ФГ БОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для организации самостоятельной работы по дисциплине «Дополнительные главы математики» направление подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», профиль «Электроприводы и системы управления электроприводов»

Составители: А.А. Катрахова, В.С. Купцов

Sam- dop .docx	346 К байт	14.03.2015	уч.-изд. 1.4 л.
(название файла)	(объем файла)	(дата)	(объем издания)

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет »

(Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для организации самостоятельной работы по дисциплине «Дополнительные главы математики» направление подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», профиль «Электроприводы и системы управления электроприводов»

Воронеж 2015

Составители: канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов

УДК 517

Методические указания для организации самостоятельной работы по дисциплине «Дополнительные главы математики» направление подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», профиль «Электроприводы и системы управления электроприводов» / ФГ БОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А.А. Катрахова, В.С. Купцов. Воронеж, 2015. 24 с.

Методическое указание содержат теоретический материал, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Sam- dop.docx »

Ил. 4. Библиогр.: 9 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. М.В. Юрьева

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Высшая математика для будущих магистров данного профиля является не только основой фундаментальной подготовки, но и обязательной базой для изучения остальных общетехнических специальных дисциплин и успешности всей последующей практической деятельности. Изучение высшей математики должно проходить студентами целенаправленно во взаимосвязи с другими дисциплинами и ориентацией на конкретное практическое приложение изученного материала. Это возможно только при условии эффективного сочетания обязательных учебных занятий и продуктивной самостоятельной работы студентов.

ЗАНЯТИЕ № 1-3

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Литература: [4], с. 12-18, 54-224.

Контрольные вопросы и задания

1. Вывести уравнение колебания струны.
2. Найти решение задач о колебаниях бесконечной и полуограниченной струны (метод Даламбера).
3. Какова физическая интерпретация формулы Даламбера
4. Задача о продольных колебания стержняю
5. Как решается задача колебания стержня с одним закрепленным концом?
6. Задача о продольном ударе груза по стержню.
7. Метод Фурье решения задачи о колебаниях конечной струны с закрепленными концами.
8. Как решается задача о вынужденных колебаниях струны с закрепленными концами?

9. В чем заключается задача Штурма-Лиувилля для уравнений гиперболического типа?
10. Как применятся формула Грина для уравнений гиперболического типа?
11. Вывести уравнение колебания мембраны.

Примеры решения задач

Пример 1. *Ограниченная струна*. Рассмотрим теперь струну длины l, закрепленную на концах. Задача о колебании такой струны сводится к нахождению решения волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, при граничных условиях $u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0$ и

начальных условиях $u\big|_{t=o} = \varphi_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \varphi_1(x) \ (0 \le x \le l)$.

Решение Даламбера $u(x,t) = \Theta_1(x-at) + \Theta_2(x+at)$ конечно, годится в этом случае, но определение Θ_1 и Θ_2 по формулам:

$$\Theta_1(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)dz, \ \Theta_2(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)dz$$

встречает здесь то затруднение, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$а следовательно, Θ_1(x) и Θ_2(x), определены лишь в промежутке $(0,l)$ согласно физическому смыслу задачи, а аргументы x±at могут лежать и вне этого промежутка. Стало быть, для возможного применения решения нужно продолжить функции Θ_1(x) и Θ_2(x) или, что вполне эквивалентно, функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ вне промежутка $(0,l)$. С точки зрения физической, это продолжение сводится к определению такого начального возмущения бесконечной струны, чтобы движение ее участка $(0,l)$ было то же самое, как если бы он, был закреплен на концах, а оставшаяся часть струны была бы отброшена. Для продолже-

ния функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ воспользуемся граничными условиями. Принимая во внимание граничные условия , получим: $\Theta_1(-at)+\Theta_2(at)=0, \Theta_1(l-at)+\Theta_2(l+at)=0$ или, обозначая at через x, $\Theta_1(-x)=-\Theta_2(x), \Theta_1(l-x)=-\Theta_2(l+x)$. Когда x изменяется в промежутке (0,*l*), то первая из формул определяет функцию Θ_1 (x) в промежутке (— *l*, 0), вторая — функцию Θ_2 (x) в промежутке (*l*, 2*l*). Стало быть, обе функции Θ_1 (x) и Θ_2 (x) вполне определяются на промежутке длины 2*l*. Далее следует, что $\Theta_2(2l+x)=-\Theta_1(-x)=\Theta_2(x), \quad \Theta_1(2l+x)=\Theta_1(x)$,
т. е. функции Θ_1 (x) и Θ_2 (x) являются функциями периодическими с периодом 2*l*. Итак, функции Θ_1 (x) и Θ_2 (x) определены при всех вещественных x. Принимая во внимание, что

$$\varphi_0(x)=\Theta_1(x)+\Theta_2(x), \quad \varphi_1(x)=a\left[\Theta'_2(x)-\Theta'_1(x)\right],$$

найдем $\varphi_0(-x)=\Theta_1(-x)+\Theta_2(-x)=-\Theta_2(x)-\Theta_1(x)=-\varphi_0(x)$,

$$\varphi_1(-x)=a\left[\Theta'_2(-x)-\Theta'_1(-x)\right]=a\left[\Theta'_1(x)-\Theta'_2(x)\right]=-\varphi_1(x),$$

$$\varphi_0(x+2l)=\varphi_0(x), \ \varphi_1(x+2l)=\varphi_1(x).$$

Эти формулы показывают, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ продолжаются из промежутка (0, *l*) в промежуток (— *l*, 0) нечетным образом, а затем с периодом 2*l*. Чтобы полученное решение имело непрерывные производные до второго порядка включительно, нужно, помимо условий дифференцируемости функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, потребовать еще выполнения условий

$$\varphi_0(l)=\varphi_0(0)=0, \ \varphi_0(l)=\varphi_0''(0), \ \varphi_1(l)=\varphi_1(0)=0$$

Это есть условия согласования начальных и граничных условий. Выясним, какое действие оказывают закрепленные концы струны на ее колебания. Для этого обратимся к полуплоскости xOt.

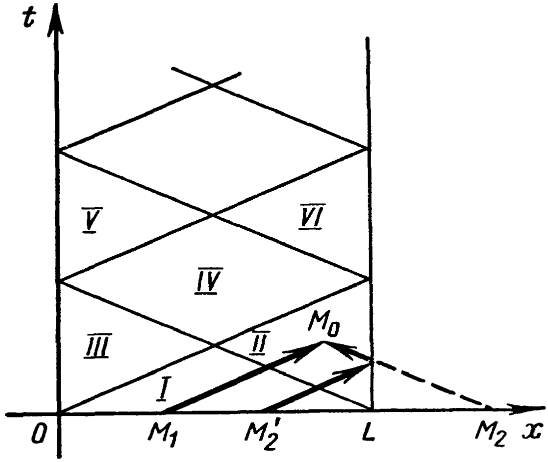


Рис.1.1

Ввиду ограниченности струны надо рассматривать только полосу верхней полуплоскости t > 0, заключающую между прямыми x = 0 и x = *l* (рис. 1.1). Проведем через точки O и L характеристики до встречи с противоположными границами полосы и т. д. Мы разобьем, таким образом, полосу на области (I), (II), (III), ...

Точки области (I) соответствуют тем моментам времени t, когда к точкам x струны доходят прямая и обратная волны, вошедшие в начальный момент времени из внутренних точек струны. Следовательно, фиктивно добавленные бесконечные части струны еще на процесс колебания не влияют. Точки вне области (I) соответствуют тем моментам времени t, когда к точкам x струны доходят уже волны, вышедшие в начальный момент времени из фиктивной части струны. Возьмем, например, точку M_0 (x_0, t_0) в области (II). Так как $u(x_0,t_0)=\Theta_1(x_0-at_0)+\Theta_2(x_0+at_0)$, то в этой точке имеются две волны одна— прямая, дошедшая от начально возмущенной точки M_1 струны с абсциссой $x = x_o — at$, другая—обратная из точки M_2 с абсциссой $x = x_o+at$, причем в данном случае M_1 есть реальная точка струны, M_2 — фиктивная. Нетрудно заменить ее реальной точкой, заметив, что, в силу, $\Theta_2(x_0+at_0)=\Theta_2(l+x_0+at_0-l)=-\Theta_1(2l-x_0-at_0)$, и, таким образом, обратная волна $\Theta_2(x_0+at_0)$ есть не что иное, как прямая волна $-\Theta_1(2l-x_0-at_0)$, вышедшая в начальный момент времени из точки M'$_2$ $(2l-x_0-at_0)$ (симметричной с M_2 относительно точки L), которая, дойдя до конца струны L в момент

$t=\dfrac{l-(2l-x_0-at_0)}{a}=\dfrac{x_0+at_0-l}{a}$, изменила свое направление и знак на обратный и к моменту времени t_0 дошла в таком виде до точки M_0. Таким образом, действие закрепленного конца x = l свелось к отражению волны смещения, связанному с переменой знака смещения и с сохранением его абсолютной величины. То же явление мы обнаружим и для волн, дошедших до конца x = 0; в точках области (III) мы будем иметь две волны: обратную и прямую, отраженную от конца x = 0. В точках областей (IV), (V), (VI), ... получим волны, которые претерпели несколько таких отражений от обоих концов струны. Из предыдущих рассуждений следует, что колебание струны, закрепленной на концах, будет периодическим с периодом— $\dfrac{2l}{a}$.

Пример 2. Решить неоднородное уравнение гиперболического типа

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2t,\ 0\le x\le l,\quad t\ge 0.$ При краевых условиях $u|_{x=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0,$ и нулевых начальных условиях $u|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$.

Задача описывает вынужденные колебания однородной струны, закрепленной на концах, под действием внешней возмущающей силы $f(x,t)=2t$. Применяя метод Фурье разделения переменных, полагаем $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ для решения соответствующего однородного уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях. Подставив $u(x,t)$ это уравнение, получаем равенство

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} \ ,$$

Возможное лишь в случае, если обе части его не зависят ни от *x,* ни от *t,* т.е. представляет собой одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через с: $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \text{с}$.

Используем краевые условия:

$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0$ следовательно $X(0) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) =$ $= X'(l)T(t) = 0$ следовательно $X'(l) = 0$.

Таким образом, приходим <u>к задаче Штурма-Лиувилля:</u> найти такие значения параметра с, при которых существуют <u>нетривиальные</u> (т.е. отмеченные от тождественного нуля) <u>решения</u> уравнения, удовлетворяющие краевым условиям

$$X''(x) - cX(x) = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X'(l) = 0 \qquad (*)$$

При с ≥ 0 в общем решение уравнения, согласно краевым условиям, $c_1=0$, $c_2=0$ и решение задачи (*) становятся $X(x) \equiv 0$ – случаи не интересны. При с>0, с=$-\lambda^2$: общее решение вида: $X(x)=c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x$, $X(x)=-c_1 \lambda \sin\lambda x+c_2 \lambda\cos\lambda x$. $X(0)=c_1 1+c_2 0=c_1=0$, $X'(l)=c_2 \lambda \cos\lambda l=0$, $\forall c_2 \neq 0$ считаем. Поэтому $\cos\lambda_1=0$. Находим ее собственные значения $\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{1}{l}$, и соответствующие им собственные функции $X_k(x)=\text{in}\lambda_k x$, k=0,1,2,…,определяемые с точностью до постоянного множителя, который мы полагаем равным единице. Следовательно, лишь при с=$-\lambda^2_к$, к=0,1,2,…, имеем <u>нетривиальны</u>е решения задачи (*).

Теперь решение задачи ищем в виде Фурье

$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\sin(\lambda_k x)$, где $T_k(0) = 0, T'_k(0) = 0$

Подставляя $u(x,t)$ в основное уравнение , получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}(T''_k(t) + \lambda_k^2 T_k(t))\sin(\lambda_k x) = 2t \cdot 1.$$

Для нахождения функций $T_k(\mathrm{t})$ разложим функцию 1 в ряд Фурье по синусам на интервале(0,1): $1=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(\lambda_k x)$, Так как $\int_0^1 sin^2(\lambda_k x)\,dx=\frac{1}{2}$, то получаем уравнение

$$T''_k(t)+\lambda_k^2 T_k(\mathrm{t})=\frac{4t}{\lambda_k},$$

Общее решение которого, имеет вид

$$T_k(\mathrm{t})=\mathrm{A}\sin(\lambda_k t)+B\cos(\lambda_k t)\frac{4t}{\lambda_k^3};$$

Значения неопределенных коэффициентов: A=$-\frac{4t}{\lambda_k^4}$, B=0. И

$$T_k(\mathrm{t})=\frac{4t}{\lambda_k^3}-\frac{4t}{\lambda_k^4}sin(\lambda_k t).$$

Окончательно:

$$u(x,t)=4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^4}(\lambda_k t-\sin(\lambda_k t))sin(\lambda_k t),\ \ \lambda_k=\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right).$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [6], 86-110, 120-123;

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа, реферат.

ЗАНЯТИЯ № 4-6

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Литература: [4], с. 24-28, 448-488;

Контрольные вопросы и задания

1. Вывести уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле.
2. Найти решение задачи теплопроводности бесконечного и полуограниченного стержня.

3. Как решается задача теплопроводности в бесконечном цилиндре.
4. Как решается задача неоднородных уравнений параболического типа ?
5. Решение задачи теплопроводности в конечном стержне.
6. Решение задачи теплопроводности в однородном шаре.

7. Можно ли применять функцию Грина для уравнений параболического типа?

Примеры решения задач

Пример 3. *Решить неоднородное уравнение параболического типа* $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1-x)t$, *0<x<1, t>0.*

При начальных условиях $u|_{t=0}=0$ и однородных краевых условиях $u|_{x=1}=0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$

Применяя метод Фурье разделения переменных, полагаем $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ для решения соответствующего однородного уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при наших краевых условиях . Приходим к задаче Штурма-Лиувилля $X''(x)+\lambda^2X(x)=0$, $X''(0)=0$, $X(1)=0$. Находим собственные значения $\lambda_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0,1,2,\ldots$и соответствующие им собственные функции $X_k(x)=\cos\lambda_k x$. Решение задачи ищем в виде
$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cos(\lambda_k x)$, где $T_k(0)=0$.

Подставляя $u(x,t)$ в основное уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(T'_k(t)+\lambda_k^2T_k(t))\cos(\lambda_k x)=(1-x)t$$

Для нахождения функции $T_k(t)$ разложим функцию 1-x в ряд Фурье по косинусам на интервале (0,1):

$$1-\mathrm{x}=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, cos(\lambda_k x)$$

Так как $a_k = 2\int_0^1 (1-x) cos\,(\lambda_k x)\, dx = \frac{2}{\lambda_k^2}$, то получаем

$$T'_k(t) + \lambda_k^2 T_k(\mathrm{t}) = \frac{2}{\lambda_k^2} t \text{ при условии } T_k(0) = 0\ .$$

Решая задачу Коши, находим ее решение

$$T_k(t) = \frac{2}{\lambda_k^6}\left(e^{-\lambda_k^2 t} + \lambda_k^2 t - 1\right)$$

Подставляя функцию $T_k(t)$ в формулу для u(x,t), находим искомое решение задачи :

$u(x,t) = 2\frac{1}{\lambda_k^6}\left(e^{-\lambda_k^2 t} + \lambda_k^2 t - 1\right) cos(\lambda_k x)$, где $\lambda_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

В данной задаче рассматривается ограниченный стержень длины l=1 и решается уравнение теплопроводности стержня, где $u(x,t)$ - температура стержня в точке x в момент времени t.

Пример 4. Пусть в точках x, $x \in [0,\infty)$ стержня задано начальное распределение температур $\varphi(x)$. Требуется найти температуру $u(t,x)$ стержня в любой точке $x \geq 0$ в момент времени $t > 0$ при условии, что граничная точка $x = 0$ либо поддерживается при ненулевой температуре, либо теплоизолирована. Требуется найти решение $u(t,x)$ дифференциального уравнения $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}$ при $x \geq 0, t > 0$, удовлетворяющее начальному условию $u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x)$ и одному из граничных условий $u(t,x)\big|_{x=0} = 0$ или $\frac{\partial u(t.x)}{\partial x}\big|_{x=0} = 0$.

Чтобы решить эти задачи, рассмотрим решение задачи теплопроводности бесконечного стержня

$$u(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_a^b \varphi(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz,\text{ где } -\infty<x<\infty, t>0.$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма. Если функция $\varphi(x)$ нечетная, то решение $u(t,x)$ удовлетворяет условию $u(t,x)\big|_{x=0}=0$, если же функция $\varphi(x)$ четная, то $u(t,x)$ удовлетворяет условию $\frac{\partial u(t.x)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0.$

В самом деле, если функция $\varphi(x)$ нечетная, то $u(t,x)\Big|_{x=0}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)e^{-\frac{z^2}{2a^2t}}dz=0$ в силу нечетности подынтегральной функции. Если функция $\varphi(x)$ четная, то

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\frac{1}{a^2t}\int_{-\infty}^{\infty}(x-z)\varphi(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{2a^2t}}dz,$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{2a^3t\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}z\varphi(z)e^{-\frac{z^2}{2a^2t}}dz=0,$$

так как функция $x\varphi(x)$ четная. Чтобы получить решения задач теплопроводности полубесконечного стержня, построим продолжение функции $\varphi(x)$ на всю числовую ось Ox нечетным или четным образом, то есть построим функции

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если } x\geq 0,\\ -\varphi(-x), & \text{если } x<0;\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если } x\geq 0,\\ \varphi(-x), & \text{если } x<0;\end{cases}$$

Решение задачи теплопроводности

для бесконечного стержня с начальным условием $u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi_1(x)$ $\quad u_1(t,x)\Big|_{x=0}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz$ удовлетворяет при $x\geq 0$
основному дифференциальному уравнению , начальному условию $u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi(x)$ и граничному условию $u(t,x)\big|_{x=0}=0,$ то есть функция $u_1(t,x),$рассматриваемая только при $x\geq 0$, является решением . Точно так же функция $u_2(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz,$ рассматриваемая только при $x\geq 0$, является решением основного дифференциального уравнения, удовлетворяет начальному условию и граничному условию $\frac{\partial u(t.x)}{\partial x}\big|_{x=0}=0.$

Решения $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ можно преобразовать:

$$u_1(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi_1(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz+\int\limits_{0}^{\infty}\varphi_1(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz\right]=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[-\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(-z_1)e^{-\frac{(x-z_1)^2}{4a^2t}}dz_1+\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz\right],$$

$$u_2(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(-z_1)e^{-\frac{(x-z_1)^2}{4a^2t}}dz_1+\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz\right].$$

Если в первых интегралах сделать замену переменной $z_1=-z,$ то получим

$$u_1(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[-\int_0^{-\infty}\varphi(z)e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2t}}dz+\int_0^{\infty}\varphi(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz\right],$$

$$u_2(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int_0^{\infty}\varphi(z)e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2t}}dz+\int_0^{\infty}\varphi(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz\right],$$

или

$$u_1(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\varphi(z)\left[e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2t}}\right]dz\,,$$

$$u_2(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\varphi(z)\left[e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2t}}\right]dz\,.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Задача. Дана неограниченная пластина толщиной 2R при температуре $0^\circ C$. Пластина нагревается с обеих сторон одинаково постоянным тепловым потоком q.

Найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени t > 0.

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{a^2q}{kR}\left(t-\frac{R^2-3x^2}{6a^2}\right)-\frac{2qR}{k\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2t}\cos\frac{n\pi x}{R}\,,$$

где k—коэффициент внутренней теплопроводности. Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ при условиях $k\frac{\partial u}{\partial x}+q\Big|_{x=-R}=0,\quad -k\frac{\partial u}{\partial x}+q\Big|_{x=R}=0,\quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad u\Big|_{t=0}=0.$

Решить задачи: [6], 131-136, 145-149,154-157,168-170;

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа, реферат.

ЗАНЯТИЯ № 7-9

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Литература: [4], с. 28-29, 224-328;

Контрольные вопросы и задания

1. Какой общий вид уравнения эллиптического типа?
2. Основные граничные задачи для уравнения эллиптического типа?
3. Как найти фундаментальные решения для уравнения эллиптического типа?
4. Как применяется функция Грина для нахождения решений уравнения эллиптического типа?
5. Какие условия разрешимости граничных задач для уравнения эллиптического типа?
6. Что вы знаете о гармонической функции?
7. Решение задачи Дирихле с помощью функции Грина
8. Как найти функцию Грина для полупространства?
9. Как построить функцию Грина для полуплоскости?
10. Решение задачи Дирихле для круга и шара с помощью функции Грина.
11. Решение задачи Неймана для круга методом Фурье.

Пример решения задачи

Пример 5. *Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье.*

В полярной системе координат задача формулируется следующим образом. Найти функцию $u(r,\varphi)$, удовлетворяющую при r<R дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$ и условию $u(r,\varphi)|_{r=R} = \bar{u}(\varphi)$.

Найдем сначала частные решения уравнения в виде $u(r,\varphi) = X(r)Y(\varphi)$, где $X(r), Y(\varphi)$ – ненулевые функции, удовлетворяющие условиям: X(0) ограничено, $Y(\varphi + 2\pi) = Y(\varphi)$.

Дифференцируя функцию $u(r,\varphi) = X(r)Y(\varphi)$ по r и φ и подставляя результаты дифференцирования в наше уравнение , получим

$$X''(r)Y(\varphi) + \frac{1}{r}X'(r)Y(\varphi) + \frac{1}{r^2}X(r)Y(\varphi) = 0, \text{или } \frac{r^2 X''(r) + rX'(r)}{X(r)} = -\frac{Y''(\varphi)}{Y(\varphi)} = \lambda.$$

Отсюда следует, что

$$Y''(\varphi) + \lambda\, Y(\varphi) = 0,\ r^2 X''(r) + rX'(r) - \lambda X(r) = 0.$$

Уравнение для Y(φ) имеет решения, удовлетворяющие условию $Y(\varphi + 2\pi) = Y(\varphi)$ только при $\lambda = n^2$, и эти решения имеют вид $Y_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, n = 0,1,2, \ldots$ Уравнение $r^2 X''(r) + rX'(r) - n^2 X(r) = 0$ имеет два решения линейно независимых решения r^n и r^{-n}. Второе решение r^{-n} не ограничено в точке r=0. Поэтому полагаем $X_n(r) = r^n$. Таким образом, мы получили бесконечно много частных решений: $u_n(r,\varphi) = p^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), n = 0,1,2, \ldots$ Решение $u_0(r,\varphi)$ удобнее записать в виде $u_0(r,\varphi) = \frac{A_0}{2}$.

Решение поставленной задачи будем искать в виде ряда

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n((A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

коэффициенты которого A_0, A_n, B_n находятся таким образом, чтобы функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяла граничному условию . Полагая в (3.42) r=R получим

$$\tilde{u}(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n((A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Отсюда следует, что $A_0, R^n A_n, R^n B_n$ являются коэффициентами Фурье для функции $\tilde{u}(\varphi)$на отрезке [0,2π]. Поэтому

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\theta)\, d\theta, A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Подставляя значения A_0, A_n, B_n в решение, получим

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\theta) \cos n\theta d\theta \cos n\varphi + \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\theta) \sin n\theta d\theta \sin n\varphi\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\theta) d\theta + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \cdot \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\theta) \cos n(\theta - \varphi) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - \varphi) d\theta\right].$$

Обозначим $\theta - \varphi = \omega$ и найдем сумму ряда, стоящего в квадратных скобках формулы. Имеем

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\omega = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\omega =$$

$$= -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in\omega} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{-in\omega}.$$

Ряды $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in\omega}$ и $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{-in\omega}$ геометрические со знаменателями $q_1=\frac{r}{R}e^{i\omega}$ и $q_2=\frac{r}{R}e^{-i\omega}$. Так как решение ищется в круге $r<R$, то $|q_1|=|q_2|=\frac{r}{R}<1$, то ряды $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in\omega}$ и $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{-in\omega}$ сходятся. Суммируя эти ряды,

Получим

$$1+2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n cosn\omega=-1+\frac{1}{1-\frac{r}{R}e^{i\omega}}+\frac{1}{1-\frac{r}{R}e^{-i\omega}}=$$

$$=-1+\frac{R}{R-r(cos\omega+isin\omega)}+\frac{R}{R-r(cos\omega-isin\omega)}=$$

$$=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rrcos\omega}, \text{где } \omega=\theta-\varphi.$$

Таким образом, решение нашей задачи имеет вид

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\tilde{u}(\theta)d\theta}{R^2+r^2-2Rrcos(\theta-\varphi)}.$$

Получили другим способом решение задачи Дирихле для круга в виде интеграла Пуассона.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [6], 171-175, 181-196, 199-210 ;

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа, реферат.

ЗАНЯТИЕ № 10-18

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
Литература: [8], с. 280-412;

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается задача о брахистохроне?
2. В чем заключается задача о геодезических линиях?
3. Дать определение вариации и ее свойств.
4. Что такое функционал?
5. Дать понятие *экстремума* функционала.
6. Записать уравнения Эйлера.
7. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка и их применение.
8. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.
9. Вариационные задачи в параметрической форме.
10. Какие приложения функционал вы знаете в задачах физики?
11. Вариационные задачи с подвижными и неподвижными границами.
12. Прямые методы в вариационных задачах.
13. Метод Ритца в вариационных задачах.
14. Метод Канторовича в вариационных задачах.
15. Принцип максимума Понтрягина.
16. В чем заключаются вариационные задачи на условный экстремум.
17. Что такое односторонние вариации?
18. Поле экстремалей.

Примеры решения задач

Пример 1. На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(y')^2 - y^2 \right] dx;$$

$$y(\pi/2) = 1\ ,\ \ y(0) = 0.$$

Уравнение Эйлера имеет вид $y'' + y = 0$; его общим решением является $y=C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Используя граничные условия, получаем: $C_1=0,\ C_2=0$; следовательно, экстремум может достигаться лишь на кривой $y = \sin x$.

Пример 2.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y_2 dx\,,\ y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1.,$$

Уравнение Эйлера имеет вид $F_y=0$ или $y=0$.

Экстремаль $y = 0$ проходит через граничные точки только при $y_0 = 0$ и $y_1 = 0$ (рис. 1.2).

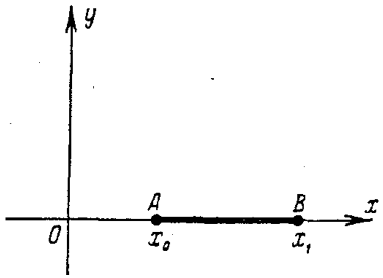


Рис.1.2.

Если $y_0 = 0$ и $y_1 = 0$, то, очевидно, функция $y=0$ реализует минимум функционала

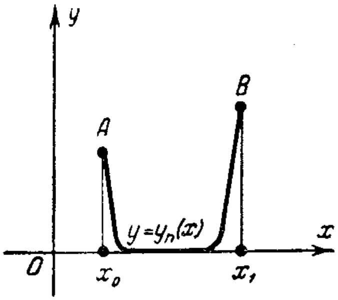
$$v = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$$

так как $v\ [y\ (x)] \geq 0$, причем $v = 0$ при $y = 0$.

Если же хотя бы одно из y_0 и y_1 не равно нулю, то минимум функционала на непрерывных функциях не достигается, что и понятно, так как можно выбрать последовательность непрерывных функций $y_n(x)$, графики которых состоят из все более и более круто спускающейся из точки (x_0, y_0) к оси абсцисс дуги кривой, затем из отрезка оси абсцисс, почти совпадающего со всем отрезком (x_0, x_1), и, наконец, возле точки x_1 круто поднимающейся к точке (x_1, y_1) дуги кривой (рис. 1.3). Очевидно, что на кривых такой последовательности значения функционала сколь угодно мало отличаются от нуля и, следовательно, нижняя грань значений функционала равна нулю, однако эта нижняя грань не может достигаться на непрерывной кривой, так как для любой непрерывной кривой $y = y(x)$, отличной от тождественного нуля, интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx > 0$$

Эта нижняя грань значений функционала достигается на разрывной функции (рис.1.4)



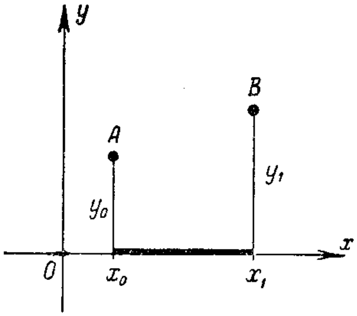


Рис. 1.3. Рис. 1.4.

$$y(x_0) = y_0 \quad y(x_0) = 0,\ x_0 < x < x_1 \quad y(x_1) = y_1$$

Функция F линейно зависит от y':

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'$$

$$v=\int_{x_0}^{x_1}\left(M+N\frac{dy}{dx}\right)d'x$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'-\frac{d}{dx}N(x,y)=0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'-\frac{\partial N}{dx}-\frac{\partial N}{\partial y}y'=0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0.$$

Но это опять, как и предыдущем случае, конечно, а не дифференциальное уравнение. Кривая $\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}=0$, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям, следовательно, вариационная задача, как правило, не имеет решения в классе непрерывных функций. Если же $\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}\equiv 0$, то $Mdx+Ndy$ является точным дифференциалом и

$$v=\int_{x_0}^{x_1}\left(M+N\frac{dy}{dx}\right)d'x=\int_{x_0}^{x_1}(Mdx+Ndy)$$

не зависит от пути интегрирования, значение функционала v постоянно на допустимых кривых. Вариационная задача теряет смысл.

Пример 3. Найти дифференциальные уравнения линий распространения света в оптически неоднородной среде, в которой скорость распространения света равна $v(x, y, z)$.

Согласно принципу Ферми свет распространяется из одной точки $A(x_0, y_0)$ в другую $B(x_1, y_1)$ по кривой, для которой время T прохождения света будет наименьшим.

Если уравнение искомой кривой $y = y(x)$ и $z = z(x)$, то

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x,y,z)}dx$$

Система уравнений Эйлера для этого функционала

$$\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\sqrt{1+y^2+z^2}}{v^2}+\frac{d}{dx}\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2}+\frac{d}{dx}\frac{z'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0$$

будет определять линии распространения света.

Пример 4. Определить экстремаль функционала

$$v[y(x)]=\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\mu y''^2+py\right)dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям: $y(-l)=0,\ y'(-l)=0,$ $y(l)=0,\ y'(l)=0$

К этой вариационной задаче сводится нахождение оси изогнутой упругой цилиндрической балки, заделанной на концах. Если балка однородна, то p и μ постоянны и уравнение Эйлера — Пуассона имеет вид

$$p+\frac{d^2}{dx^2}\left(\mu y''\right)=0 \quad \text{или} \quad y^{(4)}=-\frac{p}{\mu}$$

откуда

$$y=-\frac{px^4}{24\mu}+\ y=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$$

Используя граничные условия, окончательно находим

$$y=-\frac{px^4}{24\mu}\left(x^4-2l^2x^2+l^4\right) \quad \text{или} \quad y=-\frac{px^4}{24\mu}\left(x^2-2l^2\right)^2$$

Если функционал v имеет вид

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y', \ldots, y^n, z, z', \ldots, z^m\right) dx$$

то, варьируя только *y(x)* и считая *z(x)* фиксированным, мы находим, что функции *y(x)* и *z(x),* реализующие экстремум, должны удовлетворять уравнению Эйлера — Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^n} = 0.$$

Варьируя *z(x)* и считая *y(x)* фиксированным, получим, что те же функции должны удовлетворять уравнению

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^m} = 0.$$

Функции *z(x)* и *y(x)* должны удовлетворять системе двух уравнений

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^n} = 0,$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^m} = 0 \quad .$$

Точно так же можно рассуждать и при исследовании на экстремум функционала, зависящего от любого числа функций:

$$v[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y', \ldots, y_1^{n_1}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{n_2}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{n_m}\right) dx.$$

Варьируя какую-нибудь одну функцию y, (x) и сохраняя остальные неизменными, получим основное необходимое условие экстремума в виде: $F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} + \ldots + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y_i^{n_i}} = 0$

Пример 5. Определить экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(y''^2 - y^2 + x^2\right) dx$$

удовлетворяющую условиям:

$$y(0)=1, \quad y'(0) = 0. \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Уравнение Эйлера — Пуассона имеет вид $y^{'v} - y = 0$; его общим решением $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$ Используя граничные условия, получаем C_1 =0, C_2 = 0, C_3 =1, C_4 = 0. Итак, экстремум может достигаться лишь на кривой $y = cos\, x$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [9], 71-79, 81-90, 99-102, 146-153,193-202.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа, реферат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам выполнить практические занятия по вышеуказанным темам курса математики, а также предоставляет студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической и теоретической части курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С. Ч 2. Дифференциальные и интегральные исчисления. Москва 2001 г.

2. Данко Л.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах./Л.Е. Данко, А.Т. Попов, Т.Я. Кожевникова. Ч.2.М.:Высш. шк. 1987 г.
3. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. / И.Г. Араманович , В.И.Левин. М: Наука. 1969 г.
4. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики./ Н. С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. М.:Высш. шк. 1970 г.
5. Семенов М.П. Методы математической физики./ М.П. Семенов. Пособие: ВГТУ. 2002г.
6. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – М.: Наука, 1975. – 127 с.
7. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления / М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник. М.: Гостехиздат, 1950.
8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. -М.: Наука, 1969.
9. Краснов М.Л. Вариационное исчисление./ М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. – М.: Наука, 1973. -188 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для организации самостоятельной работы по дисциплине «Дополнительные главы математики» направление подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», профиль «Электроприводы и системы управления электроприводов»

Составители: Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.03. 2015.
Уч.-изд. л. 1,4. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14