МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»»

Кафедра прикладной математики и механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы № 2
для студентов всех направлений
заочной формы обучения

Воронеж 2022

УДК 531(07)
ББК 22.21я7

Составители:
канд. физ.-мат. наук Н. С. Переславцева,
канд. техн. наук А. А. Воропаев,
д-р техн. наук Д. В. Хван,
канд. техн. наук Л. В. Хливненко
канд. техн. наук О. А. Семенихин

Теоретическая механика: методические указания к выполнению контрольной работы № 2 для студентов всех направлений заочной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: Н. С. Переславцева, А. А. Воропаев, Д. В. Хван, Л. В. Хливненко, О. А. Семенихин. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022. 31 с.

Методические указания предназначены для направлений, учебные планы которых предусматривают выполнение двух контрольных работ. Они включают правила оформления, содержание заданий второй контрольной работы, примеры решения задач, вопросы для самостоятельной проверки, список рекомендуемой литературы.

Предназначены для студентов 1–2 курсов.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле ТМ КРЗ № 2.pdf.

Табл. 4. Ил. 34. Библиогр.: 7 назв.

УДК 531(07)
ББК 22.21я7

Рецензент - А. В. Келлер, д-р. физ.-мат. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики ВГТУ

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ КУРСА

Изучение дисциплины проводится в течение двух семестров, в каждом из которых студенты выполняют контрольную работу, которая должна быть зачтена до начала сессии. В данных методических указаниях представлена информация, необходимая для выполнения контрольной работы за второй семестр изучения дисциплины. Небрежно оформленные или выполненные не по тому варианту работы **не проверяются**! Незачтенные работы возвращаются с замечаниями для исправления.

Контрольная работа оформляется в тонкой тетради или на листах формата А4. На обложке (титульном листе) указывается следующая информация:

Контрольная работа
по дисциплине «xxxxx»
(МУ № «xxxxx»)
студента группы «xxxxx»
Xxxxx Xxxxx Xxxxx (*Ф.И.О. полностью*)
№ зачетной книжки: xxxxx
Дата сдачи на проверку: xxxxx
Подпись: xxxxx

Контрольная работа состоит из четырех задач: ***Д1*** и ***Д2*** (динамика), ***Д3*** (аналитическая механика). К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица дополнительных условий. Нумерация рисунков двойная. Например, рис. Д1.4 – это рис. 4 к задаче Д1 и т.д. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-ом столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре номера зачетной книжки, а номер условия в таблице – по последней. Например, если номер книжки оканчивается числом 46, то берется рисунок 4 и условие 6 из таблицы.

Решение каждой задачи должно начинаться с новой страницы на развороте тетради. Сверху указывается номер задачи, делается чертеж (только **карандашом**!) и записывается, что в задаче дано и требуется определить (текст задачи не переписывать). ***Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи,*** на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. При изучении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. Без оговорок считается, что все нити являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок (шкив), по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы и критерии применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний. На зачет/экзамен необходимо представить зачтенную преподавателем работу, в которой все погрешности и замечания должны быть исправлены. Зачтенная работа является необходимым допуском к аттестационному испытанию, во время которого студент должен ответить на любой вопрос, относящийся к выполненному заданию.

При выполнении работы следует пользоваться обозначениями, приведенными в таблице ниже.

Методические указания по решению задач даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой ***«Указания»***, затем приводится пример решения задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизводить его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно проделаны с необходимыми пояснениями, в конце должны быть даны ответы.

Естественно, решение задач необходимо предварять изучением теоретического материала. При изучении теории сначала следует прочитать весь материал темы, особенно не задерживаясь на том, что представляется не совсем понятным. Часто первоначально неясные положения становятся понятны при дальнейшем изложении материала. Затем следует вернуться к местам, вызвавшим затруднения и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении следует обратить на формулировки основных понятий, определений, теорем и т.п. В точных формулировках существенно каждое слово и очень полезно понять, почему данное положение сформулировано именно так.

Закончив изучение темы, полезно составить краткий конспект. При составлении конспекта следует указывать страницы учебника, на которых излагается соответствующий раздел, и заносить возникающие вопросы. При составлении конспекта следует использовать и материалы лекции.

Данные указания разработаны с учётом того, что в настоящих учебных планах выделяется значительное число часов на самостоятельное изучение дисциплины. Для освоения программы курса ***необходимо*** воспользоваться дополнительными источниками. Список рекомендуемой литературы приведен в конце пособия.

Приведенные контрольные вопросы позволяют студентам самостоятельно оценить степень их знаний.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначения	Размерность	Величина
$\vec{F}$	Н (ньютон)	- вектор силы;
$F = \lvert\vec{F}\rvert$	Н	- величина (модуль) силы;
F_x, F_y, F_z	Н	- проекции силы на оси;
$M_O(\vec{F})$ или $m_O(\vec{F}) = F \cdot h$	Н $\cdot$ м (м – метр)	- алгебраический момент силы относительно точки O на плоскости;
h	м	- плечо силы (расстояние от моментной точки до линии действия силы)
$\vec{M}_O(\vec{F})$ или $\vec{m}_O(\vec{F})$	Н $\cdot$ м	- векторный момент силы относительно центра O;
$M_{Ox}(\vec{F})$, $M_{Oy}(\vec{F})$, $M_{Oz}(\vec{F})$ или $m_{Ox}(\vec{F})$, $m_{Oy}(\vec{F})$, $m_{Oz}(\vec{F})$	Н $\cdot$ м	- моменты силы относительно координатных осей;
M	Н $\cdot$ м	- момент пары сил,
$\vec{v}$	м/с (с – секунда)	- вектор скорости;
$\vec{a}$	м/с^2	- вектор ускорения;
a_n	м/с^2	- нормальное ускорение;
a_τ	м/с^2	- касательное ускорение;
ρ	м	- радиус кривизны траектории;

Продолжение таблицы

φ		- угол поворота тела;
$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$	$с^{-1}$	- угловая скорость;
$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$	$с^{-2}$	- угловое ускорение;
P_v, C_v		- мгновенный центр скоростей;
$v_e, v_{пер}$	м/с	- переносная скорость точки;
$v_r, v_{отн}$	м/с	- относительная скорость точки;
$a_e, a_{пер}$	м/с^2	- переносное ускорение;
$a_r, a_{отн}$	м/с^2	- относительное ускорение;
$a_{кор}$	м/с^2	- кориолисово ускорение;
$P = mg$	Н	- вес;
m	кг (килограмм)	- масса;
C		- центр масс системы;
$\vec{q} = m\vec{v}$	$\dfrac{кг \cdot м}{с}$	- количество движения точки;
$\vec{Q} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k$	$\dfrac{кг \cdot м}{с}$	- количество движения системы, состоящей из n материальных точек;
$\vec{k}_O = \bar{r} \times m\vec{v}$	$\dfrac{кг \cdot м^2}{с}$	- кинетический момент точки относительно центра O;

		Окончание таблицы
$\vec{K}_{\hat{I}} = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \vec{v}_k$	$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$	- кинетический момент системы относительно центра O;
R, r	м	- радиусы шкивов,
f		- коэффициент трения;
$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}$	$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$	- кинетическая энергия системы;
J	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$	- момент инерции тела;
$A(\vec{F})$	$\text{Н} \cdot \text{м}$	- работа силы $\vec{F}$;
$\sum A_k^{(e)}$	$\text{Н} \cdot \text{м}$	- сумма работ внешних сил;
$\overline{\Phi} = -m\vec{a}$	Н	- сила инерции точки;
$\overline{\Phi}_k, \vec{M}_k^{\Phi}$		- главный вектор и главный момент сил инерции k-го тела механической системы;
p		- число степеней свободы системы;
q_i		- обобщенные координаты системы;
$\dot{q}_i$		- обобщенная скорость;
δq_i		- независимые возможные перемещения системы;
δA_F		- возможная работа силы $\vec{F}$;
Q		- обобщенная сила;

ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

Динамика

Задача Д1

Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость v_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0–Д1.9, табл. Д1).

На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\overline{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\overline{R}$, зависящая от скорости $\bar{v}$ груза (направлена против движения).

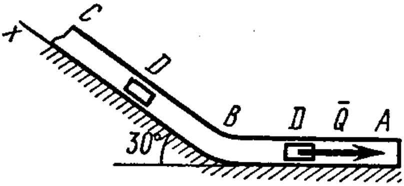

Рис. Д1.0

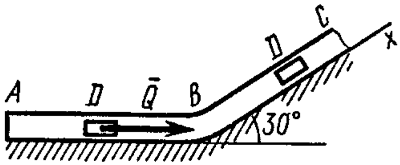

Рис. Д1.1

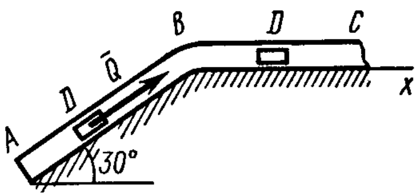

Рис. Д1.2

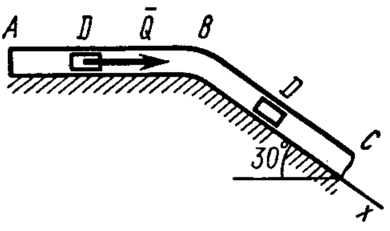

Рис. Д1.3

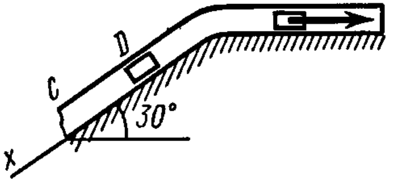

Рис. Д1.4

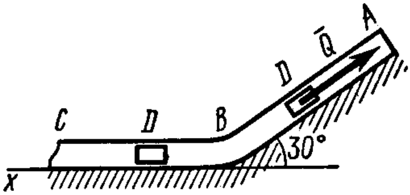

Рис. Д1.5

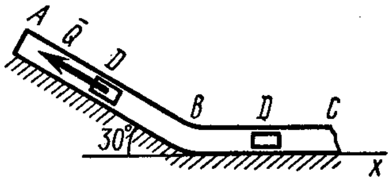

Рис. Д1.6

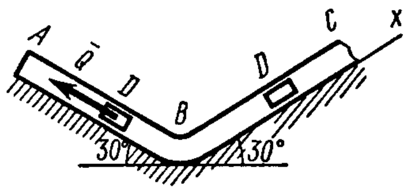

Рис. Д1.7

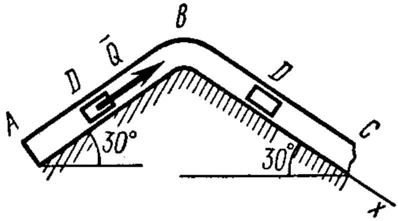

Рис. Д1.8

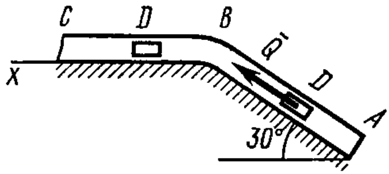

Рис. Д1.9

Таблица Д1

Номер условия	m, кг	v_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н
0	2	20	6	$0{,}4v$	–	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0{,}8v^2$	1,5	–	$6t$
2	4,5	24	9	$0{,}5v$	–	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0{,}6v^2$	5	–	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0{,}4v$	–	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0{,}5v^2$	4	–	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0{,}3v$	–	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0{,}8v^2$	2,5	–	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0{,}5v$	–	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0{,}2v^2$	4	–	$-6\sin(4t)$

В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действует переменная сила $\overline{F}$, проекция которой F_x, на ось x

задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т.е. $x = f(t)$, где $x = BD$.

Указания. Задача Д1 – на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB, учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке AB или длину этого участка, определить скорость груза в точке B. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке BC. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке B, и полагая в этот момент $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке AB в случае, когда задана длина l участка, целесообразно перейти к переменному x, учтя, что

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = v_x \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}.$$

Пример Д1.

На вертикальном участке AB трубы (рис. Д1) на груз D массой m действуют сила тяжести и сила сопротивления R; расстояние от точки A, где $v = v_0$, до точки B равно l. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести, сила трения скольжения с коэффициентом f и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Д а н о : $m = 2$ кг, $R = \mu v^2$, где $\mu = 0{,}4$ кг/м, $v_0 = 0{,}5$ м/с, $l = 2{,}5$ м, $f = 0{,}2$ $F_x = 16\sin(4t)$.

О п р е д е л и т ь : $x = f(t)$ на участке BC.

Решение:

1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}$ и $\overline{R}$. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

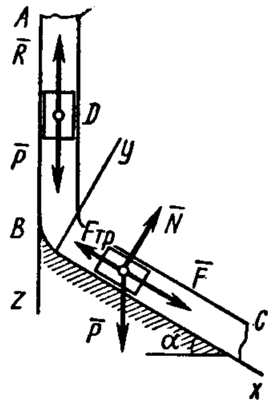

Рис. Д1

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \sum_k F_{kz} \text{ , или}$$

$$mv_z\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z} = P_z + R_z . \qquad (1)$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu v^2$. Подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $v_z = v$, получим

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = mg - \mu v^2 , \quad \text{или} \quad v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{m}{\mu}g - v^2\right). \quad (2)$$

Введем для сокращения записей обозначения:

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2 \text{ м}^{-1}, \quad n = \frac{m}{\mu}g = 50 \quad \text{м}^2/\text{с}^2, \qquad (3)$$

где при подсчете принято $g \approx 10$ м^2/с^2. Тогда уравнение (2) можно представить в виде:

$$2v\frac{dv}{dz} = -2k(v^2 - n) . \qquad (4)$$

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2v\mathrm{d}v}{v^2 - n} = -2k\mathrm{d}z \quad \text{и} \quad \ln(v^2 - n) = -2kz + C_1 . \qquad (5)$$

По начальным условиям при $z=0$ $v=v_0$, что дает $C_1=\ln(v_0^2-n)$ и из равенства (5) находим $\ln(v^2-n)=-2kz+\ln(v_0^2-n)$ или $\ln(v^2-n)-\ln(v_0^2-n)=-2kz$. Отсюда

$$\ln\frac{v^2-n}{v_0^2-n}=-2kz \quad \text{и} \quad \frac{v^2-n}{v_0^2-n}=e^{-2kz}.$$

В результате находим:

$$v^2=n+(v_0^2-n)e^{-2kz}. \tag{6}$$

Полагая в равенстве (6) $z=l=2{,}5$ м, и заменяя k и n их значениями (3), определим скорость ив груза в точке B ($v_0=5$ м/с, число $e=2{,}7$):

$$v_B^2=50-25/e=40{,}7 \quad \text{и} \quad v_B=6{,}4 \text{ м/с}. \tag{7}$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке BC. Найденная скорость v_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($v_0=v_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P}=m\overline{g}$, $\overline{N}$, $\overline{F}_{mp}$ и $\overline{F}$. Проведем из точки B оси Bx и By и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx:

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{dt}}=P_x+N_x+F_{mpx}+F_x,$$

или

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{dt}}=mg\sin\alpha-F_{mp}+F_x, \tag{8}$$

где $F_{mp}=fN$. Для определения N составим уравнение в проекции на ось By. Так как $a_y=0$, получим $0=N-mg\cos\alpha$, откуда $N=mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{mp}=fmg\cos\alpha$. Кроме того, $F_x=16\sin(4t)$ и уравнение (8) примет вид:

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t). \qquad (9)$$

Разделив обе части равенства на m, вычислив $g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g(\sin 30^\circ - 0{,}2\cos 30^\circ) = 3{,}2$ и $16/m = 8$, подставим эти значения в (9). Тогда получим:

$$m\frac{dv_x}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t). \qquad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем:

$$v_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2. \qquad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $v = v_0 = v_B$, где v_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_2 = v_B + 2\cos 0 = 6{,}4 + 2 = 8{,}4.$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4. \qquad (12)$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4t + C_3. \qquad (13)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1{,}6t^2 + 8{,}4t - 0{,}5\sin(4t). \qquad (14)$$

где x – в метрах, t – в секундах.

О т в е т : $x = 1{,}6t^2 + 8{,}4t - 0{,}5\sin(4t)$, x – в метрах, t – в секундах.

Задача Д2

Механическая система состоит из грузов 1 и 2, цилиндрического сплошного однородного катка 3 и ступенчатых шкивов 4 и 5 с радиусами ступеней $R_4 = 0{,}3$ м, $r_4 = 0{,}1$ м, $R_5 = 0{,}2$ м и $r_5 = 0{,}1$ м. Массу шкивов считать равномерно распределенной по внешнему ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0{,}1$.

Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям.

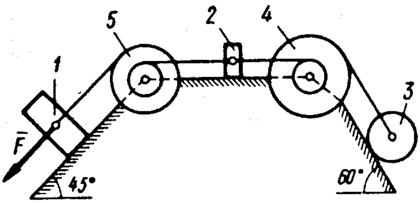

Рис. Д2.0

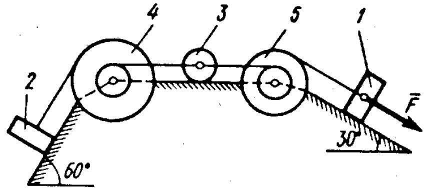

Рис. Д2.1

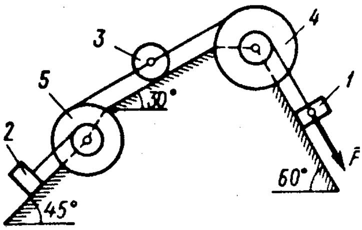

Рис. Д2.2

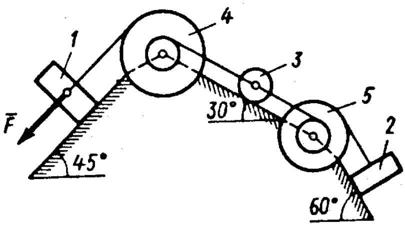

Рис. Д2.3

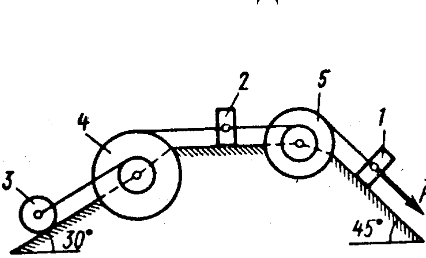

Рис. Д2.4

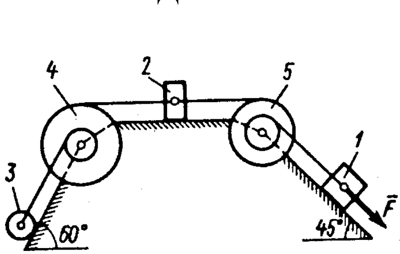

Рис. Д2.5

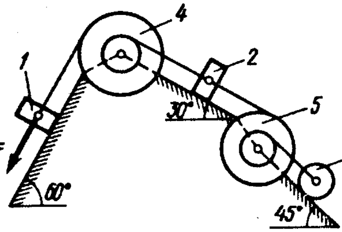

Рис. Д2.6

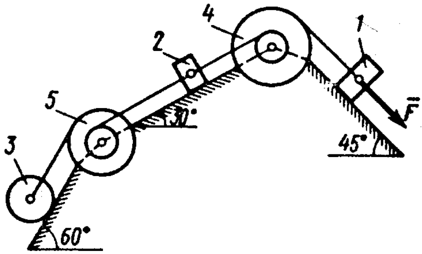

Рис. Д2.7

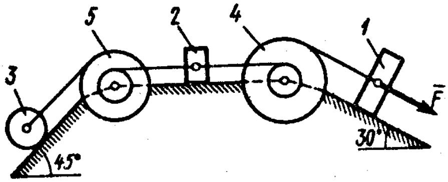

Рис. Д2.8

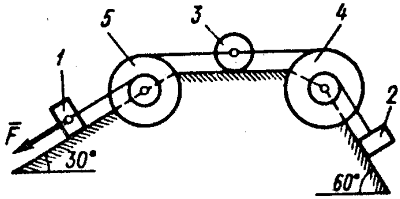

Рис. Д2.9

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкивы действуют постоянные моменты M_4 или M_5 сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным s_1. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы Д2, где обозначено: v_1, v_2 и v_{C3} – скорости грузов 1, 2 и центра масс тела 3 соответственно, ω_4 и ω_5 – угловые скорости тел 4 и 5.

Каток катится по плоскости без скольжения. На всех рисунках можно не изображать груз 2, если $m_2 = 0$; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Таблица Д2

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	M_4, Н·м	M_5, Н·м	s_1, м	$F = f(s)$, Н	Найти
0	2	0	4	6	0	0	0,8	1	$50(2+3s)$	v_1
1	6	0	2	0	8	0,6	0	1,2	$20(5+2s)$	ω_5
2	0	4	6	8	0	0	04,	0,8	$80(3+4s)$	v_{C3}
3	0	2	4	0	9	0,3	0	0,6	$40(4+5s)$	v_2
4	8	0	2	6	0	0	0,6	1,4	$30(3+2s)$	ω_4
5	8	0	4	0	6	0,9	0	1,6	$40(3+5s)$	v_1
6	0	6	2	8	0	0	0,8	1	$60(2+5s)$	ω_4
7	0	4	6	0	9	0,6	0	0,8	$30(8+3s)$	ω_5
8	6	0	4	0	8	0,3	0	1,6	$40(2+5s)$	v_{C3}
9	0	4	6	9	0	0	0,4	1,4	$50(3+2s)$	v_2

Указания. Задача Д2 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении T для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Пример Д2.

Механическая система (рис. Д2,а) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока 4 и груза 5 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив 3. К центру E блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c; ее начальная деформация равна нулю. Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

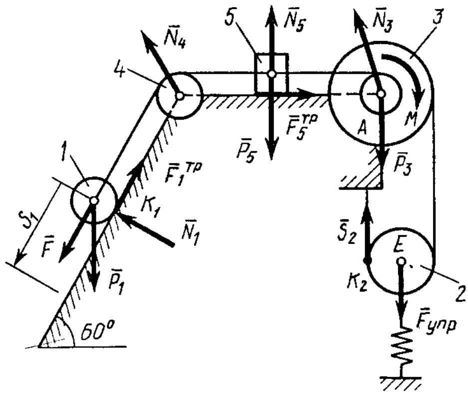

Рис. Д2,а

Д а н о: $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 0$ кг, $m_3 = 4$ кг, $m_4 = 0$ кг, $m_5 = 10$ кг, $R_3 = 0{,}3$ м, $r_3 = 0{,}1$ м, $\rho_3 = 0{,}2$ м, $f = 0{,}1$, $c = 240$ Н/м, $M = 0{,}6$ Н·м, $F = 20(3 + 2s)$ Н, $s_1 = 0{,}2$ м.

О п р е д е л и т ь: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

Решение:

1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел 1, 3, 5 и невесомых тел 2, 4, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные $\overline{F}$, $\overline{F}_{упр}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$, реакции $\overline{N}_1$, $\overline{N}_3$,

$\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, натяжение нити $\overline{S}_2$, силы трения $\overline{F}_1^{тр}$, $\overline{F}_5^{тр}$ и момент M.

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} . \qquad (1)$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5 . \qquad (2)$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 5 – поступательно, а тело 3 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2 ,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 ,$$

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_5^2 , \qquad (3)$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3. Для этого предварительно заметим, что $v_{C1} = v_5 = v_A$, где A – любая точка обода радиуса r_3 шкива 3 и что точка K_1 – мгновенный центр скоростей катка 1, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$v_{C1} = v_5 = v_A = \omega_3 r_3 , \quad \omega_1 = \frac{v_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{v_{C1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1} . \quad (4)$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 , \qquad I_3 = m_3 \rho_3^2 . \qquad (5)$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2 . \qquad (6)$$

3. Найдем сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда центр катка 1 пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_5 – перемещение груза 5 ($s_5 = s_1$), φ_3 – угол поворота шкива 3, λ_0 и λ_1 – начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} 20(3 + 2s) ds = 20(3s_1 + s_1^2) ,$$

$$A(\bar{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^\circ ,$$

$$A(\bar{F}_5^{òð}) = -F_5^{òð} s_5 \sin 60^\circ = -fP_5 s_1 ,$$

$$A(M) = -M\varphi_3 ,$$

$$A(\bar{F}_{óïð}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2) .$$

Работы остальных сил равны нулю, т.к. точки K_1 и K_2, где приложены силы $\bar{N}_1$, $\bar{F}_1^{тр}$ и $\bar{S}_2$ – мгновенные центры скоростей; точки, где приложены силы $\bar{P}_3$, $\bar{P}_5$ и $\bar{N}_3$ – неподвижны; а сила $\bar{N}_5$ – перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи, $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E – перемещение точки E (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1. Для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда, так как $\omega_3 = \dfrac{v_A}{r_3} = \dfrac{v_{C1}}{r_3}$ (равенство $v_{C1} = v_A$ уже отмечалось), то и

$$\varphi_3 = \frac{s_1}{r_3}.$$

Из рис. Д2,б видно, что $v_D = v_B = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы «катится» по участку нити $K_2 L$), то $v_E = \frac{1}{2} v_D = \frac{1}{2}\omega_3 R_3$; следовательно, и $\lambda_1 = s_E = \frac{1}{2}\varphi_3 R_3 = \frac{s_1 R_3}{2 r_3}$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы вычисленных работ получим

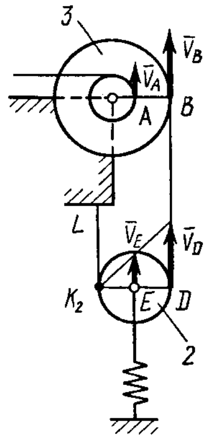

Рис. Д2,б

$$\sum A_k^{(e)} = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_5 s_1 -$$

$$- M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2. \qquad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, придем к равенству

$$\left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 = 20(3s_1 + s_1^2) +$$

$$+ P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2. \qquad (8)$$

Из равенства (8), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3.

О т в е т : $\omega_3 = 8{,}1$ с$^{-1}$.

Аналитическая механика

Задача Д3

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов 1 и 2, обмотанных нитями, грузов 3–6, прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. Д3.0–Д3.9, табл. Д3).

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M, приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива 1 равны: $R_1 = 0{,}2$ м, $r_1 = 0{,}1$ м, шкива 2 – $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м; их радиусы инерции относительно осей вращения равны соответственно $\rho_1 = 0{,}1$ м и $\rho_2 = 0{,}2$ м.

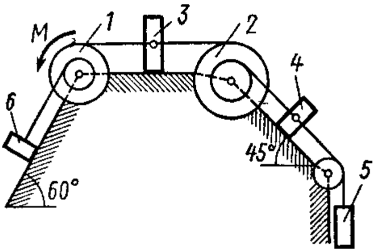

Рис. Д3.0

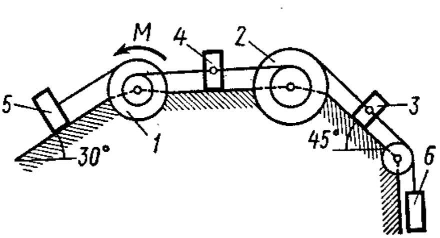

Рис. Д3.1

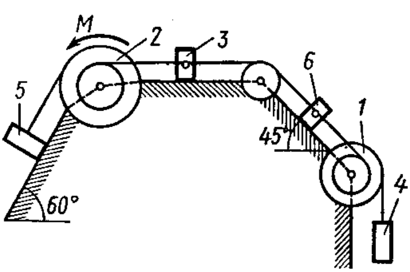

Рис. Д3.2

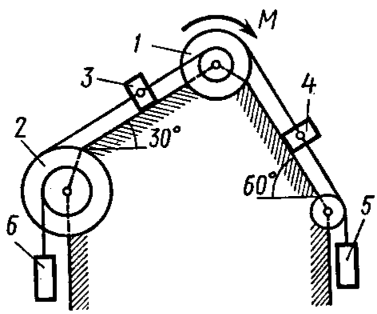

Рис. Д3.3

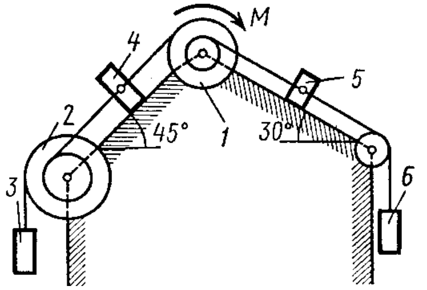

Рис. Д3.4

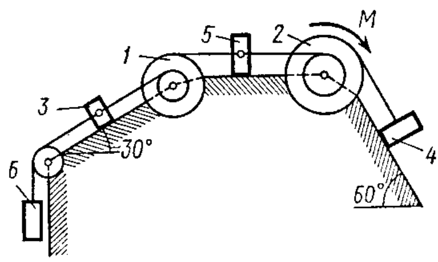

Рис. Д3.5

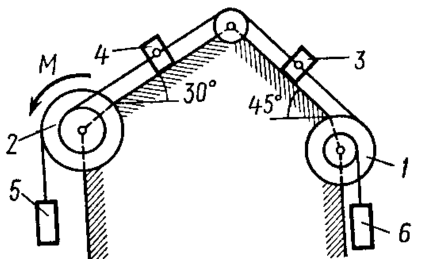

Рис. Д3.6

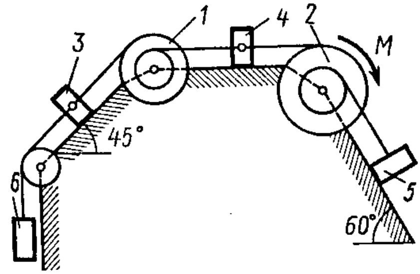

Рис. Д3.7

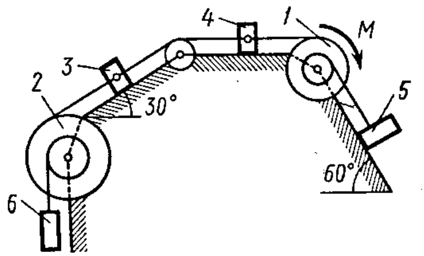

Рис. Д3.8

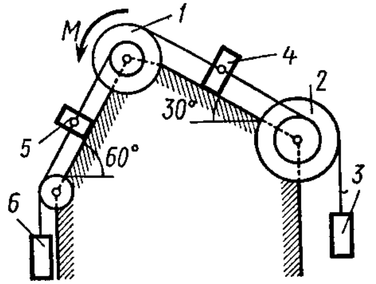

Рис. Д3.9

Пренебрегая трением, найти ускорение тела, имеющего больший вес; веса $P_1,\ldots,P_6$ шкивов и грузов заданы в таблице. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже можно не изображать (шкивы 1, 2 изображать всегда как части системы).

Таблица Д3

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	M, Н · м
0	10	0	20	30	40	0	10
1	0	40	0	10	20	30	12
2	20	30	40	0	10	0	16
3	0	20	10	30	0	40	18
4	30	0	20	0	40	10	12
5	0	10	30	40	20	0	16
6	40	0	0	20	30	10	10
7	10	20	0	40	0	30	18
8	0	40	10	0	30	20	12
9	30	0	40	20	10	0	16

Указания. Задача Д3 – на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет одну степень свободы, ее положение определяется одной обобщенной координатой и для нее должно быть составлено одно уравнение движения. В задачах, где требуется найти ускорение груза 3 (4, 5 или 6), за обобщенную координату удобно принять координату x, характеризующую перемещение этого груза. Для составления уравнения Лагранжа необходимо найти кинетическую энергию T системы и выразить все входящие в нее скорости через обобщенную скорость $\dot{x}$, а затем вычислить обобщенную силу Q. Для этого надо сообщить системе возможное (малое) перемещение, при котором выбранная координата x получит приращение δx, и составить уравнение работ всех сил на этом перемещении. Коэффициент при δx в выражении элементарной работы и будет искомой обобщенной силой. Дальнейший ход решения задачи разъяснен в примере Д3.

Пример Д3.

Механическая система (рис. Д3) состоит из обмотанных нитями блока 1 радиуса R_1 и ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней R_2 и r_2, радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), и из грузов 3 и 4, прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M, приложенной к блоку 1.

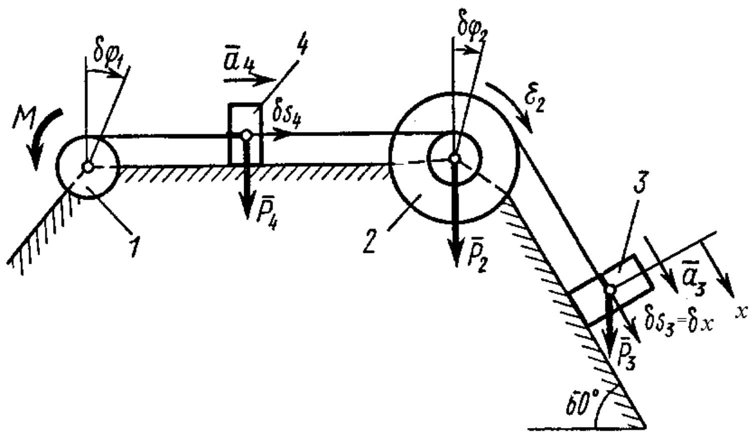

Рис. Д.3

Д а н о : $P_1 = 0$ Н, $P_2 = 30$ Н, $P_3 = 40$ Н, $P_4 = 20$ Н, $M = 16$ Н·м, $R_1 = 0{,}2$ м, $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м; $\rho_2 = 0{,}2$ м.

О п р е д е л и т ь : ускорение груза 3, пренебрегая трением.

Решение:

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, 4, соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, – идеальные. Выберем в качестве обобщенной координаты перемещение x груза 3, полагая, что он движется вниз и отсчитывая x в сторону движения (рис. Д3). Составим

уравнение Лагранжа:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q\,. \qquad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию всей системы, равную сумме кинетических энергий всех тел:

$$T=T_2+T_3+T_4\,. \qquad (2)$$

Грузы 3 и 4 движутся поступательно, поэтому шкив 2 вращается вокруг неподвижной оси, следовательно

$$T_2=\frac{1}{2}I_2\omega_2^2=\frac{1}{2}m_2\rho_2^2\omega_2^2\,,\ T_3=\frac{1}{2}m_3v_3^2\,,\ T_4=\frac{1}{2}m_4v_4^2\,. \quad (3)$$

Скорости ω_2, v_3 и v_4 выразим через обобщенную скорость $\dot{x}$:

$$\omega_2=\frac{\dot{x}}{r_2}\,,\quad v_3=\dot{x}\,,\quad v_4=\dot{x}\frac{r_2}{R_2}\,. \qquad (4)$$

Подставляя значения величин (4) в равенства (3), а затем значения T_2, T_3 и T_4 в соотношение (2), получим:

$$T=\frac{1}{2g}\left(P_3+P_4\frac{r_2^2}{R_2^2}+P_2\frac{\rho_2^2}{R_2^2}\right)\dot{x}^2\,. \qquad (5)$$

Так как кинетическая энергия зависит только от $\dot{x}$, производные левой части уравнения (1) примут вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{1}{g}\left(P_3+P_4\frac{r_2^2}{R_2^2}+P_2\frac{\rho_2^2}{R_2^2}\right)\dot{x}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{1}{g}\left(P_3+P_4\frac{r_2^2}{R_2^2}+P_2\frac{\rho_2^2}{R_2^2}\right)\ddot{x}\,,\quad \frac{\partial T}{\partial x}=0\,. \qquad (6)$$

3. Найдем обобщенную силу Q. Для этого составим уравнение работ активных сил на перемещении δx. Изобразим на чертеже активные силы $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$ и пару сил с моментом M. Сообщим системе возможное перемещение $\delta x=\delta s_3$ и составим выражение для суммы работ:

$$\delta A = \sum \delta A_k^a = P_3 \sin 60^\circ \delta s_3 - M\delta\varphi_1 .$$

Выразим $\delta\varphi_1$ через δx:

$$\delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1 R_2}\delta x .$$

В результате получим

$$\delta A = \sum \delta A_k^a = \left(P_3 \sin 60^\circ - \frac{M r_2}{R_1 R_2} \right)\delta x . \tag{7}$$

$$\delta A = Q\delta x .$$

Коэффициент при δx в (7) и будет обобщенной силой:

$$Q = P_3 \sin 60^\circ - \frac{M r_2}{R_1 R_2} . \tag{8}$$

Подставляя (6) и (8) в уравнение (1), получим

$$\frac{1}{g}\left(P_3 + P_4 \frac{r_2^2}{R_2^2} + P_2 \frac{\rho_2^2}{R_2^2} \right)\ddot{x} = P_3 \sin 60^\circ - \frac{M r_2}{R_1 R_2} .$$

Отсюда находим

$$a_3 = \frac{P_3 \sin 60^\circ - \dfrac{M r_2}{R_1 R_2}}{P_3 + P_4 \dfrac{r_2^2}{R_2^2} + P_2 \dfrac{\rho_2^2}{R_2^2}} g = -0{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_3 = -0{,}9$ м/с^2, знак минус указывает, что ускорение груза 3 и ускорения других тел направлены противоположно показанным на рисунке.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Задача Д1

1) Основной закон динамики и получение дифференциальных уравнений движения точки.

2) Какие способы интегрирования дифференциальных уравнений используются в случае, когда сила зависит от скорости и когда сила зависит от времени?

Задача Д2

1) Как формулируется теорема об изменении кинетической энергии? Использование этой теоремы для изучения движения механических систем с одной степенью свободы.

2) Способы вычисления кинетической энергии твердого тела в случаях поступательного, вращательного и плоскопараллельного движения.

3) Работа силы как характеристика действия силы на перемещении точки приложения силы. Как вычисляется работа постоянной силы, силы, зависящей от смещения, силы упругости?

Задача Д3

1) Что такое возможное перемещение точки и системы?

2) Обобщенные координаты, обобщенные скорости и обобщенные силы механической системы.

3) Как записываются уравнения Лагранжа в случае системы, число степеней которой равно n?

4) Уравнение Лагранжа как алгоритм получения уравнений движения механической системы. Как с помощью этих уравнений могут быть получены дифференциальные уравнения относительно обобщенных координат?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: учебник для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов / Н.Н. Никитин. – М.: Высш. шк., 1990. 607 с.
2. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: в 2х т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2002. 736 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М: Высш. шк., 2008. 416 с.
4. Цывильский В.Л. Теоретическая механика / В.Л. Цывильский. – М: Высш. шк., 2008. 368 с.
5. Переславцева Н.С. Теоретическая механика: учеб. пособие / Н.С. Переславцева, Н.П. Бестужева. – Воронеж: ВГТУ, 2009. – 157 с.
6. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике / И.В. Мещерский. – СПб.: Лань, 2001. 448 с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для техн. вузов / под ред. А.А. Яблонского. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. 384 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы № 2
для студентов всех направлений
заочной формы обучения

Составители:
Переславцева Наталья Сергеевна
Воропаев Алексей Алексеевич
Хван Дмитрий Владимирович
Хливненко Любовь Владимировна
Семенихин Олег Александрович

В авторской редакции

Компьютерный набор Н. С. Переславцевой

Подписано к изданию . .2022.
Уч.-изд. л. .

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14