

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	6
1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия.....	7
1.1. Векторная алгебра.....	7
1.1.1. Векторы и действия над ними.....	7
1.1.2. Проекция вектора на ось.....	9
1.1.3. Разложение вектора по компонентам.....	11
1.1.4. Действия над векторами в системе координат.....	13
1.1.5. Скалярное произведение векторов и его применение.....	13
1.2. Аналитическая геометрия на плоскости.....	16
1.2.1. Уравнения прямой на плоскости.....	16
1.2.2. Расстояние от точки до прямой.....	23
1.2.3. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и ортогональности двух прямых.....	25
1.2.4. Кривые второго порядка.....	27
1.3. Аналитическая геометрия в пространстве.....	39
1.3.1. Уравнения плоскости в пространстве.....	40
1.3.2. Расстояние от точки до плоскости.....	45
1.3.3. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.....	48
1.3.4. Поверхности второго порядка.....	50
2. Дифференциальное исчисление.....	64
2.1. Определение производной. Таблица производных.....	64
2.2. Правила дифференцирования.....	65
2.3. Производная сложной функции.....	67
2.4. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к кривой.....	68
2.5. Механический смысл производной.....	71
2.6. Производные высших порядков.....	72
2.7. Дифференциал функции.....	73
2.8. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции.....	75
2.9. Экстремумы функции.....	76
2.10. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.....	80
2.11. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции..	82
2.12. Общая схема исследования функции.....	84
3. Интегральное исчисление.....	88
3.1. Неопределенный интеграл.....	88
3.1.1. Понятие неопределенного интеграла.....	88
3.1.2. Основные свойства неопределенного интеграла.....	89

3.1.3. Таблица основных неопределенных интегралов.....	90
3.1.4. Основные методы интегрирования.....	91
3.1.5. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен.....	94
3.1.6. Интегрирование тригонометрических выражений.....	94
3.1.7. «Неберущиеся» интегралы.....	96
3.2. Определенный интеграл.....	96
3.2.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.....	96
3.2.2. Определение определенного интеграла.....	99
3.2.3. Определенный интеграл с переменным верхним пределом.....	101
3.2.4. Свойства определенного интеграла.....	101
3.2.5. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.....	103
3.2.6. Замена переменных в определенном интеграле.....	104
3.2.7. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.....	105
3.2.8. Вычисление площадей плоских фигур.....	106
3.2.9. Интегрирование четных и нечетных функций.....	110
3.2.10. Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений.....	112
3.2.11. Вычисление объема тела вращения.....	113
3.2.12. Вычисление длины дуги плоской кривой.....	115
3.2.13. Вычисление площади поверхности тела вращения.....	118
4. Дифференциальные уравнения.....	119
4.1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях.....	119
4.2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.....	120
4.3. Дифференциальные уравнения первого порядка.....	124
4.3.1. Основные определения.....	124
4.3.2. Уравнения с разделяющимися переменными.....	127
4.3.3. Линейные уравнения первого порядка.....	129
4.4. Дифференциальные уравнения высших порядков.....	131
4.4.1. Основные определения.....	131
4.4.2. Уравнения, допускающие понижение порядка.....	133
4.4.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.....	138
4.4.4. Исследование дифференциального уравнения свободных колебаний.....	141
5. Кривизна плоской кривой.....	146
5.1. Определение кривизны.....	146
5.2. Вычисление кривизны графика функции.....	148
5.3. Радиус и центр кривизны. Эволюта и эвольвента	

плоской кривой.....	151
6. Варианты расчетно-графических работ.....	153
6.1. Расчетно-графическая работа 1	
«аналитическая геометрия».....	153
6.2. Расчетно-графическая работа 2	
«дифференциальное исчисление».....	155
6.3. Расчетно-графическая работа 3	
«неопределенные интегралы».....	162
6.4. Расчетно-графическая работа 4	
«дифференциальные уравнения».....	165
Заключение.....	166
Библиографический список	166

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие содержит избранные главы курса «Высшая математика», который изучают студенты-ускоренники специальности «Автомобильные дороги и аэродромы» Воронежского государственного архитектурно-строительного университета.

Данное пособие состоит из шести разделов: векторная алгебра и аналитическая геометрия; дифференциальное исчисление; интегральное исчисление; дифференциальные уравнения; кривизна плоской кривой, варианты расчетно-графических работ.

При изучении раздела «Векторная алгебра и аналитическая геометрия» следует хорошо разобраться в понятии вектора и методе координат. После изучения этого раздела выполняется расчетно-графическая работа 1, которая включает задачи с использованием действий над векторами, элементов аналитической геометрии на плоскости и в пространстве.

В разделе «Дифференциальное исчисление» изучаются такие фундаментальные понятия математического анализа, как производная и дифференциал, которые необходимы для исследования функций и построения графиков функций одной переменной. После изучения раздела «Дифференциальное исчисление» выполняется расчетно-графическая работа 2.

Раздел «Интегральное исчисление» рассматривает понятие неопределенного и определенного интегралов и основные методы интегрирования. В пособии приводятся примеры по применению определенных интегралов для решения геометрических задач. После изучения раздела «Интегральное исчисление» выполняется расчетно-графическая работа 3, которая посвящена нахождению неопределенных интегралов.

В разделе «Дифференциальные уравнения» изложены необходимые сведения по методам решения простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядка. После изучения раздела «Дифференциальные уравнения» выполняется расчетно-графическая работа 4.

В пятом разделе «Кривизна плоской кривой» вводятся такие основные понятия дифференциальной геометрии, как кривизна плоской кривой, радиус, центр и круг кривизны, а также понятие эволюты и эвольвенты плоской кривой.

Варианты расчетно-графических работ 1, 2, 3 и 4 по темам «аналитическая геометрия», «дифференциальное исчисление», «неопределенные интегралы» и «дифференциальные уравнения» соответственно приведены в шестом разделе.

Авторы выражают благодарность кандидатам физ.-мат. наук, доцентам А.М. Дементьевой, А.Б. Куцеву и С.А. Шаброву внимательно прочитавшим рукопись. Их ценные замечания и рекомендации помогли улучшить содержание.

1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Векторная алгебра

1.1.1. Векторы и действия над ними

Вектором называется **направленный отрезок**.

Направление на отрезке задается следующим образом: один конец отрезка принимается за начало вектора, а другой конец отрезка принимается за конец вектора, направление задается от начала к концу. Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\vec{a}$ (рис. 1.1)

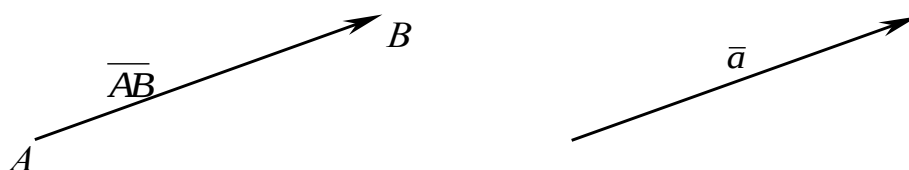


Рис. 1.1. Различные обозначения вектора

Если точка A является началом вектора, то будем говорить, что вектор выходит из точки A .

Вектор характеризуется длиной и направлением.

Длиной (модулем) вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overline{AB}|$. *Модуль вектора – скалярная величина (число).*

Векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой, называются **коллинеарными**. Коллинеарные векторы могут быть **одинаково направленными** (обозначается $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$) или **противоположно направленными** (обозначается $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$). Чтобы отличить одну ситуацию от другой, построим плоскость проходящую через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и проведем прямую через начала этих векторов. В случае, если концы векторов окажутся в одной полуплоскости относительно этой прямой, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$. В случае, если концы векторов окажутся в разных полуплоскостях относительно этой прямой, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$.

Два вектора равны, если они одинаково направлены и имеют одинаковую длину.

Из определения равенства векторов следует, что началом одного и того же вектора могут быть разные точки. Главное, чтобы выходящие из этих точек векторы имели равную длину и были одинаково направленными.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называют **нулевым вектором** и обозначают $\vec{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю, а его направление

не определяется. Считается, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору. Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором**.

Определим угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Сначала договоримся, что углом мы называем часть плоскости, заключенной между двумя лучами с общим началом. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют общее начало N , то углом между ними называется меньший из двух углов, вершина которого находится в N , а стороны которого проходят через $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не имеют общего начала, то построим вектор $\vec{b}' = \vec{b}$ и углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем считать угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}'$. Обозначение: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ или $\left(\vec{a}; \vec{b} \right)$. Из определения сле-

дует, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$, если $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$. Если $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$,

то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными** (обозначение: $\vec{a} \perp \vec{b}$). В дальнейшем, мы будем рассматривать векторы, лежащие на одной плоскости, и векторы, расположенные в пространстве. Для векторов пространства введем одно важное понятие. Пусть даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построим векторы $\vec{a}' = \vec{a}$, $\vec{b}' = \vec{b}$ и $\vec{c}' = \vec{c}$. Если векторы $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ и $\vec{c}'$ лежат в одной плоскости, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются **компланарными**.

Далее мы определим основные действия с векторами: сложение, вычитание, умножение на число. При этом не играют роли рассматриваются векторы на плоскости или в пространстве.

Для любых двух векторов **сложение** проводят по правилу **треугольника**.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора. Чтобы найти их сумму $\vec{a} + \vec{b}$ **по правилу треугольника** необходимо в конец первого вектора ($\vec{a}$) переместить начало второго вектора ($\vec{b}$) и провести вектор, выходящий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ (рис. 1.2).

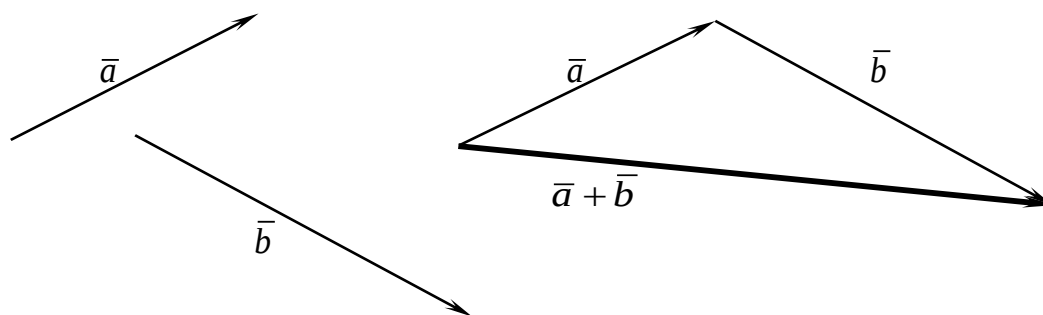


Рис. 1.2. Сложение векторов по правилу треугольника

Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то их сложение можно провести не только по правилу треугольника, но и по правилу параллелограмма.

Сложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **по правилу параллелограмма** представлено на рис. 1.3.

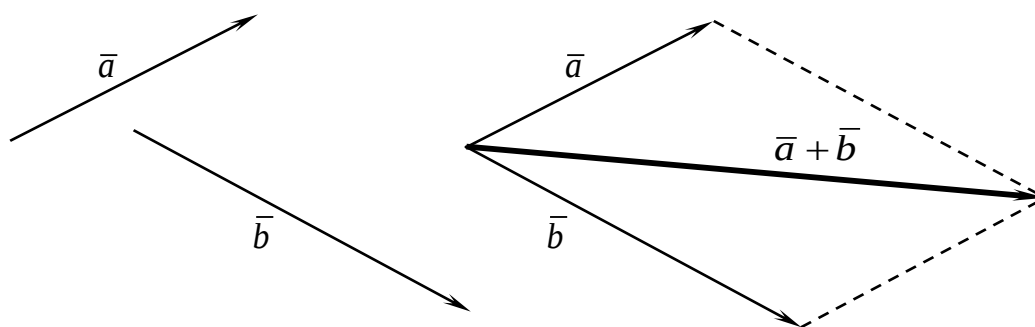


Рис. 1.3. Сложение векторов по правилу параллелограмма

Как видно из рисунка 1.3. сумма векторов $\vec{a} + \vec{b}$ есть вектор, направленный по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если же требуется сложить несколько векторов, например $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, то пользуются *правилом многоугольника*: конец первого вектора совмещают с началом второго, конец второго – с началом третьего и т.д. После этого начало первого вектора с концом последнего соединяют вектором, который и будет являться суммой исходных векторов (рис. 1.4).

Под **разностью** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимают вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (рис. 1.5). Такое определение не удобно для применения на практике, так как в нем используется сложение с неизвестным вектором $\vec{c}$. Ниже мы опишем каким образом можно вычитание векторов выполнить напрямую через сложение.

Умножить вектор $\vec{a} \neq 0$ на число $\lambda \neq 0$ означает построить вектор $\lambda\vec{a}$, модуль которого получается умножением модуля вектора $\vec{a}$ на число $|\lambda|$, а *направление* совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и является противоположным направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$. Если $\vec{a} = 0$ или $\lambda = 0$, то $\lambda\vec{a} = 0$.

Из определения действий вычитания и умножения на число получаем, что $\vec{0} - \vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$. Построенный вектор называется **противоположным** вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$. Теперь, используя введенный вектор, можем операцию вычитания векторов заменить операцией сложения.

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c} + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{c} + \vec{0} = \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}. \quad (1.0,5)$$

Полученное равенство показывает, что *разность векторов равна сумме первого вектора с вектором, противоположным второму*.

Заметим, что введенные обозначение и название полностью согласуется с аналогичными операциями для чисел.

Например, если дан вектор $\vec{a}$, то векторы $2\vec{a}$ и « $-\frac{1}{2}\vec{a}$ », будут иметь вид, изображенный на рис. 1.6.

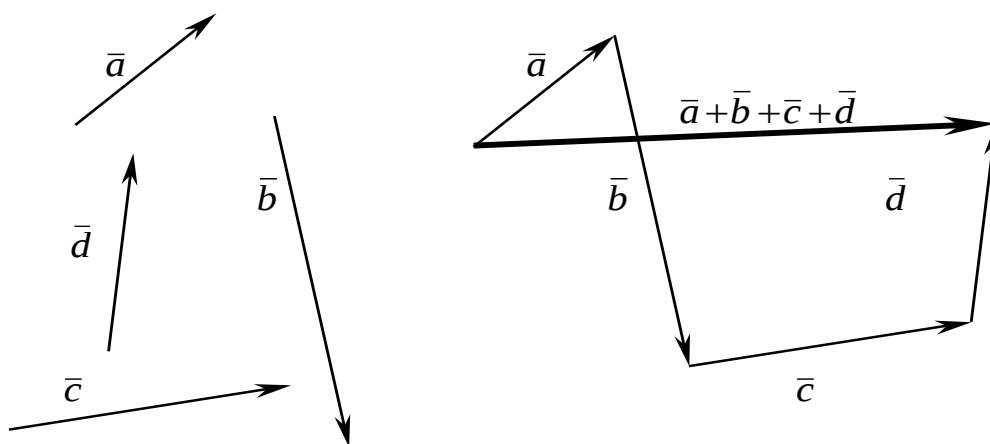


Рис. 1.4. Сложение векторов по правилу многоугольника

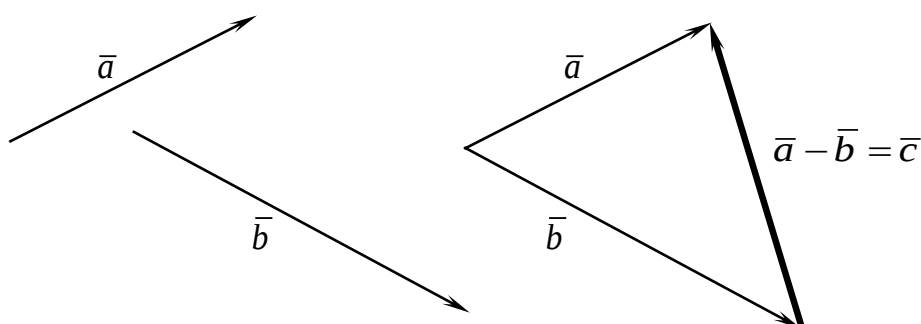


Рис. 1.5. Разность векторов

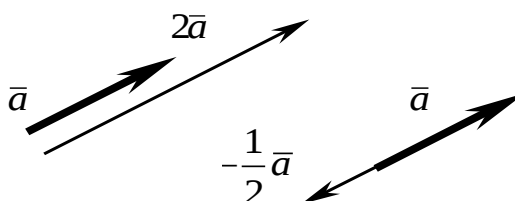


Рис. 1.6. Умножение вектора на число

Из приведенных выше определений следует, что коллинеарность ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равносильна равенству $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$. При этом $\lambda > 0$ в случае $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ и $\lambda < 0$ в случае $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$.

Свойства действий над векторами.

- 1) *переместительный закон*: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2) *сочетательный закон по сложению*: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- 3) *распределительный закон*: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$,
 $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
- 4) *сочетательный закон по умножению*: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.

Пример 1.0,5. Покажем, как раскрываются скобки при вычитании векторов:

$$\begin{aligned}\bar{a} - (\lambda\bar{b} + \mu\bar{c}) &= (\text{см.1.0,5}) = \bar{a} + (-1)(\lambda\bar{b} + \mu\bar{c}) = (\text{по свойству 3}) = \\ &= \bar{a} + (-1)(\lambda\bar{b}) + (-1)(\mu\bar{c}) = \bar{a} + (-1)(\lambda\bar{b}) + (-1)(\mu\bar{c}) = \\ &= (\text{по свойству 4}) = \bar{a} + (-\lambda\bar{b}) + (-\mu\bar{c}) = (\text{см.1.0,5}) = \bar{a} - \lambda\bar{b} - \mu\bar{c}\end{aligned}$$

1.1.2. Проекция вектора на ось

Осью называется прямая, на которой выбрано направление. Выбор направления означает, что двигаясь от одной точки к другой, мы знаем в каком направлении (положительном или отрицательном) происходит это движение. Если посмотреть на рис. 1.7, то движение от A' к B' происходит в положительном направлении, а движение от B' к A' происходит в отрицательном направлении.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется *длина* отрезка $A'B'$ этой оси (рис. 1.7), заключенного между проекциями A' и B' его начальной точки A и конечной точки B , *взятая со знаком "+"*, если направление вектора $\overline{A'B'}$ совпадает с направлением оси, и *со знаком "-"*, если эти направления противоположны.

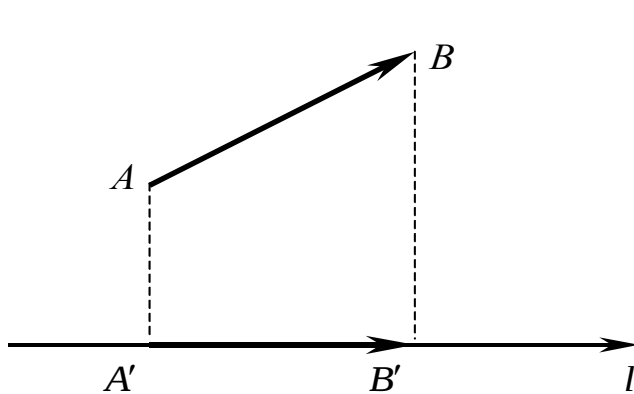


Рис. 1.7. Проекция вектора на ось

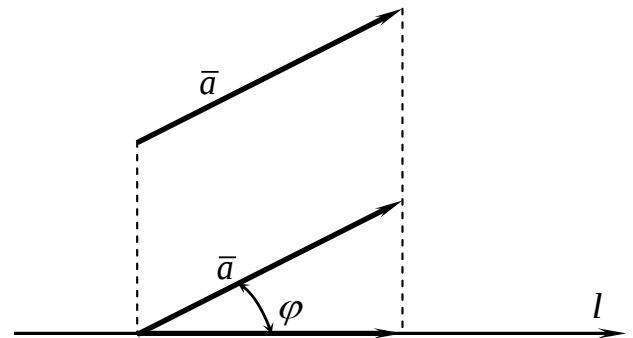


Рис. 1.8. Иллюстрация к теореме 1.1.

Теорема 1.1. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось l (см. рис. 1.8) равна произведению модуля вектора $\bar{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т.е.

$$\text{Пр}_{l}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \varphi. \quad (1.1)$$

Следствие 1.1. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось l

- положительна (рис. 1.9, а), если вектор $\bar{a}$ образует с осью l острый угол ($\cos \varphi > 0$);

- отрицательна (рис. 1.9, б), если вектор $\vec{a}$ образует с осью l тупой угол ($\cos \varphi < 0$);
- равна нулю (рис. 1.9, в), если этот угол – прямой ($\cos \varphi = 0$).

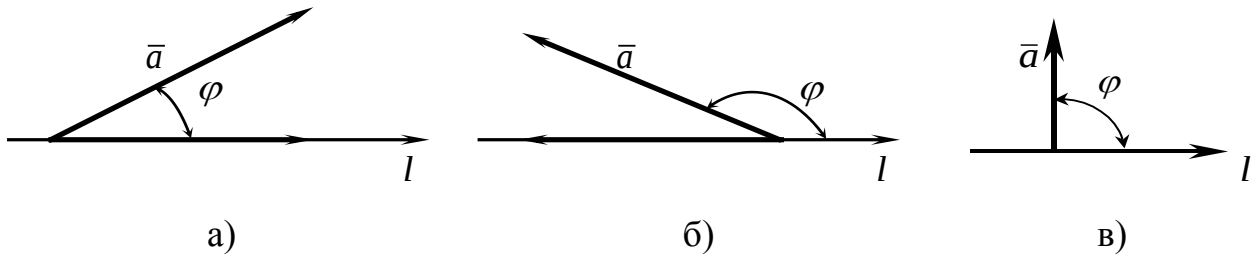


Рис. 1.9. Различные варианты проекции вектора на ось

Следствие 1.2. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Теорема 1.2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось

$$\vec{i} \cdot \vec{\partial}_l (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{i} \cdot \vec{\partial}_l \vec{a} + \vec{i} \cdot \vec{\partial}_l \vec{b} + \vec{i} \cdot \vec{\partial}_l \vec{c}.$$

Теорема 1.3. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось l также умножается на это число, т.е.

$$\vec{i} \cdot \vec{\partial}_l (\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \vec{i} \cdot \vec{\partial}_l \vec{a}.$$

1.1.3. Декартова прямоугольная система координат на плоскости.

Декартова прямоугольная система координат Oxy на плоскости задается:

- 1) двумя осями Ox и Oy , пересекающимися под прямым углом в точке O ;
- 2) определением единицы измерения длины.

Далее мы будем считать, что кратчайший поворот оси Ox к оси Oy , совмещающий направления этих осей, осуществляется против часовой стрелки. Точка O называется началом координат. Ось Ox называется осью абсцисс, ось Oy называется осью ординат.

Если на плоскости задана декартова прямоугольная система координат, то каждую точку M_0 этой плоскости можно задать двумя координатами $M_0(x_0; y_0)$, где число x_0 является проекцией вектора $\overline{OM_0}$ на ось Ox и называется **абсциссой** точки M_0 , а число y_0 является проекцией вектора $\overline{OM_0}$ на ось

Oy и называется **ординатой** точки M_0 . Таким образом, задание точки в системе координат Oxy будет означать, что в этой системе координат определены координаты этой точки по описанным выше правилам.

Рассмотрим две важные задачи на плоскости.

1. Нахождение расстояния между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

Из рис. 1.9,5 по теореме Пифагора

$$|M_1M_2| = \sqrt{M_1M_0^2 + M_2M_0^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Требуется найти координаты точки $M_0(x_0; y_0)$, лежащей на отрезке M_1M_2 таким образом, что выполнено соотношение $\frac{|M_1M_0|}{|M_0M_2|} = \lambda$. В этом случае говорят, что точка M_0 делит отрезок

M_1M_2 в отношении λ , считая от M_1 .

Из рис. 1.9,5 по теореме Фалеса

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{|M_1M_0|}{|M_0M_2|} = \lambda, \quad \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_0} = \frac{|M_1M_0|}{|M_0M_2|} = \lambda.$$

Отсюда получаем, что

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (1,15)$$

В частности, если точка M_0 является серединой отрезка M_1M_2 , то $\lambda = \frac{|M_1M_0|}{|M_0M_2|} = 1$. Поэтому

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (1,16)$$

Перейдем теперь к определению координат вектора в системе координат Oxy . Пусть в системе координат Oxy заданы точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ называются координатами вектора $\overline{M_1M_2}$ в системе координат Oxy . Это обозначается $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Так как длина вектора по определению равна длине соответствующего отрезка, получаем, что

$$|\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Связь между координатами точки в различных системах координат.

Очевидно, что на плоскости можно задать бесконечно много декартовых прямоугольных систем координат. При этом любая система координат может быть получена из другой системы координат *сдвигом* центра и (или) *поворотом* осей, масштаб будем считать неизменным. Далее мы будем рассматривать только системы координат Ox и $O'x'y'$, у которых $Ox \uparrow\uparrow O'x'$ и $Oy \uparrow\uparrow O'y'$ и точка O' в системе координат Ox имеет координаты $O'(x_0; y_0)$. Это соответствует операции сдвига.

Рис. +++ Переход

Из рисунка **рис. +++** видно, что координаты точки M в системах координат Ox и $O'x'y'$ связаны равенствами:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \quad (1.16,5)$$

Или наоборот

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases} \quad (1.16,6)$$

Декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве задается:

- 1) тремя попарно перпендикулярными осями Ox , Oy и Oz , пересекающимися в точке O ;
- 2) определением единицы измерения длины.

Далее мы будем считать, что кратчайший поворот оси Ox к оси Oy , совмещающий направления этих осей, виден с положительного направления оси Oz против часовой стрелки. Ось Oz называется осью аппликата.

Так же как и для системы координат Ox получаем:

- координаты точки $M(x; y; z)$ в системе координат $Oxyz$ определяются равенствами $x = \text{Пр}_{Ox} OM$, $y = \text{Пр}_{Oy} OM$, $z = \text{Пр}_{Oz} OM$ (см. рис. 1.10);

- расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле $|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$;
- если точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ , считая от M_1 , то $x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

1.1.3. Полярная система координат

1.1.3. Разложение вектора по компонентам

В предыдущем разделе мы определили числовые характеристики (координаты) любой точки в пространстве. Теперь зададим числовые характеристики каждого вектора пространства. Возьмем вектор $\overline{M_1M_2}$ с началом $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и концом $M_2(x_2; y_2; z_2)$. На координатных осях Ox , Oy и Oz построим **единичные векторы**, обозначаемые $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ соответственно (рис. 1.10). Векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ являются ортами координатных осей. Построим вектор $\overline{OM}$, равный вектору $\overline{M_1M_2}$. Пусть числа $x; y; z$ являются координатами точки M . Проекции точки $M(x; y; z)$ на координатные оси соответственно обозначим M_1 , M_2 и M_3 . Рассмотрим векторы $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$ и $\overline{OM_3}$. Из рис. 1.10 видно, что

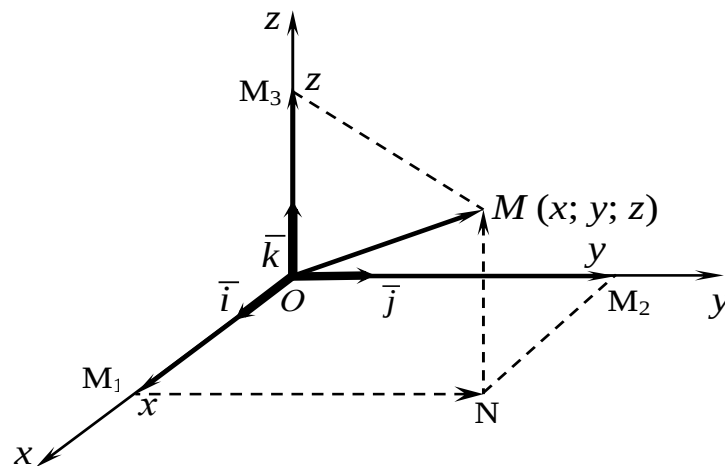


Рис. 1.10. Разложение вектора по ортам координатных осей

$$\overline{OM_1} = x \cdot \bar{i}, \quad \overline{OM_2} = y \cdot \bar{j}, \quad \overline{OM_3} = z \cdot \bar{k}. \quad (1.2)$$

Выразим вектор $\overline{OM}$ через векторы $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$ и $\overline{OM_3}$. По правилу мно-

гоугольника имеем

$$\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{M}_1N + \overline{NM}.$$

Так как $\overline{M}_1N = \overline{OM}_2$, а $\overline{NM} = \overline{OM}_3$, то

$$\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3. \quad (1.3)$$

Подставляя равенства (1.2) в (1.3), получим

$$\boxed{\overline{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}},$$

Аналогично получаем равенства

$$\overline{OM}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \overline{OM}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Так как $\overline{M}_1M_2 = \overline{OM}$, то по правилу параллелограмма $\overline{OM}_1 + \overline{M}_1M_2 = \overline{OM}_2$. Значит,

$$\begin{aligned} \overline{M}_1M_2 &= \overline{OM}_2 - \overline{OM}_1 = (\text{см. 1.0,5}) = \\ &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} + (-1)(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = (\text{по свойству 4 действий над векторами}) = \\ &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} + (-x_1\vec{i}) + (-y_1\vec{j}) + (-z_1\vec{k}) = (\text{по свойству 3 действий над векторами}) = \\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\overline{M}_1M_2 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \quad (1.4)$$

Числа $x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1$ называются **координатами вектора** в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$. Будем записывать этот факт в виде $\overline{M}_1M_2\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Из приведенных рассуждений видно, что каждый вектор имеет единственную тройку координат. Равенство (1.4) называется **разложением вектора по ортам координатных осей**.

• Покажем, что равные векторы имеют одинаковый набор координат. Пусть

$$\overline{M}_1M_2\{x'; y'; z'\} = \overline{M}_3M_4\{x''; y''; z''\}.$$

Это означает, что $\overline{M}_1M_2 - \overline{M}_3M_4 = \vec{0}$ и

$$\overline{M}_1M_2 = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}, \quad \overline{M}_3M_4 = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$$

Так же как при выводе формулы (1.4) получаем равенство

$$\vec{0} = \overline{M}_1M_2 - \overline{M}_3M_4 = (x' - x'')\vec{i} + (y' - y'')\vec{j} + (z' - z'')\vec{k},$$

Вектор $(y' - y'')\vec{j} + (z' - z'')\vec{k}$ по построению лежит в плоскости Oxy . Предположим, что $x' - x'' \neq 0$. Тогда вектор $\overline{M}_1M_2 - \overline{M}_3M_4$ будет лежать выше Oxy , если $x' - x'' > 0$ и ниже Oxy , если $x' - x'' < 0$. Это противоречит равенству

$\overline{M_1M_2} - \overline{M_3M_4} = \vec{0}$. Таким образом, доказано равенство $x' = x''$. Остальные равенства доказываются аналогично.

• Покажем, что одинаковый набор координат определяет равные векторы. Пусть

$$\overline{M_1M_2}\{x'; y'; z'\}, \overline{M_3M_4}\{x''; y''; z''\} \text{ и } x' = x''; y' = y''; z' = z''.$$

Тогда

$$\overline{M_1M_2} - \overline{M_3M_4} = (x' - x'')\vec{i} + (y' - y'')\vec{j} + (z' - z'')\vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = \vec{0}.$$

1.1.4. Действия над векторами в системе координат

Теперь мы опишем правила, по которым определяются координаты вектора, получающегося в результате сложения векторов, вычитания векторов или умножения вектора на число. Справедливость проводимых ниже действий прямо вытекает из свойств 1-4 действий над векторами.

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ заданы вектора $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.

Координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ равны сумме соответствующих координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}.$$

Координаты вектора $\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a}$ равны произведению координат вектора $\vec{a}$ на число λ , т.е.

$$\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot x_1\vec{i} + \lambda \cdot y_1\vec{j} + \lambda \cdot z_1\vec{k}.$$

Так как для коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равносильна выполнению равенства $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$, а координаты равных векторов соответственно равны, то

$$x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = \lambda(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \lambda x_2\vec{i} + \lambda y_2\vec{j} + \lambda z_2\vec{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2, z_1 = \lambda z_2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{x_1}{x_2}, \lambda = \frac{y_1}{y_2}, \lambda = \frac{z_1}{z_2} \text{ или } \boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}}. \quad (1.6)$$

Следовательно, **коллинеарность векторов равносильна пропорциональности их координат.**

1.1.5. Скалярное произведение векторов и его применение

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.12) называется **число**, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

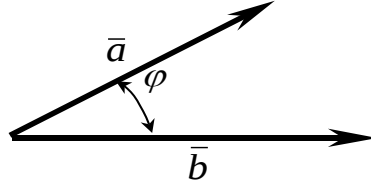


Рис. 1.12. Вектора, пересекающиеся под углом φ

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a} \cdot \vec{b}$. По определению имеем

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi}, \quad (1.7)$$

где $\varphi = (\vec{a}; \vec{b})$.

В случае, если хотя бы один из множителей является нулевым вектором, считается, что скалярное произведение равно нулю.

Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$, то их скалярное произведение будет равно сумме произведений соответствующих координат, т.е.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}. \quad (1.8)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \\ & = -0,5((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)) = \\ & = -0,5(|\vec{a} - \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2). \end{aligned}$$

Начало вектора $\vec{a} - \vec{b}$ совпадает с концов вектора $\vec{b}$, а конец вектора $\vec{a} - \vec{b}$ совпадает с концов вектора $\vec{a}$. Поэтому по теореме косинусов (см. рис. 1.12) получаем равенство

$$-0,5(|\vec{a} - \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Таким образом, равенство (1.8) доказано. Полученное представление скалярного произведения векторов через их координаты позволит легко доказать следующие свойства.

Свойства скалярного произведения.

1. *Переместительный закон:* $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$.

Доказательство.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = \bar{b} \cdot \bar{a}.$$

2. *Сочетательный закон:* $(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$, $\bar{a} \cdot (\lambda \bar{b}) = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$.

Доказательство. Докажем первое равенство:

$$(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda x_1x_2 + \lambda y_1y_2 + \lambda z_1z_2 = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}).$$

Второе равенство доказывается аналогично.

3. *Распределительный закон:* $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$, $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Доказательство. Пусть $\bar{c} \{c_1; c_2; c_3\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) &= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) + z_1(z_2 + z_3) = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}. \end{aligned}$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Заметим, что рассмотренные свойства могли быть доказаны исключительно геометрическими методами на основе равенства (1.7). Однако переход к координатному представлению векторов сделал доказательства этих свойств практически устными. Таким образом, была наглядно продемонстрирована эффективность использования метода координат при решении геометрических задач.

Геометрический смысл скалярного произведения.

Пусть даны ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Тогда равенство $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ равносильно тому, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны. Действительно,

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \cos(\vec{\bar{a}}; \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\vec{\bar{a}}; \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0.$$

Пример 1.1. Даны $\bar{a} \{-2; 1; 3\}$ и $\bar{b} \{1; -5; 4\}$. Найти $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

Решение. Так как вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы координатами, то для вычисления их скалярного произведения применим формулу (1.8):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 = -2 - 5 + 12 = 5$$

С помощью скалярного произведения можно решать такие задачи, как: определение длины вектора; вычисление проекции одного вектора на направление другого; нахождение угла между векторами.

Определение длины вектора

Дан вектор $\bar{a} \{x; y; z\}$. Необходимо найти его длину $|\bar{a}|$. Для этого воспользуемся определением скалярного произведения (см. формулу 1.7):

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0^0 = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot 1 = |\bar{a}|^2.$$

С другой стороны

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = x^2 + y^2 + z^2.$$

Из этих равенств видно, что

$$|\bar{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

и, извлекая квадратный корень, получим

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (1.9)$$

Вычисление проекции одного вектора на направление другого

Даны два вектора $\bar{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\bar{b}\{x_2; y_2; z_2\}$. Необходимо найти проекцию вектора $\bar{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ на направление вектора $\bar{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ и, наоборот, проекцию вектора $\bar{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ на направление вектора $\bar{a}\{x_1; y_1; z_1\}$. Для вычисления проекции одного вектора на направление другого снова используем определение скалярного произведения (формула 1.7)

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot (|\bar{b}| \cdot \cos \varphi) = |\bar{b}| \cdot (|\bar{a}| \cdot \cos \varphi).$$

Вспоминая формулу (1.1), предыдущее равенство перепишем в виде

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \ddot{\delta}_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \ddot{\delta}_{\bar{b}} \bar{a}.$$

Из последнего выражения следует, что **проекция одного вектора на направление другого равна скалярному произведению этих векторов, деленному на модуль того вектора, на который проецируем:**

$$\boxed{\ddot{\delta}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}} \text{ (проекция вектора } \bar{a} \text{ на вектор } \bar{b} \text{),}$$

$$\text{проекция вектора } \bar{b} \text{ на вектор } \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \quad (1.10)$$

Нахождение угла между векторами

Из формулы (1.7) определяется косинус угла φ между векторами $\bar{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\bar{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (1.11)$$

1.1.5. Векторное произведение векторов и его применение

Пусть дана тройка векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. Если с конца вектора третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$, совмещающий эти направления, виден против часовой стрелки, то тройка $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ называется **правой тройкой**. Если указанный поворот виден по часовой стрелке, то $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ называется **левой тройкой**.

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который удовлетворяет условиям (рис. 1.12,5):

- 1) $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}$;
- 2) $|\bar{c}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \angle(\bar{a}, \bar{b})$;
- 3) тройка векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ является правой.

Условия 1-3 определяют единственный вектор, так как первые два условия задают два вектора определенной длины, которые ортогональны плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а третье условие позволяет выбрать из этих двух векторов единственный. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ являются коллинеарными (в частности один из них равен нулю), то их векторное произведение считается равным нулевому вектору.

Рис. 1.12,5. Векторное произведение

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a} \times \vec{b}$.

Так же как и в случае скалярного произведения мы начнем с вычисления векторного произведения через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обратим внимание, что в этом разделе часто будут использоваться свойства определителей и методы решения систем линейных уравнений. Пусть даны векторы $\vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$. Требуется найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Обозначим $\vec{c}\{x; y; z\}$. Из свойства 1, равенства (1.8) и геометрического смысла скалярного произведения получаем

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0; \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0. \end{cases}$$

Перепишем систему в эквивалентном виде

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = -a_3z; \\ b_1x + b_2y = -b_3z \end{cases}$$

и применим правило Крамера

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_3z & a_2 \\ -b_3z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = z \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -a_3z \\ b_1 & -b_3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}},$$

$$z = z \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Заметим, что применение правила Крамера обосновано тем, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарные, а значит их координаты не пропорциональны и хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Не ограничивая общности, мы посчитали, что не равен нулю первый определитель.

Теперь воспользуемся свойством 2:

$$\begin{aligned} |\bar{c}|^2 &= |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \sin^2 \angle(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 (1 - \cos^2 \angle(\bar{a}, \bar{b})) = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$|\bar{c}|^2 = \frac{z^2}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2} \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \right).$$

Следовательно, $z = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$

Получаем для каждой пары векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ два варианта вычисления их векторного произведения

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = (x; y; z) = \pm \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}. \quad (1.11,4)$$

Покажем, что для любой пары векторов в соответствии с условием 3 определения векторного произведения в (1.11,5) выбирается знак «+». Для этого возьмем произвольный вектор $\bar{a}$. Покажем, что в соответствии с условием 3 выбирается знак «+». Сначала возьмем правую тройку векторов $\{\bar{a} = OA, \bar{b} = OB, \bar{a} \times \bar{b}\}$, в которой векторы выходят из начала координат и конец вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ лежит над координатной плоскостью Oxy . Обозначим проекции точек A и B на плоскость Oxy как $A'(a'_1; a'_2)$ и $B'(b'_1; b'_2)$ соответственно. В силу выбора исходной тройки кратчайший поворот от A' и B' виден против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси Oz . Обозначим φ_A , φ_B углы поворота оси Ox до совмещения направлений оси и вектора. Считаем что $\varphi_A \in [-\pi; \pi]$, $\varphi_B \in [-\pi; \pi]$.

Рис. 1.12,6. Проекции векторов OA и OB на плоскость Oxy

Тогда

$$a'_1 = |OA'| \cos \varphi_A, a'_2 = |OA'| \sin \varphi_A, b'_1 = |OB'| \cos \varphi_B, b'_2 = |OB'| \sin \varphi_B.$$

В силу выбора направления вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ аппликата его конца положительна. Значит

$$a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1 = |OA'| \cos \varphi_A |OB'| \sin \varphi_B - |OA'| \sin \varphi_A |OB'| \cos \varphi_B =$$

$$= |OA'| |OB'| (\cos \varphi_A \sin \varphi_B - \sin \varphi_A \cos \varphi_B) = |OA'| |OB'| \sin \varphi > 0.$$

Следовательно, в равенстве (1.11,4) следует выбирать знак «+».

Случай, когда вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ направлен в нижнюю полуплоскость относительно координатной плоскости Oxy рассматривается аналогично. В случае, когда вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ лежит в плоскости Oxy нужно отследить знак абсциссы или ординаты вектора $\bar{a} \times \bar{b}$.

Таким образом, в равенстве (1.11,4) нужно выбирать знак «+» и символически его можно записывается в виде

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (1.11,5)$$

Определитель в последнем равенстве является «не совсем обычным», так как элементы его первой строки не числа, а векторы. Но мы вычисляем его стандартными методами (по правилу треугольников или разложением по строке или столбцу), так как будто векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ являются обычными числами, и получаем координаты $\bar{a} \times \bar{b}$ в (1.11,4) согласно (1.4). Поэтому к определителю в (1.11,5) применимы все свойства определителей третьего порядка.

Свойства векторного произведения.

1. *Антипереместительный закон:* $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.
2. *Сочетательный закон:* $(\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b}), \bar{a} \times (\lambda \bar{b}) = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$.
3. *Распределительный закон:* $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}, (\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$

Доказательства всех свойств вытекают из соответствующих свойств определителей. Например,

$$(\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix} = \bar{a} \times (\lambda \bar{b}).$$

Геометрический смысл векторного произведения.

Пусть даны ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Как следует из условия 2, модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

Равенство $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ равносильно тому, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны. Действительно,

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow |\bar{a} \times \bar{b}| = 0 \Leftrightarrow \sin \left(\bar{a}; \bar{b} \right) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

Пример 1.1. Даны $\bar{a} \{-2; 1; 3\}$ и $\bar{b} \{1; -5; 4\}$. Найти $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

Решение. Так как вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы координатами, то для вычисления их скалярного произведения применим формулу (1.8):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 = -2 - 5 + 12 = 5$$

1.1.6. Смешанное произведение векторов и его применение

Смешанным произведением векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Из определения получаем

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot (c_1 \bar{i} + c_2 \bar{j} + c_3 \bar{k}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения.

Пусть даны ненулевые векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Тогда модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

Рис. 1.12,7. Геометрический смысл смешанного произведения

Из рисунка 1.12,7 видно, что

$$|(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| |\bar{c}| \cos \left(\bar{a} \times \bar{b}; \bar{c} \right) = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \left(\bar{a}; \bar{b} \right) |\bar{c}| \cos \left(\bar{a} \times \bar{b}; \bar{c} \right) = S \cdot h = V.$$

Равенство $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = 0$ равносильно тому, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны. Действительно,

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = 0 \Leftrightarrow V = 0 \Leftrightarrow \text{векторы } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} - \text{компланарны.}$$

1.2. Аналитическая геометрия на плоскости

Главным объектом изучения аналитической геометрии на плоскости являются линии, то есть множества точек плоскости, составленные по некоторому правилу. Эти линии аналитическая геометрия изучает алгебраическими методами, то есть через описание координат точек линии в некоторой декартовой прямоугольной системе координат. Далее мы будем исследовать связь между геометрическим описанием линии и алгебраическим описанием координат точек этой линии.

Уравнением с двумя переменными x, y называется уравнение вида $F(x, y) = 0$. Множеством решений этого уравнения является каждая пара чисел x_0, y_0 , которые при подстановке в $F(x, y) = 0$ вместо x, y дают верное равенство. Как известно, в декартовой системе координат каждой точке плоскости соответствует пара действительных чисел и, наоборот, каждой такой паре чисел соответствует определенная точка плоскости. Поэтому решение уравнения $F(x, y) = 0$ можно понимать геометрически как множество точек плоскости с системой координат Oxy , координаты которых удовлетворяют этому уравнению. В дальнейшем, множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, будем называть линией L на плоскости Oxy , заданной уравнением $F(x, y) = 0$. Можно сформулировать несколько равносильных между собой утверждений:

- 1) линия L на плоскости Oxy задана уравнением $F(x, y) = 0$;
- 2) координаты точек линии L удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$ и координаты точек, не лежащих на L , не удовлетворяют этому уравнению;
- 3) координаты точек линии L удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$ и точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, лежат на линии L .

В современной математической терминологии утверждение «линия L на плоскости Oxy задана уравнением $F(x, y) = 0$ » часто формулируется в виде «линия L состоит из тех и только тех точек плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$ » или в виде «уравнению

$F(x, y) = 0$ удовлетворяют координаты тех и только тех точек плоскости Oxy которые принадлежат линии L ».

Таким образом, возникают две задачи:

31) по заданному уравнению описать множество всех точек плоскости Oxy , координаты которых ему удовлетворяют;

32) по заданному множеству Φ точек плоскости Oxy написать уравнение, которому удовлетворяют только точки множества Φ .

Пример. Найти множество всех точек плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют уравнению: а) $(x-2)^4 + (y+3)^2 = 0$; б) $y-4=0$.

В случае а) очевидно, что нулевая сумма может получаться только для точки с координатами $x=2$, $y=-3$. В случае б) понятно, что подойдут все точки плоскости с ординатой 4 и любой абсциссой.

Пример. Написать уравнение, которому удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые удалены от точек $M(1;2)$ и $N(-1;3)$ на одинаковые расстояния.

Обозначим искомую линию L . Тогда

$$\begin{aligned} T(x; y) \in L &\Leftrightarrow |MT| = |NT| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2x - 4y + 5 = 2x - 6y + 10 \Leftrightarrow y - 2x - 2,5 = 0. \end{aligned}$$

1.2.1. Уравнения прямой на плоскости

В зависимости от способа задания и исходных данных уравнение прямой на плоскости может иметь различный вид. Напомним, что прямая на плоскости может быть задана различными способами: точкой и вектором, коллинеарным прямой; двумя точками; точкой и вектором, ортогональным прямой; точкой и углом между прямой и осью Ox .

Каноническое уравнение прямой

Напишем уравнение прямой L , которая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и является коллинеарной вектору $\vec{S}\{m; n\}$. Под коллинеарностью прямой и вектора мы понимаем, что вектор параллелен этой прямой или лежит на ней. **Такой вектор называется направляющим вектором прямой.**

Рис. 1.13. Вывод канонического уравнения прямой

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y)$ и определим условия ее расположения на прямой L . Проведем вектор $\overline{M_0M}$. Из рис. 1.13 видно, что

$$M \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \{x - x_0; y - y_0\} \parallel \bar{S} \{m; n\} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Здесь мы воспользовались условием (1.16) коллинеарности векторов.

Таким образом, следующие условия равносильны:

- 1) точка $M(x; y)$ лежит на прямой L ;
- 2) координаты x и y этой точки удовлетворяют равенству

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}. \quad (1.14)$$

Это означает, что равенство (1.14) является уравнением прямой L , которое называется **каноническим уравнением прямой**.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 1.18). Воспользуемся каноническим уравнением (1.14). В качестве направляющего вектора $\bar{S} \{m; n\}$ прямой возьмем вектор $\overline{M_1M_2} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, а в качестве точки, лежащей на прямой, возьмем любую из двух точек $M_1(x_1; y_1)$ или $M_2(x_2; y_2)$, например $M_1(x_1; y_1)$.

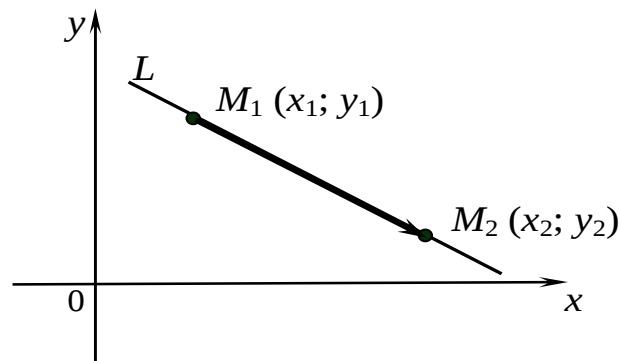


Рис. 1.18. Прямая, проходящая через две данные точки

Таким образом, *уравнение прямой, проходящей через две заданные точки* будет иметь вид

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}. \quad (1.19)$$

Пример 1.2. Составить уравнения медианы AM и биссектрисы AD треугольника ABC , если известны координаты его вершин: $A(1;2)$, $B(4;6)$, $C(-4;14)$.

Если точка $M(x_M; y_M)$ является серединой отрезка BC , то ее координаты находятся по формулам (1,15): $x_M = \frac{4 + (-4)}{2} = 0$, $y_M = \frac{6 + 14}{2} = 10$. Напишем уравнение прямой AM по формуле (1.19), выбирая в качестве M_1 и M_2 точки A и M соответственно:

$$\frac{x - 1}{0 - 1} = \frac{y - 2}{10 - 2} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{8}$$

Пусть $D(x_D; y_D)$ является точкой пересечения биссектрисы угла A со стороной BC . Из курса геометрии известно, что в этом случае должно быть вы-

полнено соотношение $\frac{|CM|}{|MB|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{13}{5} = 2,6$, так как

$|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = 5$ и $|AC| = \sqrt{(-4-1)^2 + (14-2)^2} = 13$. Значит точка D делит отрезок CB в отношении $\lambda = 2,6$, считая от точки C . По формулам (1,16) находим координаты

$$x_D = \frac{-4 + 2,6 \cdot 4}{1 + 2,6} = \frac{16}{9}, \quad y_D = \frac{14 + 2,6 \cdot 4}{3,6} = \frac{51}{9}.$$

По формуле (1.19) получаем уравнение прямой AD :

$$\frac{x - 1}{\frac{16}{9} - 1} = \frac{y - 2}{\frac{51}{9} - 2} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{7} = \frac{y - 2}{33}.$$

Рекомендуем читателям самостоятельно сделать рисунок по данным рассмотренного примера.

Параметрические уравнения прямой

Используя векторное уравнение (1.14) прямой L , запишем ее параметрические уравнения. Приравняем каждую из дробей в равенстве (1.14) к t и выразим из полученных равенств x и y :

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn. \end{cases} \quad (1.15)$$

Равенства (1.15) называются **параметрическими уравнениями прямой**. Точка $M(x; y)$ лежит на прямой, заданной уравнениями (1.15), если для ее координат x и y найдется значение параметра t , при котором оба равенства (1.15) верные. И наоборот, Точка $M(x; y)$ не лежит на прямой, заданной уравнениями (1.15), если для ее координат x и y не существует значений параметра t , при котором оба равенства (1.15) являются верными. Можно представлять себе, что мы движемся по прямой L и в момент времени t координаты точки, в которой мы находимся определяются уравнениями (1.15).

Пример. Определить какие из точек $M(3; -2)$, $N(-1; -2)$, $P(-5; 18)$ лежат на прямой L , заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3 - 5t. \end{cases}$$

Подставляем координаты каждой точки в систему и пытаемся определить соответствующее значение параметра t .

$$M(3; -2): \begin{cases} 3 = 1 + 2t, \\ -2 = 3 - 5t. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = 1. \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M \in L.$$

$$N(-1; -2): \begin{cases} -1 = 1 + 2t, \\ -2 = 3 - 5t. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1, \\ t = 1. \end{cases} \Rightarrow \text{система несовместная} \Rightarrow M \notin L.$$

$$P(-5; 18): \begin{cases} -5 = 1 + 2t, \\ 18 = 3 - 5t. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3, \\ t = -3. \end{cases} \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow M \in L.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку ортогонально данному вектору

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ ортогонально (перпендикулярно) данному вектору $\vec{N}\{A; B\}$, который **называется нормальным вектором этой прямой** (рис. 1.14).

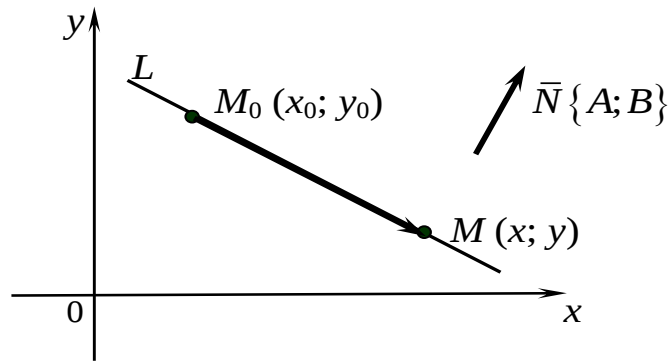


Рис. 1.14. Вывод уравнения прямой, проходящей через заданную точку ортогонально данному вектору

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0; y - y_0\}$ (см. рис. 1.14). То что точка M лежит на прямой L равносильно тому, что векторы $\bar{N}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ ортогональны. Из геометрического смысла скалярного произведения получаем: $M \in L \Leftrightarrow \bar{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Учитывая формулу (1.8), можем записать

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}. \quad (1.16)$$

Равенство (1.16) называется **уравнением прямой, проходящей через данную точку ортогонально данному вектору**.

Пример 1.2. Составить уравнение стороны BC треугольника ABC , если известны координаты его вершин: $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$ и $C(2; -5)$. Определить координаты направляющего $\bar{S}$ и нормального $\bar{N}$ векторов прямой BC . Составить уравнение высоты к стороне BC треугольника ABC .

Решение. Так как известны координаты двух точек, через которые проходит прямая BC , то воспользуемся уравнением (1.19):

$$\frac{x - (-2)}{2 - (-2)} = \frac{y - 3}{-5 - 3}.$$

Складывая числа в знаменателях дробей, получим **каноническое уравнение** прямой:

$$\frac{x + 2}{4} = \frac{y - 3}{-8},$$

из которого найдем координаты направляющего вектора прямой – $\bar{S}\{4; -8\}$.

Координаты нормального вектора $\bar{N}\{A;B\}$ можно определить из *общего уравнения* прямой, которое получим из *канонического*:

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-8} \Rightarrow -2 \cdot (x+2) = 1 \cdot (y-3) \Rightarrow 8x + 4y + 4 = 0 \text{ или } 2x + y + 1 = 0.$$

Таким образом, координаты нормального вектора прямой – $\bar{N}\{2;1\}$.

Так как искомая высота L перпендикулярна стороне BC , то вектор $BC\{4;-8\}$ будет нормальным вектором прямой L . Кроме того, по условию $A \in L$. Поэтому уравнение прямой L можно получить по формуле (1.16):

$$4(x-1) + (-8)(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 - 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0.$$

Упражнение. Написать уравнения остальных сторон треугольника ABC из примера 1.2, определить координаты направляющих и нормальных векторов получившихся прямых.

Общее уравнение прямой

Раскрыв скобки в уравнении (1.16): $Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0$, получим *общее уравнение прямой на плоскости*

$$\boxed{Ax + By + C = 0}, \quad (1.17)$$

где $C = -By_0 - Ax_0$.

Такие преобразования были сделаны в конце примера 1.2.

Используя общее уравнение прямой (1.17) рассмотрим частные случаи положения прямой на плоскости, когда один или два коэффициента уравнения (1.17) обращаются в нуль.

1. Если $C = 0$, то $Ax + By = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x$. Координаты точки $O(0;0)$ удовлетворяют полученному уравнению, т.е. прямая L проходит через начало координат (рис 1.15).

2. Если $A = 0$, то $By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B} \Rightarrow y = \text{const}$. Следовательно прямая L параллельна оси Ox (рис 1.16).

3. Если $B = 0$, то $Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A} \Rightarrow x = \text{const}$. Таким образом, прямая L параллельна оси Oy (рис 1.17).

4. Если $A = C = 0$, то $By = 0 \Rightarrow y = 0$ – ось Ox .

5. Если $B = C = 0$, то $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ – ось Oy .

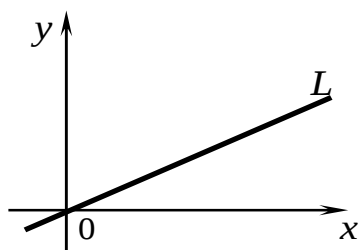


Рис. 1.15.
Прямая, проходящая
через начало координат

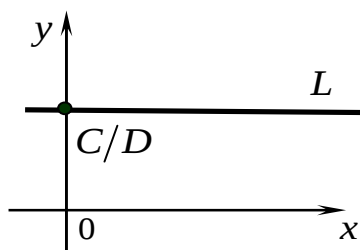


Рис. 1.16.
Прямая, параллельная
оси Ox

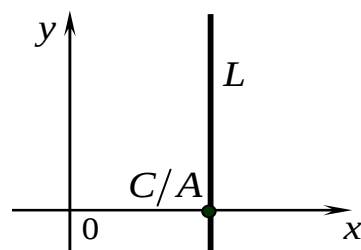


Рис. 1.17.
Прямая, параллельная
оси Oy

Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая не проходит через начало координат и пересекает ось Oy в точке $M_1(0;b)$, а ось Ox – в точке $M_2(a;0)$ (рис. 1.19).

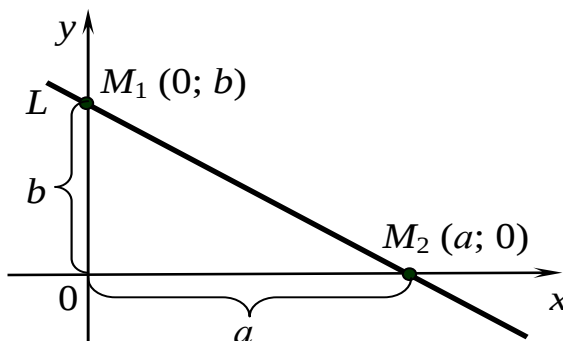


Рис. 1.19. Вывод уравнения прямой в отрезках

В этом случае уравнение (1.19) примет вид

$$\frac{x-0}{a-0} = \frac{y-b}{0-b} \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} = \frac{y-b}{-b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}. \quad (1.20)$$

Это уравнение называется **уравнением прямой в отрезках**, так как числа a и b указывают, какие отрезки (с учетом знака) отсекает прямая на осях координат (см. рис. 1.19). Очевидно, что коэффициент a (коэффициент b) получается, если подставить ноль вместо y (вместо x).

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая непараллельна оси OY . Тогда первая координата направляющего вектора $\bar{S}\{m;n\}$ не равна нулю ($m \neq 0$). Каноническое уравнение (1.14) перепишем в следующем виде:

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0),$$

или, обозначив величину $\frac{n}{m}$ через k , получим

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}, \quad (1.21)$$

где $k = \operatorname{tg} \varphi$ – тангенс угла, который составляет прямая с положительным направлением оси Ox (рис. 1.20). Если прямая пересекает ось Ox , то под углом φ мы понимаем правый верхний из четырех получающихся углов. Если прямая параллельна оси Ox или совпадает с ней, то $\varphi = 0$. Таким образом, имеем включение $\varphi \in [0; \pi)$. Угол φ называют углом наклона прямой к оси Ox .

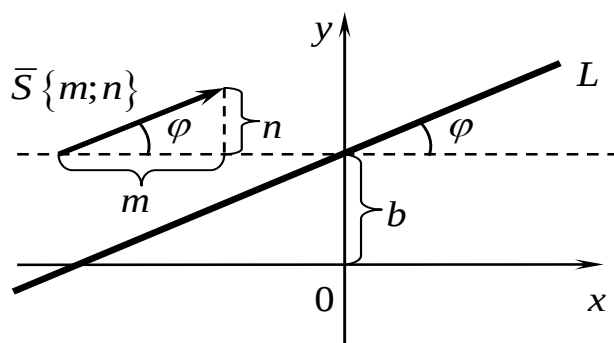


Рис. 1.20. Вывод уравнения прямой с угловым коэффициентом

Раскрыв скобки в (1.21) и выразив y , получаем

$$\boxed{y = kx + b}, \quad (1.22)$$

где $b = y_0 - kx_0$. Величина $k = \operatorname{tg} \varphi$ называется угловым коэффициентом прямой, а уравнение (1.22) – *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Подставим в (1.22) $x = 0$ и получим, что b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy (см. рис 1.20).

Пример. Пусть прямая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3 - 5t. \end{cases}$

Написать уравнение этой прямой с угловым коэффициентом и найти ее угол наклона к оси Ox .

Выразим t из первого уравнения $t = \frac{1}{2}(x-1)$ и подставим во второе уравнение $y = 3 - 5 \cdot \frac{1}{2}(x-1)$. После всех преобразований получаем $y = -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$ и $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{5}{2}$. Следовательно, по определению арктангенса $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{2}\right) + \pi$.

1.2.2. Расстояние от точки до прямой

Пусть даны прямая L , заданная общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка плоскости $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 1.21). Расстоянием d от точки M_0 до прямой L называется длина перпендикуляра опущенного из M_0 на прямую L . Из рис. 1.21 видно, что расстояние d равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, на направление нормального вектора $\bar{n}\{A; B\}$, где $M_1(x_1; y_1)$ – произвольная точка прямой L .

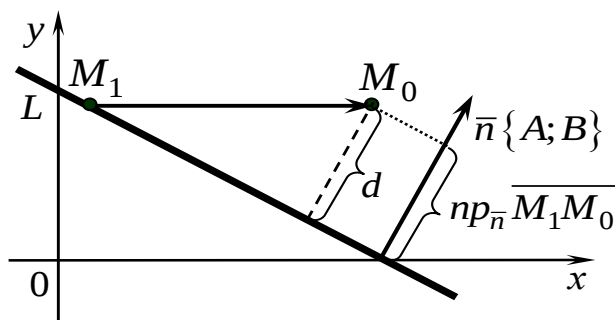


Рис. 1.21. Расстояние от точки до прямой

Используя правило вычисления проекции через скалярное произведение, получаем

$$d = \left| \operatorname{pr}_{\bar{n}} \overline{M_1M_0} \right| = \left| \frac{\overline{M_1M_0} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (1.23)$$

Так как точка $M_1(x_1; y_1)$ принадлежит прямой L , то ее координаты удовлетворяют ее уравнению, то есть $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Откуда имеем

$$C = -Ax_1 - By_1. \quad (1.24)$$

Подставляя (1.24) в выражение (1.23), получим формулу

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (1.25)$$

Пример 1.3. Используя условие примера 1.2 (см. стр. 21), найти площадь треугольника ABC .

Решение. Известно, что площадь треугольника равна половине произведения длины его стороны a на длину высоты h , опущенной на сторону a :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |a| \cdot |h|.$$

Проведем высоту в треугольнике ABC , например, из вершины A на сторону BC . Так как нам известны координаты точек B и C , то длину стороны BC будет искать по формуле

$$|a| = |BC| = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-5 - 3)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Длину высоты h можно найти как расстояние от точки A до стороны BC . Уравнение прямой BC было составлено в *примере 1.2*:

$$2x + y + 1 = 0,$$

поэтому, пользуясь формулой (1.25), получим

$$|h| = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Итак, площадь треугольника ABC равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 10.$$

1.2.3. Угол между двумя прямыми.

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (рис. 1.22). Углом между двумя прямыми L_1 и L_2 называется угол α , на который нужно повернуть вокруг точки пересечения против часовой стрелки прямую L_1 до совмещения с прямой L_2 .

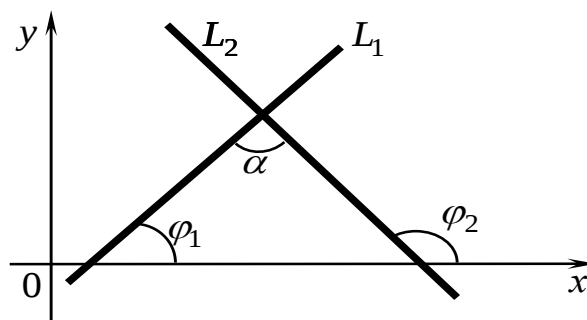


Рис. 1.22. Угол между прямыми

По теореме о внешнем угле треугольника имеем $\varphi_2 = \alpha + \varphi_1$ или $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}.$$

Так как $\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1$ и $\operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$ получим

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}}. \quad (1.26)$$

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\alpha = 0$ и $\operatorname{tg} \alpha = 0$. Из формулы (1.26) следует $k_2 - k_1 = 0$, т.е.

$$\boxed{k_2 = k_1}. \quad (1.27)$$

Таким образом, *условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов.*

Если же прямые L_1 и L_2 ортогональны, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 + k_2 \cdot k_1}{k_2 - k_1} = 0 \Rightarrow 1 + k_2 \cdot k_1 = 0, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{k_2 \cdot k_1 = -1} \text{ или } \boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}. \quad (1.28)$$

Таким образом, *у ортогональных прямых угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.*

Пример 1.4. Используя условие примера 1.2, составить уравнение высоты h треугольника ABC , проведенной из вершины A на сторону BC и найти угол между этой высотой и стороной AC .

Решение. Уравнение прямой BC нам известно (см. пример 1.2):

$$2x + y + 1 = 0.$$

Перепишем его в виде (1.22):

$$y = -2x - 1.$$

Откуда видно, что угловой коэффициент прямой BC равен

$$k_{BC} = -2.$$

Так как угловые коэффициенты у ортогональных прямых (h и BC) удовлетворяют равенству (1.28), то

$$k_h = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (1.21), составим уравнение высоты h :

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{или} \quad x - 2y + 3 = 0.$$

Угол между высотой h и стороной AC можно найти по формуле (1.26). Определим угловые коэффициенты высоты h и прямой AC . Угловой коэффициент высоты h найден ранее ($k_h = \frac{1}{2}$).

Для нахождения углового коэффициента прямой AC составим ее уравнение, воспользовавшись уравнением прямой проходящей через две точки (1.19):

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2-1} &= \frac{y-2}{-5-2} \\ \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} &= \frac{y-2}{-7} \Leftrightarrow -7(x-1) = 1 \cdot (y-2) \Leftrightarrow y = -7x + 9. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$k_{AC} = -7.$$

Итак

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_{AC} - k_h}{1 + k_{AC} \cdot k_h} = \frac{-7 - \frac{1}{2}}{1 + (-7) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{15}{2}}{-\frac{5}{2}} = 3 \Rightarrow \alpha = \arctg 3 \approx 71,57^\circ.$$

1.2.4. Кривые второго порядка

Уравнением второго порядка в заданной прямоугольной системе координат Оху называется уравнение

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ где } A \neq 0 \text{ или } B \neq 0 \text{ или } C \neq 0 \quad (1,285)$$

Действительно, если (1,285) имеем $A = B = C = 0$, то мы получаем уравнение прямой $Dx + Ey + F = 0$, которое не содержит вторых степеней и естественно не может называться уравнением второго порядка.

Множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида (1,285), называется кривой второго порядка, заданной этим уравнением.

Окружность

Самой известной кривой второго порядка является окружность. Начнем ее с геометрического определения.

Окружностью называется множество всех точек на плоскости, имеющих одинаковое расстояние до фиксированной точки M_0 . Точка M_0 называется центром окружности, а указанное расстояние – радиусом окружности.

Пусть центром окружности является точка $M_0(x_0; y_0)$, а радиус окружности равен r . То, что точка $M(x; y)$ принадлежит окружности означает, что $r = |M_0M|$. Тогда с учетом формулы (1.9) получаем, что нахождение точки $M(x; y)$ на окружности равносильно выполнению условий

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (1.29)$$

Таким образом, уравнение (1.29) является **уравнением окружности с радиусом r и центром в точке $M_0(x_0; y_0)$** , так как ему удовлетворяют координаты только тех точек, которые расположены на расстоянии r от точки M_0 .

Частным случаем уравнения (1.29) является уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (1.30)$$

описывающее окружность с центром в начале координат и радиусом r (рис. 1.24).

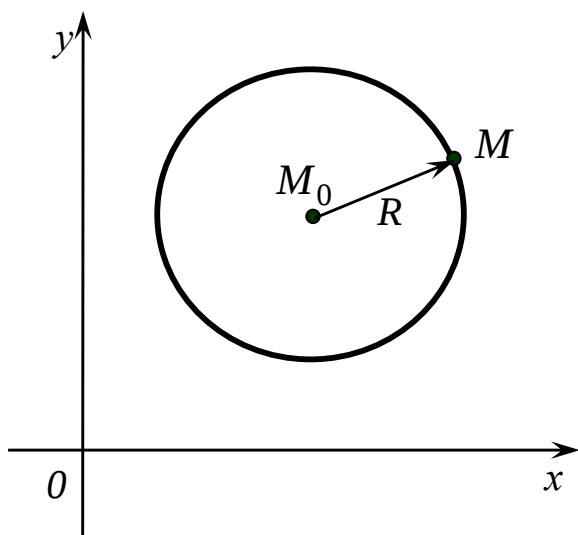


Рис. 1.23. Окружность с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$

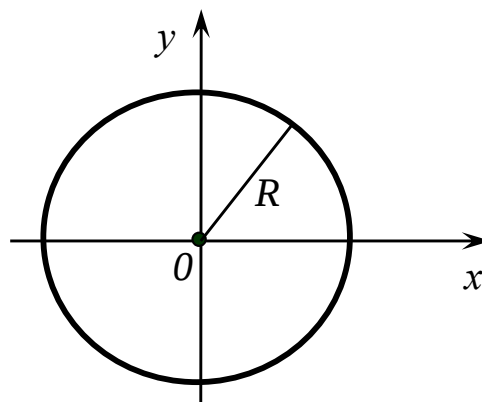


Рис. 1.24. Окружность с центром в начале координат

Обратим внимание на то, что мы получили уравнение линии (в нашем случае это окружность), опираясь на ее геометрическое определение. Таким образом нами была решена задача 31. В дальнейшем мы будем начинать с уравнения линии и будем геометрически описывать множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению, то есть мы будем решать задачу 32. Это связано с тем, что решение задачи 31 было бы связано с большими вычислительными трудностями.

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть постоянная величина D , большая чем расстояние между фокусами.

В зависимости от расположения эллипса на плоскости мы будем получать различные уравнения, задающие этот эллипс. Самым простым (каноническим) уравнением эллипса является уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad a > 0, b > 0 \quad (1.31)$$

Согласно определению, нужно выяснить, где расположены фокусы и чему равно расстояние D . Имеют место следующие факты:

1) если $a > b$, то уравнение (1.31) задает эллипс с фокусами $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$,

$F_2(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$ и $D = 2a$;

2) если $a < b$, то уравнение (1.31) задает эллипс с фокусами $F_1(0; -\sqrt{a^2 - b^2})$, $F_2(0; \sqrt{a^2 - b^2})$ и $D = 2b$;

3) если $a = b$, то уравнение (1.31) задает эллипс с фокусами $F_{1,2}(0; 0)$ и $D = 2a = 2b$, то есть окружность с центром в начале координат и диаметром $D = 2a = 2b$.

Покажем справедливость утверждения 1. Пусть координаты точки $M(x; y)$ удовлетворяют уравнению (1.31). Докажем, что фокусами являются точки $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$, $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$ и $D = 2a$. Сначала выразим y^2 из (1.31) в виде $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$ и вычислим сумму расстояний

$$\begin{aligned}
 |MF_1| + |MF_2| &= \sqrt{\left(x + \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 + y^2} = \\
 &= \sqrt{\left(x + \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} + \sqrt{\left(x - \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \\
 &= \sqrt{x^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 - b^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} + \\
 &\quad \sqrt{x^2 - 2x\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 - b^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)x^2 + 2xa^2\sqrt{a^2 - b^2} + a^4}{a^2}} + \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)x^2 - 2xa^2\sqrt{a^2 - b^2} + a^4}{a^2}} = \\
 &= \sqrt{\frac{\left(x\sqrt{a^2 - b^2} + a^2\right)^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{\left(x\sqrt{a^2 - b^2} - a^2\right)^2}{a^2}} = \\
 &= \frac{|x\sqrt{a^2 - b^2} + a^2|}{a} + \frac{|x\sqrt{a^2 - b^2} - a^2|}{a}.
 \end{aligned}$$

Теперь раскроем знак модуля, пользуясь его определением:

$$|z| = \begin{cases} z, & \text{если } z \geq 0, \\ -z, & \text{если } z < 0. \end{cases}$$

Так как для всех x , удовлетворяющих уравнению (1.31), значения выражения под модулем в первой дроби положительны, а во второй дроби отрицательны, то первый модуль раскрывается со знаком «+», а второй со знаком «-». Поэтому

$$|MF_1| + |MF_2| = \frac{x\sqrt{a^2 - b^2} + a^2}{a} - \frac{x\sqrt{a^2 - b^2} - a^2}{a} = 2a.$$

Пусть теперь точка $M(x; y)$ лежит на эллипсе Σ с фокусами $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$, $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$ и $D = 2a$. Тогда по формуле расстояния между точками имеем

$$|MF_1| + |MF_2| = \sqrt{(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2} + \sqrt{(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2} = 2a.$$

С другой стороны, повторяя в обратном порядке написанные выше равенства, получаем:

$$\begin{aligned} |MF_1| + |MF_2| &= 2a = \frac{x\sqrt{a^2 - b^2} + a^2}{a} - \frac{x\sqrt{a^2 - b^2} - a^2}{a} = \\ &= \frac{|x\sqrt{a^2 - b^2} + a^2|}{a} + \frac{|x\sqrt{a^2 - b^2} - a^2|}{a} = \\ &= \sqrt{(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} + \sqrt{(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, координаты любой точки эллипса удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2} + \sqrt{(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} + \sqrt{(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}. \quad (1.31,5) \end{aligned}$$

Пусть x_0 – фиксированное число. Определим сколько точек вида $(x_0; y)$ находится на рассматриваемом эллипсе. Если таких точек нет, то ответ 0. Если есть одна точка $M_1(x_0; y) \in \Sigma$, то обязательно будет точка $M_2(x_0; -y) \in \Sigma$. Из рис. 2ю22 видно, что для любой точки M_+ (точки M_-) с абсциссой x_0 лежащей вне отрезка M_1M_2 (внутри отрезка M_1M_2) будет выполнено неравенство $|MF_1| + |MF_2| > 2a$ ($|MF_1| + |MF_2| > 2a$). Таким образом, на эллипсе Σ не может быть более двух точек с одной абсциссой.

Очевидно, что равенству (1.31,5) удовлетворяют ординаты y , для которых $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$ (равносильно $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$). Из проведенных геометрических рассуждений вытекает, что других ординат y , соответствующих заданному x , не существует. В частности, для абсцисс $x = \pm a$ ордината y находится однозначно: $y = 0$. Итак, мы доказали, что координаты любой точки эллипса Σ удовлетворяют уравнению (1.31).

Справедливость утверждения 2 доказывается аналогично. Доказательство утверждения 3 более простое и по форме несколько отличается от первых двух.

Мы рекомендуем читателю провести его самостоятельно.

Исследуем форму эллипса, заданного каноническим уравнением (1.31) .

1. Отметим, что координаты x и y входят в уравнение (1.31) только в четных степенях. Поэтому, если точка $(x; y)$ принадлежит эллипсу, то ему также принадлежат точки $(x; -y)$, $(-x; y)$ и $(-x; -y)$. Таким образом, эллипс – кривая, которая симметрична относительно осей Ox и Oy , а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют **центром эллипса**.

2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. Положив $y = 0$ в уравнении (1.31), находим две точки $A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$, в которых ось Ox пересекает эллипс (рис. 1.25). Положив $x = 0$, находим точки пересечения эллипса с осью Oy : $B_1(0;-b)$ и $B_2(0;b)$. Точки A_1 , A_2 , B_1 и B_2 называются **вершинами эллипса**. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 , а также их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно **большой и малой осями эллипса**.

3. Из уравнения (1.31) следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит единицы, т.е. имеют место неравенства $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ и $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ или $-a \leq x \leq a$ и $-b \leq y \leq b$. Таким образом, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$.

4. В уравнении (1.31) сумма неотрицательных слагаемых $\frac{x^2}{a^2}$ и $\frac{y^2}{b^2}$ равна единице. Следовательно, при возрастании одного слагаемого другое будет уменьшаться, т.е. если $|x|$ возрастает, то $|y|$ уменьшается и наоборот.

Из выше сказанного следует, что эллипс имеет форму, изображенную на рис. 1.25

На рис. 1.25 фокусы эллипса обозначены через F_1 и F_2 на оси Ox (случай $a > b > 0$), расстояние между которыми равно $2c$, где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Это расстояние называется фокусным расстоянием.

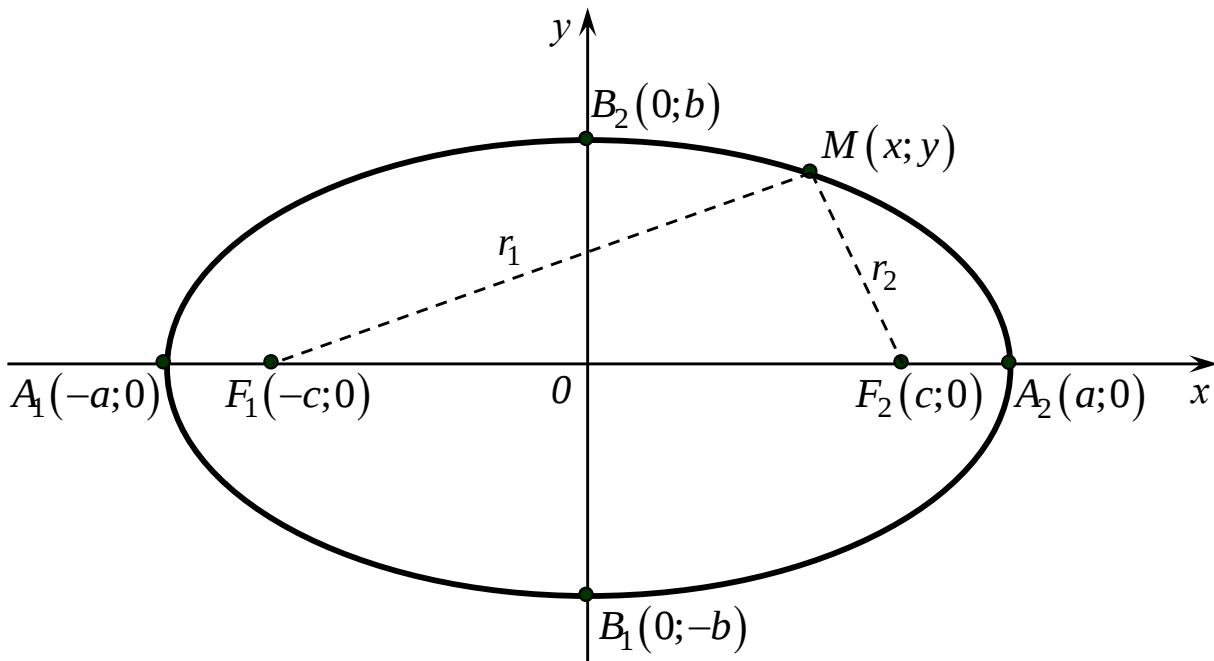


Рис. 1.25. Эллипс

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка эллипса (см. рис. 1.25). Длины отрезков $|F_1M| = r_1$, $|F_2M| = r_2$, а также сами эти отрезки, называются **фокальными радиусами** точки $M(x; y)$. Из определения эллипса следует, что

$$r_1 + r_2 = 2a > 2c.$$

Форма эллипса зависит от отношения $\frac{b}{a}$. Если $\frac{b}{a} = 1$, т.е. $a = b$, то из (1.31) получаем уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$ с центром в точке $O(0; 0)$.

В качестве характеристики формы эллипса *чаще* используется отношение

$$\boxed{\frac{c}{a} = \varepsilon}, \quad (1.32)$$

называемое **эксцентриситетом эллипса**, причем $0 \leq \varepsilon < 1$, так как $0 < c < a$.

Чем больше величина ε , тем больше форма эллипса отличается от формы окружности. При $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность (рис. 1.26).

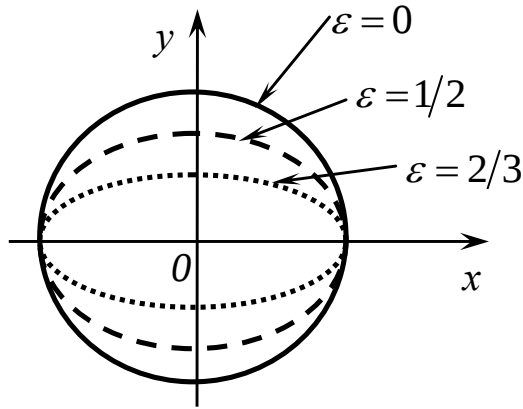


Рис. 1.26. Зависимость формы эллипса от эксцентриситета

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина D постоянная и меньшая, чем расстояние между фокусами.

В зависимости от расположения гиперболы на плоскости мы будем получать различные уравнения, задающие эту гиперболу. Каноническим уравнением гиперболы называется одно из уравнений

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad a > 0, b > 0 \quad (1.33)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a > 0, b > 0 \quad (1.33,5)$$

где a и b – действительная и мнимая полуоси гиперболы соответственно.

У гиперболы, заданной уравнением (1.33) фокусы находятся в точках $F_1(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ и $F_2(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$, $D = 2a$. У гиперболы, заданной уравнением (1.33,5) фокусы находятся в точках $F_1(0, -\sqrt{a^2 + b^2})$ и $F_2(0, \sqrt{a^2 + b^2})$, $D = 2b$. Мы не будем проверять эти факты. Их доказательство проводится рассуждениями, аналогичными рассуждениям из предыдущего раздела.

Исследуем форму гиперболы, заданную каноническим уравнением (1.33).

1. Уравнение (1.33) содержит координаты x и y только в четных степенях. Следовательно, гипербола – кривая, которая симметрична относительно осей Ox и Oy , а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют центром ги-

пербола.

2. Найдем точки пересечения гипербола с осями координат. Положив $y = 0$ в уравнении (1.33), находим две точки $A_2(-a; 0)$ и $A_1(a; 0)$, в которых ось Ox пересекает гиперболу. Положив $x = 0$ в (1.33), получаем $y^2 = -b^2$. Так как квадратный корень из отрицательного числа в области действительных чисел не извлекается, то можно сделать вывод: гипербола, описываемая уравнением (1.33), ось Oy не пересекает.

Точки A_1 и A_2 называются вершинами гипербола, отрезок A_1A_2 и его длина $|A_1A_2| = 2a$ называются действительной осью, а отрезки OA_1 , OA_2 и их длина $|OA_1| = |OA_2| = a$ называются действительными полуосями гипербола.

Отрезок B_1B_2 , соединяющий точки $B_1(0; b)$ и $B_2(0; -b)$, и его длина $|B_1B_2| = 2b$ называются мнимой осью, а отрезки OB_1 , OB_2 и их длина $|OB_1| = |OB_2| = b$ называются мнимыми полуосями гипербола. Прямоугольник с центром в начале координат, середины сторон которого являются точки $A_2(-a; 0)$, $A_1(a; 0)$, $B_2(0; -b)$ и $B_1(0; b)$, со сторонами $2a$ и $2b$ называется основным прямоугольником гипербола (см. рис. 1.28).

3. Из уравнения (1.33) следует, что выполнено неравенство $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$. Значит, $|x| \geq a$. Последнее неравенство равносильно тому, что $x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$. Это означает, что точки гипербола расположены справа от прямой $x = a$ (правая ветвь гипербола) и слева от прямой $x = -a$ (левая ветвь гипербола).

4. Разность $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ сохраняет постоянное значение, равное единице.

Следовательно, при возрастании $|x|$ возрастает и $|y|$.

5. Чтобы более ясно представить себе вид гипербола необходимо рассмотреть две прямые, связанные с нею – так называемые *асимптоты*.

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки $M(x; y)$, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат.

Покажем, что гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ имеет две асимптоты

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x} \quad \text{и} \quad \boxed{y = -\frac{b}{a}x}. \quad (1.34)$$

Так как прямые (1.34) и гипербола (1.33) симметричны относительно ко-

ординатных осей, то достаточно рассмотреть только те точки указанных линий, которые расположены в первой четверти. Возьмем на прямой $y = \frac{b}{a}x$ точку N , имеющую ту же абсциссу x , что и точка $M(x; y)$ на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 1.27).

Выразим ординату y из уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$ или $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, и найдем разность MN между ординатами прямой и ветви гиперболы:

$$\begin{aligned} MN &= \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

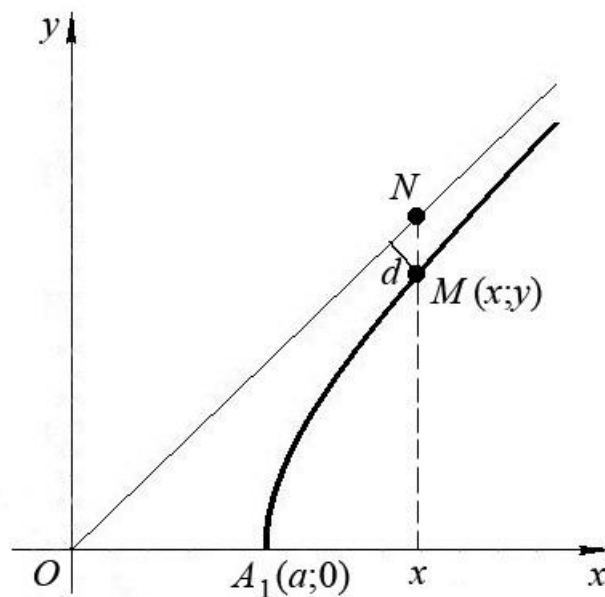


Рис. 1.27. Асимптота гиперболы в I координатной четверти

Из последней формулы видно, что при неограниченном возрастании абсциссы x расстояние MN убывает и стремится к нулю. Так как MN больше расстояния d от точки M до прямой $y = \frac{b}{a}x$, то d тем более стремится к нулю. Та-

ким образом, прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Из выше сказанного следует, что гипербола, описываемая уравнением (1.33), имеет форму, изображенную на рис. 1.28.

При построении гиперболы (1.33) обычно сначала строят ее *вершины* A_1 и A_2 и ее *основной прямоугольник*, а затем проводят прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника – *асимптоты гиперболы*.

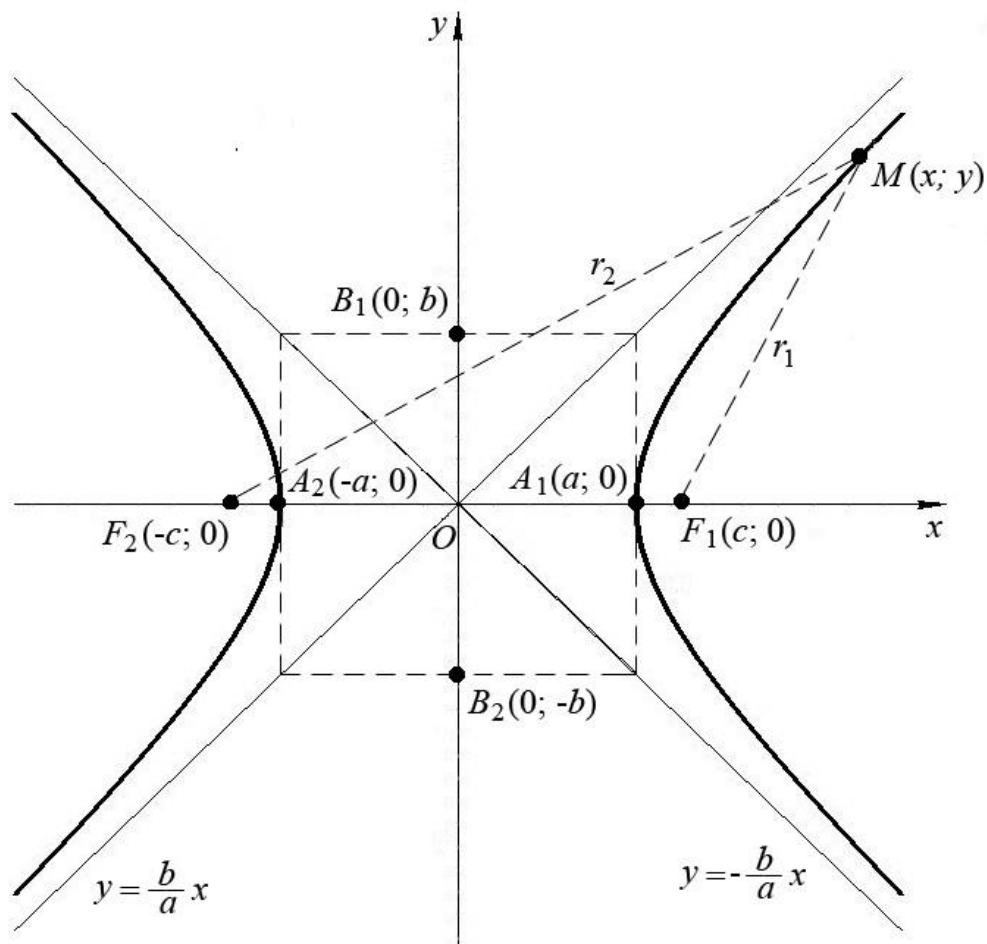


Рис. 1.28. Гипербола

Также как и у эллипса, фокусы гиперболы обозначены через F_1 и F_2 (рис. 1.28), расстояние между которыми равно $2c$, где фокусное расстояние c определяется по следующей формуле

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка гиперболы (см. рис. 1.28). Отрезки F_1M , F_2M и их длины $|F_1M| = r_1$ и $|F_2M| = r_2$ также как и у эллипса называются

фокальными радиусами точки $M(x; y)$. Из определения гиперболы следует, что

$$|r_2 - r_1| = 2a < 2c.$$

Форму гиперболы характеризует отношение $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

$$\boxed{\frac{c}{a} = \varepsilon}, \quad \boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

называемое эксцентриситетом гиперболы. Очевидно, что выполнено неравен-

ство $\varepsilon > 1$, так как $c > a$. Так как $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, то:

- 1) при больших значениях ε число b значительно превосходит число a и основной прямоугольник гиперболы вытянут вдоль оси Oy ;
- 2) при малых значениях ε число a значительно превосходит число b и основной прямоугольник гиперболы вытянут вдоль оси Ox .
- 3) если $a = b$, получаем равнобочную гиперболу: $x^2 - y^2 = a^2$ или $x^2 + y^2 = -a^2$, ее асимптотами будут прямые $y = \pm x$, то есть биссектрисы координатных углов.

Парабола

***Параболой** называется геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки F плоскости, называемой фокусом, и некоторой прямой L , называемой директрисой.*

Каноническим уравнением параболы называется каждое из уравнений

$$y^2 = 2px, \quad (1.34,5)$$

$$x^2 = 2py. \quad (1.34,6)$$

Для параболы, заданной уравнение (1.34,5) фокус расположен в точке $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а директрисой является прямая $x = -\frac{p}{2}$. Для параболы, заданной

уравнение (1.34,6) фокус расположен в точке $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, а директрисой является прямая $y = -\frac{p}{2}$.

Покажем, что уравнение (1.34,5) задает параболу Γ с фокусом $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ и

директрисой $x = -\frac{p}{2}$. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка плоскости. Соединим точку M с F и проведем отрезок MN перпендикулярно директрисе (см. рис. 1.29). Тогда расстояние от точки M до директрисы равно длине отрезка MN .

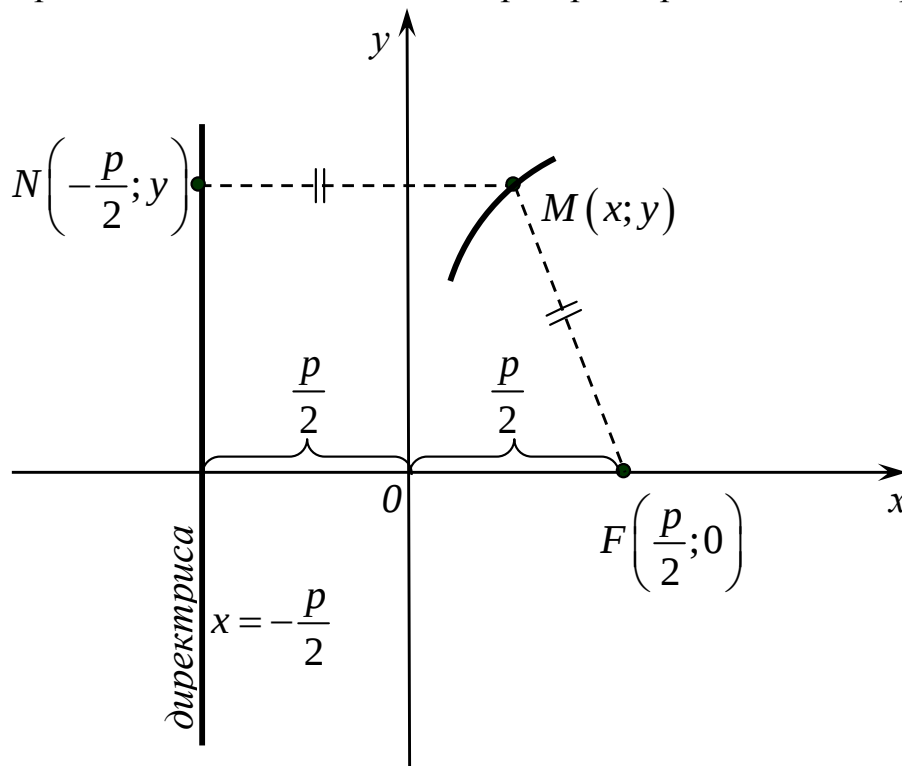


Рис. 1.29. Вывод уравнения параболы

Применяя формулу расстояния между двумя точками, находим

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad |MN| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}.$$

Используя, записанные равенства, получаем

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \Gamma &\Leftrightarrow |MF| = |MN| \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow y^2 = 2px. \end{aligned}$$

Таким образом, требуемое утверждение доказано. Вывод второго канонического уравнения рассматривается аналогично.

Исследуем форму параболы, заданную каноническим уравнением (1.34,5).

1. В уравнение (1.34,5) координата y входит в четной степени. Значит, парабола – это кривая, которая симметрична относительно оси Ox .

2. При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат. Точка $O(0; 0)$ называется вершиной параболы (1.34,5).

3. Если $p > 0$, то из уравнения (1.34,5) следует, что $x \geq 0$ и парабола расположена справа от оси Oy . Если $p < 0$, то из уравнения (1.34,5) следует, что $x \leq 0$ и парабола расположена слева от оси Oy .

4. При неограниченном возрастании x модуль y также неограниченно возрастает.

Из выше сказанного следует, что парабола, описываемая уравнением (1.34,5), имеет форму, изображенную на рис. 1.30, парабола, описываемая уравнением (1.34,6), имеет форму, изображенную на рис. 1.31.

Отрезок MF и его длина $|MF| = r$ (рис. 1.30) называются фокальным радиусом точки $M(x; y)$.

Уравнения

$$y^2 = -2px, \quad x^2 = -2py \quad \text{и} \quad x^2 = 2py \quad (p > 0)$$

также определяют параболы, вид которых изображен на рис. 1.31 – 1.33.

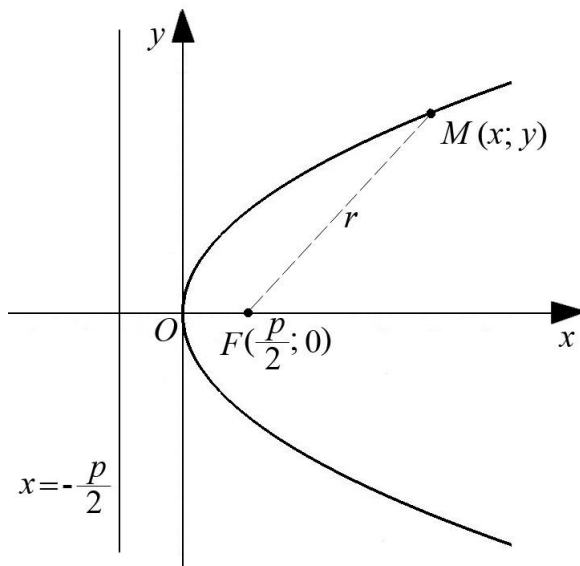


Рис. 1.30. Парабола $y^2 = 2px$.

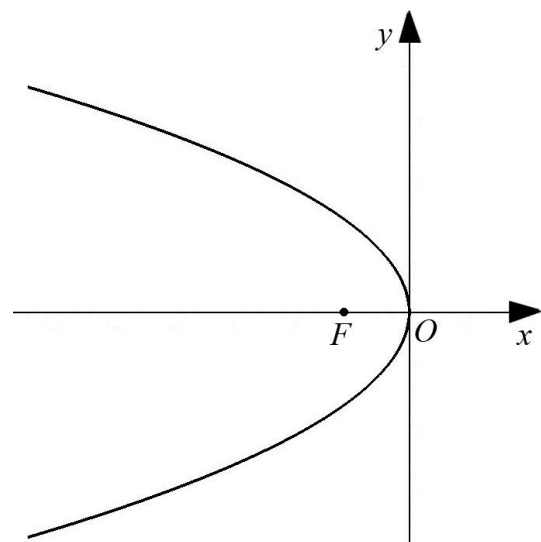


Рис. 1.31. Парабола $y^2 = -2px$.

Уравнения $x^2 = 2py$ описывают кривые, изображенные на двух рисунках ниже

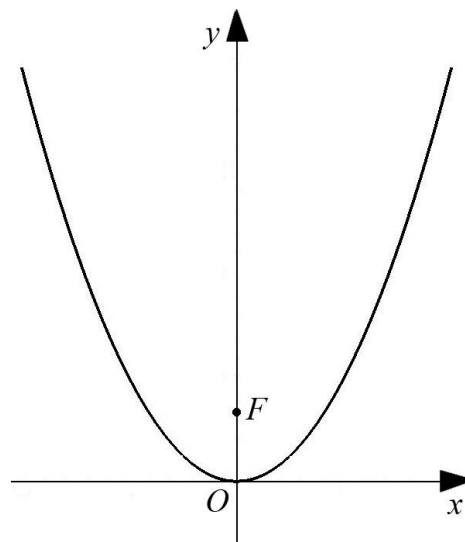
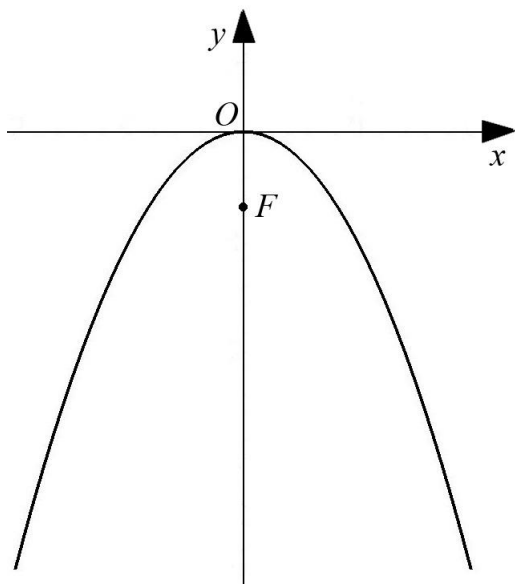


Рис. 1.32. Парабола $x^2 = 2py$, $p < 0$. Рис. 1.33. Парабола $x^2 = 2py$, $p > 0$.

Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду.

Мы видели, что вид уравнения линии зависит от расположения этой линии на плоскости. Например, если при выводе уравнения параболы расположить ее фокусы иначе, чем это было сделано в предыдущем пункте, то мы получим уравнение по виду отличное от (1.34,5) и (1.34,6). Кроме того, вид уравнения зависит от системы координат, относительно которой рассматривается эта линия. Мы будем рассматривать уравнения в такой системе координат Oxy , при переходе из которой сдвигом к системе координат $O'x'y'$, будем получать канонический вид уравнений кривых второго порядка.

Пример 1.5. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $4x^2 + 9y^2 - 32x + 18y + 37 = 0$.

Для приведения уравнения кривой второго порядка $4x^2 + 9y^2 - 32x + 18y + 37 = 0$ к каноническому виду выделим полные квадраты в его левой части:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 - 32x + 18y + 37 &= 4(x^2 - 8x) + 9(y^2 + 2y) + 37 = \\ &= 4(x^2 - 2x \cdot 4 + 4^2 - 4^2) + 9(y^2 + 2y \cdot 1 + 1^2 - 1^2) + 37 = \\ &= 4((x - 4)^2 - 4^2) + 9((y + 1)^2 - 1^2) + 37 = 4(x - 4)^2 - 64 + 9(y + 1)^2 - 9 + 37 = 0. \end{aligned}$$

и окончательно

$$4(x-4)^2 + 9(y+1)^2 = 36.$$

Разделив полученное уравнение на 36, и обозначив $x' = x - 4$ и $y' = y + 1$, получим

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Здесь, $x_0 = 4, y_0 = -1$ – координаты центра системы координат $O'x'y'$ (см. равенства (1.16,6)). Следовательно, исходная кривая второго порядка является эллипсом, полуоси которого равны $a = 3$ и $b = 2$. Центр эллипса находится в точке $O'(4; -1)$ (рис. 1.34)

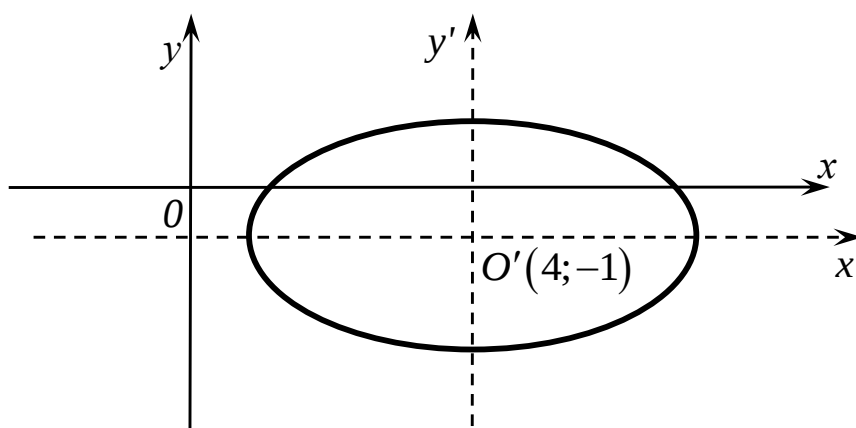


Рис. 1.34. Эллипс

Мы рассмотрели случаи, когда уравнение второго порядка задает эллипс, гиперболу или параболу. Не нужно думать, что этим исчерпывается набор всех линий, описываемых уравнением (1.285).

Пример 1.6. Уравнение $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 0$ задает единственную точку с координатами $x = 3, y = -2$.

Уравнение $(x-3)^2 + (y+2)^2 = -1$ не имеет решений и, значит, задает пустое множество.

Уравнение $(x-3)^2 - (y+2)^2 = 0$ можно записать в виде $(x-3)^2 = (y+2)^2$, что равносильно совокупности двух уравнений $y = x - 5$ и $y = -x + 1$, которые задают две пересекающиеся прямые.

Уравнение $(y-x-3)(y-x+2) = 0$ равносильно совокупности двух уравнений $y = x + 3$ и $y = x - 2$, которые задают две параллельные прямые.

Основной результат, относящийся к геометрическому описанию уравнению (1.285) состоит в том, что уравнение (1.285) задает одну из следующих линий: эллипс (в частности окружность), гипербола, парабола, две пересекающиеся прямые, две параллельные прямые, точка, пустое множество.

1.3. Аналитическая геометрия в пространстве

Для достижения точности изложения целей и методов аналитической геометрии в пространстве перенесем все, сказанное нами для плоскости, на случай пространства. Главным объектом изучения аналитической геометрии в пространстве являются поверхности, то есть множества точек пространства, составленные по некоторому правилу. Эти поверхности аналитическая геометрия изучает алгебраическими методами, то есть через описание координат точек поверхности в некоторой декартовой прямоугольной системе координат. Далее мы будем исследовать связь между геометрическим описанием поверхности и алгебраическим описанием координат точек этой поверхности.

Уравнением с тремя переменными x, y, z называется уравнение вида $F(x, y, z) = 0$. Множеством решений этого уравнения является каждая тройка чисел x_0, y_0, z_0 , которые при подстановке в $F(x, y, z_0) = 0$ вместо x, y, z дают верное равенство. Как известно, в декартовой системе координат $Oxyz$ каждой точке пространства соответствует тройка действительных чисел и, наоборот, каждой такой тройке чисел соответствует определенная точка пространства. Поэтому решение уравнения $F(x, y, z) = 0$ можно понимать геометрически как множество точек пространства с системой координат $Oxyz$, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. В дальнейшем, множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, будем называть поверхностью Π , заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$ в пространстве с системой координат $Oxyz$. Можно сформулировать несколько равносильных между собой утверждений:

1) поверхностью Π в пространстве с системой координат $Oxyz$ задана уравнением $F(x, y, z) = 0$;

2) координаты точек поверхности Π удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$ и координаты точек, не лежащих на поверхности Π , не удовлетворяют этому уравнению;

3) координаты точек поверхности Π удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$ и точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, лежат на поверхности Π .

В современной математической терминологии утверждение «поверхность Π в пространстве с системой координат $Oxyz$ задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ » часто формулируется в виде «поверхность Π состоит из тех и только тех точек пространства с системой координат $Oxyz$, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$ » или в виде «уравнению $F(x, y, z) = 0$ удовлетворяют координаты тех и только тех точек пространства с системой координат $Oxyz$, которые принадлежат поверхности Π ».

Таким образом, возникают две задачи:

31) по заданному уравнению описать множество всех точек пространства $Oxyz$, координаты которых ему удовлетворяют;

32) по заданному множеству Φ точек пространства $Oxyz$ написать уравнение, которому удовлетворяют только точки множества Φ .

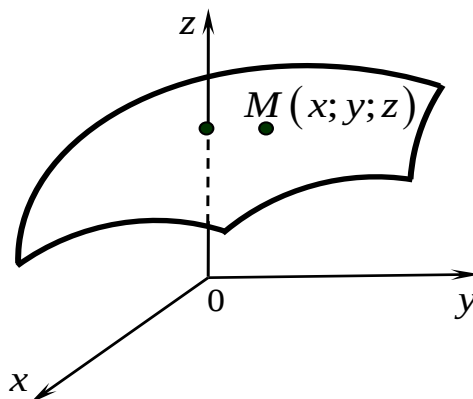


Рис. 1.35. Поверхность $F(x; y; z) = 0$

Простейшей поверхностью является плоскость. В пространстве плоскость можно задать различными способами и каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

1.3.1. Уравнения плоскости в пространстве

В зависимости от способа задания и исходных данных уравнение плоскости в пространстве может иметь различный вид. Напомним, что плоскость в пространстве может быть задана различными способами: точкой и вектором, ортогональным (перпендикулярным) плоскости; тремя точками, не лежащими на одной прямой; двумя пересекающимися прямыми, двумя параллельными прямыми.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку ортогонально данному вектору

Пусть плоскость α проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\vec{N}\{A; B; C\}$ перпендикулярен этой плоскости (рис. 1.36). В этом случае вектор $\vec{N}\{A; B; C\}$ называется нормальным вектором плоскости α .

Выведем уравнение плоскости α . Возьмем произвольную точку пространства $M(x; y; z)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M}\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$. Далее получаем (см. рис. 1.36) следующие равносильные между собой утверждения

$$M \in \alpha \Leftrightarrow M_0M \perp \bar{N} \Leftrightarrow MM_0 \cdot \bar{N} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Таким образом, координаты точек плоскости α описываются уравнением

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}. \quad (1.36)$$

Уравнение (1.36) называется уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ортогонально данному вектору $\bar{N}\{A; B; C\}$.

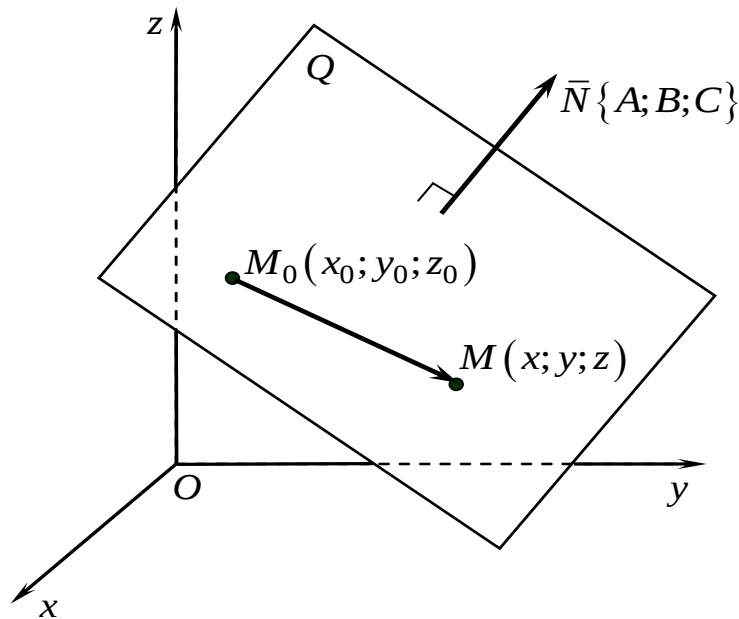


Рис. 1.36. Плоскость, проходящая через данную точку ортогонально данному вектору

Общее уравнение плоскости

Раскрыв скобки в уравнении (1.36): $Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$, получим *общее уравнение плоскости в пространстве*

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}, \quad (1.37)$$

где $D = -Cz_0 - By_0 - Ax_0$.

Рассмотрим частные случаи уравнения (1.37) и соответствующие им расположения плоскости в пространстве.

1. Если $D = 0$, то $Ax + By + Cz = 0$. Полученному уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0; 0; 0)$. Следовательно, плоскость α проходит через начало координат (рис 1.37).

2. Если $A = 0$, то $By + Cz + D = 0$. Так как проекция нормального вектора $\bar{N}\{A; B; C\}$ на ось Ox равна нулю, то $\bar{N} \perp Ox$ и, следовательно, плоскость α перпендикулярна плоскости Oyz или, что тоже самое, плоскость α параллель-

на оси Ox (рис 1.38). Аналогично рассматриваются случаи $B=0$ и $C=0$. Таким образом, *если в уравнении плоскости отсутствует какая-нибудь переменная, то плоскость будет параллельна координатной оси, соответствующей отсутствующей переменной.*

3. Если $A=D=0$, то $Bu + Cz = 0$. Плоскость α проходит через точку $O(0;0;0)$ и перпендикулярна плоскости Oyz . Следовательно, плоскость $Bu + Cz = 0$ проходит через ось Ox (рис 1.39). Аналогично, уравнения $Ax + Cz = 0$ (при $B=D=0$) и $Ax + Bu = 0$ (при $C=D=0$) описывают плоскости, проходящие соответственно через оси Oy и Oz .

4. Если $A=B=0$, то $Cz + D = 0 \Rightarrow z = -\frac{D}{C} = \text{const}$. Плоскость α параллельна плоскости Oxy (рис. 1.40). Аналогично, уравнениям $Ax + D = 0$ (при $B=C=0$) и $Bu + D = 0$ (при $A=C=0$) отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz .

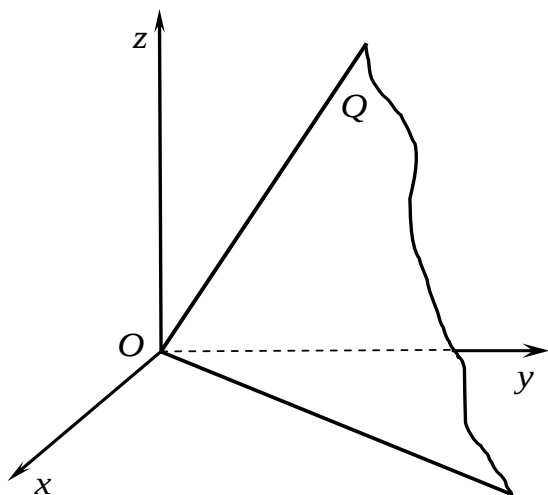


Рис. 1.37. Плоскость, проходящая через начало координат

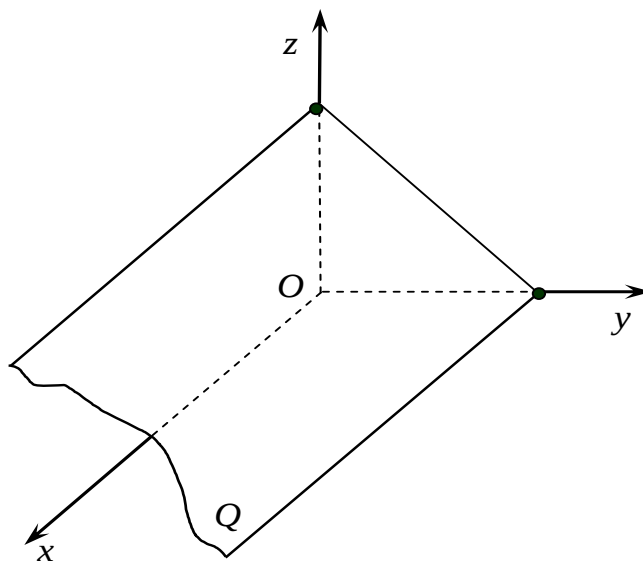


Рис. 1.38. Плоскость, параллельная оси Ox

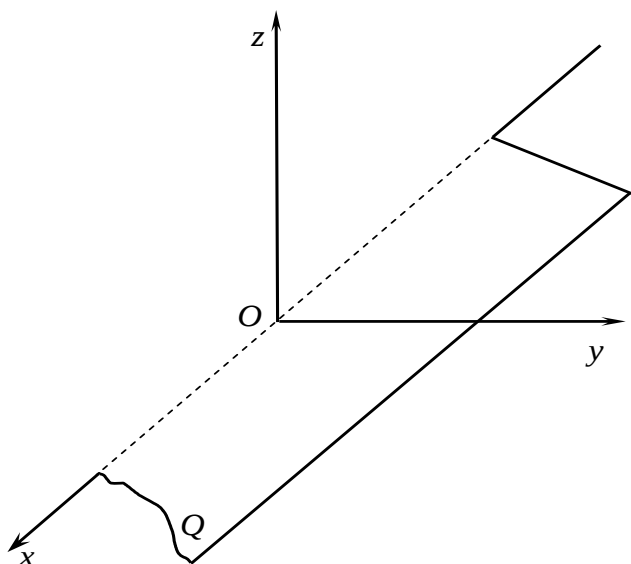


Рис. 1.39. Плоскость, проходящая через ось Ox

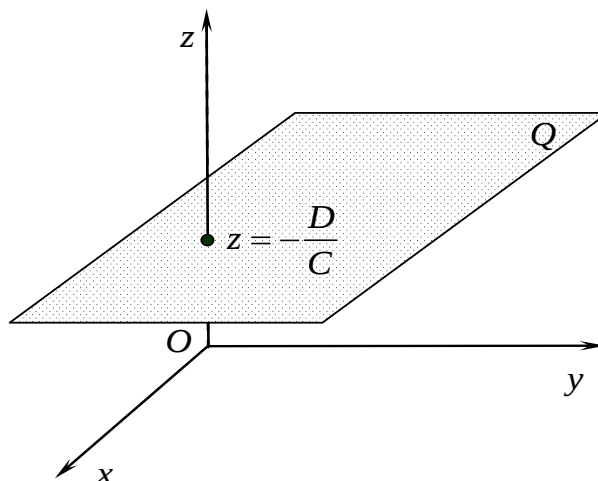


Рис. 1.40. Плоскость, параллельная плоскости xOy

5. Если $A=B=D=0$, то $Cz=0$, т.е. $z=0$. В этом случае плоскость α совпадает с плоскостью Oxy (рис. 1.41). Аналогично: плоскости $y=0$ и $x=0$ совпадают с плоскостями Oxz и Oyz соответственно.

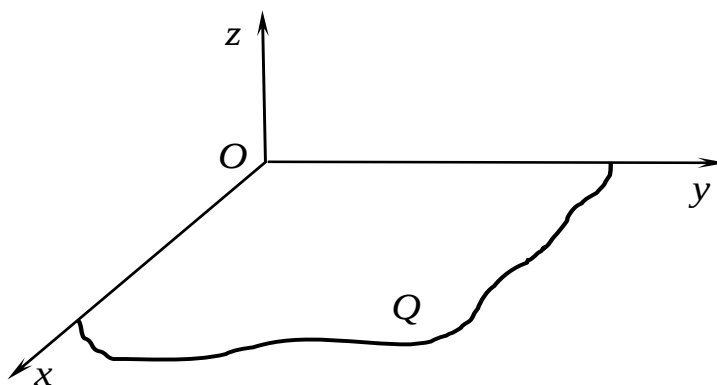


Рис. 1.41.
Плоскость,
совпадающая с
плоскостью
 Oxy

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Запишем уравнение плоскости α , проходящей через три заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой (см. рис.1.42).

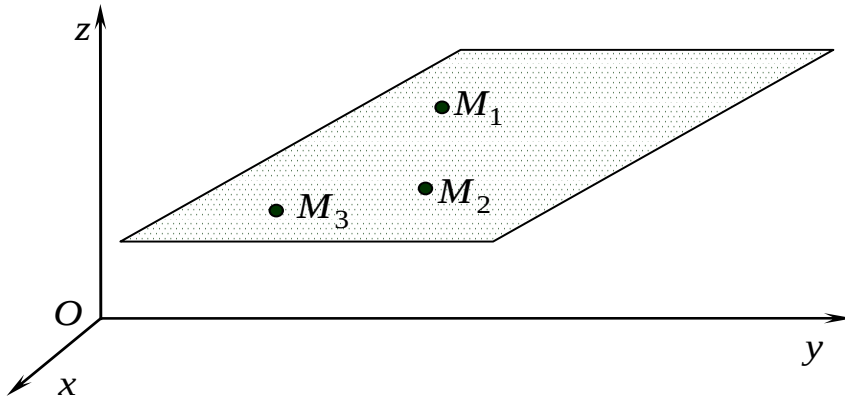


Рис. 1.42. Плоскость, проходящей через три данные точки

Возьмем произвольную точку пространства $M(x; y; z)$. Тогда условие $M \in \alpha$ равносильно тому, что векторы M_1M , M_1M_2 , M_1M_3 являются компланарными. Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения получаем, что $M \in \alpha$ равносильно равенству $M_1M \cdot M_1M_2 \cdot M_1M_3 = 0$. Отсюда получаем, что плоскость α состоит из тех и только тех точек, координаты которых удовлетворяют равенству

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.38)$$

Пример 1.6. Составить уравнение грани ABD пирамиды $ABCD$, если известны координаты ее вершин: $A(1; 2; -3)$, $B(2; -4; 1)$, $C(-3; -5; -1)$ и $D(-2; 0; 5)$.

Так как грань в пирамиде представляет собой плоскость, то нам необходимо составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(1; 2; -3)$, $B(2; -4; 1)$ и $D(-2; 0; 5)$. Для этого обозначим искомую плоскость α и воспользуемся уравнением (1.38):

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in \alpha &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 2-1 & -4-2 & 1+3 \\ -2-1 & 0-2 & 5+3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 1 & -6 & 4 \\ -3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 2-1 & -4-2 & 1+3 \\ -2-1 & 0-2 & z_3+3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + (z+3) \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -40(x-1) - 20(y-2) - 20(z+3) = 0. \end{aligned}$$

Окончательно уравнение плоскости ABD (грани ABD) примет вид $2x + y + z - 1 = 0$.

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox , Oy и Oz соответственно отрезки a , b и c не равные нулю, т.е. проходит через три точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$ (рис. 1.43).

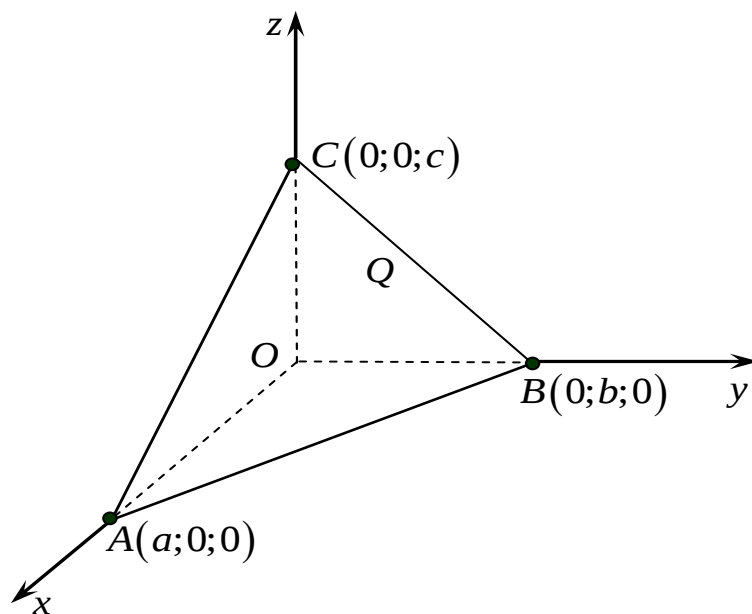


Рис. 1.43. Вывод уравнения плоскости в отрезках

Запишем уравнение плоскости Q , проходящей через данные три заданные точки. Подставим координаты точек $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$ в уравнение (1.38):

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив определитель по первой строке, получаем

$$(x-a)bc - y(-ac) + zba = 0 \quad \text{или} \quad xbc + yac + zba = abc$$

Разделив последнее равенство на $abc \neq 0$, получим искомое уравнение

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}. \quad (1.39)$$

Уравнение (1.39) называется уравнением плоскости в отрезках.

1.3.2. Расстояние от точки до плоскости

Пусть даны плоскость α , заданная общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и некоторая точка пространства $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис. 1.44). Расстоянием d от точки M_0 до плоскости α называется длина перпендикуляра опущенного из M_0 на плоскость α . Из рис. 1.44 видно, что расстояние d равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$ на направление нормального вектора $\bar{N}\{A; B; C\}$, где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ – произвольная точка плоскости α .

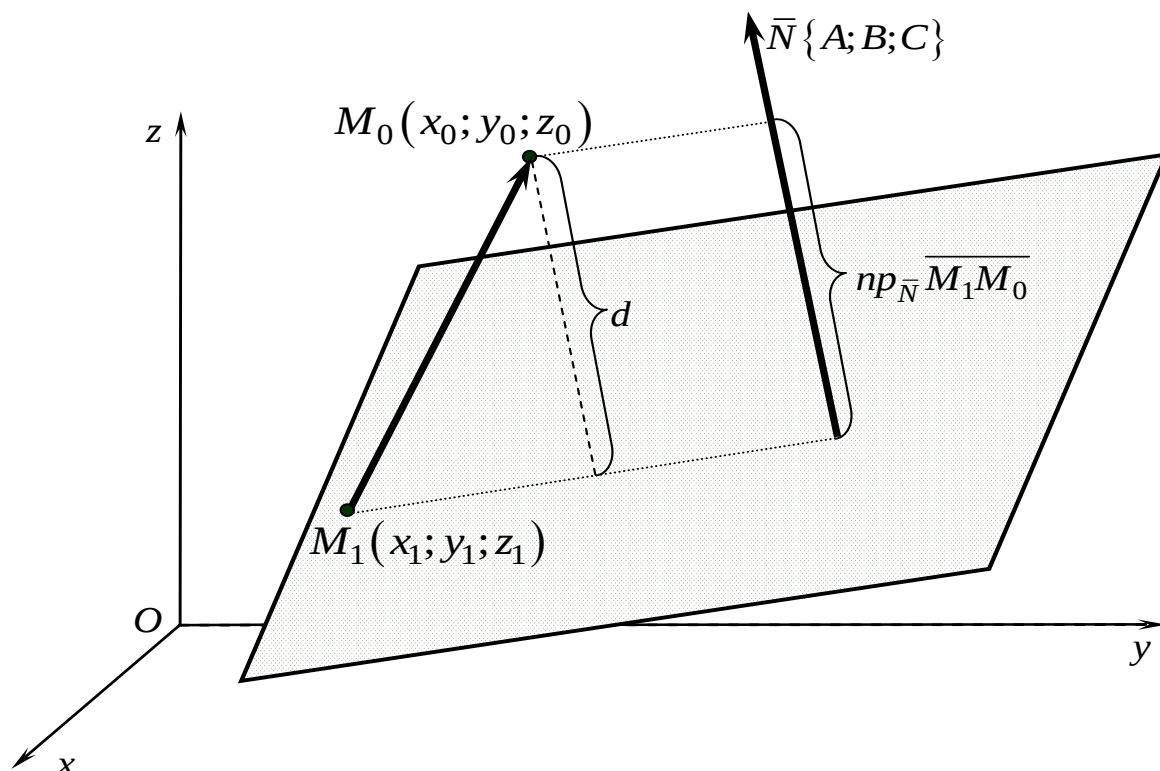


Рис. 1.44. Расстояние от точки до плоскости

Используя правило вычисления проекции через скалярное произведение, получаем

$$d = |\vec{M_1M_0} \cdot \bar{N}| = \frac{|\vec{M_1M_0} \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1.40)$$

Так как точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ принадлежит плоскости α , то ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости, то есть выполнено равенство $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Откуда имеем

$$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1. \quad (1.41)$$

Подставляя (1.41) в выражение (1.40), получим искомую формулу

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1.42)$$

Пример 1.7. Используя условие *примера 1.6*, найти длину высоты H пирамиды $ABCD$, опущенной из точки C на грань ABD и объем пирамиды $ABCD$.

Решение. Так как высота h пересекает грань ABD под прямым углом, то длину высоты можно найти как расстояние от точки C до плоскости ABD , воспользовавшись формулой (1.42). Из *примера 1.6* известно, что уравнение плоскости ABD имеет вид

$$2x + y + z - 1 = 0.$$

Значит,

$$H = \frac{|2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-5) + 1 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-6 - 5 - 1 - 1|}{\sqrt{6}} = \frac{13}{\sqrt{6}}.$$

Известно, что объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} S_{OCH.} \cdot h,$$

где $S_{OCH.}$ – площадь основания пирамиды, то есть площадь какой-либо ее грани, а h – длина высоты пирамиды, опущенной на эту грань.

В качестве основания пирамиды возьмем, например, грань ABD . Таким образом, высота h должна быть опущена на эту грань из вершины C . Длина этой высоты была найдена ранее, в *примере 1.7*: $h = \frac{13}{\sqrt{6}}$.

Так как грань в пирамиде представляет собой треугольник, то площадь грани ABD можно найти по формуле

$$S_{OCH.} = S_{ABD} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |AD| \cdot \sin \varphi,$$

где φ – угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

Определим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}\{1; -6; 4\}, \overline{AD}\{-3; -2; 8\}$$

и воспользуемся формулой (1.11):

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}|} = \frac{1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-2) + 4 \cdot 8}{\sqrt{1^2 + (-6)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 8^2}} = \frac{41}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{77}}.$$

Искомый $\sin \alpha$ равен

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{41}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{77}} \right)^2} = \sqrt{\frac{4081 - 1681}{53 \cdot 77}} = \sqrt{\frac{2400}{53 \cdot 77}} = \frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{77}}.$$

Учитывая длины сторон AB и AD :

$$|AB| = \sqrt{1^2 + (-6)^2 + 4^2} = \sqrt{53}, |AD| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 8^2} = \sqrt{77},$$

находим площадь грани ABD

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \sqrt{53} \cdot \sqrt{77} \cdot \frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{77}} = 10\sqrt{6} \text{ кв.ед.}$$

Следовательно, объем пирамиды $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10\sqrt{6} \cdot \frac{13}{\sqrt{6}} = \frac{130}{3}.$$

1.3.3. Угол между двумя плоскостями.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Даны две плоскости α_1 и α_2 , заданные общими уравнениями: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно (рис. 1.45).

Под углом между двумя плоскостями α_1 и α_2 , понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Напомним, что величина двугранного угла между пересекающимися плоскостями α_1 и α_2 , определяется следующим образом. Пусть L является прямой пересечения плоскостей α_1 и α_2 . Проводим прямую L_1 в плоскости α_1 , перпендикулярно L и прямую L_2 в плоскости α_2 , перпендикулярно L . Величина каждого из плоских углов между

прямыми L_1 и L_2 , называется величиной соответствующего двугранного угла. Если плоскости параллельны, то угол между ними считается равным нулю.

Угол φ между нормальными векторами $\bar{N}_1\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\bar{N}_2\{A_2; B_2; C_2\}$ плоскостей α_1 и α_2 равен одному из этих углов (см. рис. 1.45), так как это углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Таким образом, для нахождения угла плоскостями достаточно найти угол между соответствующими нормальными векторами. Удобно находить не сам угол, его косинус:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (1.43)$$

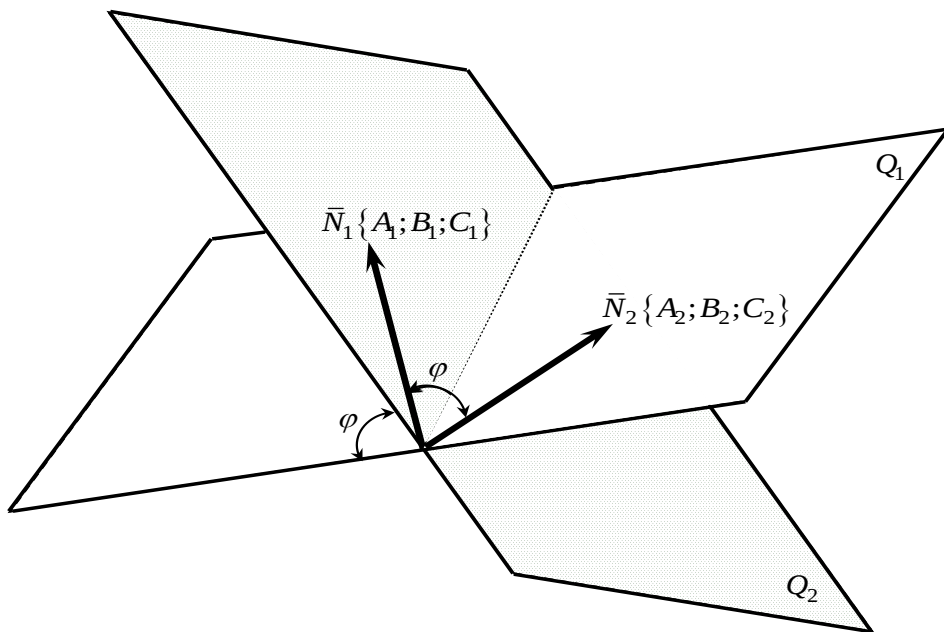


Рис. 1.45. Угол между плоскостями

Если получится $\cos \varphi > 0$, то мы нашли косинус острого угла между плоскостями, если получится $\cos \varphi < 0$, то мы нашли косинус тупого угла между плоскостями.

Две плоскости перпендикулярны равносильно тому, что то их нормальные вектора ортогональны: $\bar{N}_1 \perp \bar{N}_2$. Тогда $\alpha_1 \perp \alpha_2$ равносильно тому, что $\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2 = 0$ или в координатах

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (1.44)$$

Равенство (1.44) является условием перпендикулярности двух плоскостей

α_1 и α_2 .

Две плоскости параллельны равносильно тому, что то их нормальные вектора коллинеарны: $\bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2$. Тогда $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ равносильно тому, что

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}. \quad (1.45)$$

Это равенство является условием параллельности двух плоскостей α_1 и α_2 .

1.3.4. Поверхности второго порядка

Уравнением второго порядка в заданной прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется уравнение

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0, \quad (1,+++)$$

причем среди коэффициентов A, B, C, D, E, F хотя бы один ненулевой.

Действительно, если $(1,+++)$ имеем $A=B=C=D=E=F=0$, то мы получаем уравнение плоскости $Gx + Hy + Kz + L = 0$, которое не содержит вторых степеней и естественно не может называться уравнением второго порядка.

Множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $(1,+++)$, называется поверхностью второго порядка, заданной этим уравнением.

Поверхностями второго порядка являются: сфера, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды, конус, а также эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры.

В этом параграфе рассмотрим уравнение, в котором отсутствуют попарные произведения переменных:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0.$$

Сфера

Сферой называется множество всех точек пространства, находящихся на одинаковом расстоянии R (радиус сферы) от данной точки M_0 (центр сферы).

Найдем уравнение сферы S радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Согласно определению сферы, принадлежность точки $M(x; y; z)$ этой сфере равносильна выполнению равенства $|MM_0| = R$. Возводим обе части в квадрат и получаем, что точка $M(x; y; z) \in S$ равносильно выполнению равенства

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2}. \quad (1.46)$$

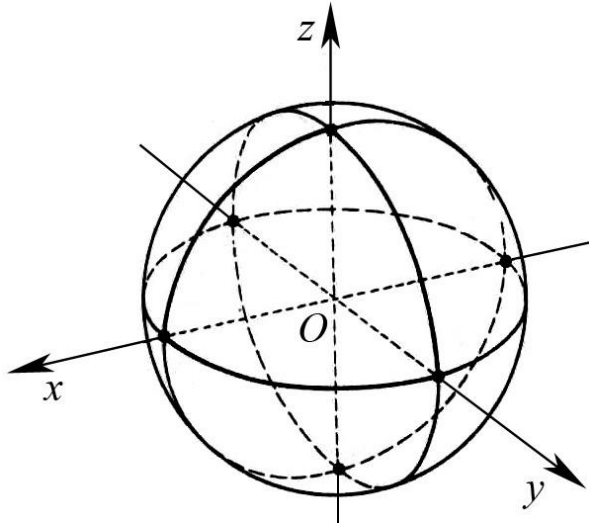


Рис. 1.46. Сфера

Итак, уравнение (1.46) определяет сферу радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Если же центр сферы совпадает с началом координат $O(0; 0; 0)$ (рис. 1.46), то уравнение сферы принимает вид:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}. \quad (1.47)$$

Эллипсоид

Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}, \quad (1.48)$$

где a , b и c — полуоси эллипсоида.

Исследуем форму эллипсоида по его уравнению (1.48). Для этого применим *метод сечений*, который заключается в том, что изучают линии пересечения данной поверхности с координатными плоскостями или плоскостями, им параллельным.

Рассмотрим сечения эллипсоида с плоскостями, параллельными плоскости Oxy , то есть с плоскостями $z = h$, где h — любое число. Линия, получаемая в сечении, будет определяться двумя уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \quad (1.49)$$

Исследуем линию (1.49), придавая h различные значения.

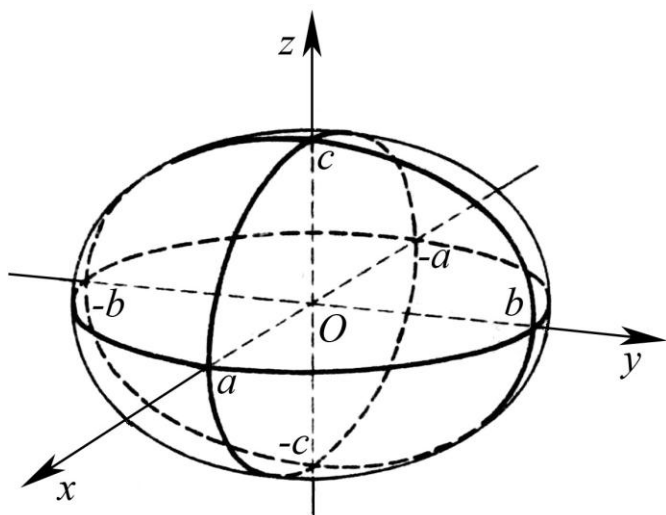
1. Если в уравнениях (1.49) $|h| > c$, ($c > 0$), то имеем $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$. В этом случае точек пересечения поверхности (1.48) с плоскостью $z = h$ не существует.

2. Если $|h| = c$, т.е. $h = \pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Линия пересечения (1.49) вырождается в две точки $(0; 0; c)$ и $(0; 0; -c)$, а плоскости $z = c$ и $z = -c$ касаются данной поверхности.

3. Если $|h| < c$, то уравнения (1.49) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\left(a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

В данном случае линией пересечения является эллипс с полуосями $a_1 = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ и $b_1 = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$. Причем с уменьшением $|h|$, полуоси a_1 и b_1 увеличиваются и при $h = 0$ они достигают своих максимальных значений: $a_1 = a$ и $b_1 = b$. Уравнения (1.49) примут вид:



$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Аналогичные результаты получим при рассмотрении сечений поверхности (1.48) плоскостями $x = h$ и $y = h$.

Таким образом, эллипсоид имеет форму сплюсненной по трем направлениям сферы (рис. 1.47).

Рис. 1.47. Эллипсоид

Эллипсоид, имеющий каноническое уравнение (1.48), симметричный относительно координатных осей (рис. 1.47) имеет три плоскости симметрии, которые совпадают с координатными плоскостями и центр симметрии – начало координат $O(0;0;0)$.

Если все полуоси эллипсоида различны, то его называют *трехосный*. Если какие-либо две полуоси равны, трехосный эллипсоид превращается в *эллипсоид вращения*. Например, при $a = b$ имеем

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

В этом случае эллипсоид получается вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащего в плоскости Oxz , вокруг Oz . Так же он может быть получен вращением эллипса $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащего в плоскости Oyz , вокруг Oz . Здесь в сечении эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости Oxy , то есть плоскостями $z = \text{const}$, будут получаться окружности.

Если же все полуоси эллипсоида равны $a = b = c$, то он вырождается в сферу радиуса a :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Гиперboloиды

Различают два вида гиперboloидов: однополостный и двуполостный.

1. Каноническое уравнение однополостного гиперboloида имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}, \quad (1.50)$$

При сечении однополостного гиперboloида плоскостями $z = h$, получим линию пересечения, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Как видно, линией пересечения является эллипс с полуосями $a_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ и $b_1 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$. Полуоси a_1 и b_1 достигают своего наименьшего значения при $h = 0$: $a_1 = a$ и $b_1 = b$. При возрастании $|h|$ полуоси эллипса будут увеличиваться.

Если пересекать однополостный гиперboloид плоскостями $x = h$ или $y = h$ в сечении будем получать гиперболы. Например, при $x = 0$ гипербола описывается уравнениями

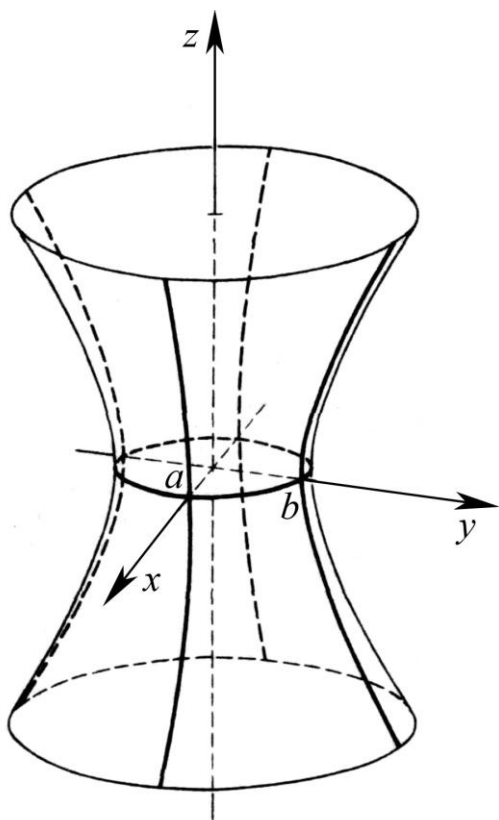


Рис. 1.48. Однополостный гиперboloид

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Анализируя полученные сечения, можно сделать вывод: **однополостный гиперboloид** представляет собой бесконечную расширяющуюся «трубку» переменного сечения (рис. 1.48).

Однополостный гиперboloид, имеющий каноническое уравнение (1.50), симметричный относительно координатных осей (рис. 1.48) имеет три плоскости симметрии, которые совпадают с координатными плоскостями и центр симметрии – начало координат $O(0;0;0)$.

Если $a = b$, то имеем **однополостный гиперboloид вращения**.

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Здесь в сечении гиперboloида плоскостями, параллельными плоскости xOy , т.е. плоскостями $z = \text{const}$, будут получаться окружности, а сама поверхность образуется вращением вокруг оси Oz гиперболы $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2. Каноническое уравнение двуполостного гиперboloида имеет вид

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}, \quad (1.51)$$

Следует обратить **внимание**, что в уравнениях (1.50) и (1.51) правые части одинаковые и равны *единице*, а левые части различные: для *однополостного гиперboloида* левая часть (1.50) содержит **одно** слагаемое со знаком «–», а для

двуполостного гиперboloида **два** слагаемых в левой части (1.51) имеют знак «-».

При сечении двуполостного гиперboloида плоскостями $z = h$, получим линию пересечения, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases} \quad (1.52)$$

Из уравнений (1.52) можно сделать следующие выводы.

а). Если в $|h| < c$, то имеем $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$. Точек пересечения поверхности (1.51) с плоскостью $z = h$ не существует.

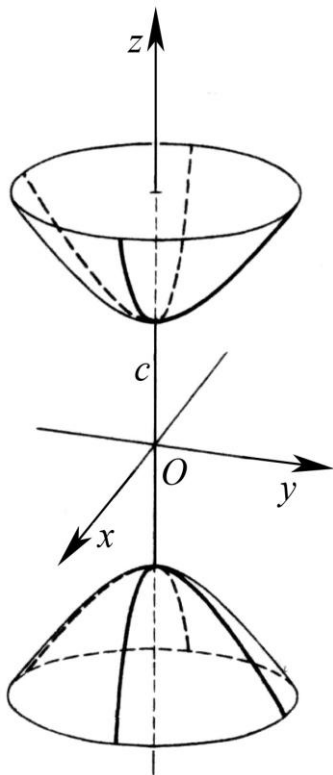
б). Если $|h| = c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Плоскости $z = c$ и $z = -c$ касаются данной поверхности в точках $(0; 0; c)$ и $(0; 0; -c)$.

в). Если $|h| > c$, то уравнения (1.52) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right)} = 1, \\ z = h. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\left(a \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1} \right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Линией пересечения является эллипс с полуосями $a_1 = a \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ и $b_1 = b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$. Причем с увеличением $|h|$, полуоси a_1 и b_1 возрастают.

Если пересекать двуполостный гиперboloид плоскостями $x = h$ или $y = h$ в сечении будем получать гиперболы. Так, например, при $x = 0$ и $y = 0$, соответственно, гиперболы описываются уравнениями



$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

У обеих гипербол вершины находятся на оси Oz .

Из анализа полученных сечений можно сделать вывод: **двуполостный гиперболоид** представляет собой поверхность, состоящую из двух полостей, имеющих форму выпуклых неограниченных чаш (рис. 1.49).

Двуполостный гиперболоид, имеющий каноническое уравнение (1.51), симметричный относительно координатных осей (рис. 1.49) имеет три плоскости симметрии, которые совпадают с координатными плоскостями и центр симметрии – начало координат $O(0;0;0)$.

Рис. 1.49. Двуполостный гиперболоид

Если $a = b$, то имеем **двуполостный гиперболоид вращения**.

$$\frac{-x^2 - y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Здесь в сечении гиперболоида плоскостями, параллельными плоскости xOy , т.е. плоскостями $z = h$ ($|h| > c$), будут получаться окружности.

Параболоиды

Различают два вида параболоидов: эллиптический и гиперболический.

1. Каноническое уравнение эллиптического параболоида имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z}, \quad (1.53)$$

где $p > 0$ и $q > 0$.

При сечении эллиптического параболоида плоскостями $z = h$, получим линию пересечения, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$

Если $h < 0$, то $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} < 0$. Следовательно, плоскости $z = h$ параболоид не пересекают.

Если $h = 0$, то $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0$. Значит, плоскость $z = 0$ касается параболоида в точке $O(0;0;0)$.

Если же $h > 0$, то в сечении получаем эллипс, уравнения которого имеют вид

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2hp} + \frac{y^2}{2hq} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

С увеличением h полуоси эллипса возрастают.

При пересечении поверхности (1.53) плоскостями $x = h$ и $y = h$ будут получаться параболы. В частности, пересекая параболоид (1.53) координатными плоскостями xOz ($y = 0$) и yOz ($x = 0$) соответственно получим параболы

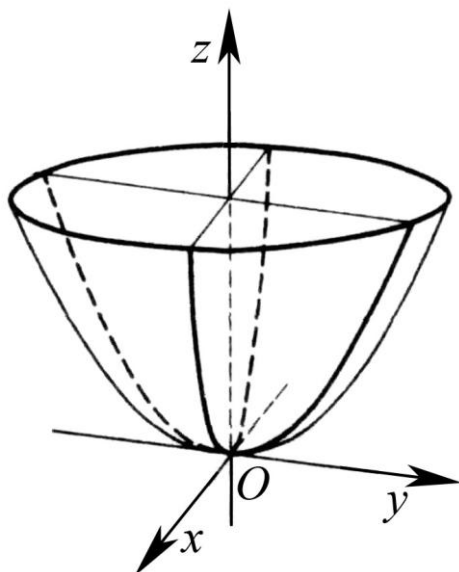


Рис. 1.50. Эллиптический параболоид

$$z = \frac{x^2}{2p} \quad \text{и} \quad z = \frac{y^2}{2q}.$$

Таким образом, **эллиптический параболоид** имеет вид выпуклой, бесконечно расширяющейся чаши (рис. 1.50).

Эллиптический параболоид, заданный каноническим уравнением (1.53), в отличие от сферы, эллипсоида и гиперболоидов, имеет только **две плоскости симметрии**: xOz и yOz (рис. 1.50).

При $p = q$ будем иметь *параболоид вращения*

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

в сечениях которого получаются окружности.

2. Каноническое уравнение гиперболического параболоида имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z}, \quad (1.54)$$

где $p > 0$ и $q > 0$.

При сечении гиперболического параболоида плоскостями $z = h$, получим линию пересечения, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{2hp} - \frac{y^2}{2hq} = 1, \\ z = h. \end{cases} \quad (1.55)$$

Кривая (1.55) при всех значениях $h \neq 0$ является *гиперболой*. При $h > 0$ ее фокусы лежат на оси Ox . При $h < 0$ – фокусы лежат на оси Oy , а при $h = 0$ ли-

ния пересечения $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$ распадается на пару пересекающихся прямых

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

При пересечении поверхности (1.54) плоскостями $y = h$ будут получаться *параболы*

$$\begin{cases} x^2 = 2p \left(z + \frac{h^2}{2q} \right), \\ y = h, \end{cases}$$

ветви которых направлены вверх. Так, например, при $y = 0$ в сечении получается парабола

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases}$$

с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz .

Пересекая гиперболический параболоид плоскостями $x = h$, получим *параболы*

$$\begin{cases} y^2 = -2q\left(z - \frac{h^2}{2p}\right), \\ x = h, \end{cases}$$

ветви которых направлены вниз. При $x = 0$ в сечении получается парабола

$$\begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0, \end{cases}$$

с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz .

Следовательно, **гиперболический параболоид** имеет вид седла (рис. 1.51).

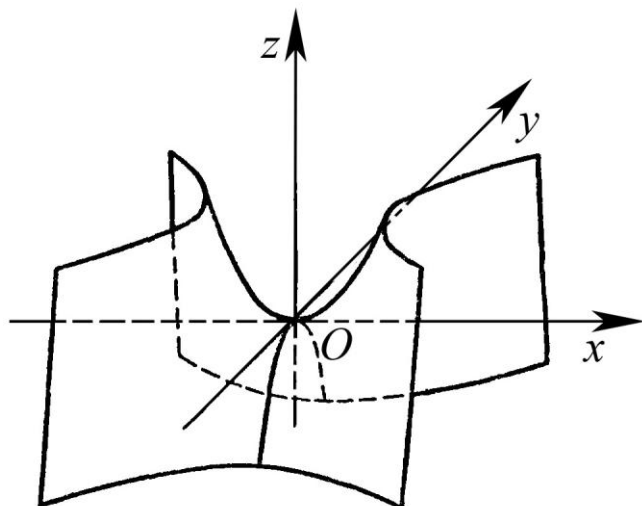


Рис. 1.51. Гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид, заданный каноническим уравнением (1.54), также как и эллиптический параболоид, имеет только две плоскости симметрии: xOz и yOz (рис. 1.51).

Конус второго порядка

Каноническое уравнение конуса второго порядка имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}. \quad (1.56)$$

Пересечем конус плоскостями $z = h$. Уравнения линии пересечения следующие

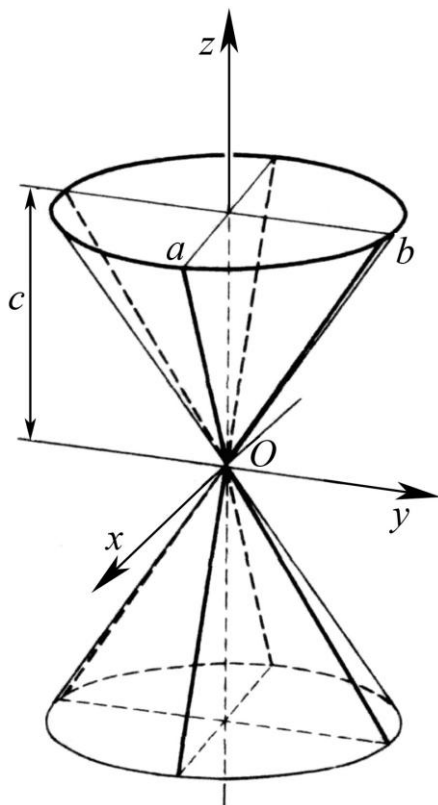


Рис. 1.52. Конус второго порядка

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

При $h=0$ линия вырождается в точку $O(0;0;0)$, а при $h \neq 0$ в сечении будем иметь эллипсы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 c^2} + \frac{y^2}{b^2 c^2} = 1, \\ \frac{h^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} \\ z = h, \end{cases}$$

полуоси которых будут возрастать при увеличении $|h|$.

Если рассекать конус плоскостями $x=h$ и $y=h$, то в сечении получаться *гиперболы*, а при пересечении координатными плоскостями yOz ($x=0$) и xOz ($y=0$) эти гиперболы вырождаются в *пару пересекающихся прямых*.

Так, в случае, пересечения плоскостью $x=0$ линия пересечения

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

распадается на следующие пересекающиеся прямые

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

А при пересечении плоскостью $y=0$ получим линию

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

распадающуюся на прямые

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0.$$

Таким образом, **конус второго порядка** имеет вид, изображенный на рис. 1.52.

Конус второго порядка симметричен относительно трех плоскостей и центра симметрии. Для конуса, имеющего каноническое уравнение (1.56), этими плоскостями являются xOy , xOz , yOz , а центр симметрии – точка $O(0;0;0)$.

При $a = b$ получим круговой конус

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

в сечениях которого плоскостями $z = h$ будут окружности.

Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью или **цилиндром** называется поверхность, образованная движением прямой L , которая перемещается в пространстве параллельно самой себе и пересекая каждый раз некоторую кривую K (рис. 1.53). При этом кривая K называется **направляющей** цилиндра, а прямая L – его **образующей**.

Рассмотрим такие цилиндрические поверхности, *направляющие* которых лежат в одной из координатных плоскостей, а *образующие* параллельны координатной оси, перпендикулярной этой плоскости. **Уравнениями этих цилиндров являются уравнения их направляющих.**

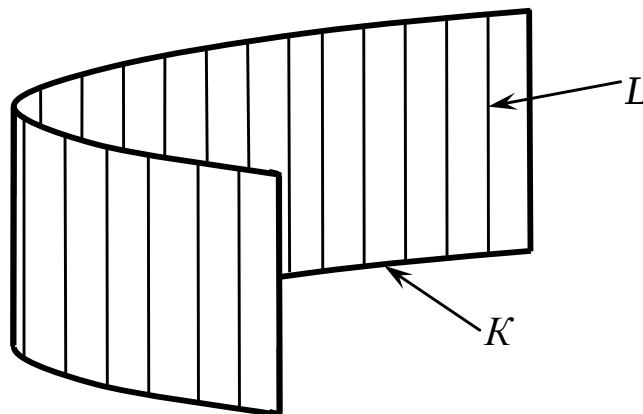


Рис. 1.53. Цилиндрическая поверхность

Так, если направляющая K лежит в плоскости xOy , а образующая L параллельна оси Oz , то уравнение цилиндра, в общем случае, записывается в виде

$$F(x; y) = 0.$$

Если направляющая K лежит в плоскости xOz , а образующая L параллельна оси Oy , то уравнение цилиндра следующее

$$F(x; z) = 0.$$

Если же направляющая K лежит в плоскости yOz , а образующая L параллельна оси Ox , то уравнением цилиндрической поверхности будет являться

$$F(y; z) = 0.$$

Название цилиндра определяется названием направляющей.

Если *направляющей* служит эллипс в плоскости xOy

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad (1.57)$$

то соответствующая цилиндрическая поверхность называется **эллиптическим цилиндром** (рис. 1.54), который описывается уравнением (1.57).

Частным случаем (при $a = b$) эллиптического цилиндра является **круговой цилиндр**. Его уравнением является

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

где $R = a$.

Если *направляющей* служит *гипербола*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad (1.58)$$

то цилиндрическая поверхность называется **гиперболическим цилиндром** (рис. 1.55). Он описывается уравнением (1.58).

Если направляющая – парабола в плоскости xOy

$$\boxed{y^2 = 2px}, \quad (1.59)$$

то соответствующая цилиндрическая поверхность называется **параболическим цилиндром** (рис. 1.56) и уравнение (1.59) описывает этот цилиндр.

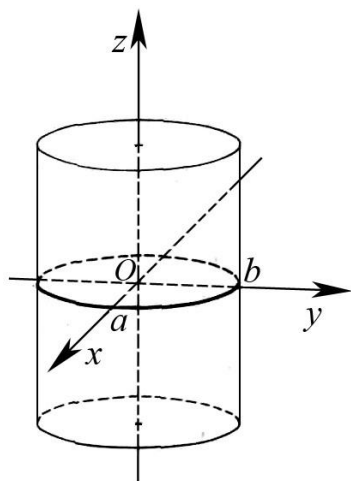


Рис. 1.54.
Эллиптический
цилиндр

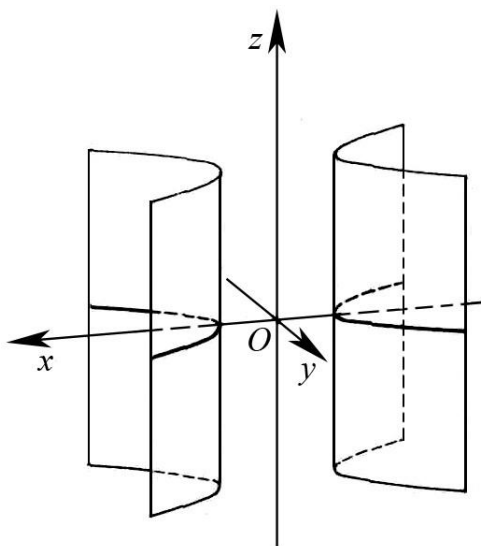


Рис. 1.55.
Гиперболический
цилиндр

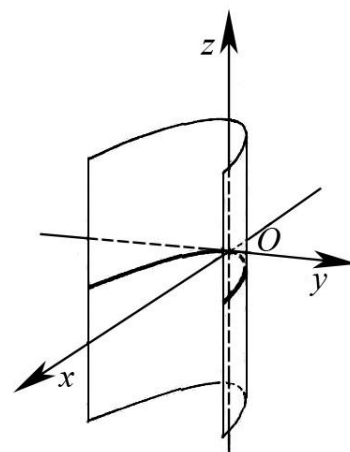


Рис. 1.56.
Параболический
цилиндр

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное пособие позволит студентам ускоренной формы обучения выполнить контрольные работы и подготовиться к экзамену, так как включает необходимые теоретические сведения по курсу высшей математики и примеры решений задач, входящих в контрольные работы студентов – ускоренников.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / *И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.

Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / *М. Я. Выгодский.* – М.: Наука, 1973. – 870 с.

Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / *П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова.* – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 Век»: Мир и Образование, 2003. – 720 с.

Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / *А.Д. Мышкис.* – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 640 с.

Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. / *Н. С. Пискунов.* – М.: ИНТЕГРАЛ–ПРЕСС, 2002. – 1032 с.

Привалов И. И. Аналитическая геометрия / *И. И. Привалов.* – СПб.: Издательство «Лань», 2004. – 304 с.

Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике / *П.Ф. Фильчаков.* – Киев. Наукова думка, 1972. – 744 с.

Шипачев В. С. Высшая математика / *В. С. Шипачев.* – М.: Высшая школа, 2002. – 479 с.