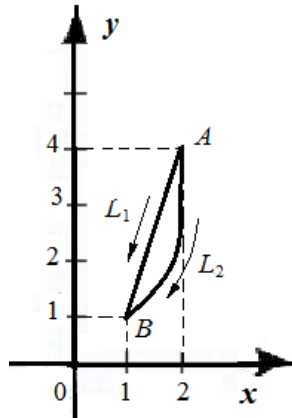


Рис. 36

2) L_2 : $y = x^2$ (x убывает от 2 до 1),

$$\begin{aligned} \int_{L_2} x(y - x^2) dx + x^2 y dy &= \int_2^1 x(x^2 - x^2) dx + x^2 \cdot x^2 d(x^2) = \int_2^1 x^4 \cdot 2x dx = 2 \int_2^1 x^5 dx = 2 \frac{x^6}{6} \Big|_2^1 = \\ &= \frac{1}{3} [1 - 64] = -\frac{63}{3} = -21. \end{aligned}$$

Замечание. Отметим, что в данном силовом поле $F(x, y) = \{xy - x^3, x^2 y\}$ движение материальной точки от $A(2, 4)$ до $B(1, 1)$ по разным траекториям L_1 и L_2 даёт разные ответы (в нашем случае торможение по дуге параболы больше, чем по отрезку прямой).

Пример 2. Вычислить $\int_{\cup AB} yzdx - xzdy + (2x + 3y - z)dz$ по одному витку

винтовой линии $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 2t \end{cases}$ от точки $A(1, 0, 4\pi)$ до точки $B(1, 0, 0)$.

Решение. Найдем значение параметра t для точек A и B :

а) $\begin{cases} \cos t = 1, \\ \sin t = 0, \\ 2t = 4\pi. \end{cases}$ Из последнего уравнения $t_1 = 2\pi$, как известно $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$.

б) Для точки $B(1, 0, 0)$ $\begin{cases} \cos t = 1, \\ \sin t = 0, \\ 2t = 0, \end{cases}$ очевидное решение $t_2 = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{\cup AB} yzdx - xzdy + (2x + 3y - z)dz &= \int_{2\pi}^0 [\sin t \cdot 2t \cdot d(\cos t) - \cos t \cdot 2t \cdot d(\sin t) + (2\cos t + \\ &+ 3\sin t - 2t)d(2t)] = - \int_0^{2\pi} [2t \cdot \sin t \cdot (-\sin t) - 2t \cdot \cos t \cdot \cos t + 4\cos t + 6\sin t - 4t]dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [2t(\sin^2 t + \cos^2 t) - 4\cos t - 6\sin t + 4t]dt = \int_0^{2\pi} 6tdt = 3t^2 \Big|_0^{2\pi} = 12\pi^2 \quad (\text{интегралы} \\ &\text{от } \sin t, \cos t \text{ по длине периода равны нулю!}). \end{aligned}$$

§4. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру.

Формула Грина

Если криволинейный интеграл второго рода берется по замкнутому контуру, то рисуют знак интеграла с кружочком: $\oint_L Pdx + Qdy$, а стрелка на кружочке показывает направление обхода. Оказалось, что интеграл можно выразить через двойной интеграл по области D , ограниченной этим контуром по формуле Грина

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (5.21)$$

где контур обходится в положительном направлении (против часовой стрелки).

Для существования интегралов естественно предположение о непрерывности входящих в эту формулу функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ в области D .

Доказательство. Мы рассмотрим случай, когда область D правильная и по x , и по y . Пусть её левая граница $x_1(y)$, правая $x_2(y)$. При этом $y \in [y_1, y_2]$ (рис. 37).

Тогда

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_{y_1}^{y_2} Q(x, y) \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy = \int_{y_1}^{y_2} [Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)] dy = \\ &= \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2(y), y) dy + \int_{y_2}^{y_1} Q(x_1(y), y) dy = \int_{\cup AMB} Q(x, y) dy + \int_{\cup BNA} Q(x, y) dy = \oint_L Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

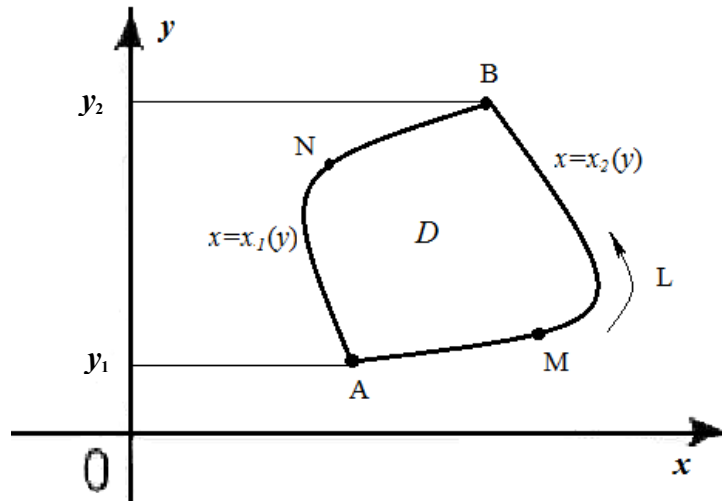


Рис. 37

Аналогично можно показать, что $\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_L P(x, y) dx$.

В силу линейного свойства и криволинейного и двойного интегралов вытекает формула Грина (5.21) для такой выпуклой области D .

Замечание. Для произвольной области её можно разрезать на конечное число n правильных подобластей, тогда $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n \iint_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy; \text{ в то же время можно показать, что } \oint_L P(x, y) dx + \\ &+ Q(x, y) dy = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \end{aligned}$$

(у последних внутренние линии будут проходить по два раза, но в противоположных направлениях и уничтожаться, поэтому останется только интеграл по внешнему контуру L). Следовательно, формула Грина справедлива для произвольной области D .

§5. Криволинейные интегралы второго рода, не зависящие от пути интегрирования. Восстановление функции по её полному дифференциалу

Определение. Криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, если для любых путей, соединяющих точки A и B (рис. 38)

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy. \quad (5.22)$$

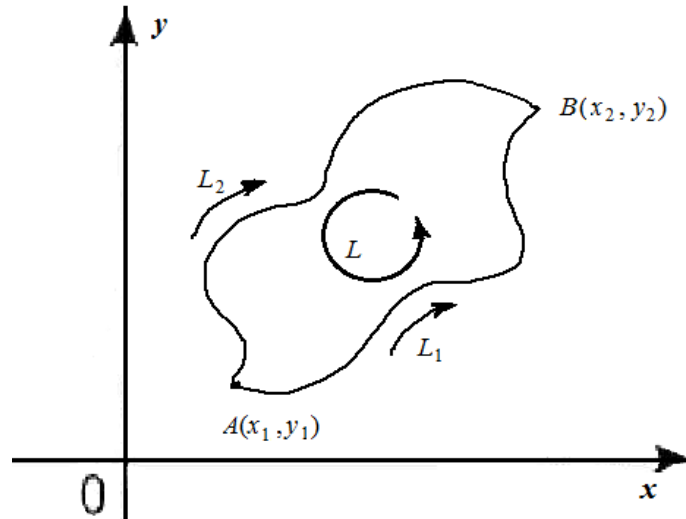


Рис. 38

В этом случае обозначают $\int_{A(x_1, y_1)}^{B(x_2, y_2)} Pdx + Qdy$.

I. Это будет тогда и только тогда, когда

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0. \quad (5.23)$$

Для доказательства (мы ограничимся случаем не самопересекающегося контура L) достаточно отметить, что $\oint_L Pdx + Qdy = \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy$ (так как мы L и L_2 направили навстречу друг другу, то по свойству 4 (формула (5.17)) интеграл по L_2 надо взять со знаком минус).

II. Покажем, что интеграл по замкнутому контуру равен нулю тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (5.24)$$

1) Пусть выполнено условие (5.24). Тогда в правой части формулы Грина (5.21) подынтегральная функция $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$ и $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, и из (5.24) следует (5.23).

2) Пусть интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю: $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Предположим от противного, что в некоторой точке

$M_0(x_0, y_0) \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_{M_0(x_0, y_0)} \neq 0$, без ущерба общности можно считать, что эта

разность положительна. В силу непрерывности функции $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ можно брать такую малую ε – окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, что в ней $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$.

Тогда объем $V = \iint_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy > 0$ и в силу формулы Грина (5.21) и по контуру, ограничивающего область D_ε тоже положителен $\oint_{L_\varepsilon} Pdx + Qdy > 0$. Полученное противоречие с условием (5.23) говорит о том, что наше предположение неверно, и должно выполняться равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$, откуда следует (5.24).

III. Проверим, что условие (5.24) выполнено для полного дифференциала $dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$. В этом случае $P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$;

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. Так как смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования, то для таких функций dU интегралы от них не зависят в силу I-III от пути интегрирования. Можно показать, что верно и обратное: если $\int_L Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования, то выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом dU некоторой функции $U(x, y)$.

Следствие. Для интегралов, не зависящих от пути интегрирования

$$\int_{A(x_1, y_1)}^{B(x_2, y_2)} Pdx + Qdy = \int_{A(x_1, y_1)}^{B(x_2, y_2)} dU = U(x, y) \Big|_{A(x_1, y_1)}^{B(x_2, y_2)} = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1). \quad (5.25)$$

Формула (5.25) является обобщением формулы Ньютона-Лейбница для таких криволинейных интегралов. Функцию $U(x, y)$ называют **потенциалом** силово-

го поля $\bar{F}(x) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$, и в силу физического смысла криволинейного интеграла второго рода следует, что у полей, для которых выполнено просто проверяемое условие (5.24), работа равна разности потенциалов.

Пример 3. Для интеграла $\int_{A(1,0)}^{B(e,2)} \frac{y^2}{x} dx + 2y \cdot \ln x dy$ а) проверить, что он не зависит от пути; б) вычислить его, выбрав простейший путь интегрирования.

Решение.

а) $P(x, y) = \frac{y^2}{x}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2}{x} \right) = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial y} (y^2) = \frac{2y}{x}$. $Q(x, y) = 2y \ln x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2y \ln x) = 2y \frac{\partial}{\partial x} (\ln x) = \frac{2y}{x}$. Так как выполнено условие (5.24) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то данный интеграл не зависит от пути интегрирования.

б) Выгоднее всего выбирать путь из отрезков, параллельных осям координат (рис. 39).

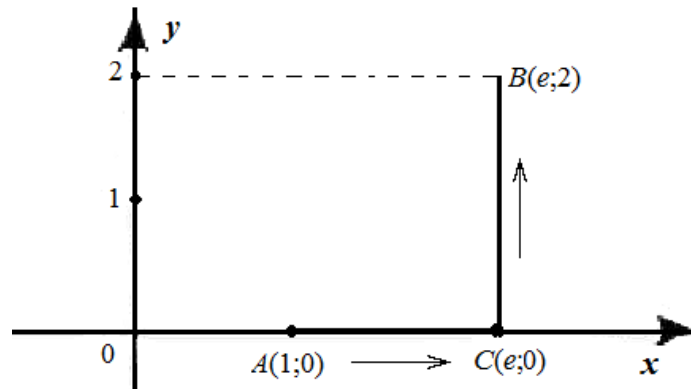


Рис. 39

Возьмем еще $C(e, 0)$ и разобьем интеграл на сумму

$$\int_{A(1,0)}^{B(e,2)} \frac{y^2}{x} dx + 2y \cdot \ln x dy = \int_{A(1,0)}^{C(e,0)} \frac{y^2}{x} dx + 2y \cdot \ln x dy + \int_{C(e,0)}^{B(e,2)} \frac{y^2}{x} dx + 2y \cdot \ln x dy. \quad \text{Отметим,}$$

что всегда при интегрировании по оси Ox или отрезку ей параллельному $dy = 0$ и в первом интеграле остается только первое слагаемое; аналогично во втором интеграле, при интегрировании параллельно оси Oy , остается только слагаемое с dy , кроме того, другая переменная является константой, что резко упрощает взятие интегралов. В нашем случае $AC: y = 0, (1 \leq x \leq e)$; $CB: x = e (0 \leq y \leq 2)$.

$$\int_{A(1,0)}^{B(e,2)} \frac{y^2}{x} dx + 2y \cdot \ln x dy = \int_1^e \frac{0^2}{x} dx + \int_0^2 2y \cdot \ln e dy = y^2 \Big|_0^2 = 4.$$

Восстановление функции по её полному дифференциалу

Пусть выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом (чтобы в этом убедиться, легко проверить выполнение равенства (5.24)). Тогда по формуле (5.25) с переменным верхним пределом точкой $M(x, y)$, найдем

$$\int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = U(x, y) - U(x_0, y_0). \quad (5.26)$$

Как уже отмечалось, выгодно двигаться от точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x, y)$ параллельно осям координат (естественно, соблюдая условие, чтобы в первоначальной точке $M_0(x_0, y_0)$ и на всем пути интегрирования функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ существовали и были непрерывны); если повезет и $P(0, 0)$, $Q(0, 0)$ существуют, то проще всего выбрать в качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ начало координат.

Пример 4. Проверить, что выражение $(ye^{xy} + \cos x)dx + (xe^{xy} + \frac{1}{1+y^2})dy$ является полным дифференциалом и найти потенциал $U(x, y)$.

Решение. 1) Найдем частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} + \cos x) = 1 \cdot e^{xy} + y \cdot e^{xy} \cdot x = e^{xy}(xy + 1);$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy} + \frac{1}{1+y^2}\right) = 1 \cdot e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot y = e^{xy}(xy + 1).$$

Так как $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то данное выражение есть полный дифференциал.

2) Взяв в качестве начальной точки $O(0, 0)$ по формуле (5.26) найдем

$$U(x, y) = \int_{O(0,0)}^{M(x,y)} (ye^{xy} + \cos x)dx + (xe^{xy} + \frac{1}{1+y^2})dy. \text{ Выберем путь сначала по оси } OX$$

от 0 до x , а затем по вертикали при фиксированном x от 0 до y (рис. 40), получим

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{O(0,0)}^{N(x,0)} \left(ye^{xy} \Big|_{y=0} + \cos x \right) dx + \int_{N(x,0)}^{M(x,y)} \left(xe^{xy} + \frac{1}{1+y^2} \right) dy = \int_0^x \cos x dx + \int_0^y e^{xy} x dy + \\ &+ \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \sin x \Big|_0^x + \int_0^y e^{xy} d(xy) + \operatorname{arctg} y \Big|_0^y = \sin x - \sin 0 + e^{xy} \Big|_0^y + \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} 0 = \\ &= \sin x + e^{xy} - e^0 + \operatorname{arctg} y = e^{xy} + \sin x + \operatorname{arctg} y - 1. \end{aligned}$$

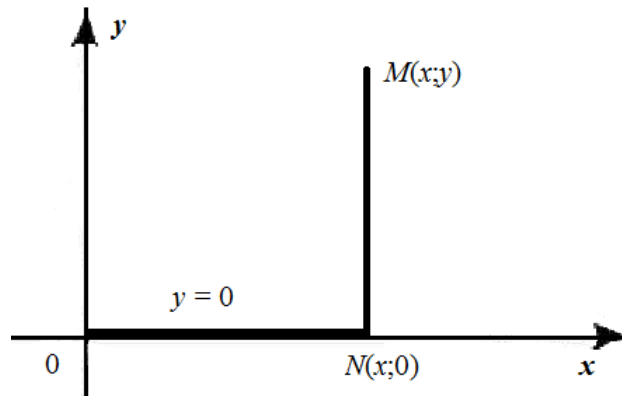


Рис. 40

Сделаем проверку: $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^{xy} + \sin x + \arctg y - 1) = ye^{xy} + \cos x = P(x,y),$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^{xy} + \sin x + \arctg y - 1) = xe^{xy} + \frac{1}{1+y^2} = Q(x,y). \text{ Верно.}$$

Отметим, что в ответе -1 можно отбросить, так как $U(x,y)$ находится с точностью до константы в зависимости от начальной точки $M_0(x_0, y_0)$.

Замечание. В случае выбора пути, как на рис. 40, можно написать общую формулу для нахождения потенциала $U(x,y) = \int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy$; если же сначала выгоднее было бы двигаться по оси Oy (например, слагаемое при интегрировании по y при $x=0$ обнулится), то получится аналогичная формула

$U(x,y) = \int_0^y Q(0,y)dy + \int_0^x P(x,y)dy$, ответ не изменится, так как интеграл не зависит от пути интегрирования.

§6. Приложения криволинейного интеграла второго рода

I. Одно из них мы только что рассмотрели. Если решать дифференциальное уравнение в полных дифференциалах $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU = 0$, то его решением будет $U(x,y) = C$; например, если решить уравнение

$$(ye^{xy} + \cos x)dx + \left(xe^{xy} + \frac{1}{1+y^2}\right)dy = 0, \text{ то (см. пример 4) его решением будет}$$

$e^{xy} + \sin x + \arctg y = C$. Более того, можно обобщить этот метод на полный дифференциал $U(x,y,z)$ функции трех переменных:

$$dU(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

В силу равноправия независимых переменных x, y, z (например, если переставить слагаемые местами), кроме условия (5.24) добавятся еще два равенства для частных производных (будто «крест-накрест»):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (5.27)$$

В силу независимости криволинейного интеграла в пространстве $\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ от пути интегрирования, если функции $P(0, 0, 0)$, $Q(0, 0, 0)$, $R(0, 0, 0)$ существуют и сначала интегрировать по x , затем по y , и, наконец, по z , то

$$U(x, y, z) = \int_0^x P(x, 0, 0)dx + \int_0^y Q(x, y, 0)dy + \int_0^z R(x, y, z)dz, \quad (5.28)$$

где при интегрировании по одной переменной другие будут константы.

II. Из физического смысла криволинейного интеграла второго рода, если задано векторное силовое поле на плоскости $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ (или в пространстве $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$), то работа силы $\vec{F}$ на пути L (с учетом направления обхода) $A = \int_L \vec{F} d\vec{l}$. В случае потенциального

силового поля, когда выполнено условие (5.24) (а в пространстве (5.27)), проще выбрать путь от начальной точки к конечной из отрезков, параллельных осям координат, или, если известен потенциал $U(x, y)$ ($U(x, y, z)$), то взять разность потенциалов.

III. С помощью криволинейного интеграла второго рода можно вычислять площади фигур, если известно уравнение границы L , по формуле

$$S = \frac{1}{2} \oint x dy - y dx. \quad (5.29)$$

Проверьте её с помощью формулы Грина (5.21).

Пример 5. Вычислить площадь эллипса.

Решение. Зададим эллипс параметрически $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$. Тогда по

формуле (5.29)

$$\begin{aligned} S_{\text{эллипса}} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t d(b \sin t) - b \sin t d(a \cos t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t \cdot b \cos t + b \sin t \cdot a \sin t] dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{ab}{2} t \Big|_0^{2\pi} = \frac{ab}{2} 2\pi = \pi ab. \end{aligned}$$

Сравните с решением примера 9 на странице 46 [1] с помощью интеграла Римана, когда интегрировалось только второе слагаемое в (5.29).

ГЛАВА 6. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Определение тройного интеграла, его свойства и вычисление

Пусть задана функция $U = f(x, y, z)$, непрерывная на некоторой замкнутой области Ω . Как уже отмечалось выше (см. стр. 45), область Ω разбивается на n произвольных частей, обозначим ΔV_k – объем k -ой части; затем в каждой части берут произвольным образом по точке $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и составляют интегральную сумму $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta V_k$, и, наконец, переходят к пределу

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta V_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta V_k. \quad (6.1)$$

Итак, **тройным интегралом** называется предел интегральных сумм, когда число разбиений n стремится к бесконечности, а максимальные объемы разбиений стремятся к нулю. Справедлива (как и в предшествующих случаях) **теорема**: если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на области Ω , то предел (6.1) существует и не зависит ни от способа разбиения области Ω на части, ни от выбора точек M_k в каждой части.

Отметим важные для вычисления стандартные для всех интегралов, **свойства тройного интеграла**:

- 1) $\iiint_{\Omega} cf(x, y, z) dV = c \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$;
- 2) $\iiint_{\Omega} (f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)) dV = \iiint_{\Omega} f_1(x, y, z) dV + \iiint_{\Omega} f_2(x, y, z) dV$;
- 3) $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dV$ ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$).

Последнее обобщается на конечное число слагаемых и используется для разбиения области на правильные подобласти.

Вычисление тройного интеграла. Основная идея сведения тройного интеграла к тоекратному та же, что и для двойного: объемная область Ω разрезается (во внутренних точках, не на границе) на прямоугольные параллелепипеды с гранями, параллельными координатным плоскостям (рис. 41), где $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$ и тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{n_i(i=1,2,3) \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

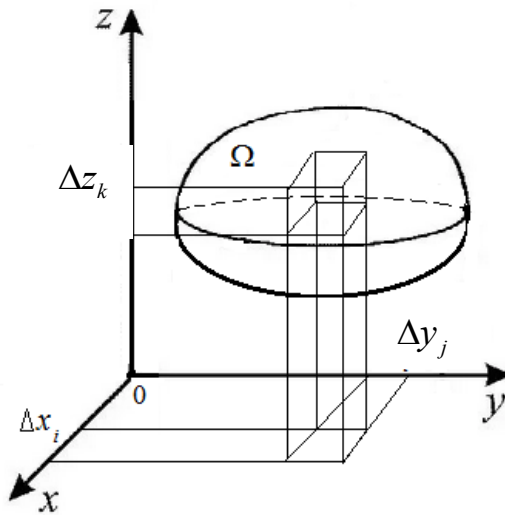


Рис. 41

Область Ω называется правильной по z , если вертикальные прямые (не на границе) пересекают верх и низ тела не более двух раз (рис. 42).

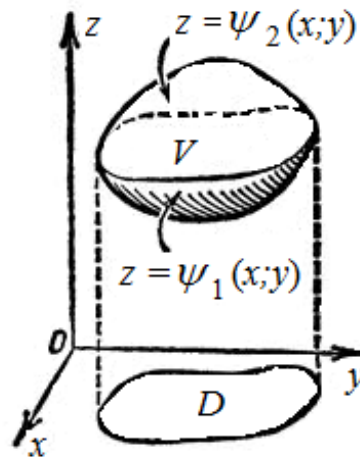


Рис. 42

Пусть низ тела задается формулой $z = \Psi_1(x, y)$, а верх — $z = \Psi_2(x, y)$, где точка $M(x, y) \in D$ — (D есть проекция тела Ω на горизонтальную плоскость xOy), тогда из чертежа (рис. 42) следует

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\Psi_1(x, y)}^{\Psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy,$$

при интегрировании внутреннего интеграла по z (по вертикали) естественно, что x, y будут константы. Кроме того, если область D на плоскости xOy тоже правильная по y , то после расстановки пределов интегрирования по y и по x , используя формулу (4.5) (рис. 12 на стр. 26), окончательно получим

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\Psi_1(x, y)}^{\Psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (6.2)$$

Пример 1. Вычислить $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, где область Ω ограничена поверхностями $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, $x=0, y=0, z=0$, ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

Решение. Область Ω есть $\frac{1}{8}$ часть эллипсоида с полуосями $a=1, b=3, c=2$, лежащая в первом октанте (рис. 43), очевидно, правильная по z .

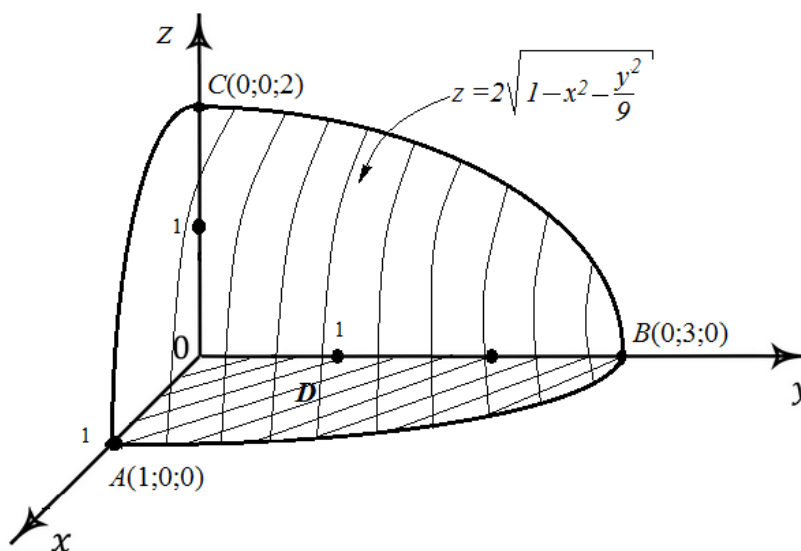


Рис. 43

Верхняя половина эллипсоида задаётся его уравнением, разрешенным относительно z , (так как $z \geq 0$, то перед корнем будет знак «плюс»): $z = 2\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{9}}$. Область D получается пересечением эллипсоида с горизонтальной плоскостью xOy (уравнение этой плоскости $z=0$ надо подставить в уравнение эллипсоида), что дает четверть эллипса $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$, лежащую в первой четверти. Так как уравнение верхней половины эллипса $y = 3\sqrt{1 - x^2}$, то область D правильная по y и задаётся неравенствами $0 \leq y \leq 3\sqrt{1 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$). Расставим пределы интегрирования:

$$\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^{3\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{2\sqrt{1-x^2-\frac{y^2}{9}}} z dz = \int_0^1 x dx \int_0^{3\sqrt{1-x^2}} y \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^{2\sqrt{1-x^2-\frac{y^2}{9}}} dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt[3]{1-x^2}} y \cdot 2(1-x^2 - \frac{y^2}{9}) dy = \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt[3]{1-x^2}} \left[2y(1-x^2) - \frac{2}{9} y^3 \right] dy = \\
&= \int_0^1 x \cdot \left[(1-x^2)y^2 - \frac{2}{36} y^4 \right] \Big|_0^{\sqrt[3]{1-x^2}} dx = \int_0^1 x \left[9(1-x^2)^2 - \frac{9}{2}(1-x^2)^2 \right] dx = \frac{9}{2} \int_0^1 (1-x^2)^2 x dx.
\end{aligned}$$

Сделаем замену переменных в последнем интеграле: $1-x^2=t$, $-2x dx = dt$, $x dx = -\frac{1}{2} dt$, $t_1 = 1-0^2 = 1$, $t_2 = 1-1^2 = 0$. Тогда

$$\frac{9}{2} \int_0^1 (1-x^2)^2 x dx = \frac{9}{2} \int_1^0 t^2 \left(-\frac{1}{2} \right) dt = \frac{9}{4} \int_0^1 t^2 dt = \frac{9}{12} t^3 \Big|_0^1 = \frac{3}{4} = 0,75.$$

§2. Замена переменных в тройном интеграле. Переход к цилиндрической и сферической системам координат

Пусть

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases} \quad (6.3)$$

Тогда

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |I| du dv dw, \quad (6.4)$$

где якобиан

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

Появление множителя с якобианом связано с изменением объемов тел при данном преобразовании (6.3). Если с помощью дифференциального метода ограничиться линейными слагаемыми, то $\Delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial x}{\partial w} \Delta w =$

$$= \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial w} \right\} = \text{grad} x, \quad \Delta y = \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial y}{\partial w} \Delta w = \left\{ \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w} \right\} = \text{grad} y,$$

$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial z}{\partial w} \Delta w = \left\{ \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w} \right\} = \text{grad} z$ (если считать, что векторы $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ раскладываются по базису из векторов $\Delta u, \Delta v, \Delta w$). Но тогда объем $\Delta x \Delta y \Delta z$ равен смешанному произведению $\text{grad} x \text{grad} y \text{grad} z \cdot \Delta u \Delta v \Delta w$, где смешанное произведение этих трех векторов вычисляется с помощью определителя третьего порядка (6.5). Но так как объемы положительны (а как известно, если $\text{grad} x, \text{grad} y, \text{grad} z$ образуют левую тройку векторов, то объем параллелепипеда, построенного на этих трех векторах будет получаться со знаком «минус»), то в формуле (6.4) якобиан I надо взять по модулю.

Замечание. Отметим, что для двойного интеграла якобиан $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ от-

ражает изменение площади при преобразовании $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases}$ а определитель второго порядка равен $\pm$ площади параллелограмма, построенного на векторах $\text{grad} x, \text{grad} y$ (формулы (4.9), (4.10) на стр. 33).

Рассмотрим два частных случая, соответствующих цилиндрической и сферической системам координат.

I. Замена переменных для перехода к цилиндрической системе координат (рис. 44) имеет вид

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = h. \end{cases} \quad (6.6)$$

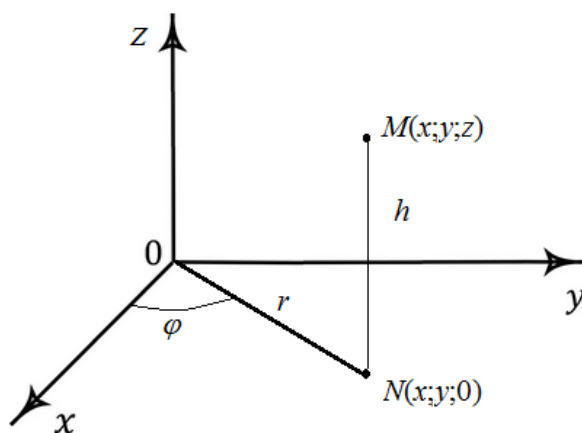


Рис. 44

Тогда якобиан

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cdot \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$$

(тот же, что и при переходе к полярной системе координат на плоскости. Сравните с выводом формулы (4.6) на стр. 30). Следовательно,

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\bar{D}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dr d\varphi dh. \quad (6.7)$$

II. Замена переменных при переходе к сферической системе координат (рис. 45)

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases} \quad (6.8)$$

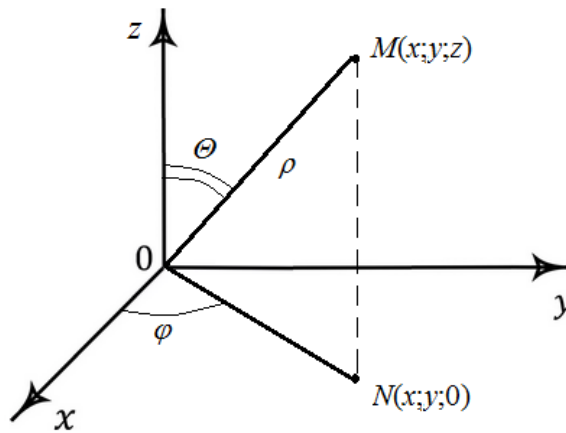


Рис. 45

Тогда якобиан

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по третьей строке, далее, вынеся общие множители строк и столбцов за знак полученных определителей, получим

$$\begin{aligned}
I &= \cos \theta \begin{vmatrix} \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \end{vmatrix} - (-\rho \sin \theta) \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \end{vmatrix} = \\
&= \cos \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \rho \cdot \rho \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} + \rho \sin \theta \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta \cdot \rho \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \\
&= [\rho^2 \cos^2 \theta \cdot \sin \theta + \rho^2 \sin^3 \theta] \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho^2 \sin \theta.
\end{aligned}$$

Так как $\theta \in [0, \pi]$, то $\rho^2 \sin \theta \geq 0$ и $|I| = I$. Следовательно,

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\bar{D}} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi. \quad (6.9)$$

§3. Приложения тройного интеграла

I. Вычисление **объемов** тел.

$$V_\Omega = \iiint_\Omega dV. \quad (6.10)$$

Отметим, что по сравнению с двойным интегралом мы имеем больше возможностей, так как а) мы можем менять порядок интегрирования и за счет его оптимального выбора в зависимости от того, как заданы ограничивающие его поверхности, более просто взять кратные интегралы; б) когда среди поверхностей, ограничивающих тело, есть круговой цилиндр, ось симметрии которого совпадает с одной из осей координат, выгодно перейти к соответствующей цилиндрической системе координат; в) если одна из поверхностей, ограничивающая тело, есть часть сферы с центром в начале координат, то выгодно перейти к сферическим координатам.

II. Приложения тройного интеграла в механике.

Пусть для некоторого тела Ω в пространстве известна плотность $\mu(x, y, z)$ – непрерывная на Ω функция. Тогда, аналогично приложениям двойного интеграла в механике, получаются или полностью аналогичные формулы, или с добавлением еще одной координаты, а именно:

1) **масса тела**

$$m = \iiint_\Omega \mu(x, y, z) dV; \quad (6.11)$$

2) **координаты центра тяжести**

$$x_{\text{цт}} = \frac{\iiint_{\Omega} x\mu(x,y,z)dV}{\iiint_{\Omega} \mu(x,y,z)dV}, \quad y_{\text{цт}} = \frac{\iiint_{\Omega} y\mu(x,y,z)dV}{\iiint_{\Omega} \mu(x,y,z)dV}, \quad z_{\text{цт}} = \frac{\iiint_{\Omega} z\mu(x,y,z)dV}{\iiint_{\Omega} \mu(x,y,z)dV}; \quad (6.12)$$

для однородного тела, когда $\mu(x,y,z) = \mu = \text{const}$, после сокращения на μ , получим

$$x_{\text{цт}} = \frac{\iiint_{\Omega} x dV}{V_{\Omega}}, \quad y_{\text{цт}} = \frac{\iiint_{\Omega} y dV}{V_{\Omega}}, \quad z_{\text{цт}} = \frac{\iiint_{\Omega} z dV}{V_{\Omega}}. \quad (6.13)$$

3) Формулы для **моментов инерции** усложняются за счет добавления еще одного квадрата соответствующей переменной:

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \mu(x,y,z) dV, \quad I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \mu(x,y,z) dV, \\ I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(x,y,z) dV, \quad (6.14)$$

а момент инерции относительно начала координат точки $O(0,0,0)$

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x,y,z) dV. \quad (6.15)$$

Поясним, например, последнюю из формул (6.14) с помощью дифференциального метода для элементарного объема ΔV параллелепипеда со сторонами Δx , Δy , Δz (рис. 46) $\Delta I_z = r^2 \Delta m = r^2 \mu(x,y,z) \Delta V$, а из $\triangle ONP$ по теореме Пифагора $r^2 = ON^2 = OP^2 + PN^2 = x^2 + y^2$, окончательно $\Delta I_z = (x^2 + y^2) \cdot \mu(x,y,z) \Delta V$. Следовательно, проинтегрировав по Ω и получим последнюю из формул (6.14).

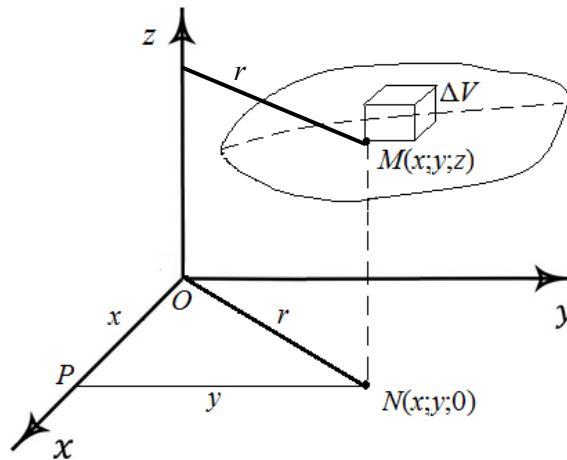


Рис. 46

Пример 2. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 3$.

Решение. Нарисуем (рис. 47) параболоид вращения $z = 4 - x^2 - y^2$ и горизонтальную плоскость $z = 3$. Они пересекаются по окружности

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2, \\ z = 3, \end{cases} \quad 4 - x^2 - y^2 = 3, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

которая ограничивает на плоскости xOy единичный круг с центром в точке $O(0,0)$ (область D).

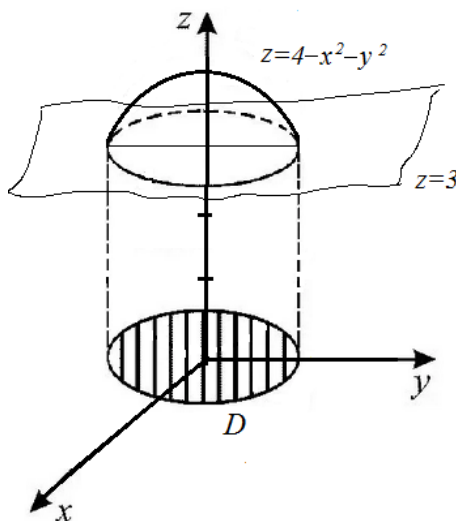


Рис. 47

Так как ось Oz является осью симметрии нашего тела, то $x_{\text{цт}} = 0$, $y_{\text{цт}} = 0$.

Найдем аппликату центра тяжести по последней из формул (6.13) $z_{\text{цт}} = \frac{\iiint_{\Omega} z dV}{V_{\Omega}}$.

Перейдем к цилиндрической системе координат по формуле (6.7), в которой уравнение поверхностей будет $h = z = 4 - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi = 4 - r^2$; $h = 3$, а область D задается неравенствами $0 \leq r \leq 1$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Получим

$$z_{\text{цт}} = \frac{\iiint_{\Omega} h r dr d\varphi dh}{\iiint_{\Omega} r dr d\varphi dh} = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_3^{4-r^2} h dh}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_3^{4-r^2} dh}.$$

Так как пределы от r постоянны и подынтегральная функция от φ не зависит, то интеграл от φ можно взять сразу:

$$\begin{aligned}
z_{\text{цт}} &= \frac{\varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^1 r \cdot \frac{h^2}{2} \Big|_3^{4-r^2} dr}{\varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^1 r \cdot h \Big|_3^{4-r^2} dr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_0^1 r \left[(4-r^2)^2 - 9 \right] dr}{\int_0^1 r(4-r^2-3) dr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_0^1 (7r - 8r^3 + r^5) dr}{\int_0^1 (r - r^3) dr} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(7 \frac{r^2}{2} - 8 \frac{r^4}{4} + \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^1}{\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{7}{2} - 2 + \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = 2 \cdot \frac{21 - 12 + 1}{6} = \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ответ: $x_{\text{цт}} = 0$, $y_{\text{цт}} = 0$, $z_{\text{цт}} = 3 \frac{1}{3}$.

Замечание. Центр тяжести тела всегда должен находиться внутри тела. Кроме того, так как площади поперечных сечений при отдалении от вершины параболоида растут и тело однородно, то сразу очевидно, что $3 < z_{\text{цт}} < 4$ и ответ ближе к трем, чем к четырем.

Пример 3. Найти момент инерции однородного шара радиуса R относительно диаметра с плотностью $\mu(x, y, z) = 2$.

Решение. Без ущерба общности найдем по последней формуле (6.14)

$I_z = \iiint_{\text{ш}} (x^2 + y^2) 2dV$. Перейдем к сферическим координатам по формулам (6.8),

(6.9), получим $I_z = 2 \iiint_{\text{ш}} (\rho^2 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi =$

$$\begin{aligned}
&= 2 \iiint_{\text{ш}} \rho^4 \sin^3 \theta d\rho d\theta d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = 2 \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R \cdot \\
&\cdot \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(-\cos \theta) = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \left[\int_0^\pi \cos^2 \theta d(\cos \theta) - \int_0^\pi d(\cos \theta) \right] = \frac{4}{5} \pi R^5 \cdot \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} - \right. \\
&\left. - \cos \theta \right] \Big|_0^\pi = \frac{4}{5} \pi R^5 \left[-\frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right] = \frac{4}{5} \pi R^5 \left(-\frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{16}{15} \pi R^5.
\end{aligned}$$

Замечание. Так как объем шара имеет размерность м^3 , а сумма квадратов расстояний равна м^2 , то их произведение будет размерности м^5 , а так как у нас для сферы есть радиус R , её геометрически определяющей, с размерностью м , то можно было сразу дать качественный ответ, что $I_z = c \cdot R^5$, где c — положительное число.

ГЛАВА 7. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Поверхностные интегралы первого рода, их свойства, вычисление и приложения

Пусть на замкнутой поверхности S задана функция $f(x, y, z)$, непрерывная в некоторой трехмерной области Ω , в которой лежит поверхность S : $S \subset \Omega$. Как уже не раз (общий подход к определенному интегралу показан на стр. 44) множество S , по которому интегрируем, разбивается на n произвольных частей, обозначим $\Delta\sigma_k$ площадь k -ой части; затем в каждой части выбираем по точке $M_k(x_k, y_k, z_k)$ (рис. 48), составляем интегральную сумму $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k$, и, наконец, переходя к пределу, получим

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta\sigma_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k. \quad (7.1)$$

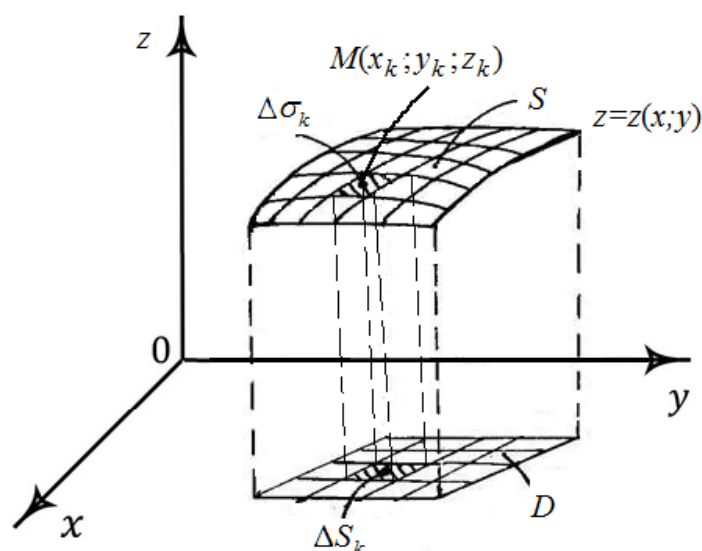


Рис. 48

Итак, **поверхностным интегралом первого рода** называется предел интегральных сумм, когда число частей разбиения стремится к бесконечности, а максимальные площади разбиений стремятся к нулю.

Далее мы будем рассматривать гладкие или кусочно-гладкие поверхности.

Теорема. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в некоторой трехмерной области D , содержащей поверхность S , то предел (7.1) существует и не зависит ни от способа разбиения области S на части, ни от выбора точек M_k в каждой части.

Как и для всех определённых интегралов, справедливы три, требующиеся нам, основные **свойства поверхностного интеграла первого рода**

- 1) $\iint_S c \cdot f(x, y, z) d\sigma = c \iint_S f(x, y, z) d\sigma$;
- 2) $\iint_S (f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)) d\sigma = \iint_S f_1(x, y, z) d\sigma + \iint_S f_2(x, y, z) d\sigma$;
- 3) $\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{S_1} f(x, y, z) d\sigma + \iint_{S_2} f(x, y, z) d\sigma$, ($S = S_1 \cup S_2$)

(последние два свойства верны для конечного числа слагаемых).

Если уравнение поверхности S $z = z(x, y)$ ($(x, y) \in D$), то, подставив в подынтегральную функцию вместо z уравнение поверхности $z(x, y)$, а вместо

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} ds \quad (\text{на стр. 42 вывод формулы})$$

$\Delta\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \Delta s$, где Δs есть проекция $\Delta\sigma$ на горизонтальную плоскость. Сейчас только мы сменили обозначение функции, на $z(x, y)$ и, соответственно, частные производные на $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, получим

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (7.2)$$

Конечно, на практике вычисление интеграла (7.2) вызывает значительные трудности из-за квадратного корня (аналогично криволинейному интегралу первого рода, но в данной ситуации все гораздо сложнее, так как интеграл двумерный).

Приложения поверхностного интеграла первого рода

I. Вычисление площади поверхности

$$S = \iint_S d\sigma,$$

если выражать уравнение поверхности через независимые переменные x , y , то мы получим формулу (4.18), но появляются еще две возможности, если проектировать поверхность S на плоскость xOz или yOz .

II. Приложение поверхностного интеграла первого рода в механике аналогично приложению тройного интеграла. А именно, если в каждой точке поверхности S известна плотность $\mu(x, y, z)$, то, заменив тройной интеграл на

поверхностный двойной интеграл, а дифференциал dV на дифференциал площади $d\sigma$, мы получим формулы, аналогичные формулам (6.11) – (6.15):

1) масса поверхности

$$m = \iint_S \mu(x, y, z) d\sigma; \quad (7.3)$$

2) координаты центра тяжести

$$x_{\text{цт}} = \frac{\iint_S x\mu(x, y, z) d\sigma}{\iint_S \mu(x, y, z) d\sigma}, \quad y_{\text{цт}} = \frac{\iint_S y\mu(x, y, z) d\sigma}{\iint_S \mu(x, y, z) d\sigma}, \quad z_{\text{цт}} = \frac{\iint_S z\mu(x, y, z) d\sigma}{\iint_S \mu(x, y, z) d\sigma}; \quad (7.4)$$

в частности, для однородной поверхности (при $\mu(x, y, z) = \mu = \text{const}$)

$$x_{\text{цт}} = \frac{\iint_S x d\sigma}{S}, \quad y_{\text{цт}} = \frac{\iint_S y d\sigma}{S}, \quad z_{\text{цт}} = \frac{\iint_S z d\sigma}{S}; \quad (7.5)$$

3) моменты инерции относительно осей координат

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) d\sigma, \quad I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \mu(x, y, z) d\sigma, \\ I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) d\sigma; \quad (7.6)$$

а момент инерции относительно начала координат точки $O(0, 0, 0)$

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) d\sigma. \quad (7.6 \text{ а})$$

Пример 1. Пусть дан однородный круговой конус $x^2 = \frac{h^2}{R^2}(y^2 + z^2)$ высотой h и радиусом основания R (как обычно, образующую конуса обозначим $l = \sqrt{h^2 + R^2}$). Найти а) массу конуса, б) координаты центра тяжести, в) момент инерции I_x относительно оси Ox .

Решение. Без ущерба общности будем считать, что плотность $\mu(x, y) = 1$. Нарисуем чертеж (рис. 49), чтобы конус лучше смотрелся, повернем оси координат вокруг оси Ox на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

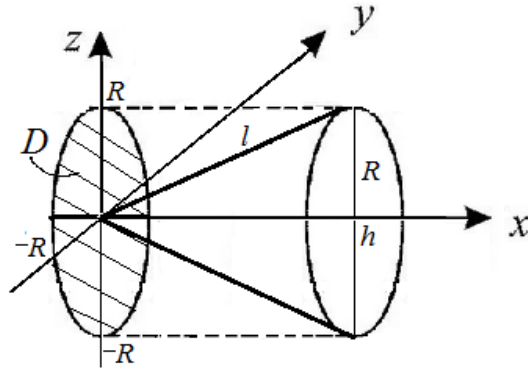


Рис. 49

$$\text{а) } m_K = \iint_K 1 \cdot d\sigma = S_{\text{бок. конуса}} = \pi Rl.$$

б) Так как ось Ox является осью симметрии этого конуса и он однороден, то $y_{\text{ЦТ}} = z_{\text{ЦТ}} = 0$. По первой из формул (7.4) и в силу а)

$$x_{\text{ЦТ}} = \frac{\iint_K x \cdot 1 \cdot d\sigma}{m_K}. \text{ Из уравнения конуса } x = \frac{h}{R} \sqrt{y^2 + z^2}, \text{ корень берется со}$$

знаком «ПЛЮС», так как $0 \leq x \leq h$.

$$x_{\text{ЦТ}} = \frac{\iint_D \frac{h}{R} \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h}{R} \sqrt{y^2 + z^2} \right) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h}{R} \sqrt{y^2 + z^2} \right) \right]^2} dydz}{\pi Rl} =$$

$$= \frac{\frac{h}{R} \iint_D \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2} \left[\left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right)^2 \right]} dydz}{\pi Rl} = \frac{h}{\pi R^2 l} \iint_D \sqrt{y^2 + z^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{R} \sqrt{R^2 + h^2 \left(\frac{y^2}{y^2 + z^2} + \frac{z^2}{y^2 + z^2} \right)} dydz = \frac{h}{\pi R^2 l} \iint_D \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \frac{l}{R} dydz. \text{ Перейдем к поляр-}$$

ной системе координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ для области D – круга радиуса R с центром в начале координат, пределы интегрирования постоянны: $0 \leq r \leq R$,

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi. \text{ Кроме того, } y^2 + z^2 = r^2, \text{ а } \sqrt{y^2 + z^2} = r. \quad x_{\text{ЦТ}} = \frac{hl}{\pi R^2 \cdot Rl} \iint_D r^2 dr d\varphi =$$

$$= \frac{h}{\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{h}{\pi R^3} \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R = \frac{h}{\pi R^3} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3} h. \text{ Отметим, что если взять}$$

сечение конуса, проходящее через ось Ox , то для полученного равнобедренного треугольника со сторонами l , l , $2R$ полученный ответ $x_{\text{ЦТ}} = \frac{2}{3} h$,

$y_{\text{ЦТ}} = z_{\text{ЦТ}} = 0$ является точкой пересечения медиан.

в) По первой из формул (7.6) $I_x = \iint_K (y^2 + z^2) d\sigma$. В пункте б) мы вывели, что

$$d\sigma = \frac{l}{R} dydz, \text{ тогда } I_x = \frac{l}{R} \iint_D (y^2 + z^2) dydz = \frac{l}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r dr = \frac{l}{R} \cdot 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi l R^3}{2}.$$

Как и в предыдущем пункте мы интегрировали в полярной системе координат; отметим, что размерность ответа (при $\mu(x,y)=1$ (масса = площади) · (квадрат расстояния) = $m^2 \cdot m^2 = m^4$ такая и получилась).

Замечание. В силу того, что круговой конус получается вращением отрезка прямой вокруг оси Ox перпендикулярной плоскости yOz , отметим, что $\frac{d\sigma}{ds} =$

$$= \frac{S_{\text{бок. конуса}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{\pi R l}{\pi R^2} = \frac{l}{R}, \text{ откуда } d\sigma = \frac{l}{R} ds, \text{ что мы и получили, вычисляя}$$

$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}$, тут ситуация аналогична при выражении длины дуги dl через её проекцию dx на ось Ox (замечание на стр. 48).

§2. Поверхностный интеграл второго рода, его свойства и физический смысл

Рассмотрим задачу о стационарном потоке жидкости через данную поверхность S , то есть будем считать, что в каждой точке $M(x, y, z)$ нам известна скорость потока $\vec{V}(x, y, z)$, которая постоянна в этой точке и не зависит от времени. Рассмотрим сначала следующие частные случаи:

а) поток жидкости через прямоугольник $\square ABCD$ в том простейшем случае, когда скорость $\vec{V}$ одна и та же для всех точек прямоугольника и перпендикулярна прямоугольнику (рис. 50 а). Тогда поток $\Pi = |\vec{V}| \cdot S_{\square ABCD}$;

б) прямоугольник $\square ABCD$ теперь под углом к общей скорости (рис. 50 б). Тогда поток $\Pi = |\vec{V}| \cdot S_{\square ABCD} \cdot \cos \varphi = \vec{V} \cdot \vec{n} S_{\square ABCD}$, где $\vec{n} \perp \square ABCD$ и $|\vec{n}| = 1$, то есть $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости;

в) если рассмотреть произвольную фигуру (вместо $\square ABCD$), естественно, фигура лежит в одной плоскости (рис. 50 в), вектор $\vec{n}$ нормали с которой образует $\angle \varphi$ с постоянным для всех точек фигуры вектором скорости $\vec{V}$, то формула для потока жидкости через эту фигуру площади S будет $\Pi = \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot S$.

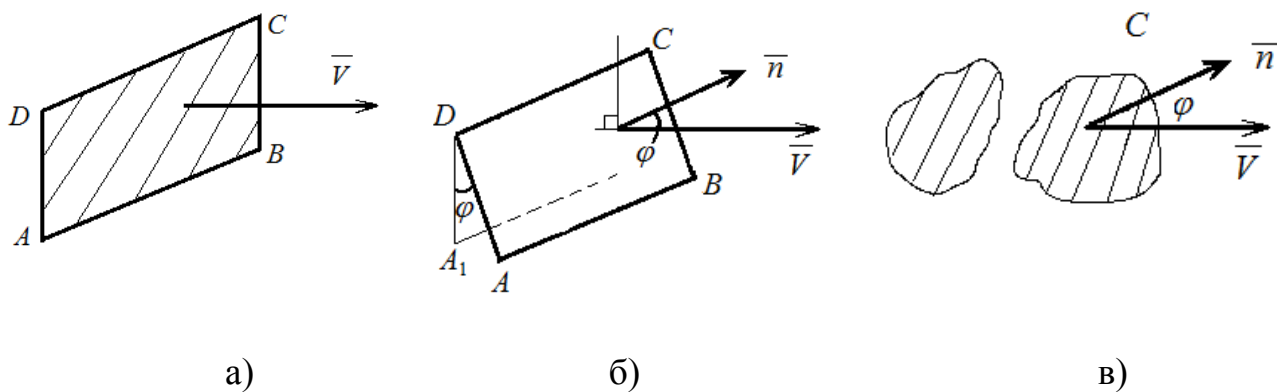


Рис. 50

Воспользуемся дифференциальным методом. Возьмем маленький кусок поверхности, содержащий точку $M(x, y, z)$ площади $\Delta\sigma$, возьмём её проекцию на касательную плоскость $d\sigma$ и будем считать скорость $V(x, y, z)$ одинаковой для этого элементарного кусочка (рис. 51). Тогда $d\Pi = \bar{V} \bar{n} d\sigma$. Переходя к интегралу по всей поверхности S , получим

$$\Pi = \iint_S \bar{V} \bar{n} d\sigma. \quad (7.7)$$

Физический смысл поверхностного интеграла второго рода – поток жидкости, проходящей через данную поверхность S при заданных скоростях $\bar{V}$ в единицу времени (мы считаем, что плотность жидкости равна единице).

Так как поток Π однозначно определён при заданных S и $\bar{V}$, естественно существование интеграла (7.7).

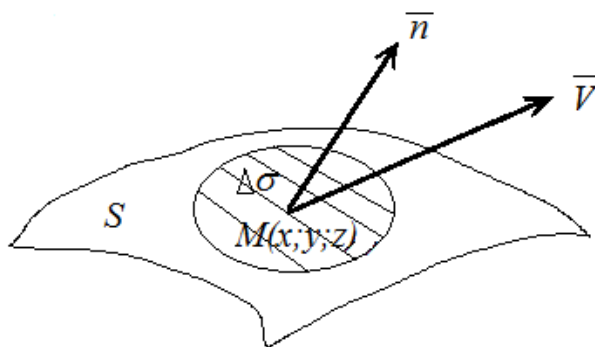


Рис. 51

Свойства поверхностного интеграла второго рода

1. $\iint_S c \bar{V} \bar{n} d\sigma = c \iint_S \bar{V} \bar{n} d\sigma;$
2. $\iint_S (\bar{V}_1 + \bar{V}_2) \bar{n} d\sigma = \iint_S \bar{V}_1 \bar{n} d\sigma + \iint_S \bar{V}_2 \bar{n} d\sigma;$

$$3. \iint_S \bar{V} \bar{n} d\sigma = \iint_{S_1} \bar{V} \bar{n} d\sigma + \iint_{S_2} \bar{V} \bar{n} d\sigma \quad (S = S_1 \cup S_2); \quad (7.8)$$

$$4. \iint_{-S} \bar{V} \bar{n} d\sigma = - \iint_{+S} \bar{V} \bar{n} d\sigma. \quad (7.9)$$

Замечание. Мы будем рассматривать двухсторонние поверхности, например, на рис. 52 будем считать $+S$ верхней стороной поверхности, а $-S$ — нижней (бывают и односторонние поверхности, например, знаменитый лист Мёбиуса — возьмите длинный узкий прямоугольник, поверните один из концов на 180° и склейте). Так как $\bar{n}_2 = -\bar{n}$, то интеграл по свойству скалярного произведения меняет свой знак — физический смысл этого в том, что по одну сторону жидкость втекает, а по другую вытекает, проходя через S . Нам еще понадобится свойство для замкнутых поверхностей (соответствующий двойной интеграл обозначают с кружочком, как и криволинейный интеграл по замкнутому контуру).

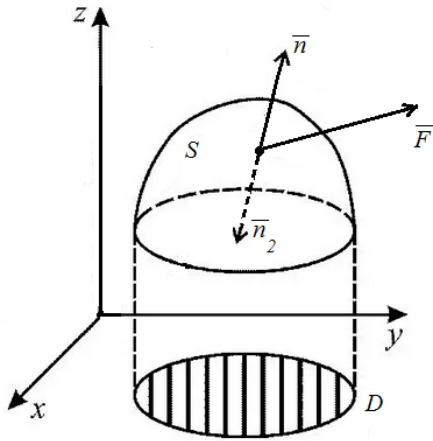


Рис. 52

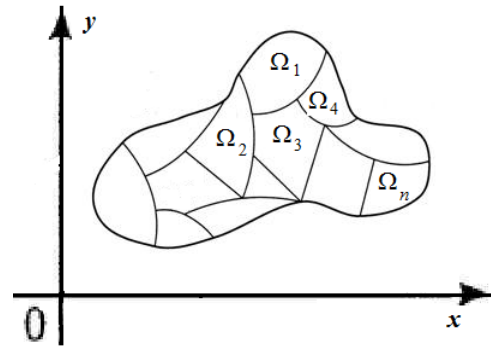


Рис. 53

$$5. \oint\!\!\!\oint_S \bar{V} \bar{n} d\sigma = \oint\!\!\!\oint_{S_1} \bar{V} \bar{n} d\sigma + \oint\!\!\!\oint_{S_2} \bar{V} \bar{n} d\sigma + \dots + \oint\!\!\!\oint_{S_n} \bar{V} \bar{n} d\sigma \quad (7.10)$$

для разрезанного тела Ω на n частей $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ (рис. 53), все векторы нормали в (7.10) будем считать смотрящими наружу. Поясним идею доказательства формулы (7.10): на внутренних общих поверхностях двух соседних разбиений один раз будет считаться поток для $+S_k$, а другой — для $-S_k$ и в силу свойства 4 они взаимно уничтожатся.

§3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Запишем теперь поверхностный интеграл второго рода (7.7) в координатной форме $\bar{V}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, $\bar{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ (для единичного вектора нормали его координатами будут направляющие косинусы). Тогда

$$\Pi = \iint_S \bar{V} \bar{n} d\sigma = \iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] d\sigma. \quad (7.11)$$

Спроектируем поверхность S на координатные плоскости xOz , yOz , xOy , соответствующие проекции обозначим D_1 , D_2 , D_3 (рис. 54).

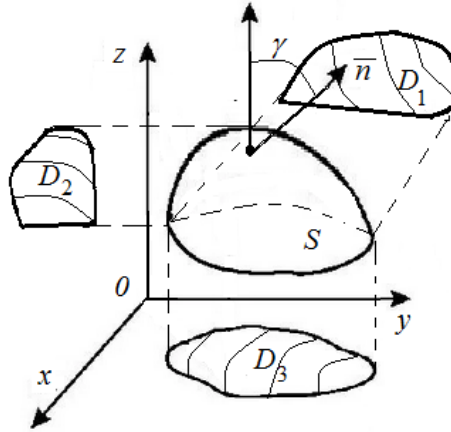


Рис. 54

Кроме того, мы будем выражать в уравнении поверхности S одну переменную через те оставшиеся две независимые переменные, которые соответствуют D_1 , D_2 , D_3 , а именно: $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} \iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] d\sigma = & \pm \iint_{D_1} P(x(z, y), y, z) dydz \pm \\ & \pm \iint_{D_2} Q(x, y(x, z), z) dx dz \pm \iint_{D_3} R(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Отметим, что для последнего слагаемого $\iint_S P(x, y, z) \cos \gamma d\sigma$ при выводе формулы, сводящей поверхностный интеграл первого рода к двойному интегралу на плоскости xOy , было показано, что $\cos \gamma d\sigma = dx dy$, но для поверхностного интеграла второго рода нужно еще учитывать по какой части поверхности мы интегрируем: если угол γ острый (рис. 54) по отношению к верхней части поверхности S , то $\cos \gamma > 0$ и будет $dx dy$ со знаком «плюс» (так будет всегда для поверхностного интеграла первого рода), а если угол γ тупой (например, если мы для чертежа на рис. 54 будем интегрировать по нижней части поверхности, то со знаком «минус»).

Замечание. Так как, например, мы только что отмечали, что $\cos \gamma d\sigma = dx dy$, аналогично $\cos \alpha d\sigma = dy dz$, $\cos \beta d\sigma = dx dz$, то интеграл (7.11) записывают в виде

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy, \quad (7.13)$$

что сразу показывает, к каким двойным интегралам мы перейдем по формуле (7.12), конечно, с учетом знаков соответствующих направляющих косинусов.

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint_S x^2 z dydz + dx dz + z dx dy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0$).

Решение. Нарисуем $\frac{1}{8}$ часть сферы (рис. 55) и соответствующие её проекции на координатные плоскости D_1, D_2, D_3 (очевидно, это будут $\frac{1}{4}$ части круга радиуса $R = 2$, так как радиус сферы $R = \sqrt{4} = 2$).

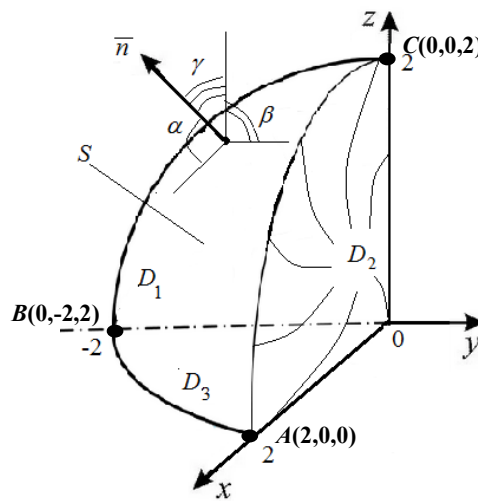


Рис. 55

Из чертежа $\angle \alpha$ и $\angle \gamma$ – острые, а $\angle \beta$ – тупой, поэтому первый и третий интегралы в формуле (7.12) берём со знаком «плюс», а второй – со знаком «минус»; кроме того, в первом интеграле выражаем x^2 из уравнения сферы $x^2 = 4 - y^2 - z^2$, а в последнем $z = +\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (знак плюс, так как по условию $z \geq 0$, что даёт верхнюю половину сферы). В результате по формуле мы данный поверхностный интеграл второго рода сводим по формуле (7.12) к трем двойным интегралам, D_1 – сектор BOC , D_2 – сектор AOC и D_3 – сектор AOB :

$$\iint_S x^2 z dydz + dx dz + z dx dy = \iint_{BOC} (4 - y^2 - z^2) z dydz - \iint_{AOC} dx dz + \iint_{AOB} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Из приложений двойного интеграла $\iint_{AOC} dx dy = S_{AOC}$, а $\iint_{AOB} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$ – объём $\frac{1}{8}$ части шара $ABCO$; для сектора BOC уравнение сферы при $x = 0$ даёт уравнение окружности $y^2 + z^2 = 4$, откуда $z = \sqrt{4 - y^2}$ ($-2 \leq y \leq 0$), тогда

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2 z dy dz + dx dz + z dx dy &= \int_{-2}^0 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} [(4-y^2)z - z^3] dz - \frac{1}{4} S_{\text{круга}} + \frac{1}{8} S_{\text{шара}} = \\
&= \int_{-2}^0 \left[(4-y^2) \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} - \frac{z^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} \right] dy - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} + \frac{4}{3} \pi \frac{2^3}{8} = \int_{-2}^0 \left[\frac{1}{2} (4-y^2) (\sqrt{4-y^2})^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} (\sqrt{4-y^2})^4 \right] dy + \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} \int_{-2}^0 (4-y^2)^2 dy + \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} \int_{-2}^0 (16 - 8y^2 + y^4) dy + \frac{\pi}{3} = \\
&= \frac{1}{4} \left(16y - 8 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{-2}^0 + \frac{\pi}{3} = 0 - \frac{1}{4} \left(-32 + \frac{64}{3} - \frac{32}{5} \right) + \frac{\pi}{3} = \frac{32}{4} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) + \frac{\pi}{3} \approx 5,32.
\end{aligned}$$

Пример 3. Найти поток векторного поля $\vec{F}(x, y, z) = \{x, y, z\}$ через ΔABC с вершинами $A(-1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ для внешней (по отношению к началу координат) стороны треугольника.

Решение. $\Pi = \iint_{\Delta ABC} x dy dz + y dx dz + z dy dx$. Выведем уравнение плоскости треугольника $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1$ (рис. 56). Из соображений симметрии $|\cos \alpha| = |\cos \beta| = |\cos \gamma|$, при этом $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ и $\cos \alpha < 0$, $\cos \beta = \cos \gamma > 0$. Выведите из этих условий, что $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

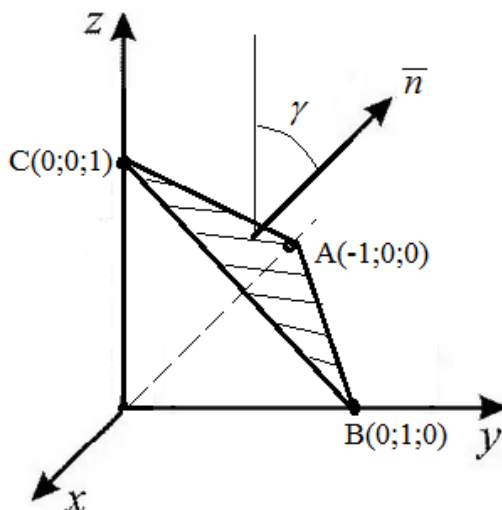


Рис. 56

Поэтому выгоднее записать данный интеграл с направляющими косинусами $\Pi = \iint_{\Delta ABC} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) d\sigma = \iint_{\Delta ABC} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} y + \frac{1}{\sqrt{3}} z \right) d\sigma =$
 $= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Delta ABC} (-x + y + z) d\sigma$. Но для любой точки треугольника ABC из выведен-

ного уравнения плоскости $-x + y + z = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Delta ABC} (-x + y + z) d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Delta ABC} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{S_{\Delta OAB}}{\cos \gamma} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Замечание. Так как для данного поля $\vec{F}$ в подынтегральном выражении удалось использовать уравнение плоскости ΔABC и свести его к константе, решение намного проще, чем стандартное, по формуле (7.12).

§4. Формула Стокса

Обобщим формулу Грина (5.21) в том случае, когда замкнутая кривая L находится в пространстве (соответственно под знаком криволинейного интеграла появится третье слагаемое с dz и функции P , Q , R перед дифференциалами будут от трех переменных), а справа интеграл будет тоже от трех слагаемых по поверхности S , ограниченной кривой L :

$$\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx, \quad (7.14)$$

где направление обхода по контуру совершается против часовой стрелки (то есть в положительном направлении) вокруг вектора $\vec{n}$ нормали к соответствующей поверхности S (рис. 57).

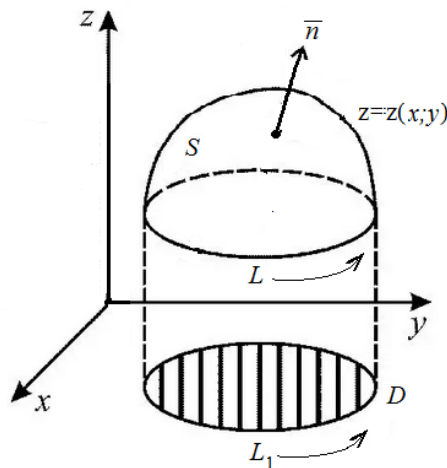


Рис. 57

Доказательство. Выпишем слагаемые в поверхностном интеграле, содержащие функцию $P(x, y, z)$:

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma.$$

Пусть уравнение поверхности S будет $z = z(x, y)$, запишем его в виде $\Phi(x, y, z) = z - z(x, y) = 0$. Тогда $\bar{n} = \text{grad}\Phi(x, y, z) = \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right\}$ (стр. 15) и в

нашем случае $\bar{n} = \left\{ -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right\}$, а единичный вектор нормали $\bar{n}_1 = \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$. Так как $\bar{n}_1$ параллельно $\bar{n}$, то их проекции пропорциональны: $\frac{\cos \beta}{-\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\cos \gamma}{1}$, откуда $\cos \beta = -\frac{\partial z}{\partial y} \cos \gamma$. Подставив $\cos \beta$ в интеграл, содержа-

щий $P(x, y, z)$, получим $\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_S \left[\frac{\partial P}{\partial z} \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right] d\sigma =$
 $= -\iint_S \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \right] \cos \gamma d\sigma$. По правилу дифференцирования сложной функции $\frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$. Тогда $-\iint_S \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \right] \cos \gamma d\sigma = -\iint_D \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] dx dy$. По формуле Грина для области D на плоскости xOy и кривой L_1 – проекцией кривой L на эту горизонтальную плоскость, значит $-\iint_D \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] dx dy =$
 $= \oint_L P(x, y, z(x, y)) dx = \oint_L P(x, y, z) dx$.

Мы доказали ту часть формулы Стокса (7.14), в которой слева и справа содержатся слагаемые с $P(x, y, z)$, в силу равноправия осей координат будут также справедливы аналогичные равенства для $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, а так как, и для криволинейных интегралов, и для поверхностных интеграл от суммы функций равен сумме интегралов, то формула Стокса (7.14) доказана.

Следствие. Если рассмотреть две поверхности S_1 и S_2 , натянутые на одну и ту же кривую L (по одну сторону по отношению к L), то в силу формулы

$$\text{Стокса} \quad \iint_{S_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx =$$

$$= \iint_{S_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx.$$

(Физически, представьте например, как начинает надуваться мыльный пузырь на рамке и берем его два различных положения S_1, S_2).

§5. Формула Остроградского-Гаусса

Мы только что рассмотрели обобщение формулы Грина — формулу Стокса, которая связывает криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру с двойным — поверхностным интегралом второго рода, натянутых на этот контур. Теперь мы рассмотрим обобщение формулы Грина при увеличении размерности обеих частей на единицу, а именно, формулу Остроградского-Гаусса, связывающую тройной интеграл по пространственной области с замкнутым поверхностным интегралом второго рода по границе этой области:

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint\oint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy, \quad (7.15)$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности, а функции P , Q , R непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ на Ω (рис. 58).

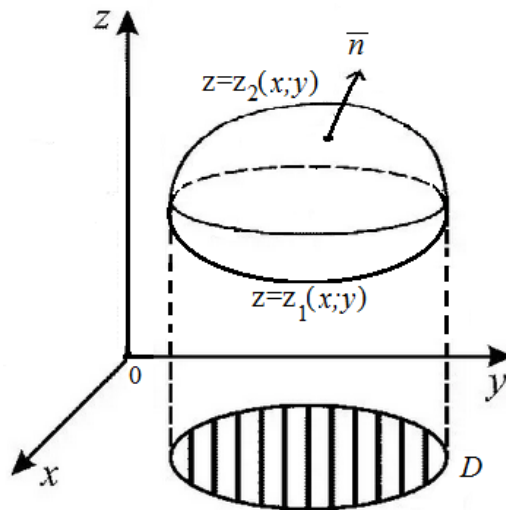


Рис. 58

Доказательство. Докажем часть этой формулы для третьих слагаемых, содержащих функцию $R(x, y, z)$. Без ущерба общности предположим, что область

$$\begin{aligned} \Omega \text{ правильная по } z & \cdot \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_D R(x, y, z) \Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dx dy = \iint_D [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dx dy = \\ &= \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Обозначим верхнюю часть тела,

поверхность которой задана уравнением $z = z_2(x, y)$ через S_2 , а нижнюю – через S_1 , тогда

$$\iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy = \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy - \left(- \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy \right) = \iint_{S_2 \cup S_1} R(x, y, z) dx dy = \oint_S R(x, y, z) dx dy.$$

Так как для векторов $\vec{n}$, смотрящих наружу для S_2 , угол γ с осью Oz будет острый, а для S_1 – тупой, то первый интеграл (по S_2) берется со знаком «плюс», а второй (по S_1) – со знаком «минус». В силу равноправности осей координат, аналогичные формулы будут для функций $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$, сложив все три интеграла слева и справа, мы получим формулу (7.15).

Пример 4. Вычислить $\oint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$ по внешней поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Решение. По формуле (7.15) Остроградского-Гаусса перейдем к тройному интегралу по шару $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$:

$$\begin{aligned} \oint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy &= \iiint_{III} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) \right] dx dy dz = 3 \iiint_{III} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz. \\ &\text{Перейдем к сферической системе координат по формуле (6.9) на стр. 68. Отметим, что из формулы для длины вектора } \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\} \text{ следует, что } x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2. \text{ Тогда} \\ &3 \iiint_{III} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 3 \iiint_{III} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi = \\ &= 3 \int_0^R \rho^4 d\rho \cdot \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 3 \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = 3 \frac{R^5}{5} (-\cos \pi + \cos 0) \cdot 2\pi = \\ &= \frac{12\pi R^5}{5}. \end{aligned}$$

ГЛАВА 8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§1. Векторное поле. Основные понятия теории поля: градиент, дивергенция, циркуляция и ротор

Определение 1. В области Ω задано **векторное поле**, если в каждой точке $M(x, y, z) \in \Omega$ задан вектор $\vec{F} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$.

Хорошо известны примеры из физики: силовое поле, электрическое поле, поле скоростей жидкости (например, в речке), в этом случае, как и во многих других, векторное поле в одной и той же точке может меняться с течением времени. В классическом анализе рассматривают непрерывные векторные поля.

Рассмотрим основные частные случаи. Если векторы поля не зависят от времени, то такое поле называют **стационарным**

$$\vec{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\} \quad (8.1)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать стационарные поля. Самые простым из стационарных полей является **однородное** поле, если P , Q , R – константы. (Например, электрическое поле в конденсаторе).

Поле (8.1) называется **плоским**, если одна из проекций равна нулю, а две другие зависят от двух переменных.

Без ущерба общности (за счет выбора соответствующей декартовой системы координат) можно считать, что поле лежит в плоскости xOy :

$$\vec{F}_{пл} = \{P(x, y), Q(x, y), 0\}. \quad (8.2)$$

Часто плоское поле удобно рассматривать на плоскости

$$\vec{F}_{пл} = \{P(x, y), Q(x, y)\} \quad (8.2')$$

Пример 1. Рассмотрим вращательное движение тела (рис. 59) с угловой скоростью ω вокруг данной оси (направим по ней ось Oz).

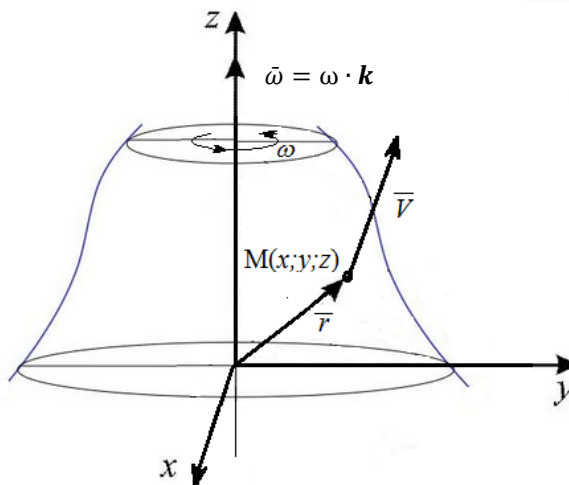


Рис. 59

Линия скорости $\bar{V}$ в точке $M(x, y, z)$ по формуле Эйлера

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ y & z \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ x & z \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} = -\omega y \cdot i + \omega x \cdot j + 0 \cdot k.$$

$$\bar{V} = \{-\omega y, \omega x, 0\}, \quad (8.3)$$

плоское поле при вращательном движении (при вращении по часовой стрелке $\bar{V}$ сменит знак). Отметим, что в виде (8.2') $\bar{V} = \{-\omega y, \omega x\}$.

Определение 2. Векторными линиями называют кривые, в каждой точке которых касательные направлены по векторам поля $\bar{F}$ (рис. 60). В силовом поле векторные линии — силовые линии, если же у нас есть поле скоростей $\bar{F} = \bar{V}$, то векторными линиями являются траектории движения частиц жидкости.

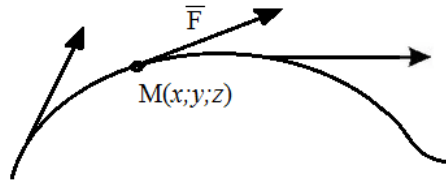


Рис. 60

Составим дифференциальные уравнения для векторных линий:

$$\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}; \quad \bar{V}(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}, \quad \bar{V}(t) \parallel \bar{F},$$

$$\frac{x'(t)}{P(x, y, z)} = \frac{y'(t)}{Q(x, y, z)} = \frac{z'(t)}{R(x, y, z)}, \text{ умножив на } dt, \text{ получим}$$

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (8.4)$$

В частности, для плоского поля (8.2') уравнение (8.4) превратится в обычное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}. \quad (8.5)$$

Проверим, что в случае вращательного движения твердого тела (пример 1) его траектории удовлетворяют соответствующему дифференциальному уравнению (8.5).

Очевидно, векторными линиями будут окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$. Тогда для дифференциалов $2x dx + 2y dy = 0$,

$$x dx = -y dy, \quad \frac{dy}{-y} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}, \quad \bar{V} = \{-\omega y, \omega x\}.$$

Определение 3. *Потоком* Π векторного поля $\vec{F}$ через поверхность S называется поверхностный интеграл второго рода (рис. 61)

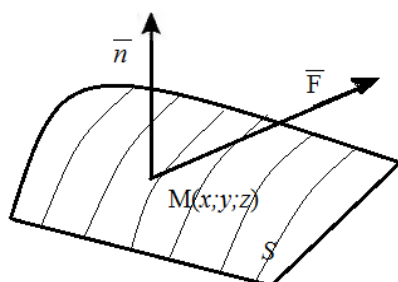


Рис. 61

$$\Pi = \iint_S \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] d\sigma, \quad (8.6)$$

где $|\vec{n}| = 1$, $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ (см. §2 главы 7 на стр. 76).

1) Предположим, что S — гладкая поверхность (вектор нормали вдоль неё непрерывно поворачивается), а также двухсторонняя поверхность.

2) Пусть поверхность замкнутая и будем интегрировать по внешней стороне поверхности $\Pi_{\text{полн}} = \oiint_S \vec{F} \vec{n} d\sigma$.

В случае, когда векторное поле $\vec{F} = \vec{V}$ — поле скоростей жидкости, то если

а) $\Pi_{\text{полн}} = 0$, то количество вытекающей жидкости равно количеству вытекающей (например, в реке);

б) $\Pi_{\text{полн}} > 0$, то тогда вытекает больше жидкости, чем втекает, то есть внутри есть источники.

в) $\Pi_{\text{полн}} < 0$, тогда втекает больше жидкости, чем вытекает, то есть внутри есть стоки.

Рассмотрим $\frac{\oiint_S \vec{F} \vec{n} d\sigma}{V}$, где V — объём тела, ограниченного поверхностью

S . Эта величина характеризует среднюю мощность источников на единицу объёма.

Дивергенция векторного поля

Определение 4. *Дивергенцией (расходимостью)* векторного поля $\vec{F}$ называется предел отношения потока $\Pi_{\text{полн}}$ через поверхность, окружающую точку $M(x, y, z)$, к объёму тела, ограниченному этой поверхностью, когда она стягивается в точку

$$\operatorname{div} \bar{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \bar{F} \bar{n} d\sigma}{V}. \quad (8.7)$$

Покажем, что для векторного поля (8.1) $\bar{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$

$$\operatorname{div} \bar{F}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (8.8)$$

По формуле (7.15) Остроградского-Гаусса

$$\oiint_S \bar{F} \bar{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Big|_{\text{т.} M_1(x_1, y_1, z_1)} \cdot V_{\Omega},$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Omega$. Тогда из (8.7)

$$\operatorname{div} \bar{F}(x, y, z) = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{1}{V_{\Omega}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Big|_{\text{т.} M_1(x_1, y_1, z_1)} \cdot V_{\Omega} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Big|_{\text{т.} M(x, y, z)}$$

Теорема Остроградского-Гаусса имеет **физический смысл**: сумма всех источников внутри поверхности равна полному потоку через эту поверхность (изнутри наружу).

Рассмотрим течение воды в реке, если русло на некотором участке не меняется (рис. 62), тогда поле скоростей жидкости будет однородным: $\bar{F}(x, y, z) = \{a, b, c\}$.

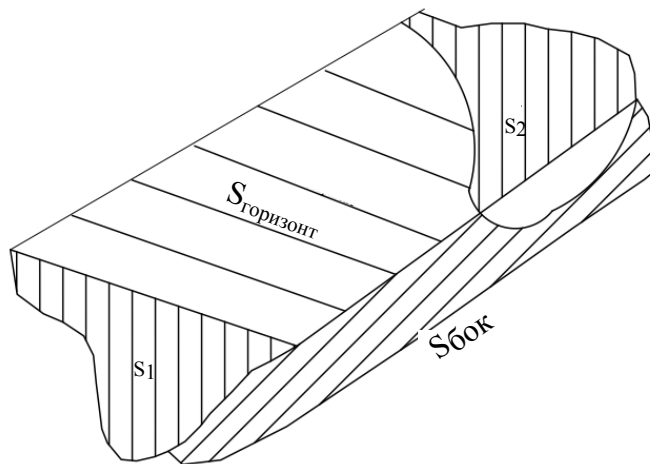


Рис. 62

Тогда $\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0$, и в силу теоремы Остроградского-Гаусса

$$\Pi_{\text{полн}} = \oint\limits_S \bar{V} n d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \bar{F} dV = \iiint\limits_{\Omega} 0 dV = 0, \quad (S = S_1 \cup S_2 \cup S_{\text{бок}} \cup S_{\text{горизонт}}), \text{ то есть}$$

у нас ситуация а).

Приведем без доказательства **свойства дивергенции**.

$$1) \operatorname{div} \bar{a} = 0,$$

$$2) \operatorname{div} c \bar{F} = c \operatorname{div} \bar{F},$$

$$3) \operatorname{div}(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \operatorname{div} \bar{F}_1 + \operatorname{div} \bar{F}_2,$$

$$4) \operatorname{div} u \bar{F} = u \operatorname{div} \bar{F} + \bar{F} \operatorname{grad} u, \text{ где } u = u(x, y, z), \operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \quad (3.16 \text{ б});$$

5) $\operatorname{div}(\bar{F}_1 \times \bar{F}_2) = \bar{F}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{F}_1 - \bar{F}_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{F}_2$ (определение и вычисление $\operatorname{rot} \bar{F}$ ниже на стр. 91).

Циркуляция и ротор

Определение 5. *Циркуляцией* векторного поля $\bar{F}$ по замкнутому контуру L называется криволинейный интеграл

$$\Pi = \oint\limits_L \bar{F} d\bar{l} = \oint\limits_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \quad (8.9)$$

Пример 2. Рассмотрим векторное поле $\bar{V}$, соответствующее вращению (пример 1). Для вектора вращения $\bar{F} = \bar{V} = \{-\omega y, \omega x, 0\}$ циркуляция по контуру L (рис. 63) $\Pi = \oint\limits_L \bar{F} d\bar{l} = \oint\limits_L [-\omega y dx + \omega x dy]$. Применим формулу Стокса (7.14) для

$$\bar{F} = \bar{V} = \{-\omega y, \omega x, 0\} = \{P, Q, R\}, \quad \text{получим} \quad \Pi = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma d\sigma =$$

$= \iint\limits_S (\omega - (-\omega)) \cos \gamma d\sigma = 2\omega \cos \gamma \iint\limits_S d\sigma = 2\omega \cos \gamma \cdot S$. Для сравнения проверьте, что дивергенция такого поля $\bar{V}$ линейных скоростей вращающегося тела равна нулю.

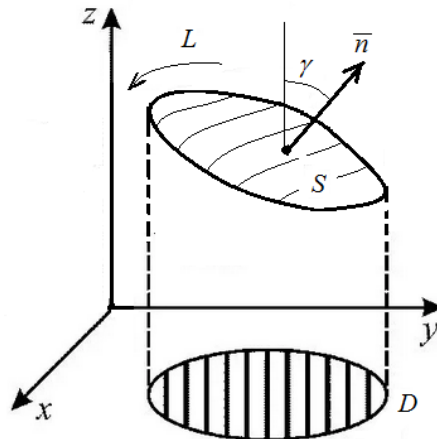


Рис. 63

Замечание. Если взять L , лежащее в одной плоскости и разделить на S , то $\Pi = \frac{2\omega \cos \gamma S}{S} = 2\omega \cos \gamma$. Так как оси координат равноправны, то для осей Ox , Oy будет соответственно получаться $2\omega \cos \alpha$ и $2\omega \cos \beta$, и для произвольного направления оси вращения тела по отношению к осям координат предел отношения циркуляции Π к площади S будет характеризовать угловую скорость вращения, а именно будет давать $2\omega \bar{n}$, где $\bar{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ – единичный вектор по оси вращения (естественно, что если смотреть из конца вектора $\bar{n}$, то вращение будет в положительном направлении, то есть против часовой стрелки).

Рассмотрим предел отношения циркуляции векторного поля $\bar{F}$ по замкнутому контуру L к площади S области внутри контура, когда последняя

стремится к нулю: $\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \bar{F} dl}{S}$. По формуле Стокса (7.14) S площадь поверхности σ , натянутую на L .

Тогда

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \bar{F} dl = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx =$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma.$$

Аналогично выводу $\text{div} F$ из (8.7) получится подынтегральное выражение в точке $M(x, y, z)$, в которую стягивается поверхность σ , тогда получим

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma.$$

Определение 6. **Ротором (вихрем)** векторного поля $\bar{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ называется вектор

$$\text{rot} \bar{F} = \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right\}. \quad (8.10)$$

В замечании к примеру 2 было показано, что для площади S перпендикулярной оси Oz ответ будет $2\omega_z \cdot \cos \gamma$, а в ответе для произвольного

(если рассмотреть случай $\bar{n} = k$, при котором $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$) останет-

ся только последнее слагаемое $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma$. Следовательно, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2\omega_z$,

аналогично $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 2\omega_x$ и $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 2\omega_y$, что даёт векторное равенство

$\text{rot} \bar{F} = 2\bar{\omega}$, где $|\bar{\omega}| = \omega$ – угловая скорость вращения, а сам вектор $\bar{\omega}$ направлен по оси вращения так, как указано в замечании. Приведем без доказательства **свойства ротора**

- 1) $\text{rot} \bar{c} = \bar{0}$,
- 2) $\text{rot} c\bar{F} = c \text{rot} \bar{F}$,
- 3) $\text{rot}(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \text{rot} \bar{F}_1 + \text{rot} \bar{F}_2$,
- 4) $\text{rot}(u\bar{F}) = u \text{rot} \bar{F} + (\text{grad} u) \times \bar{F}$,
- 5) $\text{rot}(\bar{F}_1 \times \bar{F}_2) = (\bar{F}_2 \text{grad}) \bar{F}_1 - (\bar{F}_1 \text{grad}) \bar{F}_2 + \bar{F}_1 \text{div} \bar{F}_2 - \bar{F}_2 \text{div} \bar{F}_1$,

где градиент векторного поля $\bar{F}$ по вектору $\bar{a}$ можно вычислить по формуле

$$(\bar{a} \text{grad}) \bar{F} = \frac{1}{2} \left[\text{rot}(\bar{F} \times \bar{a}) + \text{grad}(\bar{a} \bar{F}) + \bar{a} \text{div} \bar{F} - \bar{F} \text{div} \bar{a} - \bar{a} \times \text{rot} \bar{F} - \bar{F} \times \text{rot} \bar{a} \right].$$

Введение дивергенции и ротора позволяет кратко записывать формулы Стокса и Остроградского в векторной форме и дать им формулировки с физическим смыслом, а именно: **формула (7.14) Стокса**

$$\oint_L \bar{F} d\bar{l} = \iint_S \text{rot} \bar{F} \cdot \bar{n} d\sigma \quad (8.11)$$

формулируется так: циркуляция вектора вдоль контура некоторой поверхности равна потоку вихря через эту поверхность; формула (7.15) Остроградского-Гаусса

$$\iiint_{\Omega} \text{div} \bar{F} dV = \oiint_S \bar{F} \cdot \bar{n} d\sigma \quad (8.12)$$

формулируется так: интеграл от дивергенции векторного поля $\bar{F}$, распространённого по некоторой трехмерной области, равен полному потоку вектора $\bar{F}$ через поверхность, ограничивающую эту область.

§2. Оператор Гамильтона. Основные формулы теории поля

Для записи различных формул оказалось удобным ввести **оператор Гамильтона**

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot i + \frac{\partial}{\partial y} \cdot j + \frac{\partial}{\partial z} \cdot k \quad (8.13)$$

При применении оператора Гамильтона к скалярной или векторной величине, нужно в соответствующем месте произвести операции взятия частных производных, вставив данную величину.

1. Применим оператор Гамильтона (8.13) к скалярной функции $u = u(x, y, z)$, для этого нужно вставить u в формулу (8.13) $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k =$
 $= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$. Итак,

$$\nabla u = \text{grad} u. \quad (8.14)$$

2. Возьмём скалярное произведение вектора Гамильтона (8.13) на вектор $\bar{F} = \{P, Q, R\}$: $\nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$,

$$\Delta \cdot \bar{F} = \text{div} \bar{F}. \quad (8.15)$$

3. Возьмем векторное произведение вектора Гамильтона (8.13) на вектор $\bar{F} = \{P, Q, R\}$:

$$\begin{aligned} \nabla \bar{F} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = i \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - j \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + k \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \\ &= \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\nabla \times \bar{F} = \text{rot} \bar{F}. \quad (8.16)$$

Замечание. По формуле (8.16) с определителем для векторного произведения на практике надежнее находить $\text{rot} \bar{F}$, чем путаться при запоминании формулы (8.10).

4. Рассмотрим **оператор Лапласа**

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \text{div}(\text{grad} u) = \text{div}(\nabla u) = \\ &= \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u. \end{aligned}$$

Отсюда оператор Лапласа Δ является «квадратом» оператора Гамильтона

$$\Delta u = \nabla^2 u. \quad (8.17)$$

Уравнение $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ называется **уравнением Лапласа**, а его решения $u = u(x, y, z)$ – **гармоническими функциями**.

5. Выведем с помощью оператора Гамильтона важную в дальнейшем формулу

$$\text{rot}(\text{grad} u) = \bar{0}. \quad (8.18)$$

Действительно, из формул (8.16), (8.14) $\text{rot}(\text{grad} u) = \nabla \times (\text{grad} u) = \nabla \times [\nabla u] = [\nabla \times \nabla] u = \bar{0}$ по свойству векторного произведения $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$.

6. Аналогично, используя оператор Гамильтона, покажем, что

$$\text{div} \text{rot} \bar{F} = 0. \quad (8.19)$$

Применив формулы (8.15), (8.16), получим

$$\text{div}(\text{rot} \bar{F}) = \text{div}(\nabla \times \bar{F}) = \nabla \cdot [\nabla \times \bar{F}] = [\nabla \times \nabla] \bar{F} = \bar{0} \cdot \bar{F} = 0.$$

Пример 3. Найти $\text{rot} \text{rot} \bar{F}$.

Решение. $\text{rot} \text{rot} \bar{F} = \nabla \times (\text{rot} \bar{F}) = \nabla \times (\nabla \times \bar{F})$. По тождеству Лагранжа $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b})$ получим $\nabla \times (\nabla \times \bar{F}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{F}) - \bar{F}(\nabla \cdot \nabla) = \nabla(\text{div} \bar{F}) - (\nabla \cdot \nabla) \bar{F} = \text{grad} \text{div} \bar{F} - \Delta \bar{F}$.

Пример 4. Найти $\text{div} \text{grad} u$ функции $u(x, y, z) = e^{x+y+z}$.

Решение. Так как, например $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y+z}) = e^{x+y+z} = u$, то есть при взятии частных производных данная функция u не меняется, то из пункта 4 $\text{div} \text{grad} u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u + u + u = 3u$.

§3. Потенциальные векторные поля

Определение 7. Векторное поле $\bar{F}$ называется **потенциальным**, если вектор $\bar{F}$ является градиентом некоторой скалярной функции $u(x, y, z)$

$$\bar{F}(x, y, z) = \text{grad} u(x, y, z) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}. \quad (8.20)$$

Тогда из (8.18) $\text{rot}(\text{gradu}) = \bar{0}$ и по формуле Стокса (8.11) $\oint_L \bar{F} d\bar{l} = \iint_S \text{rot} \bar{F} \cdot \bar{n} d\sigma = \iint_S \bar{0} \cdot \bar{n} d\sigma = \iint_S 0 d\sigma = 0$ по любому замкнутому контуру L . Для криволинейного интеграла второго рода (см. §5 главы 5) отсюда следует, что в таком поле $\int_L \bar{F} d\bar{l} = \int_{\cup AB} \bar{F} d\bar{l}$ не зависит от пути, а только от начальной и конечной точек $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{aligned} \int_{T.A}^{T.B} \bar{F} d\bar{l} &= \int_{T.A}^{T.B} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \int_{T.A}^{T.B} du = u|_{T.B} - u|_{T.A} = \\ &= u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1). \end{aligned} \quad (8.21)$$

В этом случае функцию $u(x, y, z)$ называют **потенциалом** и из физического смысла криволинейного интеграла второго рода формула (8.21) физически читается так: работа по перемещению материальной точки в силовом потенциальном поле $\bar{F}(x, y, z)$ из точки A в точку B равна разности потенциалов.

Замечание. По определению, если для векторного поля $\bar{F}(x, y, z)$

$$\text{rot} \bar{F} = 0,$$

то поле называется **безвихревым**. В частности, в силу (8.18) все потенциальные поля являются безвихревыми. С помощью теоремы Стокса можно показать, что верно и обратное.

Пример 5. Проверить, что поле $\bar{F}(x, y, z) = \{yz + e^x, xz - \cos y, xy + z^3\}$ потенциально.

Решение. Найдем

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{F} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + e^x & xz - \cos y & xy + z^3 \end{vmatrix} = i \left[\frac{\partial}{\partial y}(xy + z^3) - \frac{\partial}{\partial z}(xz - \cos y) \right] - \\ &- j \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy + z^3) - \frac{\partial}{\partial z}(yz + e^x) \right] + k \left[\frac{\partial}{\partial x}(xz - \cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(yz + e^x) \right] = i(x - x) - \\ &- j(y - y) + k(z - z) = \bar{0}. \end{aligned}$$

Следовательно, поле потенциально.

Пример 6. Рассмотрим **поле тяготения** тела массы m . Расположим начало координат в центре тяжести тела и найдем работу по перемещению другого тела с единичной массой из точки A в точку B (рис. 64).

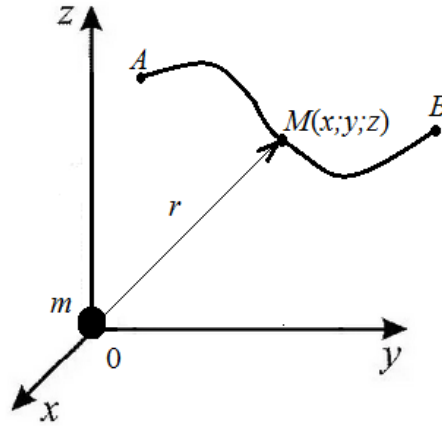


Рис. 64

В точке $M(x, y, z)$ для $\overline{OM} = \vec{r}$ по закону всемирного тяготения Ньютона $\vec{F} = \gamma \frac{m \cdot 1}{r^2} \cdot \frac{\overline{MO}}{r}$ (γ – гравитационная постоянная), так как $\overline{MO} = -\overline{OM}$, то по отношению к $\vec{r}$ запишем её в скалярном виде $F = -\gamma \frac{m}{r^2}$. Её проекция на ось

Ox будет $F_x = -\gamma \frac{m}{r^2} \cdot \cos \alpha = -\frac{\gamma m}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\gamma m \frac{x}{r^3}$, аналогично $F_y = -\gamma m \frac{y}{r^3}$,

$F_z = -\gamma m \frac{z}{r^3}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Проверьте для векторного поля

$\vec{F} = -\gamma m \left\{ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\}$ условие $\text{rot} \vec{F} = 0$, то

есть поле потенциально. Работа $A = \int_{\cup AB} \vec{F} d\vec{l} = \int_{\cup AB} F_x dx + F_y dy + F_z dz =$

$= \int_{\cup AB} \left[-\frac{\gamma m x}{r^3} dx - \frac{\gamma m y}{r^3} dy - \frac{\gamma m z}{r^3} dz \right] = -\gamma m \int_{\cup AB} \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3}$. Так как $r^2 = x^2 +$

$+y^2 + z^2$, то дифференциал $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, $2rdr = 2xdx + 2ydy + 2zdz$ и после сокращения на два выражение в числителе равно rdr , тогда

$$-\gamma m \int_{\cup AB} \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} = -\gamma m \int_{\tau.A}^{\tau.B} \frac{rdr}{r^3} = -\gamma m \int_{\tau.A}^{\tau.B} r^{-2} dr = -\gamma m \cdot \left(\frac{r^{-1}}{-1} \right) \bigg|_{\tau.A}^{\tau.B} = \frac{\gamma m}{r} \bigg|_{\tau.B} -$$

$-\frac{\gamma m}{r} \bigg|_{\tau.A}$. Следовательно, функция $\frac{\gamma m}{r} = \frac{\gamma m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ является потенциалом

поля тяготения.

Замечание. Сравните с одномерной задачей при вычислении второй космической скоростью (пример 18 на стр. 51 [1]).

Рассмотрим частный случай Земли, точка лежит на её поверхности, то есть примерно на расстоянии радиуса Земли R от центра, а точка B на высоте h от поверхности Земли, то есть примерно на расстоянии $R + h$. Тогда работа $A = \frac{\gamma m}{R + h} - \frac{\gamma m}{R} = \gamma m \frac{R - R - h}{(R + h)R} = -\gamma m \frac{h}{(R + h)R}$ (работу против силы притяжения мы естественно будем считать отрицательной, а накопленная потенциальная энергия $\Pi = -A = \gamma m \frac{h}{(R + h)R} \approx \frac{\gamma m}{R^2} h$ при $0 < h \ll R$ в сумме $R + h$ вторым слагаемым можно пренебречь и считать, что $R + h \approx R$). В только что упомянутом примере 18 отличие от нашего случая в том, что масса Земли обозначена M и было отмечено, что $g = \frac{\gamma m}{R^2}$. Поэтому накопленная энергия при поднятии на высоту h тела единичной массы, а любым путем из точки A в точку B потенциальная энергия равна $\Pi_1 = gh$. Если обозначить массу тела m_T , то получится известная формула $\Pi = m_T gh$.

§4. Соленоидальные векторные поля. Гармонические поля

Определение 8. Векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ называют **соленоидальным**, если его дивергенция обращается в нуль:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \quad (8.22)$$

Из теоремы Остроградского-Гаусса по формуле (8.12)

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV = 0, \quad (8.23)$$

то есть для таких полей поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

В силу формулы (8.19) дивергенция от $\operatorname{rot} \vec{F}$ равна нулю, следовательно, любое векторное поле $\vec{F}_1 = \operatorname{rot} \vec{F}$, являющееся ротором произвольного поля $\vec{F}$, будет соленоидальным.

Пример 7. Проверить, что векторное поле

$$\vec{F} = \left\{ e^x z^5 \sin y, e^x z^5 \cos y - \frac{x^2 \sin y}{3\sqrt[3]{z^2}}, x^2 \cdot \sqrt[3]{z} \cos y \right\} \text{ соленоидально.}$$

$$\text{Решение. } \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (e^x z^5 \sin y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(e^x z^5 \cos y - \frac{x^2 \sin y}{3\sqrt[3]{z^2}} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} (x^2 \cdot \sqrt[3]{z} \cos y) = e^x z^5 \sin y - e^x z^5 \sin y - \frac{x^2 \cos y}{3\sqrt[3]{z^2}} + x^2 \cos y \cdot \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} = 0. \text{ Следова-}$$

тельно, данное поле соленоидально.

Пример 8. Пусть поле $\vec{F}$ соленоидально. Рассмотрим трубку, ограниченную векторными линиями (рис. 65).

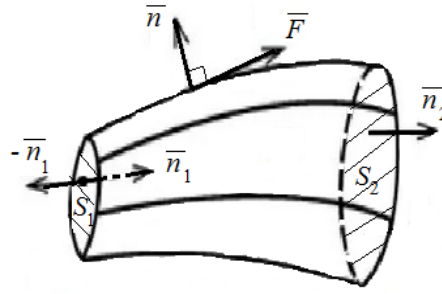


Рис. 65

Покажем, что потоки через любое сечение трубки (в одном направлении) одинаковы. Действительно, в силу (8.23) полный поток $\oiint_S \vec{F} \vec{n} d\sigma = 0$,

$-\iint_{S_1} \vec{F} \vec{n} d\sigma + \iint_{S_{бок}} \vec{F} \vec{n} d\sigma + \iint_{S_2} \vec{F} \vec{n} d\sigma = 0$ (мы взяли первый интеграл со знаком «минус», так как в формуле (8.23) все векторы смотрят по одну сторону от поверхности, например, наружу; нас интересует движение (без ущерба общности будем считать слева направо), тогда при переходе к противоположной стороне поверхности интеграл меняет знак). Так как по определению векторных линий для боковых стенок трубки $\vec{n} \perp \vec{F}$, то $\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$ и, соответственно, $\iint_{S_{бок}} \vec{F} \vec{n} d\sigma = 0$.

Из оставшейся разности $-\iint_{S_1} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_{S_2} \vec{F} \vec{n} d\sigma$ следует $\iint_{S_1} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_{S_2} \vec{F} \vec{n} d\sigma$, что и требовалось доказать.

Замечание. Соленоидальное поле еще называют трубчатым, и оно свободно от источников и стоков (см. ситуацию а) на стр. 88).

Гармонические поля

Если поле одновременно и потенциально, и соленоидально, то оно называется **гармоническим** или **лапласовым**.

Так как поле $\vec{F}$ потенциально, то по определению $\vec{F} = \text{grad} u$ для потенциала этого поля $u = u(x, y, z)$. Так как поле $\vec{F}$ соленоидально, то по определению $\text{div} \vec{F} = 0$. Подставив $\vec{F} = \text{grad} u$, получим $\text{div} \text{grad} u = 0$. Но по свойству 4 (стр. 95) $\text{div} \text{grad} u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ даёт оператор Лапласа. Следовательно, потенциал $u = u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (8.24)$$

его решения называются гармоническими функциями.

Замечание. Проверьте, что потенциал $u(x, y, z) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ поля тяготения, найденный в примере 6 является решением уравнения Лапласа (8.24).

В заключение приведем удивительный факт о разложении произвольного векторного поля $\bar{F}$ на сумму потенциального вектора $\bar{F}_\Pi$ и соленоидального вектора $\bar{F}_C$:

$$\bar{F} = \bar{F}_\Pi + \bar{F}_C, \quad (8.25)$$

как уже отмечалось выше $\text{rot}\bar{F}_\Pi = 0$, а по определению $\text{div}\bar{F}_C = 0$. По определению $\bar{F}_\Pi = \text{grad}u$, где $u = u(x, y, z)$ пока неизвестная нам скалярная функция. Тогда $\bar{F}_C = \bar{F} - \text{grad}u$, и из соленоидальности поля $\bar{F}_C$ $\text{div}\bar{F}_C = \text{div}\bar{F} -$

$-\text{div}\text{grad}u = 0$. Так как только что отмечалось $\text{div}\text{grad}u = \Delta u$, то получим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка $\Delta u = \text{div}\bar{F}$ или в развернутом виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (8.26)$$

Полученное уравнение, называемое **уравнением Пуассона** (отметим, что как следствие, если само поле $\bar{F}$ соленоидально, то мы получим уравнение Лапласа (8.24)), которое всегда имеет решение (и даже бесчисленное множество их) и возможность разложения (8.25) доказана.

Можно решить и обратную задачу векторного анализа: пусть для некоторого векторного поля $\bar{F}$ известны его расхожимость $\text{div}\bar{F}$ (скалярная функция) и вектор вихря $\text{rot}\bar{F}$. Тогда, если $\text{div}\text{rot}\bar{F} = 0$, то можно найти $\bar{F}$ с точностью до произвольной гармонической функции. Если еще даны «граничные условия», то вектор $\bar{F}$ восстанавливается по $\text{div}\bar{F}$ и $\text{rot}\bar{F}$ однозначно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вы изучили один из важнейших и сложнейших разделов математического анализа — интегрирование. Прежде всего надо хорошо овладеть техникой интегрирования, для чего надо вложить много труда. Но без этого будет невозможно продолжить дальнейшее обучение по таким дисциплинам, как физика, теоретическая механика, сопротивление материалов и др. Но в рамках самой математики, а в дальнейшем при изучении многих специальностей требуется решать дифференциальные уравнения — уравнения с производными, с помощью которых описывается громадное количество процессов в природе и технике. В конце пятой главы был указан путь по применению криволинейных интегралов второго рода для решения дифференциального уравнения в полных дифференциалах, но даже для простейшего дифференциального уравнения $y' = f(x)$ ответ находится только интегрированием: $y = \int f(x)dx$.

В данном пособии изложена построенная на протяжении столетий в математическом анализе теория интеграла. Далее вы будете изучать такой мощный метод, как разложение подынтегральной функции в бесконечный степенной ряд, позволивший находить ответ для неэлементарных функций (в случае «неберущихся» интегралов), но тоже в виде такого ряда. Отметим еще два пути развития интеграла в современной математике. Первый — это снятие ограничения непрерывности на подынтегральную функцию (основного свойства классического математического анализа), что привело к появлению интегралов Стильтеса (для функций с ограниченной вариацией) и интегралов Лебега (для вообще неэлементарных функций, например, интеграл Лебега от функции Дирихле, равной единице в иррациональных точках и нулю в рациональных на отрезке $[a, b]$. Интеграл Лебега равен длине этого отрезка $b - a$). Второй путь — сначала увеличение размерности, то есть введение n -мерных интегралов (мы дошли до $n=3$), затем рассмотрение бесконечномерных пространств (например, обобщение интеграла Римана в банаховом пространстве). Следует также отметить мощнейшее обобщение формулы Грина для аналитических функций при интегрировании функций комплексного переменного по замкнутому контуру.

Наконец, в функциональном анализе можно рассматривать те же функции, как векторы различных функциональных пространств, в частности ввести в них длину и скалярное произведение с помощью интегралов (например, с помощью свойства II на стр. 39 [1] — обнулении интегралов от тригонометрических функций синусов и косинусов по длине периода, доказать, что функции $\sin nx$, $\cos nx$ образуют ортонормированный базис на отрезке $[-\pi, \pi]$).

Авторы надеются, что данное пособие позволит студентам и магистрам научиться применять интегралы в тех сферах, где они понадобятся, что позволит оценить мощь и красоту теории интегрирования, откроет перед ними возможность более глубокого и заинтересованного изучения математики. Желающих расширить свои познания в теории интеграла отсылаем к обширной библиографии по этой тематике, часть из которой приведена в библиографическом списке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кущев А. Б. Интегральное исчисление. Неопределенный и определенный интеграл: учебно-методическое пособие / А. Б. Кущев, С. С. Сумера, В. А. Шаруда; ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет». — Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. — 95 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. I (гл. VIII, X-XII) / Н. С. Пискунов. — М.: «Наука», 1978. — 456 с. — М.: Интеграл-Пресс, 2008. — 416 с.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. II (гл. XIV, XV) / Н. С. Пискунов. — М.: «Наука», 1978. — 456 с. — М.: Интеграл-Пресс, 2008. — 416 с.
4. Фихтенгольц Г. Н. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т. III (гл. 15-18) / Г. Н. Фихтенгольц. — М.: «Наука», 1969. — 656 с.
5. Бермант Г. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа / Г. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — Спб.; М.; Краснодар: Лань, 2009. — 735 с.
6. Викулина З. Г., Ощепкова С. Н., Седаев А. А. Методические указания и контрольные задания к типовому расчету № 4 по курсу высшей математики (Функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы) / З. Г. Викулина, С. Н. Ощепкова, А. А. Седаев. — ВГАСУ. — Воронеж, 2003. — 43 с.
7. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — Спб.: Профессия, 2008. — 432 с.
8. Демидович Б. П. Задачи и упражнения по курсу математического анализа: учебное пособие / Б. П. Демидович. — М.; Владимир, 2010. — 495 с.
9. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие, ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 7-е изд., испр. — М.: ООО «Изд-во Очник», ООО «Изд-во Мир и образование», 2009. — 357 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 3. Функции нескольких переменных	4
§1. Определение функции нескольких переменных. Область определения, график и линии уровня функции двух переменных, их предел и непрерывность	4
§2. Частные производные и их геометрический смысл. Частные производные высших порядков	7
§3. Полный дифференциал функции двух переменных, его геометрический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях и для оценки погрешностей. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.....	9
§4. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование неявных функций	13
§5. Производная по направлению. Градиент функции, его геометрический смысл	14
§6. Экстремум функции двух переменных, его необходимое и достаточное условия. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области	17
§7. Метод наименьших квадратов	21
Глава 4. Двойные интегралы	24
§1. Двойной интеграл, его геометрический смысл и свойства.....	24
§2. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат	26
§3. Интегрирование двойного интеграла в полярной системе координат	30
§4. Вычисление площадей плоских фигур с помощью двойного интеграла.....	32
§5. Вычисление объемов тел с помощью двойного интеграла.....	34
§ 6. Применение двойных интегралов в механике	38
§7. Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла	41
Глава 5. Криволинейные интегралы	44
§ 1. Криволинейный интеграл первого рода, его свойства и вычисление	44
§2. Приложения криволинейного интеграла первого рода.....	48
§3. Криволинейный интеграл второго рода, его физический смысл, свойства, вычисление	50
§4. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру. Формула Грина	54

§5. Криволинейные интегралы второго рода, не зависящие от пути интегрирования. Восстановление функции по её полному дифференциалу	56
§6. Приложения криволинейного интеграла второго рода	60
Глава 6. Тройные интегралы	62
§1. Определение тройного интеграла, его свойства и вычисление	62
§2. Замена переменных в тройном интеграле. Переход к цилиндрической и сферической системам координат	65
§3. Приложения тройного интеграла	68
Глава 7. Поверхностные интегралы	72
§1. Поверхностные интегралы первого рода, их свойства, вычисление и приложения	72
§2. Поверхностный интеграл второго рода, его свойства и физический смысл	76
§3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода	78
§4. Формула Стокса	82
§5. Формула Остроградского-Гаусса	84
Глава 8. Элементы теории поля	86
§1. Векторное поле. Основные понятия теории поля: градиент, дивергенция, циркуляция и ротор	86
§2. Оператор Гамильтона. Основные формулы теории поля	92
§3. Потенциальные векторные поля	94
§4. Соленоидальные векторные поля. Гармонические поля	97
Заключение	100
Библиографический список	101

Учебное издание

Кущев Анатолий Борисович
Сумера Светлана Сергеевна
Акчурина Людмила Васильевна

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.
Функции нескольких переменных и их интегрирование.
Элементы теории поля

Учебное пособие

Рисунок на обложке выполнен авторами

Редактор Ярцева Ю. А.

Подписано в печать 20.05.2024.
Формат 60х84 1/16. Бумага писчая.
Уч.-изд. л. 4,2. Усл. печ. л. 6,0. Тираж 350 экз.
Заказ №

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

Отдел оперативной полиграфии издательства ВГТУ
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84