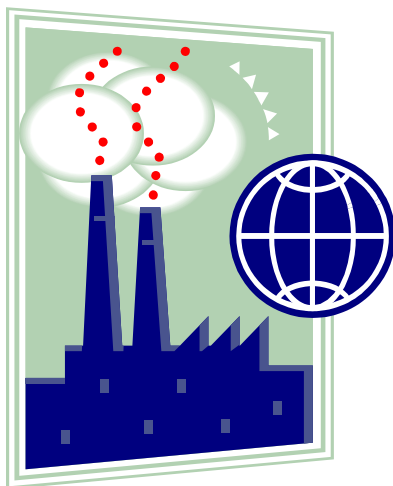


**А.В. Бараков А.А. Надеев В.И. Ряжских**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКИ**



Воронеж 2015

ФГБОУ ВПО  
«Воронежский государственный технический  
университет»

А.В. Бараков А.А. Надеев В.И. Ряжских

МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКИ

Утверждено Редакционно-издательским советом  
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2015

УДК 517.958:5

Бараков А.В. Моделирование и алгоритмизация задач теплоэнергетики: учеб. пособие / А.В. Бараков, А.А. Надеев, В.И. Рязских. Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2015. 199 с.

Приведены основные сведения о методах синтеза и анализа математических моделей и алгоритмизации задач теплоэнергетики.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки магистров 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» (профиль «Промышленная теплоэнергетика»), дисциплинам «Математическое моделирование» и «Алгоритмизация задач теплоэнергетики».

Табл. 8. Ил. 57. Библиогр.: 36 назв.

Рецензенты: кафедра математического моделирования  
Воронежского государственного университета  
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. В.А.  
Костин);  
д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

© Бараков А.В., Надеев А.А.,  
Рязских В.И., 2015

© Оформление. ФГБОУ ВПО  
«Воронежский государственный  
технический университет», 2015

## ВВЕДЕНИЕ

Научить формулировать и решать широкий круг практических и теоретических задач теплоэнергетики – основная цель данного учебного пособия для магистров-теплоэнергетиков. Для успешного достижения этой цели необходимо обладать достаточно глубокими междисциплинарными знаниями из классической математики, численных методов, уравнений математической физики, теплообмена, гидродинамики и др. Метод математического моделирования, аккумулирующий необходимую и достаточную информацию из перечисленных дисциплин, как раз и позволяет справиться с такой задачей.

Математическая модель – это относительная истина, отражающая определённые особенности изучаемых явлений. Формализованная на том или ином языке (дифференциальных или разностных уравнений и т.д.) математическая модель отражает определённые свойства реальных процессов и с её помощью можно изучать эти свойства. Математическая модель – это лишь специальный способ описания, позволяющий для анализа использовать формально-логический аппарат математики. Изучение математических моделей является основным методом познания, используемым в фундаментальных и прикладных науках. Например, на протяжении многих лет физики с успехом применяют такой метод, добиваясь важных успехов: ньютоновская механика, квантовая механика, теория относительности и т.д.

Метод математического моделирования за короткое время нашёл конкретное применение в исследованиях и расчётах теплоэнергетических процессов. При наличии математических моделей успешно решаются задачи оптимизации теплоэнергетических процессов и управления ими. Однако ещё сравнительно мало специалистов-теплоэнергетиков знакомы с принципами построения математических моделей и методами их исследования для получения исходных данных при проектировании новых и осуществлении оптимальных режимов дей-

ствующих теплоэнергетических объектов. Это объясняется, во-первых, сложностью и недостаточной изученностью процессов в теплоэнергетике и, во-вторых, сравнительно слабым знанием и подготовкой в области математико-информационных технологий.

Пособие состоит из трёх глав. Глава 1 содержит основные положения и предпосылки метода математического моделирования, общие принципы и схемы построения математических моделей с использованием классических представлений о явлениях переноса. Глава 2 посвящена основам проведения вычислительных экспериментов в рамках уравнений математической физики, базируясь на основе методов конечных разностей и конечных элементов. Особое внимание уделено вариационной постановке задач теплоэнергетики для получения приближённых аналитических решений. Глава 3 ориентирована на инженерный подход к математическому моделированию с помощью идеализированных представлений о гидродинамической структуре потоков в теплоэнергетических объектах.

В основу пособия лёг курс лекций по математическому моделированию, читавшийся на кафедре промышленной теплоэнергетики Воронежского государственного технического университета магистрам теплоэнергетического профиля.

# 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

## 1.1. Понятие математической модели

Предметно-ориентированные объекты имеют довольно сложную структуру и параметрическое описание (рис. 1.1).

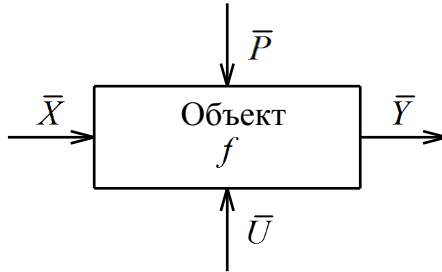


Рис. 1.1. Общая схема объекта

Вектор входных параметров  $\bar{X}$  определяет совокупность состояний объекта, задание которых выделяет из множества возможных траекторий функционирования единственную. Однако на траекторию функционирования могут налагаться стохастические воздействия, которые обозначаются через вектор  $\bar{P}$ . Эти стохастические воздействия на объект отражают как объективное, так и субъективное вмешательство внешней среды. Вектор управляющих параметров  $\bar{U}$  позволяет путём изменения его элементов целенаправленно изменять вектор выходных параметров  $\bar{Y}$ .

В качестве примера рассмотрим проточный теплообменник (рис. 1.2), в который поступают холодный и горячий теплоносители, имеющие на входе температуры  $t_x^{6x}$  и  $t_2^{6x}$  соответственно, с объёмными расходами  $v_x$  и  $v_2$ . В результате переноса теплоты от горячего теплоносителя к холодному через теплопередающую поверхность площадью  $S$  температура холодного теплоносителя возрастает до  $t_x^{6bx}$ , а горячего уменьша-

ется до  $t_2^{6bx}$ . В качестве входных параметров необходимо взять  $t_x^{6x}$ ,  $t_2^{6x}$ ; в качестве выходных параметров –  $t_x^{6bx}$ ,  $t_2^{6bx}$ ; в качестве управляющих –  $S$ ,  $v_x$ ,  $v_2$  и коэффициент теплопередачи  $k$ ; в качестве случайных параметров можно взять степень отклонения входных параметров от их ожидаемых значений.

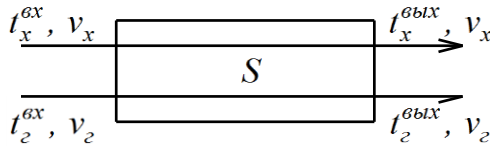


Рис. 1.2. Схема прямого теплообменника

Переходя вновь к анализу функционирования объекта в общем случае можно заключить, что рассмотренные параметры связаны между собой неявной функциональной связью

$$f(\bar{Y}, \bar{X}, \bar{P}, \bar{U}, \tau) = 0, \quad (1.1)$$

в которую дополнительно включена зависимость всех параметров от текущего времени  $\tau$ . Природа и характер функциональной связи  $f$ , как правило, априори не могут быть определены. И поэтому необходимость идентификации траекторий функционирования объекта является одновременно и сложной, и некорректной задачей. Таким образом,  $f$  определяет внутреннюю структуру объекта.

Выходом из такой ситуации является замена анализа объекта на анализ его виртуального образа (рис 1.3). Отличие объекта от его виртуального образа, который и будем называть в дальнейшем математической моделью, заключается в выдвижении гипотезы о функциональной связи между всеми параметрами и  $\tau$ , т.е.

$$F(\bar{Y}, \bar{X}, \bar{P}, \bar{U}, \tau) = 0, \quad (1.2)$$

где  $F$  – априори определённая функциональная связь, которая должна обладать свойством идентичности, корректности, качественной и количественной адекватности, что должно отражать условие

$$F \cong f. \quad (1.3)$$

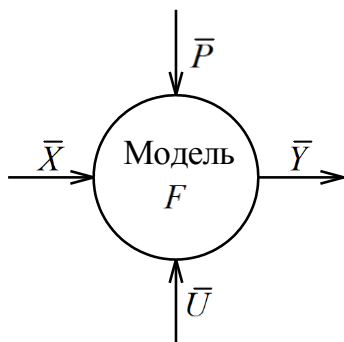


Рис. 1.3. Общая схема модели

Резюмируя вышесказанное, можно, таким образом, определить, что такое математическая модель. Итак, математическая модель – это математическая формализация, которая отражает определённые свойства реальных объектов и проходящих в них процессов и позволяет изучать эти свойства. Отсюда следует, что математическое моделирование является методом научного исследования, который основан на познании изучаемых объектов с помощью математической модели.

## 1.2. Классификация математических моделей

Исходя из понятия математической модели, приведём их классификацию по принципу присутствия (отсутствия) того, или иного набора параметров (рис. 1.4). В дальнейшем ограничимся явным видом функциональной связи (1.2), т.е.

$$\bar{Y} = F(\bar{X}, \bar{P}, \bar{U}, \tau). \quad (1.4)$$



Если среди аргументов функциональной связи (1.4) отсутствует вектор  $\bar{P}$ , в этом случае имеем детерминированные модели

$$\bar{Y} = F(\bar{X}, \bar{U}, \tau). \quad (1.5)$$

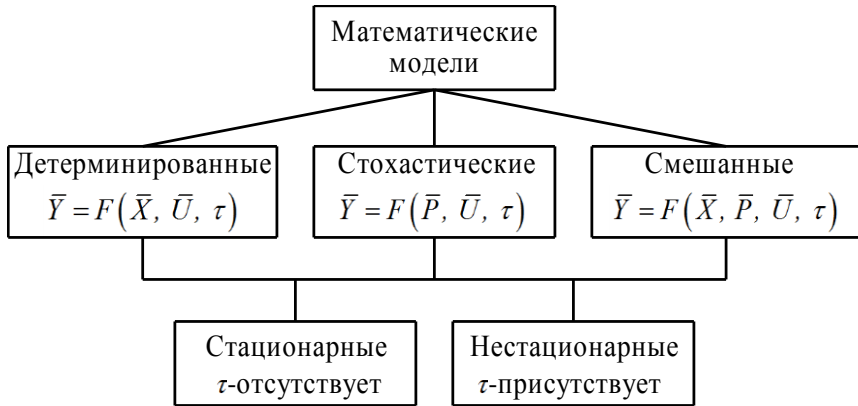


Рис. 1.4. Классификация математических моделей

Если среди аргументов функциональной связи (1.4) отсутствует вектор  $\bar{X}$  (его заменяет вектор  $\bar{P}$ ), то такие модели носят название стохастических

$$\bar{Y} = F(\bar{P}, \bar{U}, \tau). \quad (1.6)$$

Присутствие всех параметров в функциональной связи (1.4) классифицирует математическую модель как смешанную. Кроме того, присутствие или отсутствие текущего времени в списке аргументов функциональной связи (1.4) делит математические модели соответственно на стационарные и нестационарные.

### 1.3. Состав математического описания

Ядро любой математической модели состоит из совокупности ранее установленных закономерностей, математического аппарата, а также дополнительных условий, определяю-

щих и идентифицирующих границы применимости модели (рис. 1.5).

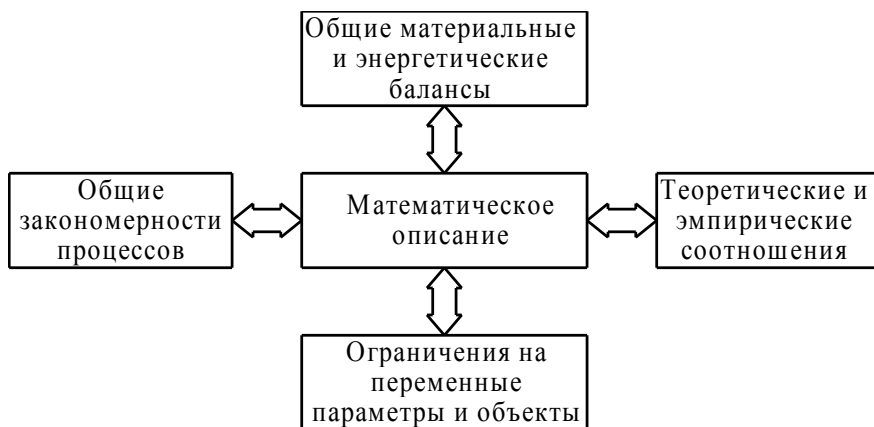


Рис. 1.5. Структура математического описания

Основой подавляющего числа математических моделей является выражение законов сохранения материи и энергии, представленное либо в алгебраической, либо в дифференциальной и интегральной формах. Детализация материальных и энергетических балансов выражается в использовании классических закономерностей процессов переноса импульса, энергии и количества движения, которые подробно анализируются в курсе общей физики. Кроме детализации законов сохранения, закономерности процессов описывают также кинетику, т.е. скорость протекания процессов. В обязательном порядке математическое описание дополняется соотношениями, которые выделяют данную систему из множества родственных систем. Сюда могут входить теплофизические и физико-химические параметры рабочих тел и объёмов, совокупность которых определяет структурную схему моделируемой системы.

Важным атрибутом математического описания является указание, если это возможно, ограничительных соотношений, которые указывают на условия её корректного использования.

## 1.4. Общий алгоритм математического моделирования

При разработке любых математических моделей необходимо следовать следующей последовательности действий. Во-первых, нужно построить физическую модель моделируемого объекта, которая учитывает требуемые характеристики реального объекта (процесса). Причём в этом случае формализация физической картины должна основываться на классических законах явлений переноса и адекватных эмпирических закономерностях. Во-вторых, в рамках выбранной физической модели определяется математический аппарат в зависимости от функционального назначения модели и её предметного ориентирования. Как правило, в теплоэнергетике используются дифференциальные балансовые соотношения и дифференциальная форма законов явлений переноса, поэтому итоговая форма и вид математической модели представляются как начально-краевые системы дифференциальных уравнений в частных производных. Следующим этапом последовательности действий при разработке математической модели является её анализ, под которым подразумевается, как правило, поиск функциональной связи (1.4). При этом применяется весь спектр возможных инструментариев: от аналитических методов анализа до численных. Завершающим этапом является проверка адекватности математической модели. На этом этапе решается основная задача – насколько качественно и количественно предлагаемая математическая модель соответствует поведению реального объекта (процесса). Реализация этого этапа осуществляется через проведение так называемого вычислительного эксперимента и сравнительного анализа его результатов с известными данными, полученными, например, на самом реальном объекте или на специально сконструированной для этих целей пилотной (лабораторной) установке. В этом изложении пока не детализируется каждый этап и выбор рационального инструментария из имеющегося спектра методов. Об этом будет сказано ниже на примере различных предметных приложений к теплоэнергетическим проблемам и задачам. Об-

щая схема алгоритма математического моделирования представлена на рис. 1.6.

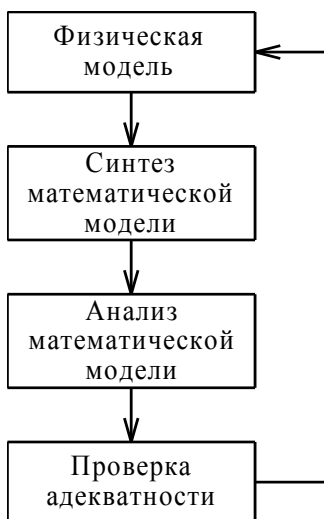


Рис. 1.6. Общая схема алгоритма моделирования

По результатам реализации этапа проверки адекватности математической модели принимается решение о её корректности. Если математическая модель отвечает всем качественным и количественным критериям, обеспечивающим адекватность, процесс её построения заканчивается и, таким образом, она может быть использована для проектирования нового оборудования и оценки эффективности функционирования существующего. Если математическая модель не отвечает или не удовлетворяет какому-либо критерию, то принимается решение о её модернизации, начиная с уточнения физической модели. Как можно заметить из рис. 1.6, алгоритм моделирования носит итерационный характер, сходимость которого определяется субъективными причинами, т.е. существенным образом зависит от подготовки, опыта и достаточной информированности разработчика. Это означает только одно, что процесс построения математической модели всё ещё остаётся неформализованным до конца и относится к категории творчества.

## 1.5. Общие материальные и энергетические балансы. Закономерности процессов

При рассмотрении явлений переноса в теплоэнергетических системах необходимо выполнение закона сохранения различных субстанций, который может быть записан в самом общем виде

$$[\text{приход}] - [\text{расход}] = [\text{накопление}] .$$

Наиболее важными субстанциями в теплоэнергетических задачах являются количество движения, теплота и масса.

### 1.5.1. Перенос количества движения

Продемонстрируем составление баланса с применением закона сохранения количества движения к задачам вязкого течения. При этом следует иметь в виду, что нет необходимости составлять баланс количества движения каждый раз при решении новой задачи. Более того, желательно прибегать к этому приёму как можно реже, т.е. быстрее, легче, надёжнее брать в качестве исходных данных уравнения сохранения массы и количества движения, записанные в общем виде, и затем упрощать их, чтобы привести в соответствие с изучаемой задачей.

Обратим внимание, что иногда для сокращения записи громоздких выражений будут использоваться векторная и тензорная алгебра, необходимые сведения о которых приведены в ПРИЛОЖЕНИИ 1.

Вначале определимся с использованием трёх видов производных по времени.

Символ  $\partial/\partial t$  будет обозначать частную производную по  $t$  при постоянных значениях всех других переменных.

Символ  $d/dt$  будет обозначать полную производную. Если, например,  $c = c(x, y, z, t)$ , то

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{dz}{dt} .$$

Символ  $D/Dt$  будет обозначать субстанционную производную по времени (производную в направлении движения со скоростью  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ), т.е. в декартовой системе координат

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z}.$$

Составим уравнение неразрывности, которое описывает скорость изменения плотности в фиксированной точке, возникающую в результате изменения вектора массовой скорости  $\rho\vec{v}$ , где  $\rho$  – плотность среды. С этой целью запишем баланс для фиксированного элемента объёмом  $\Delta x \Delta y \Delta z$  (рис. 1.7):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Скорость} \\ \text{накопления} \\ \text{массы} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Скорость} \\ \text{поступления} \\ \text{массы} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Скорость} \\ \text{отвода} \\ \text{массы} \end{array} \right\}.$$

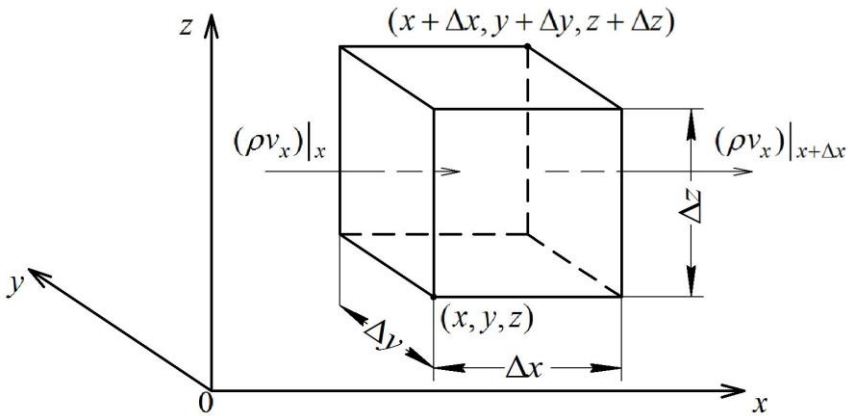


Рис. 1.7. Фиксированный в пространстве элемент объёмом  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , через который протекает жидкость

Рассмотрим пару граней выбранного параллелепипеда, перпендикулярных оси  $x$ . Через грань с координатой  $x$  в единицу времени входит масса жидкости  $(\rho v_x)|_x \Delta y \Delta z$ , а через

грань с координатой  $x + \Delta x$  выходит масса жидкости  $(\rho v_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . Аналогичные выражения могут быть записаны и для двух других пар граней. Так как скорость накопления массы в выделенном элементе объёма составляет  $\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t}$ , то баланс массы представим в виде

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y \Delta z [(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x}] + \Delta x \Delta z [(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z}].$$

Разделив все члены последнего уравнения на  $\Delta x \Delta y \Delta z$  и переходя к пределам, устремляя объём элемента к нулю, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right].$$

Это соотношение на языке векторной алгебры может быть записано следующим образом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \vec{v}).$$

С использованием субстанционной производной окончательно запишем

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{v}).$$

В частности для несжимаемой жидкости

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Для вывода уравнения движения составим баланс количества движения для элемента объёмом  $\Delta x \Delta y \Delta z$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Скорость} \\ \text{накопления} \\ \text{количества} \\ \text{движения} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Скорость} \\ \text{поступления} \\ \text{количества} \\ \text{движения} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Скорость} \\ \text{отвода} \\ \text{количества} \\ \text{движения} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Сумма сил,} \\ \text{действующих} \\ \text{на систему} \end{array} \right\},$$

которое является векторным уравнением, т.е. его можно записать покомпонентно для всех трёх координатных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

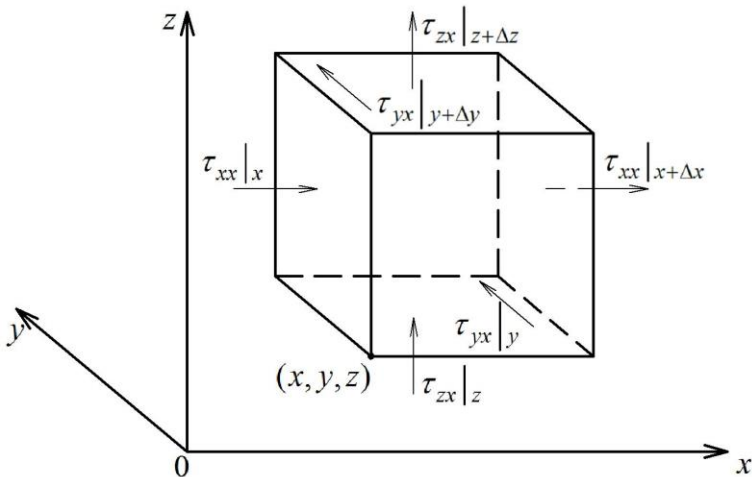


Рис. 1.8. Элемент объёма  $\Delta x \Delta y \Delta z$  (стрелками показаны направления, в которых составляющая количества движения вдоль оси  $x$  переносится через соответствующие поверхности)

Рассмотрим, например, скорость, с которой  $x$ -компонент количества движения поступает в элемент объёма (рис. 1.8.) и выходит из него. При этом следует иметь в виду, что количество движения переносится по двум механизмам: посредством конвекции (т.е. вследствие перемещения объёма жидкости) и в результате молекулярного переноса (т.е. благодаря градиенту скоростей).



Скорость, с которой  $x$ -компонент вектора количества движения поступает через грань с координатой  $x$  за счёт конвекции, равна  $\rho v_x v_x \big|_x \Delta y \Delta z$ , а скорость, с которой он покидает выделенный объём через грань с координатой  $x + \Delta x$ , составляет  $\rho v_x v_x \big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . Скорость, с которой этот компонент поступает в элемент объёма через грань с координатой  $y$ , равна  $\rho v_y v_x \big|_y \Delta x \Delta z$ . Для остальных трёх граней можно записать выражения, аналогичные приведённым выше. Нетрудно убедиться, что следует рассматривать конвективный перенос  $x$ -компонента вектора количества движения через все шесть граней. При этом суммарные значения  $x$ -компонента вектора количества движения, поступающего в элемент объёма, составляют:

$$\Delta y \Delta z \left( \rho v_x v_x \big|_x - \rho v_x v_x \big|_{x+\Delta x} \right) + \Delta x \Delta z \left( \rho v_y v_x \big|_y - \rho v_y v_x \big|_{y+\Delta y} \right) + \Delta x \Delta y \left( \rho v_z v_x \big|_z - \rho v_z v_x \big|_{z+\Delta z} \right).$$

Точно так же, скорость, с которой  $x$ -компонент вектора количества движения проходит в контрольный объём через грань с координатой  $x$  за счёт молекулярного переноса, равна  $\tau_{xx} \big|_x \Delta y \Delta z$ , а скорость, с которой она уходит через грань с координатой  $x + \Delta x$ , составляет  $\tau_{xx} \big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . Скорость поступления  $x$ -компонента через грань с координатой  $y$  равна  $\tau_{yx} \big|_y \Delta x \Delta z$ . Подобные выражения могут быть записаны и для остальных трёх граней, причём нужно помнить, что  $\tau_{yx}$  – поток  $x$ -компонента через грань, перпендикулярную оси  $y$ . Просуммировав все шесть составляющих, обусловленных молекулярным переносом, получим

$$\Delta y \Delta z \left( \tau_{xx} \big|_x - \tau_{xx} \big|_{x+\Delta x} \right) + \Delta x \Delta z \left( \tau_{yx} \big|_y - \tau_{yx} \big|_{y+\Delta y} \right) + \Delta x \Delta y \left( \tau_{zx} \big|_z - \tau_{zx} \big|_{z+\Delta z} \right).$$

Заметим, что, как и прежде, эти потоки количества движения можно считать напряжениями. Так, величина  $\tau_{xx}$  – нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной оси  $x$ , а  $\tau_{yx}$  – тангенциальное (или касательное) напряжение, возникающее на грани с координатой  $y$  под воздействием вязких сил трения и направленное вдоль оси  $x$ .

Что касается сил, то в большинстве случаев наиболее важными оказываются силы, которые возникают под действием давления жидкости  $p$  и силы тяжести в расчёте на единицу массы  $\bar{g}$ . Очевидно, что результирующая указанных сил в направлении оси  $x$  составляет:

$$\Delta y \Delta z (p|_x - p|_{x+\Delta x}) + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Давление в движущейся жидкости определяется уравнением состояния  $p = p(\rho, T)$  и является скалярной величиной.

В конечном счёте, скорость накопления  $x$ - компонента вектора количества в выделенном объёме равна  $\Delta x \Delta y \Delta z [\partial(\rho v_x)/\partial t]$ .

Подставим теперь полученные выше выражения в уравнение (1.6). Разделив все члены на  $\Delta x \Delta y \Delta z$  и переходя к пределам при  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ , получим  $x$ - компонент уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) = & - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x v_z) \right] - \\ & - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подобным же образом могут быть найдены составляющие движения вдоль осей  $y$  и  $z$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_y) = - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_y v_z) \right] - \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y; \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_z) = - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_z v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_z v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_z) \right] - \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z, \quad (1.9)$$

где  $\rho v_x$ ,  $\rho v_y$ ,  $\rho v_z$  – компоненты вектора массовой скорости  $\rho \bar{v}$ ;  $g_x$ ,  $g_y$ ,  $g_z$  – компоненты вектора ускорения свободного падения  $\bar{g}$ ;  $\partial p / \partial x$ ,  $\partial p / \partial y$ ,  $\partial p / \partial z$  – компоненты вектора  $\nabla p$ , называемого «градиентом давления»;  $\rho v_x v_x$ ,  $\rho v_x v_y$ ,  $\rho v_x v_z$  и т.д. – девять компонентов конвективного потока количества движения  $\rho \bar{v} \bar{v}$ , который представляет собой диадное произведение векторов  $\rho \bar{v}$  и  $\bar{v}$ ;  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  – девять компонентов тензора напряжения  $\tau$ .

Поскольку соотношения (1.7) – (1.9) громоздки, удобно объединить их, записав в векторном виде:

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho \bar{g}. \quad (1.10)$$

Чтобы использовать уравнение движения для нахождения профиля скорости, необходимо подставить в них выражения для касательных и нормальных напряжений как функции градиентов скорости и физико-химических свойств жидкости. Например, для ньютоновской жидкости в декартовой системе координат эти выражения будут иметь вид (без учёта коэффициента объёмной вязкости):

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \bar{v}); \quad (1.11)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \bar{v}); \quad (1.12)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \bar{v}); \quad (1.13)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \quad (1.14)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \quad (1.15)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \quad (1.16)$$

Подстановка (1.11) – (1.16) в (1.7) – (1.8) с учётом (1.10) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_x}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \bar{v}) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] + \rho g_x; \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_y}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \bar{v}) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \rho g_y; \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_z}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{v}) \right] + \rho g_z. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Эти соотношения вместе с уравнением неразрывности, уравнением состояния  $p = p(\rho, T)$ , уравнением, отражающим зависимость вязкости от плотности  $\mu = \mu(\rho)$ , а также с граничными и начальными условиями всесторонне характеризуют поля давления, плотности и скорости при изотермическом течении жидкости.

Рассмотрим частные случаи системы (1.17) – (1.19).

1. Если  $\rho = const$ ,  $\mu = const$  и  $(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$ , то получим так называемое уравнение Навье-Стокса

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}. \quad (1.20)$$

2. Если  $(\nabla \cdot \tau) = 0$ , то получим уравнение Эйлера

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}. \quad (1.21)$$

Запись уравнений сохранения в криволинейных координатах приведены в ПРИЛОЖЕНИИ 2.

### 1.5.2. Перенос теплоты

Существуют следующие механизмы переноса теплоты.

Теплопроводность. Механизм переноса теплоты теплопроводностью обусловлен обменом кинетической энергией между молекулами. Установлено, что плотность теплового потока  $\bar{q}_c$  [Дж/(м<sup>2</sup>·с)] прямо пропорциональна градиенту поля температур  $\nabla T$  с обратным знаком:

$$\bar{q}_c = -\lambda \nabla T, \quad (1.22)$$

где коэффициент пропорциональности  $\lambda$  [Дж/(м·К·с)] называется теплопроводностью. Он характеризует способность среды передавать теплоту.

Вынужденная конвекция. В этом случае теплота переносится макрообъёмами среды, которая характеризуется плотностью  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] и массовой теплоёмкостью при постоянном давлении  $C_p$  [Дж/(кг·К)] и движется со скоростью  $\bar{v}$  :

$$\bar{q}_{cv} = C_p \rho \bar{v} T, \quad (1.23)$$

где  $T$  – локальная температура среды.

Свободная конвекция. Движущей силой перемещения макрообъёмов среды является разность плотностей из-за неравномерности температурного поля (тёплая жидкость, как правило, легче холодной), поэтому соотношение (1.23) не меняет своего вида, но под  $\bar{v}$  следует понимать

$$\bar{v} \sim \frac{\rho \beta \bar{g} h^2}{\mu} (T_2 - T_x), \quad (1.24)$$

где  $\beta$  – коэффициент температурного расширения жидкости, К<sup>-1</sup>;  $\bar{g}$  – вектор ускорения силы тяжести, м/с<sup>2</sup>;  $\mu$  – динамическая вязкость среды, Па·с;  $h$  – характерный размер рассматриваемой теплоэнергетической системы;  $T_2$ ,  $T_x$  – характерные температуры горячего и холодного континуума среды.

Излучение. Теплообмен излучением обусловлен электромагнитным излучением, возникающим за счёт внутренней энергии тела. Причиной того, что вещество излучает электромагнитные волны, является устройство атомов и молекул из заряженных частиц. В частности, при столкновениях атомов и молекул происходит их ударное возбуждение с последующим высвечиванием. В основе этого способа переноса теплоты лежит закон Стефана-Больцмана, который определяет мощность излучения абсолютно чёрного тела как прямо пропорциональную зависимость от площади поверхности и четвёртой степени температуры тела:

$$P = S \varepsilon \sigma T^4, \quad (1.25)$$

где  $\varepsilon$  – степень черноты;  $\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8}$  [Дж/(с·м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>)].

Теперь перейдём к выводу уравнения переноса теплоты. В соответствии с первым началом термодинамики закон сохранения энергии в неподвижном элементе теплоэнергетической системы, через который протекает среда, формулируется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Скорость накопления} \\ \text{внутренней и} \\ \text{кинетической} \\ \text{энергии} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Скорость конвективного} \\ \text{подвода внутренней и} \\ \text{кинетической} \\ \text{энергии к элементу} \end{array} \right\} -$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} \text{Скорость конвективного} \\ \text{отвода внутренней и} \\ \text{кинетической} \\ \text{энергии элемента} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Результирующая} \\ \text{скорость подвода} \\ \text{тепла механизмом} \\ \text{теплопроводности} \end{array} \right\} - \quad (1.26)$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} \text{Результирующая скорость} \\ \text{изменения работы,} \\ \text{совершаемой элементом над} \\ \text{окружающей средой} \end{array} \right\}.$$

Запишем (1.26) в явном виде для фиксированного элемента  $\Delta x \Delta y \Delta z$  (рис. 1.8). Скорость накопления внутренней и кинетической энергии внутри элемента  $\Delta x \Delta y \Delta z$  составляет:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right), \quad (1.27)$$

где  $\hat{U}$  – внутренняя энергия, приходящаяся на единицу массы среды внутри выделенного элемента;  $v$  – значение локальной скорости движения среды.

Результирующая скорость конвективного подвода внутренней и кинетической энергии к выделенному элементу объёма записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \Delta y \Delta z \left\{ v_x \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_x - v_x \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_{x+\Delta x} \right\} + \\
& + \Delta x \Delta z \left\{ v_y \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_y - v_y \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_{y+\Delta y} \right\} + \quad (1.28) \\
& + \Delta x \Delta y \left\{ v_z \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_z - v_z \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_{z+\Delta z} \right\}.
\end{aligned}$$

Для результирующей скорости подвода энергии посредством механизма молекулярной теплопроводности справедливо выражение:

$$\begin{aligned}
& \Delta y \Delta z \left[ q_x \Big|_x - q_x \Big|_{x+\Delta x} \right] + \Delta x \Delta z \left[ q_y \Big|_y - q_y \Big|_{y+\Delta y} \right] + \quad (1.29) \\
& + \Delta x \Delta y \left[ q_z \Big|_z - q_z \Big|_{z+\Delta z} \right],
\end{aligned}$$

где  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$  – проекции вектора теплового потока  $\bar{q}$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно.

Работа, совершаемая выделенным элементом над окружающей средой, состоит из двух частей: работы против объёмных сил (например, против силы тяжести) и работы против поверхностных сил (т.е. против сил вязкости и внешнего давления). Вспомним, что работа может быть представлена в виде произведения силы на расстояние, пройденное в направлении силы. Соответственно скорость совершения работы представляет собой произведение силы на скорость движения в направлении силы. Приходящаяся на единицу массы скорость изменения работы, совершаемой системой против трёх компонентов силы тяжести  $\bar{g}$ , равна:

$$-\rho \Delta x \Delta y \Delta z \left( v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z \right). \quad (1.30)$$

Знак «минус» появляется здесь потому, что работа производится против силы тяжести, в результате чего векторы  $\bar{v}$  и  $\bar{q}$  направлены в противоположные стороны. Скорость изменения работы, совершаемой против статического давления  $p$ ,



действующего на шесть граней элемента  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta y \Delta z \left[ (pv_x) \Big|_{x+\Delta x} - (pv_x) \Big|_x \right] + \Delta x \Delta z \left[ (pv_y) \Big|_{y+\Delta y} - (pv_y) \Big|_y \right] + \\ + \Delta x \Delta y \left[ (pv_z) \Big|_{z+\Delta z} - (pv_z) \Big|_z \right]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Аналогично записывается и скорость изменения работы, совершаемой против вязких сил:

$$\begin{aligned} \Delta y \Delta z \left[ (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) \Big|_{x+\Delta x} - (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) \Big|_x \right] + \\ + \Delta x \Delta z \left[ (\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z) \Big|_{y+\Delta y} - (\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z) \Big|_y \right] + \\ + \Delta x \Delta y \left[ (\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z) \Big|_{z+\Delta z} - (\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z) \Big|_z \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Подставим (1.27) - (1.32) в обобщённое условие энергетического баланса (1.26) и разделим все члены уравнения на  $\Delta x \Delta y \Delta z$ . Переходя затем к  $\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \\ = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ v_x \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ v_y \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[ v_z \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \right] \right\} - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) - \\ - \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (pv_x) + \frac{\partial}{\partial y} (pv_y) + \frac{\partial}{\partial z} (pv_z) \right] - \\ - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z) \right]. \end{aligned}$$

Это уравнение записывается в более компактном виде с использованием символов векторного и тензорного исчисления:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] = - \left[ \nabla \cdot \rho \bar{v} \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) - (\nabla \cdot \bar{q}) + \right. \quad (1.33) \\ \left. + \rho (\bar{v} \cdot \bar{g}) - (\nabla \cdot p \bar{v}) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \bar{v}]) \right].$$

Полученное уравнение можно преобразовать к другому виду, выполняя операции дифференцирования в левой части (1.33) и в члене, описывающем вклад от конвективного переноса:

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \left[ \bar{v} \cdot \nabla \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] \right\} + \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \times \quad (1.34) \\ \times \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \bar{v}) \right] = - (\nabla \cdot \bar{q}) + \rho (\bar{v} \cdot \bar{g}) - (\nabla \cdot p \bar{v}) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \bar{v}]).$$

Первый член в левой части (1.34) представляет собой умноженную на локальную плотность среды субстанциальную производную от величины  $\left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right)$ . Второй член, как следует из уравнения неразрывности

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} = - (\nabla \cdot \rho \bar{v})$$

равен 0. Поэтому (1.34) примет вид

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) = \quad (1.35) \\ = - (\nabla \cdot \bar{q}) + \rho (\bar{v} \cdot \bar{g}) - (\nabla \cdot p \bar{v}) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \bar{v}]).$$

Отметим, что (1.33) описывает процесс переноса энергии внутри выделенного элемента объёма с точки зрения неподвижного наблюдателя. Уравнение (1.35) описывает тот же

процесс с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе со средой, в которой происходит теплоперенос.

Если воспользоваться уравнением конвективного переноса кинетической энергии

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = p(\nabla \cdot \bar{v}) - (\nabla \cdot p\bar{v}) + \rho(\bar{v} \cdot \bar{g}) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \bar{v}]) + (\tau; \nabla \bar{v}) \quad (1.36)$$

и произвести почленное вычитание уравнения (1.36) из уравнения (1.35), то получим так называемое уравнение тепловой энергии

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot \bar{q}) - p(\nabla \cdot \bar{v}) - (\tau; \nabla \bar{v}), \quad (1.37)$$

причём  $(\tau; \nabla \bar{v})$  описывает необратимый переход механической энергии в тепловую, так называемая диссипация тепловой энергии.

Для решения большинства инженерных задач удобнее записывать уравнение тепловой энергии (1.37), используя вместо  $\hat{U}$  температуру и теплоёмкость. Пусть  $\hat{U} = \hat{U}(\hat{V}, T)$ , где  $\hat{V}$  – объём, тогда

$$d\hat{U} = \left( \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}} \right)_T d\hat{V} + \left( \frac{\partial \hat{U}}{\partial T} \right)_{\hat{V}} dT = \left[ -p + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} \right] d\hat{V} + \hat{C}_v dT, \quad (1.38)$$

где  $\hat{C}_v$  – теплоёмкость единицы массы при постоянном объёме.

С учётом (1.38) субстанциальную производную  $\hat{U}$ , умноженную на плотность  $\rho$ , можно выразить в виде

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = \left[ -p + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} \right] \rho \frac{D\hat{V}}{Dt} + \rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt}. \quad (1.39)$$

С другой стороны

$$\rho \frac{D\hat{V}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = (\nabla \cdot \bar{v}). \quad (1.40)$$

Подставляя (1.40) в (1.39), а затем в (1.37), получим

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \bar{q}) - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} (\nabla \cdot \bar{v}) - (\tau; \nabla \bar{v}). \quad (1.41)$$

Это уравнение представляет собой уравнение сохранения энергии, записанное через температуру  $T$ .

Первая упрощённая форма (1.41) получается в результате выражения теплового потока  $\bar{q}$  через градиенты температуры и потока количества движения  $\tau$  через градиенты скоростей. В случае течения ньютоновской жидкости с постоянной теплопроводностью уравнение (1.41) будет:

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = \lambda \Delta T - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\rho} (\nabla \cdot \bar{v}) + \mu \Phi_v, \quad (1.42)$$

где  $\Phi_v$  – диссипативная функция перехода механической энергии в тепловую (при дозвуковых режимах течения  $\Phi_v = 0$ ).

В случае идеального газа  $(\partial p / \partial T)_{\hat{V}} = p/T$ , поэтому из (1.42) следует

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = \lambda \Delta T - p (\nabla \cdot \bar{v}). \quad (1.43)$$

Если  $p = const$ , то  $d\hat{U} = -pd\hat{V} + \hat{C}_p dT$  и поэтому

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \Delta T. \quad (1.44)$$

Для несжимаемых жидкостей ( $\rho = const$ )  $\hat{C}_p = \hat{C}_v$  и  $(\nabla \cdot \bar{v}) = 0$ , тогда

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \Delta T. \quad (1.45)$$

Для твёрдых тел  $\bar{v} = 0$  и тогда

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T. \quad (1.46)$$

### 1.5.3. Перенос массы

#### 1.5.3.1. Основные понятия

Процессы тепломассообмена происходят как в однокомпонентной среде, так и в многокомпонентной среде. В теплоэнергетических системах наиболее часто встречается случай двухкомпонентной среды. Смесь двух веществ называется **бинарной**.

Перенос массы вещества из одной области пространства в другую может осуществляться как в неподвижной (с макроскопической точки зрения), так и в движущейся многокомпонентной среде.

При наличии массопереноса в движущейся среде скорость движения отдельных компонентов вследствие диффузии может не совпадать со скоростью движения смеси в целом. В качестве последней скорости можно принимать как среднюю объёмную, так и среднюю массовую скорость.

По определению средняя массовая скорость смеси

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \cdot \bar{v}_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i}, \quad (1.47)$$

где  $n$  – число компонентов смеси;  $\rho_i$  – масса  $i$ -го компонента, содержащегося в единице объёма (парциальная плотность);  $\bar{v}_i$  – вектор скорости движения  $i$ -го компонента.

Ясно, что плотность смеси

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i. \quad (1.48)$$

Величина  $\bar{J} = \rho \bar{v}$  называется **вектором плотности потока массы смеси**, кг/(м<sup>2</sup>·с). Для  $i$ -го компонента  $\bar{J}_i = \rho_i \bar{v}_i$ , и в соответствии с (1.47) и (1.48)

$$\sum_{i=1}^n \bar{J}_i = \bar{J}.$$

Различают конвективный и диффузионный процессы переноса массы. Вектором плотности **конвективного** переноса массы  $i$ -го компонента называется величина, равная произведению  $\rho_i \cdot \bar{v}$ , а разность плотностей полного и конвективного потоков массы представляет собой вектор плотности **диффузионного** потока  $i$ -го компонента, кг/(м<sup>2</sup>·с):

$$\bar{j}_i = \bar{J}_i - \rho_i \cdot \bar{v} = \rho_i (\bar{v}_i - \bar{v}). \quad (1.49)$$

Диффузионный поток массы не зависит от выбора инерциальной системы отсчёта координат, а конвективный – зависит. Важным является то, что всегда

$$\sum_{i=1}^n \bar{j}_i = 0. \quad (1.50)$$

Состав смеси можно охарактеризовать различными способами. Отношение парциальной плотности  $i$ -го компонента к плотности смеси называется **массовой концентрацией** (массовой долей) компонента:

$$c_i = \rho_i / \rho. \quad (1.51)$$

Для бинарной смеси

$$c_1 + c_2 = 1. \quad (1.52)$$

При наличии химических реакций количество участвующего в реакции вещества обычно измеряется в молях. Для удобства расчётов вводится понятие молярной массы вещества  $M$ , г/моль (кг/кмоль). Если  $m$  – масса вещества, кг;  $\nu$  – количество вещества (число киломолей), то  $M = m/\nu$ . Молярная масса – величина постоянная для заданного вещества. **Молярная концентрация** – это число киломолей  $i$ -го компонента, содержащихся в единице объёма смеси, кмоль/м<sup>3</sup>:

$$C_i = \nu_i/V. \quad (1.53)$$

Так как  $\nu_i = m_i/M_i$ ,  $\rho_i = m_i/V$ , а  $c_i = \rho_i/\rho$ , то  $C_i = \rho c_i/M_i$ .

#### 1.5.3.2. Закон Фика

Диффузионные потоки вещества возникают вследствие неоднородного распределения концентрации компонентов смеси в пространстве. Диффузия, обусловленная градиентом концентрации компонента, называется **концентрационной** диффузией. Для бинарной смеси справедлив **закон Фика**

$$\bar{j}_1 = -\rho D \operatorname{grad} c_1; \quad (1.54)$$

$$\bar{j}_2 = -\rho D \operatorname{grad} c_2, \quad (1.55)$$

где  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  – плотность смеси;  $D$  – коэффициент диффузии, м<sup>2</sup>/с.

Для многокомпонентной смеси закономерности процессов концентрационной диффузии сложны. Поэтому часто, допуская не очень большую погрешность, все компоненты смеси разбивают на два сорта (тяжёлые и лёгкие) и рассматривают как бы бинарную смесь с единым для смеси коэффициентом диффузии  $D$ , а вектор  $\bar{j}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) рассчитывают по формуле

$$\bar{j}_i = -\rho D \operatorname{grad} c_i. \quad (1.56)$$

В общем случае процесс переноса массы данного компонента происходит тогда, когда в пространстве существует неоднородное поле химического потенциала компонента. Для бинарной смеси теоретически выводятся следующие выражения для плотности диффузионных потоков:

$$\bar{j}_1 = -\rho D \left( \operatorname{grad} c_1 + \frac{k_{T12}}{T} \operatorname{grad} T + \frac{k_{p12}}{p} \operatorname{grad} p \right); \quad (1.57)$$

$$\bar{j}_2 = -\rho D \left( \operatorname{grad} c_2 + \frac{k_{T21}}{T} \operatorname{grad} T + \frac{k_{p21}}{p} \operatorname{grad} p \right), \quad (1.58)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии бинарной смеси (иногда обозначается  $D_{12}$ , причём  $D_{12} = D_{21}$ ; в однокомпонентной среде  $D = D_{11}$ , где  $D_{11}$  – коэффициент самодиффузии);  $k_{T12}$  и  $k_{T21}$  – безразмерные коэффициенты **термодиффузии**;  $k_{p12}$  и  $k_{p21}$  – безразмерные коэффициенты **бародиффузии**.

Для отыскания функций  $c_i(x, y, z, t)$  составляют уравнения диффузии, неразрывности и движения, а для совместных процессов массо- и теплообмена ещё и уравнение энергии. В случае бинарной смеси задача тепломассообмена упрощается, так как  $c_1 + c_2 = 1$  и достаточно найти поле концентрации одного компонента.

### 1.5.3.3. Уравнения диффузии и неразрывности

Рассмотрим многокомпонентный поток смеси, в которой происходят химические реакции. Выберем систему координат  $Oxyz$  (рис. 1.9). В точке  $M(x, y, z)$  в произвольный момент времени  $t$  скорость  $i$ -го компонента равна  $\bar{v}_i$ , скорость  $j$ -го компонента –  $\bar{v}_j$ , а средняя массовая скорость –  $\bar{v}$ . Приток массы  $i$ -го компонента через поверхность неподвижного контрольного объёма  $\Delta V$  за время  $\Delta t$  равен  $\operatorname{div} \rho_i \bar{v}_i \Delta V \Delta t$ . Массу



$i$ -го компонента, образующегося в единицу времени в единице объёма в результате химических реакций, обозначим  $k_i$ , кг/(м<sup>3</sup>·с). Составим уравнение баланса массы:

$$\rho_i(x, y, z, t + \Delta t)\Delta V = \rho_i(x, y, z, t)\Delta V - \operatorname{div} \rho_i \bar{v}_i \Delta V \Delta t + k_i \Delta V \Delta t.$$

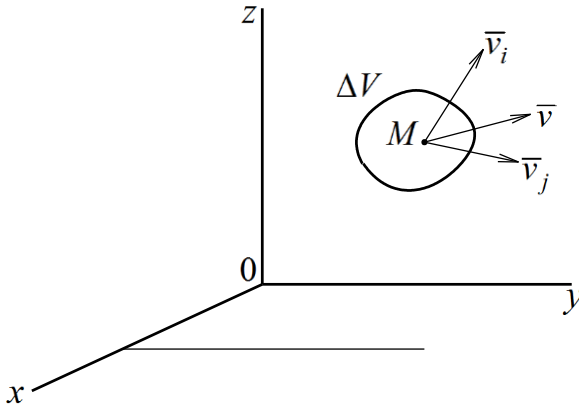


Рис. 1.9. К выводу уравнения диффузии

Сократим его члены на  $\Delta V$  и положим  $\Delta t \rightarrow 0$ . Тогда получим **уравнение диффузии** в виде

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \bar{v}_i = \mathfrak{N}_i. \quad (1.59)$$

В (1.59) можно произвести замену:  $\bar{J}_i = \rho_i \bar{v}_i$ . Уравнение (1.59) записано для  $i$ -го компонента ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Согласно основному закону химических реакций,  $\sum_{i=1}^n k_i = 0$ . Складывая  $n$  уравнений вида (1.59), получаем **уравнение неразрывности** для смеси:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{v} = 0. \quad (1.60)$$

Видно, что (1.60) совпадает с уравнением неразрывности для однородной среды.

Преобразуем (1.59). Учтём, что  $\rho_i = c_i \rho$ ;

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + c_i \frac{\partial \rho}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \rho_i \bar{v}_i = \operatorname{div} \rho_i \bar{v} + \operatorname{div} \bar{j}_i = c_i \operatorname{div} \rho \bar{v} + \rho \bar{v} \cdot \operatorname{grad} c_i + \operatorname{div} \bar{j}_i.$$

Последние соотношения подставим в (1.59) и получим другую форму уравнения диффузии

$$\rho \left( \frac{\partial c_i}{\partial t} + \bar{v} \cdot \operatorname{grad} c_i \right) = -\operatorname{div} \bar{j}_i + k_i. \quad (1.61)$$

Выражение в скобках в левой части (1.61) – субстанциональная производная  $dc_i/dt$ . Тогда соотношение (1.61) может быть записано в виде

$$\rho \frac{dc_i}{dt} = -\operatorname{div} \bar{j}_i + k_i. \quad (1.62)$$

Далее заметим, что в (1.59)  $\rho \bar{v}_i = \bar{J}_i$ , а в (1.60)  $\rho \bar{v} = \bar{J}$ . Умножая (1.59) и (1.60) почленно на  $\Delta V$  и интегрируя эти уравнения, с учётом формулы Остроградского-Гаусса получаем уравнения баланса массы  $i$ -го компонента и баланса массы смеси  $i$ -го компонента и баланса массы смеси в целом для контрольного объёма  $V$ , ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ :

$$\int_V \frac{\partial c_i}{\partial t} dV + \int_S \bar{J}_i \cdot \bar{n}_0 dS = \int_V k_i dV; \quad (1.63)$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \bar{J} \cdot \bar{n}_0 dS = 0, \quad (1.64)$$

где  $\bar{n}_0$  – единичный вектор внешней нормали (рис. 1.10).

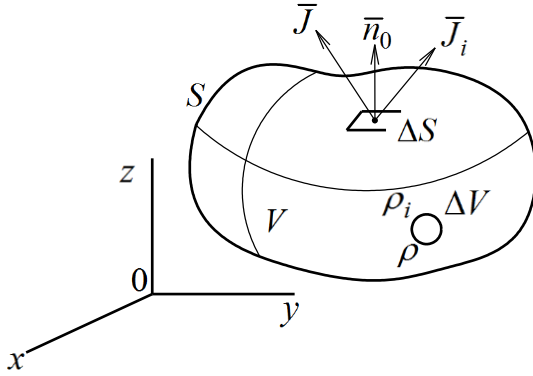


Рис. 1.10. К выводу уравнения диффузии

#### 1.5.3.4. Уравнение движения смеси

Рассматривая составляющие баланса импульса смеси в элементарном объёме  $\Delta V$  за время  $\Delta t$ , аналогично тому, как это было сделано в 1.5.1, можно получить три уравнения движения в проекциях на оси координат. Например, для оси  $Ox$  приток импульса в расчёте на единицу объёма в единицу времени

$$-\operatorname{div} \sum_{i=1}^n \rho_i v_{ix} \bar{v} = -\operatorname{div} \rho v_x \bar{v},$$

где средняя массовая скорость  $\bar{v}$  определяется по формуле (1.47), а

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \cdot v_{ix}}{\rho}.$$

Составляющая баланса импульса, обусловленная нестационарностью процесса движения, записывается как

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^n \rho_i v_{ix} = \frac{\partial \rho v_x}{\partial t}.$$

Проекция силы тяжести, действующей на компоненты смеси

$\sum_{i=1}^n \rho_i g_x = \rho g_x$ . Учитывая также напряжения  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{zx}$ , окончательно получаем уравнение движения в проекции на ось  $Ox$ :

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v_x \bar{v} = \rho g_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}. \quad (1.65)$$

Напряжения в движущейся смеси описываются законом Ньютона (см. 1.5.1), в котором  $\mu$  – динамическая вязкость, зависящая от концентрации и вязкости компонентов.

В компактной форме уравнения движения в векторной записи таковы:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j},$$

где

$$\tau_{ji} = \tau_{ij} = - \left( p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \bar{v} \right) \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right);$$

здесь  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

#### 1.5.4. Замыкание уравнений переноса

Для получения конкретных решений при интегрировании уравнений переноса количества движения, теплоты и массы должны быть использованы **граничные**, а в случае нестационарного движения и **начальные** условия.

*1.5.4.1. Граничные условия для уравнения количества движения*

Как правило, на омываемой жидкостью твёрдой поверхности принимается граничное условие «прилипания» частиц жидкости к «смоченной» стенке, которое означает отсутствие

как нормальной к твёрдой поверхности относительной скорости между частицами жидкости и близлежащими точками поверхности, так и касательных составляющих относительной скорости, т.е. отсутствие скорости скольжения жидкости по поверхности.

Исключение из этого общего положения являются граничные условия в сильно разреженных газах, где возможно скольжение газа по твёрдой поверхности, пропорциональные производной по нормали к поверхности от касательной составляющей скорости.

В число граничных условий входит также задание скорости вдалеке от обтекаемого тела в случае внешнего обтекания или расхода в случае протекания жидкости сквозь канал, а также задание давления в какой-нибудь одной точке потока, в частности, в бесконечном удалении от обтекаемого тела.

Начальные условия фигурируют в задачах нестационарных движений и представляют задание распределения скоростей в области течения в некоторый начальный момент, изменение во времени давления в данной точке пространства и т.д.

Для частных классов задач о движении вязкой жидкости существуют строгие доказательства теорем о существовании и единственности решений. Эти теоремы, помимо своего общего математического содержания, важны ещё потому, что указывают, каковы должны быть присоединённые к дифференциальным уравнениям граничные и начальные условия, а также и другие дополнительные требования, без выполнения которых решение задачи не будет единственным, а иногда и вообще может не существовать.

#### *1.5.4.2. Граничные условия для уравнения теплообмена*

При решении конкретных задач теплопроводности считаются известными физические свойства среды ( $\rho$  – плотность,  $C_p$  – теплоёмкость,  $\lambda$  – теплопроводность) и должны быть заданы геометрическая форма и размеры тела или интересующей области пространства, в котором протекает процесс переноса тепла. Дополнительно к этому необходимо задать и в

этом случае, как и для уравнения количества движения, начальные и граничные условия.

**Начальным условием** задаётся распределение температуры внутри среды и на её границах в момент времени  $t = 0$ :

$$T(x, y, z, t)|_{t=0} = f(x, y, z), \quad (1.66)$$

где  $f(x, y, z)$  – заданная функция.

**Граничным условием первого рода** задаётся температура поверхности (при  $t > 0$ ) как функция координат точек границ.

**Граничным условием второго рода** задаётся плотность теплового потока  $q_c$  на границах. При этом договариваются, что  $q_c > 0$ , если тепловой поток направлен от тела в окружающую среду, и  $q_c < 0$ , если наоборот. Тогда  $q_c = q_n$ , где  $q_n$  – проекция вектора  $\bar{q}$  на направление внешней нормали  $\bar{n}$  ( $\bar{n}$  – единичный вектор) к границе, и

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\text{поверх.}} = q_c, \quad (1.67)$$

где  $\lambda$  – теплопроводность при температуре в данной точке границы.

Для определения температурного поля при заданном распределении плотности теплового потока на поверхности необходимо знать температуру в какой-либо точке.

**Граничным условием третьего рода** задаётся температура среды  $T_{жс}$  и зависимость  $q_c$  от температуры поверхности  $T_c$  и  $T_{жс}$ . Обычно эта зависимость задаётся в виде закона Ньютона-Римана:

$$q_c = \alpha (T_c - T_{жс}), \quad (1.68)$$

где  $\alpha$  – заданный коэффициент теплоотдачи, который характеризует интенсивность процесса конвективного теплообмена, Вт/(м<sup>2</sup>·К).

С учётом (1.68) граничное условие третьего рода записывается в виде

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\text{поверх.}} = \alpha (T_c - T_{жс}), \quad (1.69)$$

где  $T_c$  – неизвестная величина, значение которой соответствует искомой функции  $T(x, y, z, t)$  на границе.

#### 1.5.4.3. Граничные условия для уравнения массообмена

При решении конкретных задач переноса массы предполагаются известными физические свойства среды ( $\rho$  – плотность,  $D$  – коэффициент диффузии, коэффициенты термодиффузии и бародиффузии), а также геометрические размеры и форма области пространства, в которой осуществляется процесс переноса массы. Как и для уравнения переноса теплоты, необходимо задать уравнения количества движения, самого уравнения переноса теплоты с начальными и граничными условиями.

**Начальное условие** задаёт распределение концентрации внутри области и на её границах в момент времени  $t = 0$ :

$$c(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = f(x, y, z), \quad (1.70)$$

где  $f(x, y, z)$  – известная функция.

**Граничным условием первого рода** задаётся концентрация на поверхности области при  $t > 0$  как функция координат точек.

**Граничные условия второго рода** задают плотность массового потока  $j_c$  на границе. При этом  $j_c > 0$ , если массовый поток направлен от области в окружающую среду, и  $j_c < 0$ , если наоборот. Тогда  $j_c = j_n$ , где  $j_n$  – проекция вектора  $\bar{j}$  на направление внешней нормали  $\bar{n}$  ( $\bar{n}$  – единичный вектор) к границе, и

$$-\lambda_c \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{\text{поверх.}} = j_c, \quad (1.71)$$

где  $\lambda_c$  – массопроводность при температуре в данной точке границы.

**Граничным условием третьего рода** задаётся концентрация среды  $c_{жс}$  и зависимость  $j_c$  от концентрации на поверхности  $c_c$  и  $c_{жс}$ . Обычно эта зависимость задаётся в виде, аналогичном закону Ньютона-Рихмана (1.68):

$$j_c = \alpha_c (c_c - c_{жс}), \quad (1.72)$$

где  $\alpha_c$  – заданный коэффициент массоотдачи, который характеризует интенсивность процесса конвективного массообмена.

## **1.6. Классическая система уравнений в задачах теплоэнергетических систем**

### **1.6.1. Общий вид уравнений и схема моделирования**

Общий вид уравнений переноса субстанций в теплоэнергетических системах таков:

- уравнение количества движения (1.10)

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho \bar{g}; \quad (1.73)$$

- уравнение неразрывности

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \bar{v}); \quad (1.74)$$

- уравнение переноса теплоты (1.41)

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \bar{q}) - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} (\nabla \cdot \bar{v}) - (\tau; \nabla \bar{v}); \quad (1.75)$$

- уравнение переноса массы (1.62)



$$\rho \frac{dc_i}{dt} = -\operatorname{div} \bar{j}_i + k_i. \quad (1.76)$$

Система (1.73) - (1.76) замыкается соответствующим конкретной постановке задач набором начальных и граничных условий из п. 15.4.

Очевидно, что в общем случае при решении системы (1.73) - (1.76) с краевыми условиями возникают большие сложности, во-первых, из-за существенной нелинейности данной задачи, а во-вторых, из-за сложной геометрии области, в которой ищется решение. Поэтому применяется классический метод моделирования, заключающийся в уменьшении геометрической размерности задачи и линеаризации уравнений. Однако такая методика приводит к желаемому результату только в простейших случаях. Ниже демонстрируются такие примеры, иллюстрирующие данный подход.

## ***1.6.2. Моделирование гидродинамических задач***

### *1.6.2.1. Установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в каналах*

Одним из наиболее простых случаев движения вязкой несжимаемой жидкости является так называемое ламинарное движение по цилиндрической трубе произвольного сечения, при котором линии тока – прямые линии, параллельные оси трубы.

Как показывают опыты, такое движение осуществляется в цилиндрических трубах с различными формами сечений, если только число Рейнольдса не превосходит некоторого определённого критического своего значения, после чего движение перестаёт быть ламинарным, частицы жидкости приобретают сложные криволинейные траектории и, следовательно, необходимо применение других уравнений.

Направим ось  $Oz$  (рис. 1.11) по оси трубы и будем предполагать трубу бесконечно длинной, а поток – направленным вдоль оси трубы, так что из трёх компонент скорости

$u, v, w$  остаётся лишь одна  $w$ , остальные равны нулю, т.е.  $u = v = 0$ .

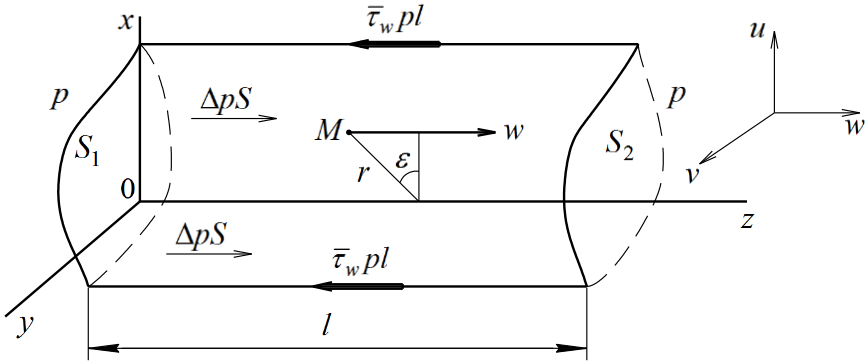


Рис. 1.11. Расчётная схема

Отвлекаясь от действия объёмных сил и считая поток изотермическим, а, следовательно, плотность  $\rho$  и коэффициент  $\mu$  постоянными, будем иметь, согласно уравнениям Навье-Стокса (1.17) - (1.19) и уравнению неразрывности, систему

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Из последнего уравнения (уравнения неразрывности) этой системы следует, что  $w$  представляет собой функцию только  $x$  и  $y$ , а из первых двух – что  $\rho$  – функция только  $z$ . Иными словами, если провести нормальные к оси трубы сечения, то во всех таких сечениях распределения скоростей одинаковы, а давление меняется только от сечения к сечению, сохраняя в данном сечении одинаковое значение. Таким образом, предыдущая система сводится к одному уравнению

$$\mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (1.77)$$

Левая часть (1.77) представляет собой функцию только от  $x$  и  $y$ , правая – только от  $z$ ; при независимости координат друг от друга это может быть лишь в случае постоянства левой и правой частей равенства по отдельности.

Введём удобное для дальнейшего обозначение

$$\frac{dp}{dz} = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l}, \quad (1.78)$$

где  $\Delta p$  – постоянное вдоль трубы падение давления на произвольно выбранном участке длины  $l$ .

При установившемся движении вязкой жидкости по цилиндрической трубе перепад давления  $\Delta p$ , будучи умножен на площадь сечения  $S_1 = S_2 = S$ , играет роль движущей силы  $\Delta p \cdot S$ , уравниваемой силами сопротивлений трения жидкости о поверхность трубы с равнодействующей, равной

$$\int_{\Gamma} \tau_w ds \cdot l,$$

где  $\tau_w(s)$  – переменное по периметру напряжение трения,  $\Gamma$  – граница сечения  $S$ .

Отсюда непосредственно следует, что давление в цилиндрической трубе должно уменьшаться вниз по течению, а, следовательно,  $\Delta p > 0$ . Для трубы переменного сечения, где движение может быть как ускоренным, так и замедленным, такое заключение сделать нельзя.

В конкретных расчётах перепад давления  $\Delta p$  на участке трубы длины  $l$  либо задаётся непосредственно, либо может быть выражен через другие заданные величины: секундный расход жидкости сквозь трубу, среднюю по сечению или максимальную скорости.

Таким образом, (1.77) сводится к линейному уравнению в частных производных второго порядка в плоскости  $Oxy$  эллиптического типа (уравнению Пуассона)

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}, \quad (1.79)$$

которое должно быть решено при граничном условии обращения в нуль скорости  $w$  на контуре  $\Gamma$  нормального к ости цилиндра сечения.

Используя разложения в бесконечные ряды, можно решить задачу протекания несжимаемой вязкой жидкости сквозь трубу прямоугольного сечения. Обозначим высоту прямоугольника, параллельную оси  $Oy$ , через  $2h$ , а основание, параллельное оси  $Ox$ , через  $2kh$ , где  $k = \text{const} > 0$ . Ось  $Oz$  проведём через центр прямоугольника и направим вниз по потоку.

Преобразуем (1.79) к безразмерному виду, приняв за масштаб длин высоту  $h$ , а за масштаб скоростей – величину  $\frac{h^2 \Delta p}{\mu l}$ , и соответственно

$$\xi = \frac{x}{h}; \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad W = \frac{w \mu l}{h^2 \Delta p},$$

тогда (1.79) станет

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = -1, \quad (1.80)$$

$W = 0$  при  $\xi = \pm k$ ,  $|\eta| < 1$  и при  $\eta = \pm 1$ ,  $|\xi| < k$ . Воспользуемся известным рядом Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \frac{2n+1}{2} \pi t = \begin{cases} \pi/4, & \text{если } |t| < 1, \\ 0, & \text{если } |t| = 1. \end{cases}$$

В этом случае (1.80) преобразуется в

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{k} \xi\right). \quad (1.81)$$

Будем искать решение в виде

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\eta) \cos\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{k} \xi\right), \quad (1.82)$$

для которого автоматически выполнены граничные условия по  $\xi$ . Подставляя (1.82) в (1.81) и приравнивая коэффициенты при косинусах с одинаковыми аргументами, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} Y_n'' - \left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{k}\right)^2 Y_n = -\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \\ Y_n = 0 \text{ при } \eta = \pm 1, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (1.83)$$

Общее решение (1.83)

$$Y_n = A_n + B_n \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{k} \eta\right) + C_n \operatorname{sh}\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{k} \eta\right), \quad (1.84)$$

где  $A_n$  определяется путём непосредственной подстановки (1.84) в уравнение (1.83)

$$A_n = \frac{16k^2}{\pi^3} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3},$$

а постоянные  $B_n$  и  $C_n$  определяются путём подстановки в граничные условия (1.83) из системы

$$B_n \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{k}\right) + C_n \operatorname{sh}\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{k}\right) = -A_n,$$

$$B_n \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{k}\right) - C_n \operatorname{sh}\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{k}\right) = -A_n,$$

откуда

$$B_n = -\frac{A_n}{ch\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{k}\right)}, C_n = 0, (n=0, 1, \dots).$$

Таким образом, решение имеет вид

$$W = \frac{16k^2}{\pi^3} \frac{h^2 \Delta p}{\mu l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[ 1 - \frac{ch\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi y}{kh}\right)}{ch\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{k}\right)} \right] \times \cos\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{kh} k\right).$$

#### 1.6.2.2. Ламинарный пограничный слой

Под граничным слоем понимают тонкую при известных условиях в поперечном направлении к потоку область течения, где, в отличие от окружающего её безвихревого потока, движение является вихревым и характеризуется сосредоточенными в этой области резкими изменениями скорости. Под толщиной пограничного слоя как некоторой конечной величины  $\delta$  подразумевают расстояние от поверхности обтекаемого тела до такой точки в потоке, где практически с заданной степенью приближения можно принять продольную скорость в пограничном слое равной её значению в той же точке внешнего безвихревого потока. Геометрическое место таких точек даёт приближенное, «конечное», представление о внешней границе пограничного слоя. Малость  $\delta$  позволяет рассматривать (рис. 1.12) ортогональную сетку параллельных контуру тел и нормальных к ним кривых как прямолинейную декартову систему  $(x, y)$  в области пограничного слоя и сохранить для уравнений Навье-Стокса обычную их форму:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1.85)$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости.

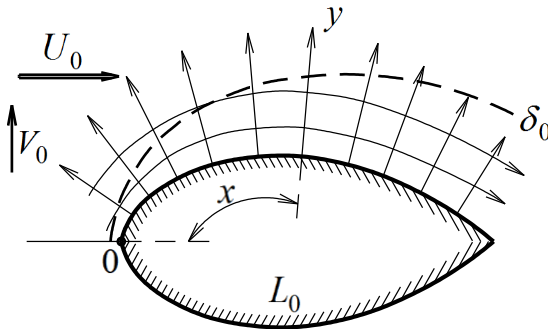


Рис. 1.12. К выводу уравнений пограничного слоя

Выберем масштабы задачи:  $U_0$  – скорость набегающего потока;  $L_0$  – характерная длина тела;  $\delta_0$  – толщина пограничного слоя. Определим масштаб поперечных скоростей  $V_0$  следующим образом. Из уравнения неразрывности получим

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

тогда  $V_0 = U_0 \delta_0 / L_0$  и если характерное число Рейнольдса есть  $Re_0 = U_0 L_0 / \nu$ , то учитывая фундаментальное соотношение, следующее из теоремы Гельмгольца

$$\frac{\delta_0}{L_0} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re}_0}}\right),$$

где символ «O» означает «тот же порядок», найдём

$$\frac{V_0}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_0}},$$

т.е. поперечная скорость в области пограничного слоя имеет тот же относительный порядок, что и толщина слоя. Оценивая аналогичным образом члены в левой и правой частях второго уравнения (1.85), найдём:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} = O\left(\frac{U_0 V_0}{L_0}\right) = O\left(\frac{U_0 U_0 \delta_0}{L_0^2}\right) = O\left(\frac{U_0^2/L_0}{\sqrt{\text{Re}_0}}\right);$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = O\left(U_0 \frac{\delta_0}{L_0} \frac{U_0 \delta_0}{L_0 \delta_0}\right) = O\left(\frac{U_0^2/L_0}{\sqrt{\text{Re}_0}}\right);$$

$$v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = O\left(v \frac{U_0 \delta_0}{L_0} \frac{1}{L_0^2}\right) = O\left(\frac{v}{U_0 L_0} \frac{\delta_0}{L_0} \frac{U_0^2}{L_0}\right) = O\left(\frac{U_0^2/L_0}{\text{Re}_0 \sqrt{\text{Re}_0}}\right);$$

$$v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = O\left(v \frac{U_0 \delta_0}{L_0} \frac{1}{\delta_0^2}\right) = O\left(\frac{v}{U_0 L_0} \frac{U_0^2 L_0}{L_0} \frac{\sqrt{\text{Re}_0}}{L_0}\right) = O\left(\frac{U_0^2/L_0}{\sqrt{\text{Re}_0}}\right).$$

Согласно приведённым оценкам эти члены имеют при больших значениях  $\text{Re}_0$  порядок  $\sim 1/\sqrt{\text{Re}_0}$ , т.е.  $\partial p/\partial y = 0$ , откуда следует, что во всех точках данного, нормального к поверхности тела сечения пограничного слоя, давление имеет одно и то же значение, а это означает, что  $p = p(x)$  и  $\partial p/\partial x = dp/dx$ . Согласно теореме Бернулли имеем:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx},$$



где  $U = U(x)$  – скорость среды на внешней границе пограничного слоя. Оценим члены первого уравнения (1.85):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = O\left(\frac{U_0^2}{L_0}\right); v \frac{\partial u}{\partial x} = O\left(V_0 \frac{U_0}{\delta_0}\right) = O\left(\frac{U_0^2}{L_0^2}\right);$$

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O\left(\frac{vU_0}{L_0^2}\right) = O\left(\frac{U_0^2/L_0}{\text{Re}_0}\right); v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O\left(\frac{vU_0}{\delta_0^2}\right) = O\left(\frac{U_0^2}{L_0}\right),$$

откуда система (1.85) трансформируется в систему

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1.86)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} u = v = 0 \text{ при } y = 0, \\ u = u_0(y) \text{ при } x = x_0, \\ u \rightarrow U(x) \text{ при } y \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.87)$$

Первые два из них выражают условие прилипания вязкой жидкости к твёрдой стенке – контуру обтекаемого тела. Третье представляет собой требование асимптотического стремления продольной скорости  $u$  в области пограничного слоя к скорости  $U(x)$  на границе пограничного слоя с безвихревым потоком.

Далее при таких упрощениях физического и математического характера исходной задачи, полученная модель (1.86), (1.87) остаётся нелинейной и её интегрирование возможно лишь численно или приближёнными методами.

Получим описание течения несжимаемой жидкости вблизи переднего края погруженной в поток плоской пластины (рис. 1.13).

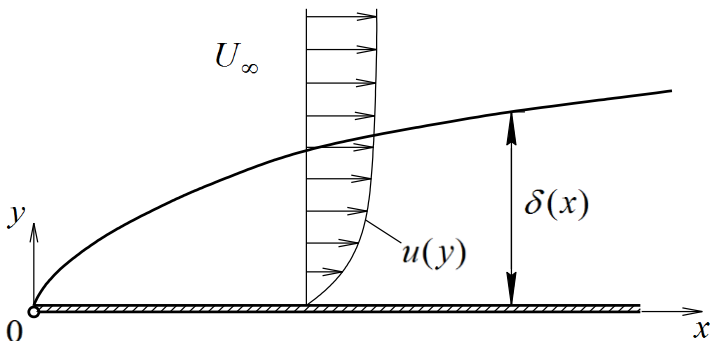


Рис. 1.13. Схема пограничного слоя на обтекаемой пластине

Пусть  $U = U(x) = U_\infty = \text{const}$ , тогда в исходной системе уравнений пограничного слоя (1.86) отсутствует первое слагаемое в правой части первого уравнения, т.е.  $U \frac{dU}{dx} = 0$ .

Из второго уравнения (1.86) (уравнение неразрывности) выразим  $v$ :

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

тогда получим исходное уравнение в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \left( \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.88)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; \quad u = U_\infty \quad \text{при} \quad y = \infty; \\ u = U_\infty \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \forall y. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Предположим, что профили скоростей на различных расстояниях  $x$  от переднего края пластины подобны между собой, т.е.

$$\frac{u}{U_\infty} = \varphi(\eta),$$

где  $\eta = y/\delta(x)$ . Примем далее, что  $u = U_\infty$  вне пограничного слоя (для  $y > \delta$ ). Затем вычислим производные, входящие в уравнение (1.88)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_\infty \varphi' \left( -\frac{\eta}{\delta} \right) \frac{d\delta}{dx}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \varphi' \frac{1}{\delta}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_\infty \varphi'' \frac{1}{\delta^2}.$$

После подстановки найденных выражений в уравнение (1.88) и последующего интегрирования его по  $\eta$  получим:

$$(B - A) \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu}{U_\infty} C, \quad (1.90)$$

где

$$A = \int_0^1 \varphi \varphi' \eta d\eta,$$

$$B = \int_0^1 \varphi' \left( \int_0^2 \varphi' \eta d\eta \right) d\eta = -A + \int_0^1 \varphi' \eta d\eta,$$

$$C = \int_0^1 \varphi'' d\eta = \varphi' \Big|_0^1.$$

Интегрирование (1.90) даёт соотношение

$$\delta(x) = \sqrt{2 \left( \frac{C}{B - A} \right) \left( \frac{\nu x}{U_\infty} \right)},$$

при выводе которого использовано граничное условие  $\delta(0) = 0$ . Таким образом, толщина пограничного слоя пропорциональна корню квадратному расстояния вниз по потоку от края пластины.

Далее, выберем профиль скорости:

$$\varphi(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3,$$

который приблизительно соответствует действительному профилю, тогда  $A = 9/35$ ;  $B = 33/280$ ;  $C = -3/2$ . Отсюда толщина пограничного слоя

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{280}{13}} = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

и распределение скорости

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{4,64 \sqrt{\nu x / U_\infty}} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{4,64 \sqrt{\nu x / U_\infty}} \right)^3, \quad 0 \leq y \leq \delta(x).$$

### **1.6.3. Моделирование тепловых задач**

*1.6.3.1. Термический начальный участок в плоском канале с постоянными и равными температурами стенок*

Термическая обработка потоков различной физической природы, при их транспортировании по каналам, широко используется в энергетике. Идентификация длины рабочего участка канала, на котором происходит требуемое нагревание (теплосъём) потока, определяет конструкционные характеристики аппаратного оформления процесса.

Известно, что интенсивность теплообмена зависит от гидродинамического режима потока и его реологии, тепловых условий на границе, наличия фазовых превращений, диссипации энергии внутреннего и внешнего трения и др. Многообразие факторов, влияющих на кинетику процесса, пока не позволяет синтезировать инвариантную математическую модель, а существующий спектр применяемых подходов базируется на основе уравнений конвективного теплообмена с различной степенью детализации и системы допущений. В этой связи предпочти-

тельным оказывается использование интегральных характеристик, например, средней скорости потока, как инструмента для построения методов прогнозирования процесса термической обработки реологически различных потоков технологических сред.

Постановка задачи. Рассматривается движение среды в плоском канале бесконечной длины и ширины  $2h$  с постоянной скоростью  $v$  по сечению и вдоль потока, равной средней скорости реального течения (рис. 1.14), при отсутствии тепловых источников (потоков).

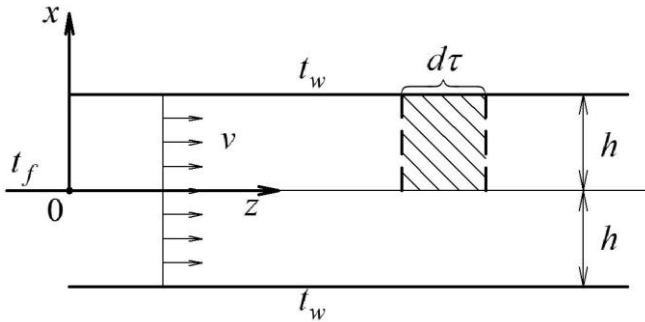


Рис. 1.14. Расчётная схема

Температура среды на входе  $t_f = const$  и стенок  $t_w = const$  заданы (это соответствует, например, ситуации обтекания теплоносителем с достаточно высокой скоростью внешних поверхностей канала), теплофизические характеристики считаются постоянными в ходе всего процесса. Переносом теплоты теплопроводностью в направлении движения пренебрегаем по сравнению с поперечным направлением, т.е.

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \ll \frac{\partial^2 t}{\partial x^2},$$

тогда уравнение конвективного теплообмена примет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + v \frac{\partial t}{\partial z} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad (1.91)$$

где  $\tau$  – текущее время;  $t$  – локальная температура;  $a$  – коэффициент температуропроводности среды.

Начальное условие

$$t(x, z, 0) = t_w; \quad (1.92)$$

граничные условия на входе и стенке

$$t(x, 0, \tau) = t_f; \quad t(h, z, \tau) = t_w; \quad (1.93)$$

условие симметричности

$$\frac{\partial t(0, z, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (1.94)$$

Система (1.91) - (1.94) в безразмерном виде такова:

$$\frac{\partial T}{\partial \Theta} + \frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}; \quad (1.95)$$

$$T(X, Z, 0) = 0; \quad T(X, 0, \Theta) = 1; \quad (1.96)$$

$$\frac{\partial T(0, Z, \Theta)}{\partial X} = T(1, Z, \Theta) = 0, \quad (1.97)$$

где  $\Theta = \tau v/h$ ;  $X = x/h$ ;  $Z = z/h$ ;  $\text{Pe} = vh/a$  – число Пекле;  
 $T(X, Z, \Theta) = [t(x, z, \tau) - t_w] / (t_f - t_w)$ .

Решение уравнений модели. Изображение системы (1.95) - (1.97) в результате последовательного применения интегрального преобразования Лапласа по переменным  $\Theta$  и  $Z$

$$\frac{d^2 T_{sp}(X, p, s)}{dX^2} - \text{Pe}(s + p) T_{sp}(X, p, s) = -\frac{\text{Pe}}{s}; \quad (1.98)$$

$$\frac{dT_{sp}(0, p, s)}{dX} = T_{sp}(1, p, s) = 0, \quad (1.99)$$

где  $s$ ,  $p$ ,  $T_{sp}$  – изображения  $\Theta$ ,  $Z$ ,  $T$ .

Решение (1.98) и (1.99):

$$T_{sp}(X, p, s) = \left\{ 1 - \frac{ch\left[\sqrt{Pe(s+p)}X\right]}{ch\left[\sqrt{Pe(s+p)}\right]} \right\} / \left[ s(s+p) \right]. \quad (1.100)$$

Оригинал (1.100) по параметру  $p$ :

$$T_s(X, Z, s) = \frac{4}{\pi s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n+1)X\right] \times \\ \times \exp\left\{-\left[s + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4Pe}Z\right]\right\}. \quad (1.101)$$

Оригинал (1.101) по параметру  $s$  (решение системы (1.95) - (1.97)):

$$T(X, Z, \Theta) = \frac{4}{\pi} 1(\Theta - Z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n+1)X\right] \times \\ \times \exp\left\{-s + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4Pe}Z\right\}, \quad (1.102)$$

где  $1(\Theta - Z)$  – функция Хэвисайда. Для определения длины теплового начального участка в зависимости от  $Pe$ , найдём изменение средней температуры по сечению при  $\Theta > Z$ :

$$\bar{T}(Z) = \int_0^1 T(X, Z, \Theta) dX = \\ \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp\left\{-s + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4Pe}Z\right\}. \quad (1.103)$$

Ограничимся в (1.103) слагаемым, когда  $n = 0$ :

$$\bar{T}(Z) \approx \frac{8}{\pi^2} \exp\left(\frac{\pi^2}{4\text{Pe}} Z\right). \quad (1.104)$$

Из (1.104)

$$Z_0 = -\frac{4}{\pi^2} \text{Pe} \ln\left[\frac{\pi^2}{8} \bar{T}(Z_0)\right]. \quad (1.105)$$

Задавшись  $\bar{T}(Z_0) = 0,02$ , получим

$$Z_0 = 1,50 \text{ Pe}. \quad (1.106)$$

### 1.6.3.2. Свободная конвекция

Рассмотрим задачу о течении жидкости между двумя параллельными вертикальными стенками, имеющими различные температуры. Пусть расстояние между стенками составляет  $2b$  (рис. 1.15).

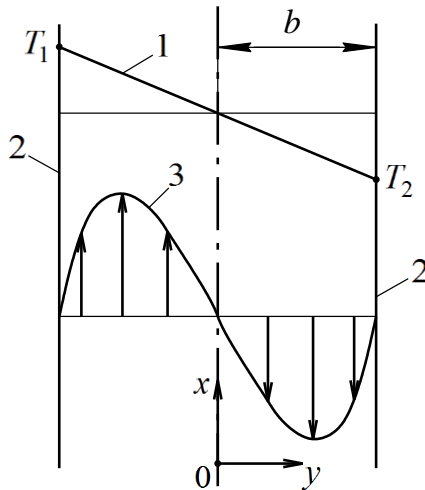


Рис. 1.15. Расчётная схема:  
1 – распределение температуры; 2 – стенки;  
3 – распределение скорости



Обозначим через  $\rho$  и  $\mu$  соответственно плотность и вязкость жидкости. Ось  $y$  направим перпендикулярно стенкам и предположим, что на одной из них ( $y = -b$ ) всё время поддерживается постоянная температура  $T_2$ , вторая же стенка ( $y = +b$ ) находится при постоянной температуре  $T_1$ , причём  $T_2 > T_1$ . Благодаря наличию температурного градиента участки жидкости, прилегающие к более нагретой стенке, движутся вверх, тогда как вблизи менее нагретой стенки жидкость течёт вниз. Заметим, что температура зависит только от одной координаты  $y$  (если не учитывать краевых эффектов). Для того, чтобы найти распределение температуры  $T(y)$ , необходимо составить баланс тепла в слое толщиной  $\Delta y$ . В случае постоянной теплоёмкости этот баланс приводит к дифференциальному уравнению

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (1.107)$$

где  $\lambda$  – теплопроводность жидкости, решение которого должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$T = T_2 \text{ при } y = -b; \quad (1.108)$$

$$T = T_1 \text{ при } y = b. \quad (1.109)$$

Решение задачи (1.107) - (1.109):

$$T = T_m - \frac{1}{2} \Delta T \left( \frac{y}{b} \right), \quad (1.110)$$

где  $\Delta T = T_2 - T_1$ ;  $T_m = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ .

Путём составления баланса количества движения для того же самого слоя толщиной  $\Delta y$  можно вывести дифференциальное уравнение, описывающее распределение скоростей:

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \frac{dp}{dz} + \rho g, \quad (1.111)$$

где  $v_z$  – скорость жидкости в канале;  $p$  – давление;  $g$  – ускорение свободного падения.

Разложим плотность  $\rho$  в ряд Тейлора по температуре вблизи некоторого фиксированного значения  $\bar{T}$ :

$$\rho = \rho|_{\bar{T}} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{\bar{T}} (T - \bar{T}) + \dots = \bar{\rho} - \bar{\rho} \bar{\beta} (T - \bar{T}) + \dots, \quad (1.112)$$

где  $\bar{\rho}$  – плотность жидкости при  $T = \bar{T}$ , а  $\bar{\beta}$  – коэффициент объёмного расширения, соответствующий  $\bar{T}$ :

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{(1/\rho)} \left[ \frac{\partial (1/\rho)}{\partial T} \right]_p = - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p.$$

Подставив первые два члена из (1.112) в (1.111), получим:

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \frac{dp}{dz} + \bar{\rho} g - \bar{\rho} \bar{\beta} g (T - \bar{T}).$$

Если градиент давления в системе обусловлен только весом жидкости, заключённой между стенками, то  $dp/dz = -\bar{\rho} g$ . В этом случае уравнение движения принимает следующий вид:

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = -\bar{\rho} \bar{\beta} g (T - \bar{T}). \quad (1.113)$$

Физический смысл этого уравнения заключается в том, что в рассматриваемой системе вязкие силы в точности уравновешены подъёмными силами. Подставим (1.110) в (1.113). В результате находим:

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = -\bar{\rho} \bar{\beta} g \left[ (T_m - \bar{T}) - \frac{1}{2} \Delta T \left( \frac{y}{b} \right) \right]. \quad (1.114)$$

Граничные условия «прилипания»:

$$v_z = 0 \text{ при } y = -b; \quad (1.115)$$

$$v_z = 0 \text{ при } y = b. \quad (1.116)$$

Решение (1.114) - (1.116) есть

$$v_z = \frac{\bar{\rho}\bar{\beta}gb^2\Delta T}{12\mu}(\eta^3 + A\eta - \eta + A), \quad (1.117)$$

где  $A = 6(T_m - \bar{T})/\Delta T$  и  $\eta = y/b$ .

Потребуем теперь, чтобы суммарный объёмный поток жидкости в поперечном сечении канала равнялся нулю, т.е.

$$\int_{-1}^1 v_z d\eta = 0. \quad (1.118)$$

Подставив (1.117) в (1.118), получим

$$-\frac{2}{3}A + 4A = 0,$$

откуда следует, что  $A = 0$ , т.е.  $\bar{T} = T_m$ .

Таким образом, окончательное выражение для распределения скоростей имеет следующий вид:

$$v_z = \frac{\bar{\rho}\bar{\beta}gb^2\Delta T}{12\mu}(\eta^3 - \eta). \quad (1.119)$$

Проведённый анализ показывает, что неоднородное температурное поле, существующее в пространстве между двумя вертикальными стенками, вызывает появление подъёмных сил в жидкости, заполняющей это пространство. Наличие подъёмных сил приводит к тому, что возникает неоднородный профиль скоростей.

В заключение заметим, что формулу (1.119) можно записать в несколько ином виде, введя в рассмотрение безраз-

мерную скорость  $\varphi = bv_z \bar{\rho} / \mu$ . Из (1.119) следует, что безразмерная скорость связана с безразмерной длиной соотношением

$$\varphi = \frac{1}{12} \text{Gr} (\eta^3 - \eta),$$

где  $\text{Gr} = \frac{\bar{\rho}^2 g \bar{\beta} b^3 \Delta T}{\mu^2}$  – число Грасгофа.

### 1.6.4. Моделирование массообменных задач

1.6.4.1. Растворение твёрдого вещества в стекающей плёнке жидкости

Жидкость  $B$  ламинарно стекает вниз по вертикальной стенке (рис. 1.16.). При  $z < 0$  стенка не растворяется в жидкости, но в области  $0 < z < L$  стенка содержит вещество  $A$ , которое слабо растворяется в  $B$ .

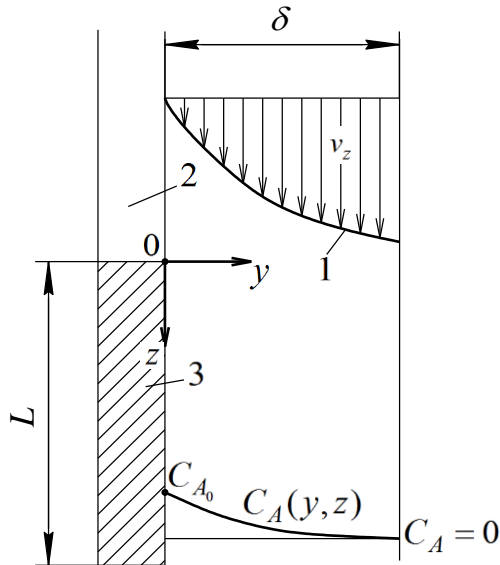


Рис. 1.16. Растворение твёрдого вещества в стекающей плёнке с полностью развитым параболическим профилем скорости: 1 – профиль скорости жидкости  $B$ ; 2 – нерастворимая стенка; 3 – малорастворимая стенка, выделяющая вещество  $A$

Начало плёнки расположено достаточно высоко вверх по потоку, так что  $z \geq 0$  величина  $v_z$  зависит только от  $y$ . Очевидно, что в этом случае применимо диффузионное уравнение

$$v_z \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2}, \quad (1.120)$$

где  $v_z = v_{\max} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2$ ;  $D_{AB}$  – коэффициент диффузии вещества  $A$  в жидкость  $B$ ;  $v_{\max}$  – максимальная скорость плёнки (на свободной границе);  $\delta$  – толщина плёнки;  $C_A$  – концентрация вещества  $A$  в жидкости  $B$ . Если «время компонента  $L/v_{\max}$ » не велико, хорошим приближением для  $v_z$  является выражение

$$v_z = ay,$$

где  $a = \rho g \delta / \mu$ ;  $\rho$ ,  $\mu$  – плотность и динамическая вязкость жидкости;  $g$  – ускорение силы тяжести. Поэтому в окончательной формулировке краевая задача для уравнения (1.120) примет вид

$$ay \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2}; \quad (1.121)$$

$$C_A = 0 \text{ при } z = 0; \quad (1.122)$$

$$C_A = 0 \text{ при } y = \infty; \quad (1.123)$$

$$C_A = C_{A_0} \text{ при } y = 0, \quad (1.124)$$

где  $C_{A_0}$  – растворимость вещества  $A$  в жидкости  $B$ .

Будем предполагать, что решение (1.121) имеет следующее представление:

$$\frac{C_A}{C_{A_0}} = f(\eta),$$

где  $\eta = y \left( \frac{a}{9D_{AB}z} \right)^{1/3}$ . Это позволяет переписать систему (1.121)

- (1.124) в виде краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 3\eta^2 \frac{df}{d\eta} = 0 \quad (1.125)$$

с граничными условиями

$$f = 0 \text{ при } \eta = \infty; \quad (1.126)$$

$$f = 1 \text{ при } \eta = 0. \quad (1.127)$$

Решение (1.125) - (1.127) таково:

$$\frac{C_A}{C_{A_0}} = \frac{\int_0^\infty \exp(-\eta^3) d\eta}{\int_0^\infty \exp(-\eta^3) d\eta} = \frac{\int_0^\infty \exp(-\eta^3) d\eta}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}, \quad (1.128)$$

где  $\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$  – гамма-функция, определяемая выражением

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty \beta^{n-1} e^{-\beta} d\beta \quad (n > 0).$$

Из решения определяется средняя скорость массоотдачи для всей поверхности растворения

$$N_{A,cp} = -\frac{D_{AB}}{L} \int_0^L \left( \frac{\partial C_A}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dz = \frac{2D_{AB}C_{AB}}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)} \sqrt[3]{\frac{a}{9D_{AB}L}}.$$

1.6.4.2. Осаждение равномерно распределённой мало-концентрированной стоковской малодисперсной взвеси в плоском слое с движущейся свободной границей

Рассмотрим плоский слой с движущейся свободной границей  $h = h_0 - vt$ , где  $t$  – время,  $v = const$  – скорость движения границы,  $h_0$  – исходная толщина слоя; в котором в начальный момент времени со счётной концентрацией  $n_0$  равномерно распределена малоконцентрированная малодисперсная взвесь стоковских частиц со скоростью осаждения  $w = const$  в условиях перемешивания дисперсионной среды с эффективным коэффициентом диффузии  $D$ , тогда плотность штучного потока в слое в векторной форме имеет следующий вид:

$$\bar{j}(x, t) = \bar{w}n(x, t) - D \text{grad } n(x, t). \quad (1.129)$$

В скалярной форме (рис. 1.17) соотношение (1.129) таково:

$$\bar{j}(x, t) = -wn(x, t) - D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x}. \quad (1.130)$$

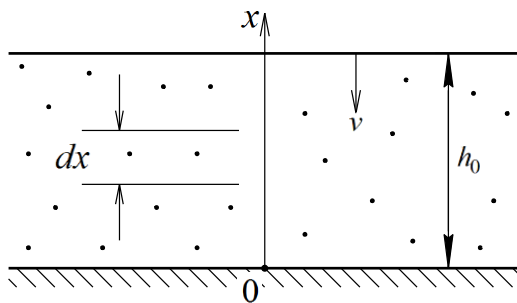


Рис. 1.17. Расчётная схема

Число частиц, поступивших в элементарный объём через площадь  $S$  за время  $\partial t$  составит

$$\partial N(x, t) = \left[ -wn(x, t) - D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} \right] S \partial t, \quad (1.131)$$

а покинувших его

$$\begin{aligned}
 \partial N(x+dx, t) &= \left[ -wn(x+dx, t) - D \frac{\partial n(x+dx, t)}{\partial x} \right] S \partial t = \\
 &= \left\{ -w \left[ n(x, t) + \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} dx \right] - \right. \\
 &\quad \left. - D \left[ \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} dx \right] \right\} S \partial t.
 \end{aligned} \tag{1.132}$$

Из (1.131) и (1.132) следует изменение числа частиц в элементарном объёме

$$\begin{aligned}
 dN(x, t) &= \partial N(x, t) - \partial N(x+dx, t) = \\
 &= \left[ -wn(x, t) - w \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} dx - D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} - \right. \\
 &\quad \left. - D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} dx + wn(x, t) + D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} \right] S \partial t = \\
 &= \left[ -w \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} - D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} \right] dx S \partial t.
 \end{aligned} \tag{1.133}$$

Из (1.133), разделив обе части на  $dx S \partial t$ , получим

$$\frac{dN(x, t)}{S dx \partial t} = w \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2},$$

но

$$\partial n(x, t) = \frac{\partial N(x, t)}{S \partial x},$$

тогда

$$\partial n(x, t) = w \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2}. \tag{1.134}$$



Краевые условия:

$$n(x, 0) = n_0; \quad (1.135)$$

$$+wn(0, t) + D \frac{\partial n(0, t)}{\partial x} = +kn(0, t); \quad (1.136)$$

$$+wn[h(t), t] + D \frac{\partial n[h(t), t]}{\partial x} = 0; \quad (1.137)$$

$$h(t) = h_0 - vt. \quad (1.138)$$

Таким образом, задача формализована математически в виде нелинейной краевой задачи (1.134) - (1.138).

## 2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

### 2.1. Общие замечания

Появление быстродействующих компьютеров резко изменило характер применения их при решении теплоэнергетических инженерных задач. Задачи, которые сейчас с малыми затратами решаются на компьютерах за несколько секунд, всего 20-40 лет назад известными в то время численными методами на существовавших вычислительных системах могли быть решены лишь за несколько лет. Мощные компьютеры, о возможности появления которых никто и не думал, привели к многочисленным изменениям. В первую очередь эти изменения стали заметны в промышленности и научно-исследовательских лабораториях, т.е. там, где выше всего была потребность в решении сложных задач.

Таким образом, мы являемся свидетелями резкого роста роли и значения нового подхода к решению инженерных задач, который получил название вычислительного эксперимента. Основой его является то, что уравнения (чаще всего уравнения в частных производных), описывающие интересующий нас физический процесс, решаются численно.

Ожидается, что при проектировании вычислительный эксперимент в ближайшее будущее полностью вытеснит натурный эксперимент. Экспериментальные исследования будут, вероятно, ещё какое-то время необходимы в приложениях, если нужно получить информацию в турбулентных течениях, т.к. для описания таких течений в настоящее время невозможно использовать модели, свободные от эмпирической информации. В приложениях, связанных с течением многофазных сред, кипением или конденсацией, особенно в сложных геометрических конфигурациях, экспериментальные методы играют ведущую роль при получении необходимой при проектировании информации. Это связано с тем, что исследования в этой области находятся пока на довольно низком уровне.

## **2.2. Сравнение экспериментального, теоретического и вычислительного подходов**

Выше уже отмечалось, что для решения теплоэнергетических задач используются три подхода: 1) экспериментальный; 2) теоретический; 3) численный. Теоретический подход часто называют аналитическим, термины же численный и вычислительный взаимозаменяемы.

Если используется экспериментальный подход, то сначала необходимо спроектировать и изготовить установку и предусмотреть возможность измерения необходимых характеристик. После того как установка изготовлена, можно приступить непосредственно к экспериментальному исследованию. После проведения экспериментов необходимо по известным коэффициентам провести коррекцию измеренных значений. Экспериментальный подход позволяет найти наиболее близкие к действительности решения многих теплоэнергетических задач, однако его стоимость растёт с каждым днём и в некоторых случаях его реализация невозможна.

При использовании теоретического подхода делаются некоторые упрощающие предположения, что позволяет найти решение задачи по возможности в замкнутом виде. Большим преимуществом теоретического подхода является то, что с его помощью можно получить «чистую» и довольно обширную информацию, причём во многих случаях на основе довольно простых формул. Этот подход особенно полезен на этапе предварительного проектирования, так как он позволяет за минимальное время получить разумные ответы на возникающие вопросы.

При использовании численного подхода, делается ограниченное количество предположений, а получающаяся в результате система уравнений решается на компьютере.

Сравнивая различные подходы, заметим, что численные методы свободны от ряда ограничений, накладываемых на экспериментальные методы для получения исходной для проектирования информации. В этом главное преимущество численных методов, которое в дальнейшем будет ещё более важно.

Идея экспериментального исследования состоит в получении требуемых характеристик на относительно дешёвой небольшой модели реального устройства. Однако, проводя такие исследования, не всегда удаётся смоделировать реальные условия работы прототипа на существующих экспериментальных установках. Например, сложно смоделировать большие числа Рейнольдса для летящего самолёта, условия при входе в атмосферу или строгие условия, возникающие на некоторых рабочих режимах в турбомашинах. Отсюда следует, что численные методы, не имеющие таких ограничений, позволяют получить информацию, которую другими методами найти невозможно.

С другой стороны, применение численных методов также ограничено, в первую очередь быстродействием и памятью компьютеров. Ещё одно ограничение на применение этих методов связано с нашей неспособностью понять и математически смоделировать некоторые сложные явления. Ни одно из этих ограничений на возможность применения численных методов не является принципиально непреодолимым, а существующие в настоящее время тенденции позволяют строить оптимистические прогнозы о роли вычислительного эксперимента в будущем.

Некоторые преимущества и недостатки подходов показаны в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Подход	Преимущества	Недостатки
Экспериментальный	1. Получение наиболее близких к реальности результатов.	1. Сложное оборудование. 2. Проблемы модерирования. 3. Коррекция измеренных значений. 4. Сложность измерений. 5. Стоимость.
Теоретический	1. Получение «чистой» информации общего характера, обычно в виде формул	1. Ограничен простыми геометрическими конфигурациями и физическими моделями.

## Продолжение таблицы 2.1

		2. Обычно применим лишь к линейным задачам.
Численный	1. Нет ограничений, связанных с линейностью. 2. Описание сложных физических процессов. 3. Описание эволюции процесса во времени.	1. Погрешность округления. 2. Проблемы задания граничных условий. 3. Сложность расчётов на компьютере.

В заключение приведём полную схему численного решения, которая состоит из следующих этапов:

Этап 1. Сформулировать физическую задачу.

Этап 2. Записать основные (интегро-) дифференциальные уравнения, а также соответствующие начальные и граничные условия.

Этап 3. Провести дискретизацию этих (интегро-) дифференциальных уравнений, получив в результате систему соответствующих алгебраических уравнений.

Этап 4. Проанализировать численные свойства схемы дискретизации, такие как устойчивость, аппроксимация, сходимость и границы погрешности.

Этап 5. Если выбранная схема удовлетворяет поставленным требованиям, с помощью какого-либо матричного метода или итерационной процедуры решить полученную систему алгебраических уравнений. Если этого сделать не удаётся, вернуться к этапу 3 и воспользоваться другой схемой дискретизации.

Этап 6. Проанализировать результаты вычислений.

### 2.3. Уравнения в частных производных

Как мы видели в главе 1, многие задачи теплоэнергетики сводятся к решению уравнений в частных производных, поэтому необходимо знать физические особенности решений этих

уравнений. Для решения конкретных задач необходимо уметь определять тип дифференциального уравнения в частных производных и знать его основные математические особенности.

### ***2.3.1. Физическая классификация уравнений***

#### *2.3.1.1. Стационарные задачи*

Задача называется стационарной, если решение уравнения в частных производных внутри некоторой области определяется лишь условиями на границах этой области. Физически стационарная задача описывает установившийся процесс, математически сводится к решению задачи с граничными условиями (краевой задачи) для уравнения в частных производных. К стационарным задачам относится определение стационарного поля температур, расчёт течения несжимаемой невязкой жидкости и т.д., описываемых эллиптическими уравнениями.

#### *2.3.1.2. Маршевые задачи*

Маршевой или эволюционной (или задачей распространения) называется задача, в которой требуется найти решение уравнения в частных производных в незамкнутой области при заданных граничных и начальных условиях. Математически задачи такого типа являются задачами с начальными условиями или задачами с начальными и граничными условиями. Решение таких задач должно быть найдено последовательным движением в маршевом направлении наружу от поверхности, на которой заданы начальные условия, при этом необходимо удовлетворить также граничным условиям. Такие задачи описываются уравнениями в частных производных гиперболического или параболического типа.

Типичными примерами маршевых задач являются также нестационарные течения невязкой жидкости, стационарные сверхзвуковые течения невязкого газа, пограничный слой, нестационарное распространение тепла.

### 2.3.2. Математическая классификация уравнений

Так как основные законы переноса имеют математическую формализацию в виде градиентных соотношений, то будем рассматривать уравнения в частных производных порядка не выше второго, и при том линейные:

$$a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi = g(x, y), \quad (2.1)$$

где  $a, b, c, d, e, f$  – функции  $x$  и  $y$ .

Известно, что в виде (2.1) могут быть записаны уравнения трёх различных типов – гиперболические, параболические и эллиптические. Такая классификация уравнений в частных производных второго порядка проводится по аналогии с классификацией кривых второго порядка в аналитической геометрии. Тип уравнения в частных производных, также как и тип конического сечения кривой второго порядка, определяется знаком определителя. Уравнение называется гиперболическим в точке  $(x_0, y_0)$ , если

$$b^2 - 4ac > 0.$$

Его каноническая форма имеет вид

$$\phi_{\xi\xi} - \phi_{\eta\eta} = h_1(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta). \quad (2.2)$$

Уравнение называется параболическим в точке  $(x_0, y_0)$ , если

$$b^2 - 4ac = 0.$$

Его каноническая форма имеет вид

$$\phi_{\xi\xi} = h_2(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta). \quad (2.3)$$

Уравнение называется эллиптическим в точке  $(x_0, y_0)$ , если

$$b^2 - 4ac < 0.$$

Его каноническая форма имеет вид

$$\phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} = h_3(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta). \quad (2.4)$$

Покажем, каким образом можно перейти от переменных  $(x, y)$  к переменным  $(\xi, \eta)$ . Для этого потребуем, чтобы этот переход был невырожденным, т.е. чтобы между  $(x, y)$  и  $(\xi, \eta)$  существовало взаимно-однозначное соответствие. Для этого достаточно, чтобы якобиан был отличен от нуля:

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x.$$

При преобразовании координат все производные в (2.1) вычисляются по правилу дифференцирования сложной функции. Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \xi_x \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \eta_x \frac{\partial\phi}{\partial\eta}; \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &= \xi_x^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} + \eta_x^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} + \xi_{xx} \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi} + \eta_x \frac{\partial\phi}{\partial\eta}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (2.1), получим

$$A\phi_{\xi\xi} + B\phi_{\xi\eta} + C\phi_{\eta\eta} + \dots = g(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2; \\ B &= 2a\xi_x\eta_x + b\xi_x\eta_y + b\xi_y\eta_x + 2c\xi_y\eta_y; \\ C &= a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \end{aligned}$$

При этом

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2,$$

т.е. любое невырожденное преобразование переменных не меняет тип дифференциального уравнения.



## 2.4. Элементы разностных систем

Основная идея конечно-разностного метода решения уравнений явлений переноса состоит в следующем: непрерывная область  $D$ , в которой ищется решение, заменяется дискретной путём введения разностной сетки. Значения производных, начальные и граничные условия выражаются через значения функций в узлах сетки, в результате чего получается система алгебраических уравнений, называемая разностной схемой. Решая эту систему уравнений, находят в узлах сетки значения сеточных функций, которые приближённо считаются равными значениями исходных функций.

### 2.4.1. Построение сетки

Одним из первых шагов при применении метода конечных разностей к решению уравнения в частных производных является переход от непрерывной области к конечно-разностной сетке. Пусть, например, необходимо найти  $u(x, y)$  уравнения в частных производных в квадратной области  $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  (рис. 2.1).

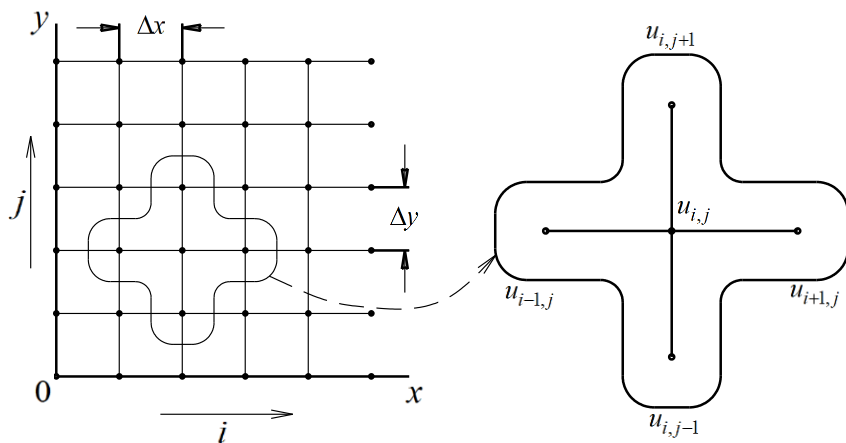


Рис. 2.1. Дискретизация области

Введём сетку, т.е. будем рассматривать не  $u(x, y)$ , а  $u(i\Delta x, j\Delta y)$ . Положение узлов сетки внутри области определяется значениями  $i$  и  $j$ , поэтому разностные уравнение записываются для произвольного узла  $(i, j)$ .

Пусть  $u_{i,j} = u(x_0, y_0)$ , тогда

$$u_{i+1,j} = u(x_0 + \Delta x, y_0); \quad u_{i-1,j} = u(x_0 - \Delta x, y_0);$$

$$u_{i,j+1} = u(x_0, y_0 + \Delta y); \quad u_{i,j-1} = u(x_0, y_0 - \Delta y).$$

Для того, чтобы лучше понять идею конечно-разностной аппроксимации производных, вспомним определение производной функции  $u(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

откуда для непрерывной  $u(x, y)$  и малости  $\Delta x$  можно записать:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Формально проверить точность такого представления можно, разложив функцию  $u(x, y)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ .

### 2.4.2. Аппроксимация производных

Выразим  $u(x_0 + \Delta x, y_0)$  через значения функции  $u$  и её производных в точке  $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, y_0) = & u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_0, y_0} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \\ & + \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x_0, y_0} \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \Big|_{\xi, \eta} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad \begin{matrix} (x_0 \leq \xi \leq x_0 + \Delta x), \\ (y_0 \leq \eta \leq y_0 + \Delta y). \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Последние слагаемые – остаточный член.

Перепишем разложение (2.5) в виде:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \dots$$

Запишем более кратко:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \text{погрешность аппроксимации.}$$

Можно охарактеризовать погрешность аппроксимации стандартным математическим обозначением порядка малой величины ( $O$ ):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Отметим, что представление погрешности в виде  $O(\Delta x)$  ничего не говорит о величине погрешности, а лишь указывает на характер её стремления к нулю.

Вновь запишем разложение

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} \Delta x + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \\ - \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x_0, y_0} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots, \end{aligned} \quad (2.6)$$

откуда получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Вычитая из (2.6) выражение (2.5), получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Складывая (2.5) и (2.6), имеем

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2).$$

Большинство уравнений в частных производных, встречающихся в гидродинамике и теплопередаче, содержит лишь частные производные первого и второго порядков, при этом для аппроксимации производных стараются использовать не более трёх узлов сетки. Поэтому на равномерной сетке ( $\Delta x = h = \text{const}$ ) чаще всего применяют приведённые ниже конечно-разностные аппроксимации первых производных:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h);$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h);$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2);$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{-3u_{i,j} + 4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{2h} + O(h^2);$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2h} + O(h^2);$$

и соответственно вторых производных

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{h^2} + O(h^2);$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + O(h^2);$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2).$$

### 2.4.3. Погрешность аппроксимации уравнений

Анализ погрешности покажем на примере параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \\ &\left[ -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{n,j} \frac{\Delta t}{2} + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{n,j} \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots \right], \end{aligned}$$

отсюда следует, что порядок аппроксимации уравнения равен

$$O(\Delta t) + O(\Delta x^2).$$

Отметим, что конечно-разностная схема в этом случае называется явной, т.е. если в каждое алгебраическое уравнение входит лишь одно неизвестное, которое с помощью этого уравнения может быть выражено через уже известные величины. Если для аппроксимации второй производной использовать  $u$  на  $(n+1)$ -м временном шаге, то в каждое разностное уравнение войдут три неизвестных. Такая схема называется неявной, т.к. одновременно приходится решать несколько алгебраических уравнений.

### 2.4.4. Согласованность разностных схем

Как мы увидели, погрешность аппроксимации уравнения есть разность между дифференциальным уравнением и его конечно-разностным аналогом, поэтому условием согласованности разностной схемы является стремление к нулю погрешности аппроксимации при измельчении сетки. Однако, если

порядок погрешности равен, например,  $O(\Delta t/\Delta x)$ , то схема будет согласованной лишь в том случае, если

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) = 0.$$

### 2.4.5. Устойчивость конечно-разностных схем

Не любая согласованная конечно-разностная схема обеспечивает сходимость конечно-разностных уравнений к решению уравнения в частных производных. Для этого необходимо исследовать влияние отношения шагов на численное решение.

Вновь рассмотрим конечно-разностную схему для уравнения параболического типа

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Решив это уравнение относительно  $u_j^{n+1}$ , получим

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Пусть  $D$  – точное решение уравнения на ЭВМ при отсутствии ошибок округления;  $N$  – реальное решение на ЭВМ;  $A$  – аналитическое решение. Тогда запишем:

$$\text{Погрешность аппроксимации} = A - D;$$

$$\text{Погрешность округления} = N - D,$$

и если погрешность округления растёт (не растёт), то разностная схема называется неустойчивой (устойчивой).

Итак, пусть  $N = D + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – погрешность округления, тогда подставляя вместо  $u \rightarrow N$ , получим

$$\frac{D_j^{n+1} + \varepsilon_j^{n+1} - D_j^n - \varepsilon_j^n}{\Delta t} = \alpha \left( \frac{D_{j+1}^n + \varepsilon_{j+1}^n - 2D_j^n - 2\varepsilon_j^n + D_{j-1}^n + \varepsilon_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right),$$

но т.к.  $D$  удовлетворяет точному численному решению, то

$$\frac{\varepsilon_j^{n+1} - \varepsilon_j^n}{\Delta t} = \alpha \left( \frac{\varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right). \quad (2.7)$$

Предположим, что погрешность  $\varepsilon(x, t)$  можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$\varepsilon(x, t) = \sum_m b_m(t) e^{ik_m x},$$

где  $i = \sqrt{-1}$ . Нас интересует решение в интервале длины  $L$ , поэтому

$$k_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = \overline{0, M},$$

где  $M$  – число отрезков длины  $\Delta x$ , помещающихся в отрезке длины  $L$ .

Рассмотрим  $m$ -ый член разложения ряда Фурье

$$\varepsilon_m = b_m(t) e^{ik_m x},$$

причём предположим, что

$$b_m(t) = e^{at},$$

тогда

$$\varepsilon_m(x, t) = e^{at} e^{ik_m x}.$$

Подставляя это выражение в (2.7), получим

$$e^{a(t+\Delta t)} \cdot e^{ik_m x} - e^{at} \cdot e^{ik_m x} = \\ = r \left[ e^{at} \cdot e^{ik_m(x+\Delta x)} - 2e^{at} \cdot e^{ik_m x} + e^{at} \cdot e^{ik_m(x-\Delta x)} \right],$$

где  $r = \alpha \Delta t / (\Delta x^2)$ . Разделив полученное соотношение на  $e^{at} \cdot e^{ik_m x}$  и используя формулу связи между тригонометрическим и гиперболическим косинусами

$$\cos \beta = (e^{ib} + e^{-ib}) / 2,$$

будем иметь

$$e^{a\Delta t} = 1 + 2r(\cos \beta - 1),$$

где  $\beta = k_m \Delta x$ . С помощью тригонометрического тождества

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \beta)$$

запишем

$$e^{a\Delta t} = 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

но т.к.

$$\varepsilon_j^{n-1} = e^{a\Delta t} \varepsilon_j^n,$$

то  $|e^{a\Delta t}| \leq 1$ , т.е. схема устойчива, если

$$\left| 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \right| \leq 1.$$

Отсюда следует два варианта:

1. Если  $\left( 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) > 0$ , то  $4r \sin^2 \frac{\beta}{2} > 0$  и, следовательно,  $r > 0$ .



2. Если  $\left(1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2}\right) < 0$ , то  $4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \leq 1$  и, следовательно,  $r \leq 1/2$ , т.е.

$$\alpha \Delta t / (\Delta x^2) \leq 1/2 -$$

есть условие устойчивости.

В заключение сформулируем теорему Лакса: необходимым и достаточным условием сходимости разностной схемы для решения линейного дифференциального уравнения в частных производных является выполнение условий согласованности и устойчивости.

## 2.5. Численное решение гиперболического уравнения

### 2.5.1. Явная конечно-разностная схема

Рассмотрим одномерное уравнение гиперболического типа (так называемое волновое уравнение)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.8)$$

и сформулируем для неё краевую задачу с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \quad (2.9)$$

и однородными граничными условиями

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (2.10)$$

Простейшей схемой для численного решения задачи (2.8) - (2.10) является явная трёхслойная схема типа «крест» (рис. 2.2). Заменяем вторые производные, входящие в уравнение (2.8) их конечно-разностными аппроксимациями, тогда

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2},$$

где  $i = \overline{1, n-1}$ ;  $j = \overline{1, m-1}$ ;  $\tau = \Delta t = \text{const}$ ;  $h = \Delta x = \text{const}$ .

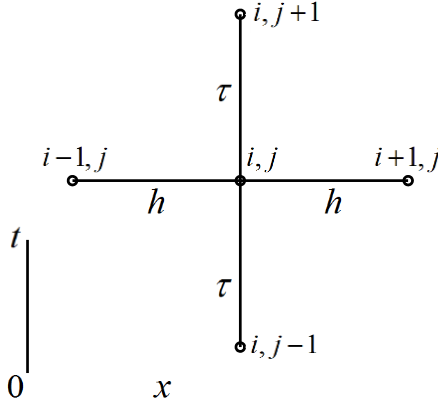


Рис. 2.2. Шаблон явной схемы

Выразим из этого сеточного уравнения значение  $u$  на  $(j+1)$ -м слое:

$$u_i^{j+1} = 2(1-\lambda)u_i^j + \lambda(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1}, \quad \lambda = a^2 \tau^2 / h^2.$$

Отсюда следует, что для определения  $u$  на слое  $j+1$  необходимо знать значение  $u$  на  $j$ -м и  $(j-1)$ -м слоях.

На нулевом слое имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i); \quad i = \overline{0, n}.$$

Для нахождения  $u$  на первом слое используем второе начальное условие (2.9) для производной, заменив её аппроксимацией, т.е.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x_i) \approx \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau}, \quad (2.11)$$

откуда

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau\varphi(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Однако аппроксимация (2.11) ухудшает в целом аппроксимацию исходной задачи (2.8) - (2.10), т.к. погрешность аппроксимации становится  $O(h^2 + \tau)$ , хотя сама схема имеет порядок аппроксимации  $O(h^2 + \tau^2)$ .

Положение можно исправить, если сделать следующее: возьмём исходное уравнение (2.8) при  $t = 0$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t=0} = a^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{t=0} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Тогда (2.11) примет вид в соответствии и рядом Тейлора

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau\varphi(x_i) + \frac{1}{2} a^2 \tau^2 \varphi''(x_i), \quad i = \overline{0, n},$$

тогда разностная схема с учётом этого будет иметь аппроксимацию  $O(h^2 + \tau^2)$ .

Если задаются смешанные граничные условия, например, вместо значений функции на концах  $[0, l]$  могут задаваться и значения производных, т.е.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=l} = 0.$$

Если это условие записать в разностном виде с первым порядком аппроксимации, то схема будет вновь иметь порядок аппроксимации  $O(h^2 + \tau)$ . Поэтому для сохранения второго порядка необходимо аппроксимировать такое граничное условие вторым порядком точности.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: при составлении конечно-разностной схемы необходимо следить за

выполнением однородности аппроксимации исходной задачи, т.е. уравнение, начальные и граничные условия должны иметь один и тот же порядок аппроксимации.

Отметим, что рассмотренная схема устойчива, если

$$a\tau/h < 1. \quad (2.12)$$

### 2.5.2. Неявная конечно-разностная схема

Чтобы не обращать внимания на условие устойчивости (2.12), определяющее выбор шагов при численном интегрировании, можно использовать так называемые неявные схемы для волнового уравнения. Построим простейшую неявную схему с шаблоном, показанным на рис. 2.3.

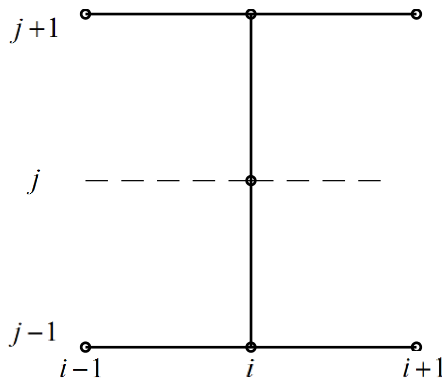


Рис. 2.3. Шаблон неявной схемы

Вторую производную по  $t$  аппроксимируем, как и ранее, по трёхточечному шаблону с помощью значений сеточной функции на слоях  $j-1$ ,  $j$ ,  $j+1$ . Производную по  $x$  заменяем полусуммой её аппроксимации на  $(j+1)$ -м и  $(j-1)$ -м слоях:

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{a^2}{2} \left( \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{h^2} \right).$$

Из этого соотношения можно получить систему уравнений относительно неизвестных значений сеточной функции на  $(j+1)$ -м слое:

$$\begin{aligned} & \lambda u_{i-1}^{j+1} - (1+2\lambda)u_i^{j+1} + \lambda u_{i+1}^{j+1} = \\ & = (1+2\lambda)u_i^{j-1} - \lambda(u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}) - 2u_i^j, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $\lambda = a^2 \tau^2 / h^2$ ;  $i = \overline{1, n-1}$ ;  $j = \overline{1, m-1}$ .

Полученная неявная схема устойчива и сходится со скоростью  $O(h^2 + \tau^2)$ . Система (2.13) обычно решается методом прогонки, но необходимо добавить разностные начальные и граничные условия.

Заметим, что при наличии двух или трёх независимых пространственных переменных волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

В этом случае конечно-разностные схемы строятся по аналогии с одномерным случаем.

### 2.5.3. Метод прогонки

Если записать (2.13) в развёрнутом виде, то получим систему уравнений с матрицей коэффициентов, имеющих трёхдиагональную структуру:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1; \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2; \\ \quad a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3; \\ \dots \\ \quad a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1}; \\ \quad \quad a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Для решения таких систем линейных уравнений применяется модифицированный метод Гаусса – метод прогонки, который, как и метод Гаусса, состоит из двух этапов – прямой прогонки и обратной прогонки.

Прямая прогонка состоит в вычислении прогоночных коэффициентов  $A_i$ ,  $B_i$  с помощью которых каждое  $x_i$  выражается через  $x_{i+1}$ :

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.15)$$

Из первого уравнения (2.14) найдём

$$x_1 = -\frac{C_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1},$$

тогда

$$A_1 = -c_1/b_1; \quad B_1 = d_1/b_1. \quad (2.16)$$

Далее подставим во второе уравнение (2.14) вместо  $x_1$  его выражение через  $x_2$ :

$$a_2 (A_1 x_2 + B_1) + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2,$$

откуда

$$x_2 = \frac{-c_2 x_3 + d_2 - a_2 B_1}{a_2 A_1 + b_2}$$

или

$$x_2 = A_2 x_3 + B_2,$$

т.е.

$$A_2 = -\frac{c_2}{e_2}; B_2 = \frac{d_2 - a_2 B_1}{e_2}; e_2 = a_2 A_1 + b_2.$$

Аналогично вычисляются прогоночные коэффициенты для любого номера  $i$ :

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{c_i}{e_i}; B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{e_i}; \\ e_i &= a_i A_{i-1} + b_i; i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ввод $n, \{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}, \{d_i\}$
$A_1 = -\frac{c_1}{b_1}; B_1 = -\frac{d_1}{b_1}$
для $i$ от 2
$e = a_i A_{i-1} + b_i$ $A_i = -\frac{c_i}{e}$ $B_i = -\frac{d_i - a_i B_{i-1}}{e}$
до $i-1$
$i_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}}$
для $i$ от $n-1$
$x_i = A_i x_{i+1} + B_i$
до 1 с шагом -1
Вывод $\{x_i\}$

Рис. 2.4. Алгоритм метода прогонки

Обратная прогонка состоит в последовательном вычислении неизвестных  $x_i$ . Сначала необходимо найти  $x_n$ . Для этого воспользуемся (2.15) при  $i = n-1$  и последним уравнением (2.14):

$$\begin{cases} x_{n-1} = A_{n-1}x_n + B_{n-1}; \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n. \end{cases}$$

Отсюда, исключая  $x_{n-1}$ , находим

$$x_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}}.$$

Далее, используя (2.15) и (2.16), (2.17), последовательно вычисляем  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ . Схема алгоритма метода прогонки представлена на рис. 2.4.

#### 2.5.4. Пример

Пусть дана задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, 1]; \quad a = 1;$$

$$u|_{t=0} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 1;$$

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=1} = 0,$$

и  $\Delta x = 0,25$ . Запишем явную конечно-разностную схему

$$u_i^{j+1} = 2(1 - \lambda)u_i^j + \lambda(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1}, \quad \lambda = a^2 \tau^2 / h^2.$$

Так как  $h = \Delta x = 0,25$  и  $a = 1$ , то из условия устойчивости  $a\tau/h < 1$  следует  $\tau < h/a = 0,25/1 = 0,25$ , т.е. выберем с запасом  $\Delta t = \tau = 0,1$ . Поэтому  $n = 1/0,25 = 4$ ;  $m = 0,2/0,1 = 2$ . Алгоритм вычисления приведён на рис. 2.5.



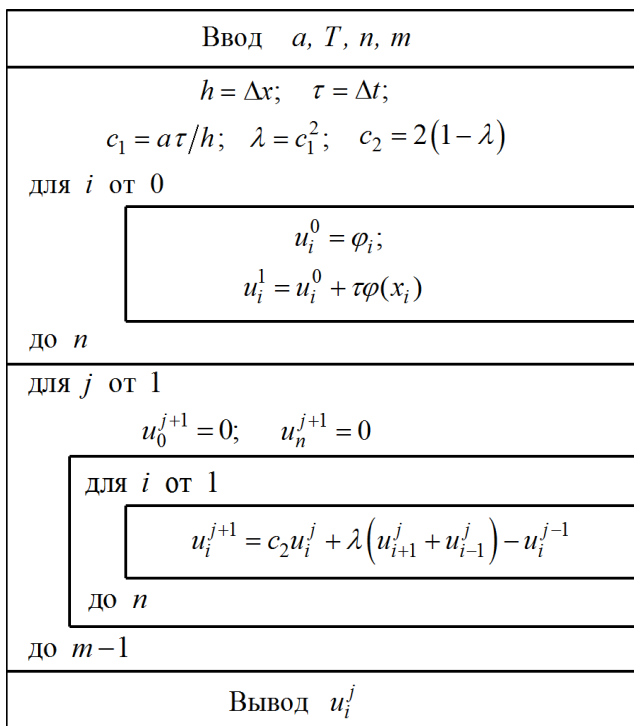


Рис. 2.5. Алгоритм решения волнового уравнения по явной конечно-разностной схеме

## 2.6. Численное решение параболического уравнения (уравнения теплопроводности)

### 2.6.1. Явная конечно-разностная схема

В п.п. 2.4.3 нами была построена конечно-разностная схема для уравнения параболического типа в одномерном случае и установлена её сходимость. Отметим, что данную схему следует отнести к явному типу, т.е. значение искомой функции на последующем слое может быть вычислено по её известным значениям на предыдущем временном слое. Также вспомним, что явная схема устойчива при выполнении условия устойчивости, причём неявная схема – безусловно устойчива.

Проиллюстрируем численное интегрирование уравнения теплопроводности с двумя пространственными переменными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.18)$$

с начальным условием

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$$

и граничными условиями (их классификация приведена в части I).

Выберем расчётную область в виде параллелепипеда (рис. 2.6) и построим явную разностную схему по приведённому на том же рис. 2.6 шаблону. Введём простейшую сетку с ячейками в виде прямоугольных параллелепипедов:  $x_i = ih_1$  ( $i = \overline{0, n}$ );  $y_j = jh_2$  ( $j = \overline{0, m}$ );  $h_1 = 1/n$ ;  $h_2 = 1/m$ ;  $t_k = k\tau$  ( $k = \overline{0, p}$ ). Значение сеточной функции в узлах  $(x_i; y_j; t_k)$  будем обозначать символом  $u_{i,j}^k$ .

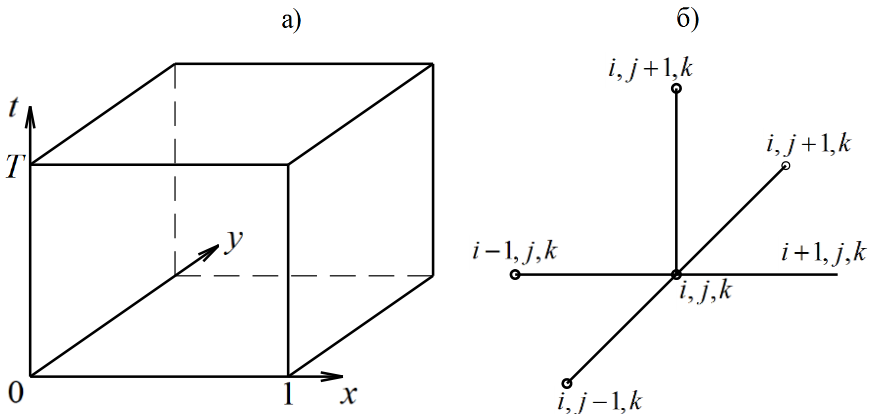


Рис. 2.6. а) Расчётная область; б) Шаблон двумерной схемы

Аппроксимируя производные в (2.18) конечно-разностными соотношениями, получим

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2},$$

откуда выразим значение сеточной функции на  $(k+1)$ -м слое:

$$u_{i,j}^{k+1} = (1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)u_{i,j}^k + \lambda_1(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k) + \lambda_2(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k), \quad (2.19)$$

где  $\lambda_1 = \tau/h_1^2$ ;  $\lambda_2 = \tau/h_2^2$ . Условие устойчивости для одномерного случая при  $a=1$   $\tau/h^2 \leq 1/2$  трансформируется для двух переменных в вид

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \tau/h_1^2 + \tau/h_2^2 \leq 1/2.$$

Заметим, что при  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1/2$  схема (2.19) переходит в схему

$$u_{i,j}^{k+1} = \lambda_1(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k) + \lambda_2(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k), \quad (2.20)$$

которая сходится со скоростью  $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau)$ .

Явные схемы (2.19) и (2.20) наиболее часто используются в вычислениях из-за своего рекуррентного характера. На  $k=0$  начальное условие имеет следующий вид

$$u_{i,j}^0 = \varphi(x_i, y_j),$$

причём  $u_{0,j}^k$ ;  $u_{n,j}^k$ ;  $u_{1,0}^k$ ;  $u_{i,m}^k$  в граничных узлах вычисляются с помощью граничных условий.

Ввод $T, n, m, p$				
$h_1 = 1/n; \quad h_2 = 1/m; \quad \tau;$ $\lambda_1 = \tau/h_1^2; \quad \lambda_2 = \tau/h_2^2; \quad c = 1 - 2(\lambda_1 + \lambda_2); \quad k = 0$				
Вычисление $u_{0,j}, u_{nj}, u_{i0}, u_{im}$				
Вывод $k, \{u_{i,j}\}$				
для $k$ от 1				
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td> <math>v_{i,j} = u_{i,j}, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}</math> </td> </tr> <tr> <td>для <math>i</math> от 1</td> </tr> <tr> <td> <math display="block">u_{i,j} = \lambda_1 (v_{i+1,j} + v_{i-1,j}) + cv_{i,j} +</math> <math display="block">+ \lambda_2 (v_{i,j+1} + v_{i,j-1})</math> </td> </tr> <tr> <td>до <math>m-1</math></td> </tr> </table>	$v_{i,j} = u_{i,j}, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}$	для $i$ от 1	$u_{i,j} = \lambda_1 (v_{i+1,j} + v_{i-1,j}) + cv_{i,j} +$ $+ \lambda_2 (v_{i,j+1} + v_{i,j-1})$	до $m-1$
$v_{i,j} = u_{i,j}, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}$				
для $i$ от 1				
$u_{i,j} = \lambda_1 (v_{i+1,j} + v_{i-1,j}) + cv_{i,j} +$ $+ \lambda_2 (v_{i,j+1} + v_{i,j-1})$				
до $m-1$				
до $n-1$				
Вычисление $u_{0,j}, u_{nj}, u_{i0}, u_{im}$				
Вывод $k, \{u_{i,j}\}$				

Рис. 2.7. Алгоритм численного решения двумерного уравнения теплопроводности по явной конечно-разностной схеме

### 2.6.2. Неявная конечно-разностная схема

Неявная схема строится по тому же принципу, что и для одномерного случая уравнения теплопроводности, причём, шаблон для этой конечно-разностной схемы в пространственной постановке имеет вид, показанный на рис. 2.8.

Тогда аппроксимация будет

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{h_2^2}.$$

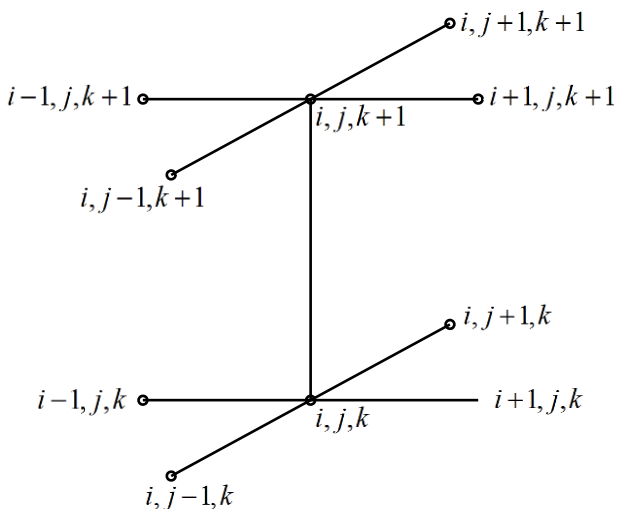


Рис. 2.8. Шаблон для неявной схемы

Это уравнение можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно значений сеточной функции на каждом временном слое:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1}) - (1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2) u_{i,j}^{k+1} + \\ + \lambda_2 (u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1}) = -u_{i,j}^k, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\lambda_1 = \tau/h_1^2$ ;  $\lambda_2 = \tau/h_2^2$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$ .

К этой системе уравнений необходимо добавить граничные условия для определения значений сеточной функции в граничных узлах (т.е. при  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ).

Система (2.21) имеет более сложный вид и уже напрямую к её решению нельзя применить метод прогонки.

Таким образом, недостатком явной схемы является жёсткое ограничение на шаг  $\tau$ , а неявные схемы в многомерной постановке приводят к значительному объёму вычислений.

### 2.6.3. Понятие о схемах расщепления

Выход из этой ситуации – применение абсолютно устойчивых экономичных конечно-разностных схем, позволяющих вести расчёт со сравнительно большим значением шага по времени ( $\tau \sim h$ ) и соответственно меньшим объёмом вычислений.

Идея таких схем состоит в следующем: расчёт разбивается на одном шаге по времени, т.е. перехода от  $k$ -го к  $(k+1)$ -му слою на отдельные этапы. Такие схемы называют схемами расщепления или схемами дробных шагов. Они сохраняют преимущества, как явных схем, так и неявных и лишены присущих этим схемам недостатков.

Рассмотрим в этом контексте схему переменных направлений. На первом полушаге вторая производная по одной из координат, например,  $\partial^2 u / \partial x^2$ , аппроксимируется на слое  $k+1/2$ , а вторая производная по другой координате,  $\partial^2 u / \partial y^2$ , – на слое  $k$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{k+1/2} - u_{i,j}^k}{\tau/2} &= \frac{u_{i+1,j}^{k+1/2} - 2u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_1^2} + \\ &+ \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Получившееся разностное уравнение приводит к неявной схеме для нахождения  $u_{i,j}^{k+1/2}$ . На втором полушаге, наоборот, приводящая к неявной схеме аппроксимация используется только по направлению  $y$ , т.е.  $\partial^2 u / \partial y^2$  аппроксимируется на слое  $k+1$ , а  $\partial^2 u / \partial x^2$  – по прежнему на слое  $k+1/2$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1/2}}{\tau/2} &= \frac{u_{i+1,j}^{k+1/2} - 2u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_1^2} + \\ &+ \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{h_2^2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Таким образом, вместо (2.21) получено два уравнения, каждое из которых, по существу, соответствует неявной схеме по одному из координатных направлений.

Уравнения (2.22) и (2.23) можно переписать в виде систем линейных алгебраических уравнений относительно значений искомых функций соответственно в узлах  $(k+1/2)$ -го слоя:

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_{i-1,j}^{k+1/2} - (1+2\lambda_1) u_{i,j}^{k+1/2} + \lambda_1 u_{i+1,j}^{k+1/2} = \\ = (2\lambda_2 - 1) u_{i,j}^k - \lambda_2 (u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k); \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 u_{i,j-1}^{k+1} - (1+2\lambda_2) u_{i,j}^{k+1} + \lambda_2 u_{i,j+1}^{k+1} = \\ = (2\lambda_1 - 1) u_{i,j}^{k+1/2} - \lambda_1 (u_{i+1,j}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

К этим системам необходимо добавить начальные и граничные условия на каждом из этих дробных по времени шагов. Матрицы систем (2.24) и (2.25) являются трёхдиагональными и, потому, для них может быть применён метод прогонки.

## 2.7. Методы взвешенных невязок и вариационные

### 2.7.1. Основные понятия

Рассмотрим основные определения и свойства последовательности функций

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x). \quad (2.26)$$

Предполагается, что функции удовлетворяют некоторым заданным условиям, которые называются условиями допустимости (или совместности), и связаны с граничными условиями и степенью непрерывности (эти условия будут рассмотрены более подробно ниже).

Если можно составить линейную комбинацию функций, например,

$$\phi = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2,$$

то такие функции будем называть элементами линейного пространства  $\mathbb{R}$ , и для них справедливы следующие свойства:

$$\phi_1 + \phi_2 = \phi_2 + \phi_1;$$

$$(\alpha + \beta)\phi = \alpha\phi + \beta\phi;$$

$$\alpha(\phi_1 + \phi_2) = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2.$$

где  $\alpha, \beta = const$ .

Скалярное произведение  $\phi_1$  и  $\phi_2$  есть

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_{x_1}^{x_2} \phi_1(x)\phi_2(x)dx.$$

Для действительных функций скалярное произведение обладает следующими свойствами:

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \langle \phi_2, \phi_1 \rangle;$$

$$\alpha \langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \langle \alpha\phi_1, \phi_2 \rangle;$$

$$\langle \phi_1, \phi_2 + \phi_3 \rangle = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle + \langle \phi_1, \phi_3 \rangle;$$

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \begin{cases} > 0, & \text{если } \phi_1 \neq 0, \\ = 0, & \text{если } \phi_1 = 0, \end{cases}$$

где  $\phi_1 = 0$  – нуль-функция в  $\mathbb{R}$ .

Мера (норма) функции  $\phi$  есть

$$\|\phi\| = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle}.$$

Система функций (2.26) будет линейно-независимой, если равенство

$$\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \alpha_3\phi_3 + \dots + \alpha_n\phi_n = 0$$



возможно, когда  $\forall \alpha_i, i = \overline{1, n}$ .

Последовательность линейно-независимых функций считается полной, если можно найти такое число  $N$  и набор постоянных  $\alpha_i$ , при которых для произвольной допустимой функции и того же пространства  $\mathbb{R}$  справедливо неравенство

$$\left\| u - \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i \right\| < \varepsilon$$

для любой наперед заданной малой величины  $\varepsilon$ . При этом функции  $\phi_i$  называются базисными, а  $\alpha_i$  – коэффициентами Фурье.

Если нормированные базисные функции взаимно ортогональны, то

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0 \text{ при } i \neq j,$$

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle = 1.$$

Каждый добавочный член в линейно-независимой и полной последовательности  $\phi_i$  приводит к появлению дополнительной постоянной  $\alpha_i$ . Для  $N$ -го приближения имеем

$$u^{(N)} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i.$$

Таким образом,

$$\|u^{(N)}\| \rightarrow \|u\| \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Норма функции  $u^{(N)}$  для взаимно ортогональной последовательности (заметим, что любая линейно-независимая последовательность неортогональных функций всегда может быть заменена системой нормированных ортогональных функций) равна

$$\|u^{(N)}\| = \sqrt{\left\langle \left\langle \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i, \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j \right\rangle \right\rangle} = \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \langle \phi_i, \phi_j \rangle \right\rangle},$$

а так как  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$  при  $i \neq j$ , то

$$\|u^{(N)}\| = \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \langle \phi_i, \phi_i \rangle \right\rangle}. \quad (2.27)$$

Поскольку каждый член в сумме (2.27) положителен, то

$$\|u^{(N)}\| \leq \|u^{(M)}\| \leq \|u\| \quad \text{при } N < M.$$

Определим оператор  $L(\dots)$  как действие, которое при применении его к данной функции  $u$  приводит к появлению другой функции  $p$ :

$$L(u) = p.$$

Оператор линеен, если

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2).$$

Заметим, что это определение является общим, как для алгебраических, так и для дифференциальных операторов.

Для оператора могут быть определены свойства, аналогичные свойствам симметрии и положительной определённости матриц.

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = [a_{ij}], \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Матрица  $A$  симметрична, если  $A^T = A$  ( $A^T$  – транспонированная к  $A$  матрица, т.е. симметричность матрицы обеспечивается условием  $a_{ij} = a_{ji}$ ). Можно дать другое определение свойства симметрии

$$\langle \bar{y}, A\bar{x} \rangle \equiv \langle \bar{x}, A\bar{y} \rangle \quad (2.28)$$

для произвольных векторов  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ . Действительно, так как

$$(BC)^T = C^T B^T,$$

$$\langle \bar{y}, A\bar{x} \rangle = \bar{y}^T A\bar{x},$$

$$\langle \bar{x}, A\bar{y} \rangle = \bar{x}^T A\bar{y} = \bar{y}^T A\bar{x}.$$

Отсюда следует, что (2.28) эквивалентно ( $A^T = A$ ). Заметим, что определение свойства симметрии матрицы с помощью (2.28) более удобно при его распространении на операторы.

Положительная определённость определяется так

$$\langle \bar{x}, A\bar{x} \rangle \geq 0$$

$\forall \bar{x}$ , при этом нуль в правой части получается, если  $\bar{x}$  – нуль-вектор.

Рассмотрим с учётом введённых выше понятий задачу, представленную системой однородных уравнений во внутренней области  $V$ :

$$L(u) = 0, \quad \bar{x} \in V.$$

Составим скалярное произведение оператора  $L(u)$  и другой функции, например,  $v$ . Операция транспонирования матрицы а данном случае эквивалентна интегрированию по частям  $\langle L(u), v \rangle$  до тех пор, пока не будут исключены производные  $u$ . Это приводит к «транспонированной» форме скалярного произведения, а также к граничным условиям. Результат запишем в виде

$$\begin{aligned} \langle L(u), v \rangle &= \\ &= \langle u, L^*(v) \rangle + \int_S [F(v)G(u) - F(u)G^*(v)] dS, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где  $S$  – ограничивающая поверхность;  $F$  и  $G$  – дифференциальные операторы, форма которых определяется естественным образом в виде интегрирования по частям.

По определению  $F(v)$  содержит члены с  $v$ , появляющиеся на первой стадии интегрирования по частям, а  $G(u)$  – соответствующие члены с  $u$ . Оператор  $L^*$  называется сопряжённым по отношению к оператору  $L$ , если  $L=L^*$ , то говорят о самосопряжённости оператора  $L$ . В этом случае  $G^*=G$  (самосопряжённость оператора аналогична свойству симметрии матриц). В ходе интегрирования по частям не только выясняется, является ли оператор самосопряжённым, но и порождаются две категории граничных условий: задание  $F(u)$  определяет так называемые главные граничные условия, а задание  $G(u)$  – несущественные или естественные граничные условия. Можно задать любой из двух типов граничных условий на поверхности  $S$ . Однако главные граничные условия необходимо выполнить в некоторой точке, чтобы обеспечить единственность решения. Полагая  $S_1$  и  $S_2$  взаимодополняющими частями  $S$  ( $S=S_1 \cup S_2$ ), можно сформулировать граничные условия для самосопряжённой задачи ( $L^*=L$ ) в виде

$$F(u) \text{ задан на } S_1,$$

$$G(u) \text{ задан на } S_2.$$

Свойство положительной определённости самосопряжённого оператора определяется требованием выполнения неравенства

$$\langle L(u), u \rangle > 0$$

для всех нетривиальных  $u$ , которые удовлетворяют однородным граничным условиям.

Положительная определённость оператора  $L$  устанавливается путём интегрирования скалярного произведения, до тех пор, пока в нём не останутся только произведения производных одного порядка.

Пример 1. Рассмотрим

$$L(u) = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad 0 < x < 1.$$

Образуя скалярное произведение и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 vL(u) dx &= \int_0^1 v \frac{d^2u}{dx^2} dx = \left[ v = \xi; \quad d\xi = dv \right] = \\ &= \left[ \frac{d^2u}{dx^2} dx = d\eta; \quad \eta = \frac{du}{dx} \right] = \\ &= \left( v \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{du}{dx} dv = \left( v \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \\ &= \left[ \frac{dv}{dx} = \xi; \quad d\xi = \frac{d^2v}{dx^2} \right] = \left( v \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^1 - \left( u \frac{dv}{dx} \right) \Big|_0^1 + \\ &+ \int_0^1 u \frac{d^2v}{dx^2} dx = \left( v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 u \frac{d^2v}{dx^2} dx. \end{aligned}$$

Используя обозначения в (2.29) запишем

$$F(u) = u;$$

$$G(u) = du/dx, \quad G^*(v) = dv/dx;$$

$$L^* = L$$

и оператор является самосопряжённым. Главное граничное условие состоит в задании  $u$ , а естественное граничное условие – в задании  $du/dx$ .

Если  $v=u$  и принять однородные граничные условия, то интегрирование по частям даст

$$\int_0^1 uL(u) dx = -\int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

Тогда  $L(u) = d^2u/dx^2$  есть отрицательно определённый оператор.

### 2.7.2. Метод взвешенных невязок

Методы взвешенных невязок представляют собой численные процедуры построения приближённого решения системы дифференциальных (или интегральных) уравнений вида

$$L(u_0) = p; \quad x \in V \quad (2.30)$$

с граничными условиями

$$L(u_0) = g; \quad x \in S, \quad (2.31)$$

где  $x$  – пространственные координаты  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ ;  $S$  – внешняя граница области;  $u_0$  – точное решение.

Функция  $u_0$  аппроксимируется набором функций  $\phi_k(x)$ :

$$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k, \quad (2.32)$$

где  $\alpha_k$  – неизвестные параметры:  $\phi_k$  – линейно-независимые функции, принадлежащие полной последовательности.

Сначала потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли всем граничным условиям (2.31) и обладали нужной степенью непрерывности, при этом левая часть уравнения (2.30) была бы отличной от нуля.

Подстановка (2.32) в (2.30) даёт функцию ошибки, которую называют невязкой:

$$\varepsilon = L(u) - p \neq 0.$$

Стремится, чтобы ошибка была равна нулю в среднем, полагая равными нулю интегралы, взятые от невязки с некоторыми весовыми функциями  $w_i$ :

$$\langle \varepsilon, w_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.33)$$

Рассмотрим некоторые методы взвешенных невязок.

### 2.7.2.1. Метод коллокаций

В этом методе дифференциальные уравнения удовлетворяются только в некоторых выбранных точках. Имеем

$$\varepsilon = L(u) - p = \sum_{k=1}^N \alpha_k L(\phi_k) - p.$$

Параметры  $\alpha_i$  определяются, если потребовать выполнения равенства  $\varepsilon = 0$  в  $N$  точках области. Можно записать эти условия в форме (2.33), вводя функцию Дирака

$$\Delta(x_i) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_i - c, x_i + x]; \\ \infty, & x \in [x_i - c, x_i + x], \end{cases}$$

причём

$$\int_{x_i - c}^{x_i + c} \Delta(x_i) dx = \int_{x_i - c}^{x_i + c} \Delta_i dx = 1,$$

где  $c$  – малая величина. Тогда коллокация эквивалентна операции

$$\langle \varepsilon, \Delta_i \rangle = \langle L(u) - p, \Delta_i \rangle, \quad i = \overline{1, N}.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение с условиями

$$\begin{cases} L(u) - p = \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0; \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Возьмём функцию в виде:

$$u = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x + \dots),$$

которая заведомо удовлетворяет граничным условиям. Ограничимся слагаемыми с  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Найдём:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} [x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x)] = \\ &= \frac{d}{dx} [\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 - \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^3] = \alpha_1 + 2(\alpha_2 - \alpha_1)x - 3\alpha_2 x^2; \\ \frac{d^2 u}{dx^2} &= 2(\alpha_2 - \alpha_1) - 6\alpha_2 x. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon = L(u) - p &= 2\alpha_2 - 2\alpha_1 - 6\alpha_2 x + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 - \alpha_1 x^2 - \\ &- \alpha_2 x^3 + x = x + (-2 + x - x^2)\alpha_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2. \end{aligned}$$

Выберем точки  $x = 1/4$  и  $x = 1/2$  в качестве точек коллокации. Параметры  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(x_i), \Delta(x_i) \rangle &= \int_{x_i-c}^{x_i+c} \varepsilon(x_i) \Delta(x_i) dx = \\ &= \varepsilon(x_i) \int_{x_i-c}^{x_i+c} \Delta(x_i) dx = \varepsilon(x_i) = 0; \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{bmatrix} \frac{29}{16} & -\frac{35}{64} \\ \frac{7}{4} & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$



ПОЭТОМУ

$$\alpha_1 = \frac{6}{31}; \alpha_2 = \frac{40}{217};$$
$$u = \frac{x(x-1)}{217}(42 + 40x). \quad (2.34)$$

Точное решение исходного уравнения имеет вид:

$$u_0 = \frac{\sin x}{\sin 1} - x. \quad (2.35)$$

Сравнение формул (2.34) и (2.35) приведено в табл. 2.2.

Таблица 2.2

$x$	$u$	$u_0$
0,25	0,045	0,044014
0,50	0,071	0,069747
0,75	0,062	0,060056

### 2.7.2.2. Метод наименьших квадратов

В этом методе берётся скалярное произведение ошибки на саму себя и требуется, чтобы полученная таким образом некоторая величина  $F$  была минимальна.

Имеем

$$\varepsilon = L(u) - p$$

тогда

$$F = \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle = \langle L(u) - p, L(u) - p \rangle.$$

Вновь аппроксимирующую функцию выбираем в виде

$$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k$$

и тогда минимизируем  $F$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

откуда

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[ \left\langle L \left( \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \right), L \left( \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \right) \right\rangle - 2 \left\langle L \left( \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \right), p \right\rangle + \langle p, p \rangle \right].$$

Если  $L$  – линейный оператор, предыдущее выражение упрощается и принимает следующий вид:

$$2 \left\langle L \left( \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \right), L(\phi_i) \right\rangle - 2 \langle L(\phi_i), p \rangle = 0$$

или

$$\left\langle L \left( \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \right) - p, L(\phi_i) \right\rangle = 0.$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение из примера 2:

$$L(u) - p = \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0;$$

$$u \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=1} = 0.$$

Возьмём аппроксимацию второго порядка

$$u = x(1-x)\alpha_1 + x^2(1-x)\alpha_2,$$

тогда

$$\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2} [x(1-x)\alpha_1 + x^2(1-x)\alpha_2] = \\
&= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} [(1-x)\alpha_1 + x^2(1-x)\alpha_2] \right\} = \\
\frac{d}{dx} [(1-2x)\alpha_1 + (2x-3x^2)\alpha_2] &= -2\alpha_1 + (2-6x)\alpha_2; \\
\varepsilon = L(u) - p &= \\
= -2\alpha_1 + (2-6x)\alpha_2 + x(1-x)\alpha_1 + x^2(1-x)\alpha_2 + x &= \\
= x + (-2+x-x^2)\alpha_1 + (2-6x+x^2-x^3)\alpha_2; \\
F = \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle &= \\
= \int_0^1 [x + (-2+x-x^2)\alpha_1 + (2-6x+x^2-x^3)\alpha_2]^2 dx; \\
\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} &= \int_0^1 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [x + (-2+x-x^2)\alpha_1 + \\
&+ (2-6x+x^2-x^3)\alpha_2]^2 dx = 2 \int_0^1 \varepsilon (-2+x-x^2) dx.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

После интегрирования выражений (2.35) и (2.36) получим систему

$$\begin{bmatrix} 202 & 101 \\ 101 & 1532 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 393 \end{bmatrix},$$

решение которой

$$\alpha_1 \approx 0,192; \quad \alpha_2 \approx 0,165.$$

В приведенной ниже табл. 2.3 решение сравнивается с точным результатом.

Таблица 2.3

$x$	$u_{\text{прибл.}}$	$u_{\text{точн.}}$
0,25	0,043	0,044014
0,50	0,068	0,069747
0,75	0,059	0,060056

В обычном методе коллокаций число точек равно числу неизвестных параметров, но его можно распространить на случай, когда число точек превышает число неизвестных. При этом параметры  $\alpha_i$  определяются при минимизации в среднеквадратичном смысле.

Пусть ошибка

$$\varepsilon = L(u) - p$$

оценивается в  $M$  точках, где  $M > N$ , а функция  $F$ , представляющая собой сумму  $\varepsilon^2$  в  $M$  различных точках, может быть записана в виде

$$F = \left\langle |L(u) - p|^2, \Delta_m \right\rangle, \quad m = \overline{1, M}, \quad (2.37)$$

где  $\Delta_m$  – функция Дирака. Минимизируя (2.37), для  $i$ -го уравнения  $i = \overline{1, N}$ , получаем

$$\left\langle |L(u) - p| \left[ \frac{\partial L(u)}{\partial \alpha_i} \right], \Delta_m \right\rangle = 0. \quad (2.38)$$

Если  $L$  – линейный оператор, то (2.38) имеет вид

$$\left\langle \left| L \left( \sum_{k=1}^N \alpha_k \Phi_k \right) - p \right| L(\Phi_i), \Delta_m \right\rangle = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.39)$$

Заметим, что (2.39) даёт симметричную систему уравнений.

Пример 4. Рассмотрим уравнение из примера 2:

$$L(u) - p = \frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0;$$

$$u \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=1} = 0.$$

Пусть  $u = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x)$ , тогда невязка есть

$$\varepsilon = x + (-2 + x - x^2)\alpha_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2$$

или

$$\varepsilon = x + L(\phi_1)\alpha_1 + L(\phi_2)\alpha_2.$$

Теперь подсчитаем невязку в  $x_1 = 1/4$ ;  $x_1 = 1/2$ ;  $x_1 = 3/4$ .

Это даёт

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(\phi_1)_1 & L(\phi_2)_1 \\ L(\phi_1)_2 & L(\phi_2)_2 \\ L(\phi_1)_3 & L(\phi_2)_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix},$$

где  $L(\ )_i$  указывает на то, что  $L(\ )$  вычисляется в  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), тогда

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29/16 & 35/64 \\ -7/4 & -7/8 \\ -29/16 & -151/64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}.$$

Составление квадрата невязки и последующая минимизация по  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  приводит к следующему матричному уравнению:

$$\begin{bmatrix} L(\phi_1)_1 & L(\phi_1)_2 & L(\phi_1)_3 \\ L(\phi_2)_1 & L(\phi_2)_2 & L(\phi_2)_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(\phi_1)_1 & L(\phi_2)_1 \\ L(\phi_1)_2 & L(\phi_2)_2 \\ L(\phi_1)_3 & L(\phi_2)_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} L(\phi_1)_1 & L(\phi_1)_2 & L(\phi_1)_3 \\ L(\phi_2)_1 & L(\phi_2)_2 & L(\phi_2)_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} -29/16 & -7/4 & -29/16 \\ 35/64 & -7/8 & -151/64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -29/16 & 35/64 \\ -7/4 & -7/8 \\ -29/16 & -151/64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} -29/16 & -7/4 & -29/16 \\ 35/64 & -7/8 & -151/64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/2 \\ -3/4 \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\begin{bmatrix} 9,66 & 4,82 \\ 4,82 & 6,61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,69 \\ 2,06 \end{bmatrix}.$$

Решение системы:  $\alpha_1 = 0,192$ ;  $\alpha_2 = 0,172$ .

Результаты приближённого и точного решений сведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

$x$	$u_{\text{прибл.}}$	$u_{\text{точн.}}$
0,25	0,044	0,044014
0,50	0,069	0,069747
0,75	0,060	0,060056

### 2.7.2.3. Метод моментов

Для заданной системы уравнений

$$\langle \varepsilon, w_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1, N}$$

в качестве весовых функций  $w_i$  можно использовать любой набор линейно-независимых функций из полной последовательности. Простейшим набором функций для одномерной задачи является ряд

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

При этом обеспечивается обращение в нуль моментов невязки более высокого порядка:

$$\langle \varepsilon, x^i \rangle = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Эта процедура называется методом моментов.

Пример 5. Рассмотрим уравнение из примера 2:

$$L(u) - p = \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0;$$

$$u \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=1} = 0.$$

Функция ошибки ортогонализируется по отношению к 1 и  $x$ :

$$\int_0^1 \varepsilon \cdot 1 dx = 0; \quad \int_0^1 \varepsilon \cdot x dx = 0. \quad (2.40)$$

Подстановка  $\varepsilon$  в виде

$$\varepsilon = \alpha_1 (-2 + x - x^2) + \alpha_2 (2 - 6x + x^2 - x^3) + x$$

в систему уравнений (2.40) даёт

$$\begin{bmatrix} 11/6 & 11/6 \\ 11/22 & 19/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Решение системы:  $\alpha_1 = 122/649$ ;  $\alpha_2 = 110/649$ .

Сравнение приближённого решения с точным приведено в табл. 2.5.

Таблица 2.5

$x$	$u_{\text{прибл.}}$	$u_{\text{точн.}}$
0,25	0,043191	0,044014
0,50	0,068181	0,069747
0,75	0,059084	0,060056

#### 2.7.2.4. Метод Галёркина

Метод Галёркина представляет собой частный случай метода взвешенных невязок, в котором весовые функции совпадают с базисными.

Пусть дана система уравнений

$$L(u) - p = 0, \quad x \in V;$$

$$F(u) - q = 0, \quad x \in S$$

и аппроксимирующая функция

$$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k,$$

удовлетворяющая граничным условиям  $F(u) = q(s)$ ,  $x \in S$ .

Невязка

$$\varepsilon = L\left(\sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k\right) - p$$

ортогонализируется по отношению к базисным функциям  $\phi_i$ :



$$\langle \varepsilon, \phi_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.41)$$

Отсюда

$$\int \left[ L \left( \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \right) - p \right] \phi_i dV = 0 \quad i = \overline{1, N}.$$

Если  $L$  – линейный оператор, то система (2.41) переходит в систему линейных уравнений относительно  $\alpha_k$ . Заметим, что метод Галёркина в равной степени применим и к нелинейным задачам.

Пример 6. Вновь рассмотрим уравнение

$$L(u) - p = \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0;$$

$$u \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=1} = 0.$$

Применение метода Галёркина приводит к следующим интегралам:

$$\int_0^1 \varepsilon x(1-x) dx = 0; \quad \int_0^1 \varepsilon x^2(1-x) dx = 0. \quad (2.42)$$

Интегрируя зависимости (2.42), получим систему линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} 3/10 & 3/20 \\ 3/20 & 13/105 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/12 \\ 1/20 \end{bmatrix}.$$

Решение системы:  $\alpha_1 = 71/369$ ;  $\alpha_2 = 7/41$ .

Сравнение приближённого решения с точным приведено в табл. 2.6.

Таблица 2.6

$x$	$u_{\text{прибл.}}$	$u_{\text{точн.}}$
0,25	0,0440	0,044014
0,50	0,0698	0,069747
0,75	0,0600	0,060056

### 2.7.3. Обобщённые формулировки

#### 2.7.3.1. «Слабые формулировки»

В предыдущем пункте рассмотрен случай самосопряжённых операторов и граничных условий, совпадающих с главными граничными условиями, однако методы взвешенных невязок применимы к произвольным операторам и граничным условиям.

Рассмотрим общую процедуру постановки задач на основе этих методов, в которой допускается лишь частичное удовлетворение граничных условий и, что особенно важно, использование базисных функций с пониженной степенью непрерывности. Для этого введём классификацию степеней непрерывности функций. Рассмотрим  $u(x)$ ,  $x \in V$  (рис. 2.9).

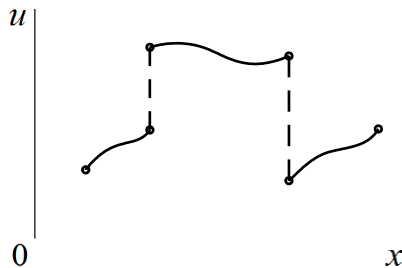


Рис. 2.9. Функция с разрывами первого рода

Несмотря на то, что  $u(x)$  имеет разрывы в дискретных точках, она конечна, т.е. её норма удовлетворяет условию

$$\|u\|_0 = \int_V u^2 dV < \infty. \quad (2.43)$$

Все функции, удовлетворяющие (2.43), т.е. интегрируемые с квадратом, относятся к функциональному пространству  $L_2$ .

Наложение ограничений на непрерывность производных приводит к подмножеству пространств, которые называются пространствами Соболева. Пространство  $W_2^{(1)}$  содержит все функции, у которых дополнительно квадрат первой производной интегрируем. Определяющим для таких функций является условие (для одномерных функций)

$$\|u\|_1 = \int \left[ u^2 + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx < \infty .$$

(Отметим, что верхний индекс при  $W$  показывает порядок старшей конечной производной, а нижний индекс относится к квадратичной оценке нормы). Пространства более высокого порядка определяются аналогичным образом, например,  $W_2^{(2)}$  :

$$\|u\|_1 = \int \left[ u^2 + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 \right] dx < \infty .$$

Примеры функций из пространств  $W_2^{(1)}$  и  $W_2^{(2)}$  показаны на рис. 2.10.

Для обобщения на двух- и трёхмерные задачи необходимо заменить скалярные операторы произведениями векторов.

Таким образом, дифференцирование понижает порядок пространства - если  $u \in W_2^{(2)}$ , то  $du/dx \in W_2^{(1)}$ .

Вернёмся к решению дифференциального уравнения

$$L(u) - p = 0, \quad x \in V,$$

подчиняющемуся граничному условию

$$F(u) - g = 0, \quad x \in S.$$

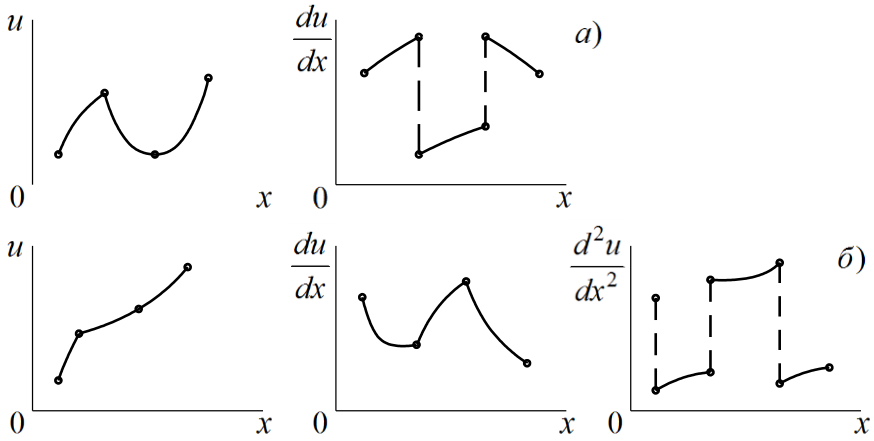


Рис. 2.10. Функции с интегрируемым квадратом первой  $W_2^{(1)}$  (а) и второй  $W_2^{(2)}$  (б) производной

Пусть  $L$  – оператор  $n$ -го порядка и  $p, g \in W_2^{(1)}$ . Не будем разделять главные и естественные граничные условия, т.е.  $F(u) - g$  представляет комбинацию главных и естественных граничных условий на  $S$ . Очевидно, что классическое решение из  $W_2^{(n+1)}$  удовлетворяет условиям

$$\varepsilon = L(u) - p = 0, \quad \forall x \in V; \quad \varepsilon_B = F(u) - g = 0, \quad \forall x \in S.$$

В методе взвешенных невязок решение аппроксимируется выражением

$$u = u_B + \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j,$$

где  $u_B$  удовлетворяет граничному условию

$$F(u_B) - g = 0, \quad x \in S,$$

а  $\phi_j$  есть функции, принадлежащие пространству базисных функций и удовлетворяющие однородным граничным условиям

$$F(\phi_j) = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad x \in S.$$

Требуемый порядок пространства базисных функций определяется порядком  $L$  и  $p$ . Такой выбор аппроксимации приводит к  $\varepsilon_B = 0$  на границе. Мерой ошибки является скалярное произведение невязки и «пробной» (весовой) функции  $w$ :

$$\text{Мера ошибки} = \langle \varepsilon, w \rangle = \int_V [L(u) - p] w dV.$$

При смягчении требований к непрерывности функции, т.е. понижении порядка функционального пространства, получим «слабое» решение, при этом «слабое» решение называется обобщённым, если можно доказать его единственность.

Покажем на примере, как могут быть ослаблены требования к непрерывности.

Пусть дана краевая задача

$$L(u) - p = \frac{d^2 u}{dx^2} + u - x = 0$$

с главным граничным условием

$$u = f \quad \text{при } x = 0$$

и естественным граничным условием

$$\frac{du}{dx} = g \quad \text{при } x = 1.$$

Потребуем, чтобы приближённое решение удовлетворяло главному граничному условию, а весовая функция – однородной форме главного условия, т.е.

$$u = f \quad \text{при } x = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Запишем

$$\langle \varepsilon, w \rangle + \langle \varepsilon_B, w \rangle \Big|_S = 0,$$

т.е.

$$\int_0^1 \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x \right) w dx + \left[ \left( g - \frac{du}{dx} \right) w \right] \Big|_{x=1} = 0, \quad (2.44)$$

где  $w \in L_2$  и  $u \in W_2^{(2)}$  ( $u$  и  $\partial u / \partial x$  – непрерывны).

Интегрируя (2.44) по частям, получим

$$\int_0^1 \left[ (u - x) w - \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} \right] dx + |gw|_{x=1} = 0,$$

причём  $u, w \in W_2^{(1)}$ , т.е.  $u$  – непрерывна.

Замечание. Согласно методу Галёркина условие ортогональности имеет вид (в качестве весовых функций применяются базисные функции)

$$\int_V [L(u) - p] \phi_i dV = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Если учесть, что

$$\delta u = \delta \alpha_1 \phi_1 + \delta \alpha_2 \phi_2 + \dots + \delta \alpha_N \phi_N,$$

где  $\delta \alpha_i$  – произвольные приращения, то можно записать

$$\int_V [L(u) - p] \delta u dV = 0, \quad (2.45)$$

которое справедливо при произвольной вариации  $\delta u$ . Здесь имеется в виду эквивалентность произвольного  $\delta u$  приращению  $\delta \alpha_i \phi_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Будем в дальнейшем использовать это эквивалентное обозначение при применении метода Галёркина.

Пример 7. Рассмотрим задачу

$$L(u) - p = \frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0;$$

$$u = 0; \quad \frac{du(1)}{dx} = 0.$$

Сначала рассмотрим приближённое решение, удовлетворяющее обоим граничным условиям:

$$u^{(1)} = \alpha^{(1)} x \left( 1 - \frac{x}{2} \right) = \alpha^{(1)} \phi_1.$$

Вычислим невязку

$$\varepsilon^{(1)} = L[u^{(1)}] - p = \frac{d^2u^{(1)}}{dx^2} + u^{(1)} + p = -\alpha^{(1)} + \alpha^{(1)} \left( x - \frac{x^2}{2} \right) + x.$$

Проведём ортогонализацию невязки по отношению к  $\phi_1$  по методу Галёркина:

$$\int_0^1 \varepsilon^{(1)} x \left( 1 - \frac{x}{2} \right) dx = 0,$$

откуда  $\alpha^{(1)} = 25/24$ .

Теперь будем аппроксимировать  $u$ , тождественно удовлетворяя условию  $u(0) = 0$ , в то время как условие  $du(1)/dx$  выполним лишь в осреднённом смысле, тогда соответствующий интеграл, подобный (2.44), примет вид

$$\int_0^1 \left( \frac{d^2u}{dx^2} + u + x \right) \delta u dx + \left( g - \frac{du}{dx} \right) \delta u \Big|_{x=1} = 0.$$

Отметим, что  $g = 0$ . Примем

$$u^{(2)} = \alpha^{(2)} x + \beta^{(2)} x^2 = \alpha^{(2)} \phi_1 + \beta^{(2)} \phi_2,$$

тогда

$$\frac{du^{(2)}}{dx} = \alpha^{(2)} + 2\beta^{(2)}x; \quad \frac{d^2u^{(2)}}{dx^2} = 2\beta^{(2)}$$

Найдём невязки:

$$\varepsilon^{(2)} = L[u^{(2)}] - p = \frac{d^2u^{(2)}}{dx^2} + u^{(2)} + p = 2\beta^{(2)} + \alpha^{(2)}x + \beta^{(2)}x^2 + x;$$

$$\varepsilon_B^{(2)} = \left[ \frac{d^2u^{(2)}}{dx^2} \right] \Big|_{x=1} = \left[ \alpha^{(2)} + 2\beta^{(2)}x \right] \Big|_{x=1} = \alpha^{(2)} + 2\beta^{(2)}.$$

и проведём ортогонализацию по отношению к  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Это даёт

$$\int_0^1 \varepsilon^{(2)} x dx - \left[ \varepsilon_B^{(2)} x \right] \Big|_{x=1} = 0,$$

$$\int_0^1 \varepsilon^{(2)} x^2 dx - \left[ \varepsilon_B^{(2)} x^2 \right] \Big|_{x=1} = 0.$$

После выполнения процедуры интегрирования получим систему

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 3/4 \\ 3/4 & 17/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{(2)} \\ \beta^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/4 \end{bmatrix},$$

решение которой

$$\alpha^{(2)} = 137/139; \quad \beta^{(2)} = -120/278.$$

Результаты приведены в табл. 2.7.

Таблица 2.7

$x$	$u^{(1)}$	$du^{(1)}/dx$	$u^{(2)}$	$du^{(2)}/dx$
0,5	0,3906		0,3848	
1,0	0,5208	0,0	0,5539	0,1223



Отметим, что во втором случае  $(du/dx)|_{x=1} \neq 0$ , но при увеличении числа базисных функций все в большей степени будут удовлетворять граничному условию  $du/dx = 0$ .

### 2.7.3.2. Задачи с начальными условиями

Метод Галёркина представляет интерес и для решения задач с начальными условиями. В прикладных задачах теплоэнергетики важными являются два типа уравнений с начальными условиями: гиперболические и параболические.

Запишем уравнение гиперболического типа в трёхмерном случае:

$$\lambda \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ в области } V,$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ;  $\lambda > 0$ .

Начальные условия имеют вид:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \dot{u}_0(x).$$

Кроме того предположим, что на части поверхности  $S_1$  области  $V$  заданы граничные условия

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t),$$

а на оставшейся части  $S_2$  граничные условия вида

$$\lambda \nabla u(x, t) = g,$$

где  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ .

Формула Галёркина для этого случая запишется в виде:

$$\int_0^t \left[ \iiint_V \left( \lambda \nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u \, dV - \iint_{S_2} (\lambda \nabla u - g) \delta u \, dS \right] dt = 0.$$

При этом предполагается, что функция  $u$  тождественно удовлетворяет начальным и граничным условиям на  $S_1$ .

Уравнение параболического типа в трёхмерном случае таково:

$$\nabla^2 u = K \frac{\partial u}{\partial t} \text{ в области } V.$$

Для него требуется только одно начальное условие

$$u(x, 0) = u_0$$

и граничные условия на поверхности области  $S = S_1 + S_2$ :

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) \text{ на } S_1;$$

$$\lambda \nabla u(x, t) = g \text{ на } S_2.$$

Формула Галёркина в этом случае такова:

$$\int_0^t \left[ \iiint_V \left( \nabla^2 u - K \frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta u \, dV - \iint_{S_2} (\nabla u - g) \delta u \, dS \right] dt = 0.$$

Здесь также предполагается, что функция  $u$  удовлетворяет начальному и граничному условию  $u = \bar{u}$  на  $S_1$ .

В обоих случаях функция  $u$  может быть аппроксимирована произведением координатных функций на функции, зависящие от времени:

$$u \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \phi_i(x).$$

Отметим, что  $\phi_i(x)$  должны удовлетворять граничным условиям на  $S_1$ , а неизвестные функции  $\alpha_i(t)$  – начальным условиям.

### 2.7.3.3. Случай квадратичных функционалов

Ограничимся изучением системы эллиптических уравнений

$$L(u) - p = 0 \text{ в области } V$$

с естественными граничными условиями

$$F(u) - q(s) = 0 \text{ на } S .$$

Эти уравнения можно заменить одной вариационной формулой Галёркина

$$\int_V [L(u) - p] \delta u \, dV = \int_S [F(u) - q(s)] \delta u \, dS . \quad (2.46)$$

Пусть операторы  $L$  и  $F$  линейны, а функции  $p$  и  $q(s)$  консервативны, т.е. не зависят от переменной  $u$ . Для простоты будем предполагать, что  $u$  – функция только одного переменного, а  $L$  – симметричный оператор второго порядка, хотя ниже следующий результат справедлив для любого симметричного оператора. При этих предположениях

$$\int_V L(u) \delta u \, dV = \int_S F(u) \delta u \, dS - \int_V CD(u) D(\delta u) \, dV ,$$

где  $C$  – положительная функция,  $C \neq C(u)$ . Тогда (2.46) переписется в виде

$$\int_V CD(u) D(\delta u) \, dV + \int_V p \delta u \, dV = \int_S q(s) \delta u \, dS . \quad (2.47)$$

Запишем  $\delta u = \lambda \eta(x)$ , где  $\eta(x)$  – произвольная функция  $x$  (рис. 2.11), удовлетворяющая главным граничным условиям, а  $\lambda$  – параметр,  $\lambda \neq \lambda(x)$ . Уравнение (2.47) перепишем таким образом:

$$\int_V CD(u) D(\lambda \eta) \, dV + \int_V p \lambda \eta \, dV - \int_S q(s) \lambda \eta \, dS = 0 . \quad (2.48)$$

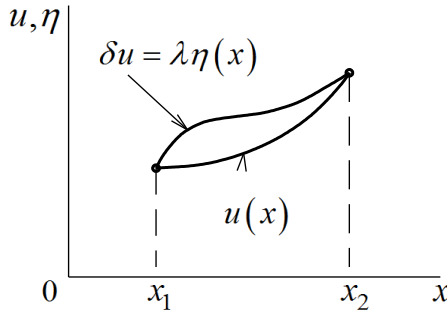


Рис. 2.11. К определению вариации  $u(x)$

Поскольку  $D$  – линейный оператор, а  $\lambda \neq \lambda(x)$ , можно записать

$$\lambda \left[ \int_V CD(u) D(\eta) dV + \int_V p\eta dV - \int_S q(s)\eta dS \right] =$$

$$\lambda \left\{ \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{1}{2} \int_V CD^2(u + \lambda\eta) dV + \int_V p(u + \lambda\eta) dV - \int_S q(s)(u + \lambda\eta) dS \right] \right\} \Big|_{\lambda=0} \equiv 0$$

или в кратной записи

$$\lambda \left[ \frac{d}{d\lambda} F(u + \lambda\eta) \right]_{\lambda=0} \equiv \lambda \left[ \frac{d}{d\lambda} F(u + \delta u) \right]_{\lambda=0} \equiv 0,$$

где функция

$$F(u + \lambda\eta) = \frac{1}{2} \int_V CD^2(u + \lambda\eta) dV + \int_V p(u + \lambda\eta) dV - \int_S q(s)(u + \lambda\eta) dS$$

представляет собой так называемый квадратичный функционал. Раскладывая функционал  $F(u + \lambda \eta)$  в ряд по степени  $\delta u$ , получаем

$$F(u + \lambda \eta) = F(u) + \lambda \left[ \frac{dF(u + \delta u)}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} + \frac{\lambda^2}{2!} \left[ \frac{d^2 F(u + \delta u)}{d\lambda^2} \right]_{\lambda=0} + \dots = F(u) + \delta F + \frac{1}{2!} \delta^2 F + \dots$$

Условие  $\delta F = 0$  есть условие стационарности функционала, эквивалентное (2.46). Полное приращение функции  $F$  запишется в виде

$$\Delta F = F(u + \delta u) - F(u) = \delta F + \frac{1}{2} \delta^2 F + \dots$$

Так как  $\delta F = 0$ , то требуется исследовать вторую (и более высокие) вариацию функционала, чтобы определить тип стационарной (или равновесной) точки

$$\Delta F = \frac{1}{2} \delta^2 F + \dots$$

Вторая вариация даёт

$$\delta^2 F = \lambda^2 \int_V CD(\eta)D(\eta)dV = \int_V CD^2(\delta\eta)dV. \quad (2.49)$$

Если  $C > 0$ , то (2.49) положительно определено. Отсюда следует, что в равновесном состоянии системы, определяемом из условия  $\delta F = 0$ , функционал  $F$  принимает минимальное значение.

Покажем технику получения функционала на следующем примере.

Пример 8. Построим функционал, соответствующий дифференциальному уравнению

$$L(u) - p = \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0$$

с граничными условиями

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Запишем вариацию уравнения по Галёркину

$$\delta F = \int_0^1 \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x \right) \delta u dx = 0,$$

которое представим в виде

$$\delta F = \int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} \delta u dx + \int_0^1 u \delta u dx + \int_0^1 x \delta u dx = 0.$$

Первый интеграл правой части при интегрировании по частям даст

$$\int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} \delta u dx = \frac{du}{dx} \delta u \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{\delta u}{dx} dx,$$

но  $\delta u(0) = \delta u(1) = 0$ , поэтому

$$\int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} \delta u dx = - \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{\delta u}{dx} dx.$$

Таким образом,

$$\delta F = \int_0^1 \left( - \frac{du}{dx} \frac{\delta u}{dx} + u \delta u + x \delta u \right) dx = 0,$$

откуда найдём

$$\begin{aligned}
 F &= \int \delta F = \int \left[ \int_0^1 \left( -\frac{du}{dx} \frac{\delta u}{dx} \right) dx + \int_0^1 u \delta u dx + \int_0^1 x \delta u dx \right] = \\
 &= \int_0^1 \left[ \int \left( -\frac{du}{dx} \frac{\delta u}{dx} \right) \delta u dx \right] + \int_0^1 \left( \int u \delta u \right) dx + \int_0^1 \left( \int x \delta u \right) dx.
 \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left[ \int \left( -\frac{du}{dx} \frac{\delta u}{dx} \right) dx \delta u \right] &= \int_0^1 \left[ -\int \frac{\delta}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} \delta u \right] dx = \\
 &= \int_0^1 \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx;
 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left( \int u \delta u \right) dx = \int_0^1 \frac{u^2}{2} dx; \quad \int_0^1 \left( \int x \delta u \right) dx = \int_0^1 x u dx,$$

то окончательно получим

$$F = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ -\left( \frac{du}{dx} \right)^2 + u^2 + 2xu \right] dx.$$

Пример 9. Рассмотрим случай течения в канале единичной ширины, когда вертикальная составляющая скорости равна нулю:  $v=0$  (рис. 2.12). Тогда составляющая скорости  $u = u(y)$ . Уравнение Навье-Стокса запишется следующим образом:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

а уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

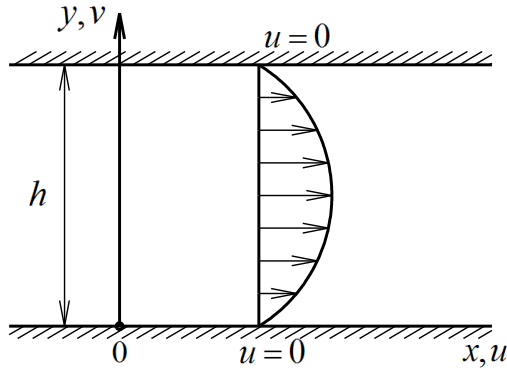


Рис. 2.12. Течение в канале

При этом граничные условия «прилипания» таковы:

$$u(0) = u(h) = 0.$$

Поскольку  $u = u(y)$ ,  $v = 0$ , то сформулированная математическая модель трансформируется в систему

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ u(0) = u(h) = 0, \end{cases}$$

которая имеет точное решение

$$u = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left( \frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right).$$

Полученное решение характеризует течение Пуазейля между параллельными стенками.

Получим теперь вариационный функционал. Согласно формуле Галёркина имеем

$$\delta F = \int_0^h \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \delta u dy.$$



Так как

$$\int_0^h \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \delta u dy = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \delta u \Big|_0^h - \int_0^h \mu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} dy,$$

то в силу  $\delta u(0) = \delta u(h) = 0$  получим

$$\delta F = \int_0^h \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta u dy - \int_0^h \mu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} dy.$$

Далее

$$F = \int \delta F = \int_0^h \left[ \int \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta u \right] dy - \int_0^h \left[ \int \mu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right] dy,$$

но

$$\int \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta u = \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \int \delta u = \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) u;$$
$$\int \mu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} = \int \mu \frac{\partial u}{\partial y} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2,$$

поэтому

$$F = -\frac{1}{2} \int_0^h \left[ 2 \frac{\partial p}{\partial x} u + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dy.$$

Примем следующий вид приближённого решения, который удовлетворяет граничным условиям

$$u = u_c \sin \left( \frac{\pi y}{h} \right),$$

и подставим его в  $F$  :

$$\begin{aligned}
 -F &= \frac{1}{2} \int_0^h \left[ 2 \frac{\partial p}{\partial x} u_c \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) + \mu \left(\frac{\pi^2}{h}\right) \cos^2\left(\frac{\pi y}{h}\right) u_c^2 \right] dy = \\
 &= \frac{\partial p}{\partial x} u_c \left(\frac{2h}{\pi}\right) + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 \frac{h}{2} u_c^2.
 \end{aligned}$$

Найдём

$$\delta F = \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{2h}{\pi}\right) + \frac{\mu}{h} \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 h u_c \right] \delta u_c = 0,$$

откуда

$$u_c = -\frac{4h^2}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Сравнение полученных результатов с точным решением при

$$\frac{h^2}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 1$$

приведено в табл. 2.8.

Таблица 2.8

y	Результаты решения для течения Пуазейля	
	точного	приближённого
0	0	0
0,1	$-4,5 \cdot 10^{-2}$	$-3,986 \cdot 10^{-2}$
0,2	$-8,0 \cdot 10^{-2}$	$-7,582 \cdot 10^{-2}$
0,3	-0,105	-0,104
0,4	-0,12	-0,122
0,5	-0,125	-0,129

#### 2.7.3.4. Метод Релея-Ритца

Метод Релея-Ритца состоит в замене переменной  $u$ , входящей в функционал  $F$ , приближённым решением вида

$$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \quad (2.50)$$

с последующей минимизацией функционала по переменным  $\alpha_k$ . Увеличение числа членов в приближённом решении обычно приводит к улучшению результатов. Функции  $\phi_k$  должны удовлетворять главным граничным условиям задачи и представлять собой, как и в методе Галёркина, элементы заданной последовательности линейно-независимых функций.

Рассмотрим функционал вида

$$F = \int_{x_1}^{x_2} I(u, u_x, x) dx, \quad (2.51)$$

где  $u_x = \partial u / \partial x$ , с граничными условиями  $u(x_1) = u(x_2) = 0$ .

Аппроксимирующая функция должна быть непрерывной до производной порядка  $N-1$  ( $N$  – высший порядок производной в функционале; в рассматриваемом случае  $N=1$ ) и удовлетворять главным условиям. Последнее выполнимо, если каждая функция  $\phi_k$  будет удовлетворять главным граничным условиям

$$\phi_k(x_1) = \phi_k(x_2) = 0.$$

Подставляя в (2.51) выражение (2.50) для функции  $u$  и требуя стационарности функционала  $F$  по отношению к параметрам  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , приходим к системе  $n$  уравнений, связывающих коэффициенты  $\alpha_i$ :

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Эти уравнения линейны по отношению к  $\alpha_i$ , если  $F$  есть квадратичная функция  $u$  и  $u_x$ .

Для определения сходимости метода необходимо взять две или более базисных функций. Когда метод используется применительно к функционалу, имеющему минимум, можно сравнивать последовательные значения функционала, полученные для последовательных приближений

$$u^{(1)} = \alpha_1^{(1)} \phi_1,$$

$$u^{(2)} = \alpha_1^{(2)} \phi_1 + \alpha_2^{(2)} \phi_2,$$

.....

$$u^{(i)} = \alpha_1^{(i)} \phi_1 + \alpha_2^{(i)} \phi_2 + \dots + \alpha_i^{(i)} \phi_i,$$

где  $i$ -е приближение включает все функции, входящие в предыдущие приближения.

Функции  $\phi_i$  обычно берутся в виде полиномов или тригонометрических функций.

## 2.8. Метод конечных элементов

Основная трудность непосредственного применения методов Галёркина и Релея-Ритца связана с выбором глобальных базисных функций. Эти функции должны не только удовлетворять главным граничным условиям, но и достаточно полно описывать геометрию, материал и другие характеристики задачи. Все эти условия обычно очень трудно выполнить, и возможности методов в их «классическом» смысле ограничены. С развитием компьютерной техники получила развитие идея локализации аппроксимирующих функций в малых областях. При этом можно использовать функции более простого вида.

Предположение о применимости локальных функций в методе Релея-Ритца справедливо, поскольку можно показать, что всегда существует формула Галёркина, соответствующая условию минимума функционала Релея-Ритца.

Простейшей локальной функцией является функция одного переменного (рис. 2.13, а). Она принимает значение, равное единице, в определённой точке  $i$ , называемой узлом, и равна нулю во всех других узлах. Для элементов с внешними границами функция должна удовлетворять главным граничным условиям. В некоторых других случаях можно потребовать непрерывности производных (рис. 2.13, б).

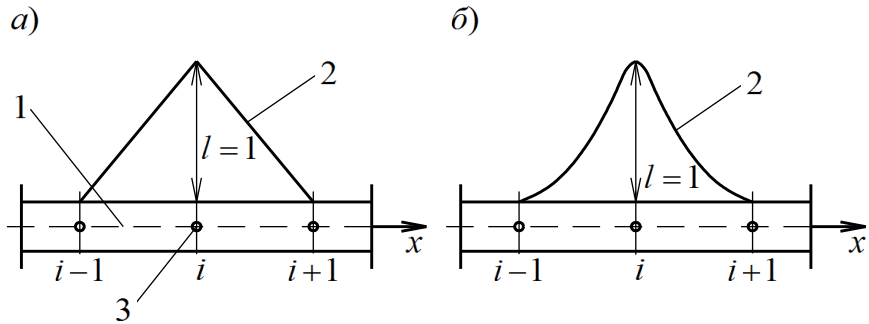


Рис. 2.13. Локальные одномерные функции:  
 а – линейное распределение (непрерывна сама функция);  
 б – кубическое распределение (непрерывна функция и её производная); 1 – элемент; 2 – локальная функция; 3 – узел

Рассмотрим в качестве примера формулу Галёркина, которую можно записать в виде функции от симметричного оператора  $D$ :

$$\mu \langle D(u), D(\delta u) \rangle = \langle c, \delta u \rangle.$$

Такой тип оператора получен при исследовании течения Пуазейля между параллельными стенками:

$$\int_0^h \mu \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{d\delta u}{dx} \right) dx = \int_0^h c \delta u dx. \quad (2.52)$$

Разобьём полную ширину канала  $h$  на четыре участка (элемента) длиной  $l$  (рис. 2.14, а) и введём в рассмотрение три

локальные функции для внутренних узлов (в узлах 1 и 5 скорость  $u$  обращается в нуль как следствие выполнения главных граничных условий задачи).

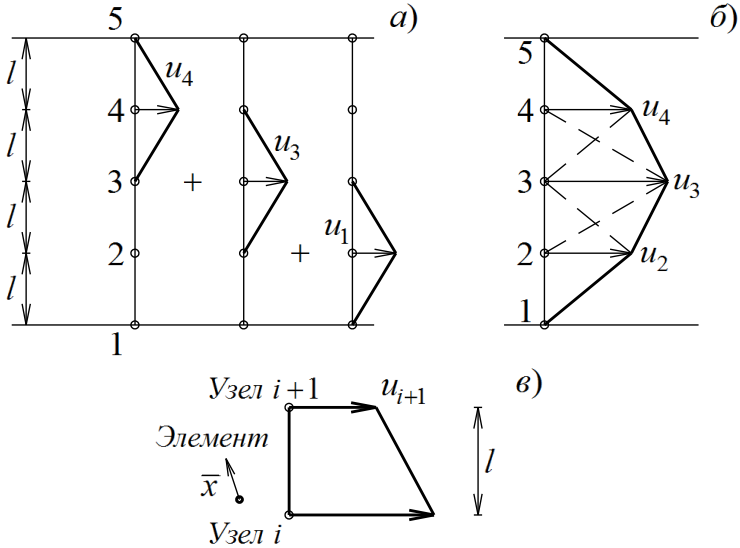


Рис. 2.14. Локальные функции в задаче о течении Пуазейля:  
 а – локальные функции; б – распределение скорости;  
 в – элементы

Суперпозиция локальных функций позволяет получить приближённый закон распределения скоростей (рис. 2.14, б). Введём далее в рассмотрение для каждого элемента местную координату  $\bar{x}$ , которая отсчитывается от нижней точки каждого элемента и  $0 \leq \bar{x} \leq 1$  (рис. 2.14, в). Тогда (2.52) можно переписать в виде

$$\frac{1}{l} \sum_e \int_0^1 \mu \left( \frac{du}{d\bar{x}} \right) \left( \frac{d\delta u}{d\bar{x}} \right) d\bar{x} = l \sum_e \int_0^1 c \delta u d\bar{x}$$

или

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{l^2} \left\| \int_0^1 \frac{d}{d\bar{x}} (u_2 \bar{x}) \frac{d}{d\bar{x}} (\delta u_2 \bar{x}) d\bar{x} + \int_0^1 \frac{d}{d\bar{x}} [u_3 \bar{x} + u_2 (1 - \bar{x})] \times \right. \\
& \times \frac{d}{d\bar{x}} [\delta u_3 \bar{x} + \delta u_2 (1 - \bar{x})] d\bar{x} + \int_0^1 \frac{d}{d\bar{x}} [u_4 \bar{x} + u_3 (1 - \bar{x})] \times \\
& \times \frac{d}{d\bar{x}} [\delta u_4 \bar{x} + \delta u_3 (1 - \bar{x})] d\bar{x} + \int_0^1 \frac{d}{d\bar{x}} [u_4 (1 - \bar{x})] \times \\
& \times \frac{d}{d\bar{x}} [\delta u_4 (1 - \bar{x})] d\bar{x} \left. \right\| = c \left\{ \int_0^1 \delta (u_2 \bar{x}) d\bar{x} + \right. \\
& \left. + \int_0^1 \delta [u_3 \bar{x} + u_2 (1 - \bar{x})] d\bar{x} + \int_0^1 \delta [u_4 \bar{x} + u_3 (1 - \bar{x})] d\bar{x} \right\}. \quad (2.53)
\end{aligned}$$

Левая часть (2.53) приводится к более простому виду:

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{l^2} \left[ \int_0^1 u_2 \delta u_2 d\bar{x} + \int_0^1 (u_3 - u_2) (\delta u_3 - \delta u_2) d\bar{x} + \right. \\
& \left. + \int_0^1 (u_4 - u_3) (\delta u_4 - \delta u_3) d\bar{x} + \int_0^1 u_4 \delta u_4 d\bar{x} \right]. \quad (2.54)
\end{aligned}$$

Внося (2.54) вместо левой части (2.53) и выполняя необходимое интегрирование, получаем уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{l^2} [u_2 \delta u_2 + (u_3 - u_2) (\delta u_3 - \delta u_2) + (u_4 - u_3) (\delta u_4 - \delta u_3) + \\
& + u_4 \delta u_4] = c (\delta u_2 + \delta u_3 + \delta u_4)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{cl^2} [(2u_2 - u_3) \delta u_2 + (-u_2 + 2u_3 - u_4) \delta u_3 + (-u_4 + 2u_4) \delta u_4 = \\
& = c (\delta u_2 + \delta u_3 + \delta u_4).
\end{aligned}$$

С учётом того, что в полученном уравнении вариации  $\delta u_i$  линейно независимы и произвольны, приходим к системе трёх уравнений

$$\frac{\mu}{cl^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

решение которой (в силу симметрии  $u_2 = u_4$ ) даёт

$$u_2 = \frac{3}{32} \frac{ch^2}{\mu}; \quad u_3 = \frac{1}{8} \frac{ch^2}{\mu}.$$

Получаемые результаты совпадают со значениями точного решения в узловых точках, однако это не означает идентичности обоих решений, поскольку приближённое решение изменяется между узлами линейно, а точное – квадратично.

Метод локальных функций реализуется наилучшим образом, если каждый элемент рассматривать отдельно, именно в этом и заключается одна из характерных особенностей метода конечных элементов. В этом методе сначала рассматривается каждый отдельный элемент, и изучаются его свойства независимо от других. Затем элементы объединяются и удовлетворяются необходимые условия непрерывности внутри рассматриваемой области и глобальные граничные условия на её поверхности.

В подтверждение сказанного рассмотрим одномерный элемент (рис. 2.14, в) с линейным распределением скорости между узлами  $i$  и  $i+1$ :

$$u = u_{i+1}\bar{x} + (1-\bar{x})u_i. \quad (2.55)$$

Внося (2.55) в зависимость (2.52), получаем равенство

$$\frac{\mu}{l^2} \int_0^1 (u_i - u_{i+1}) \delta(u_i - u_{i+1}) d\bar{x} = c \int_0^1 [\delta u_{i+1} \bar{x} + \delta u_i (1 - \bar{x})] d\bar{x},$$



которое после интегрирования преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{cl^2} (u_i \delta u_i + u_{i+1} \delta u_{i+1} - u_i \delta u_{i+1} - u_{i+1} \delta u_i) = \\ = \frac{1}{2} \delta u_i + \frac{1}{2} \delta u_{i+1}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Как следствие произвольности и линейной независимости вариаций  $\delta u_i$  и  $\delta u_{i+1}$ , из (2.56) получаем систему следующих двух уравнений:

$$\frac{\mu}{cl^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь можно представить задачу как ансамбль из четырёх элементов, влияния которых складываются в общих узлах. Это приводит к следующей системе уравнений для рассматриваемой задачи:

$$\frac{\mu}{cl^2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & \boxed{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \boxed{-1} & \boxed{2} & \boxed{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{-1} & \boxed{2} & \boxed{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \boxed{-1} & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

в которой учтём граничные условия  $u_1 = u_5 = 0$ .

### **3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКИ НА ОСНОВЕ ИДЕАЛЬНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

#### **3.1. Вводные положения**

Любой теплоэнергетический процесс, как правило, сопровождается перемещениями материальных потоков жидкости, газа или твёрдых частиц. Потоки могут быть однофазными, т.е. целиком состоять из одной фазы, перемещаемой в некотором объёме аппарата, и многофазными (в частности, двухфазными), когда процесс происходит в условиях взаимодействия нескольких фаз (например, газ-жидкость, жидкость-твёрдое тело, газ-твёрдое тело). Поэтому при составлении математической модели особое значение приобретает описание движения потоков веществ.

Однако гидродинамика реальных потоков настолько сложна, что в настоящее время имеется возможность составить в общем виде лишь уравнения для однородных потоков (уравнения Навье-Стокса), но решение этих уравнений можно найти только в частных случаях. Для более сложных систем (многофазные потоки) пока не удаётся составить уравнения гидродинамики даже в общем виде. Например, для простейшего из многофазных – двухфазного потока типа газ-жидкость уравнения не могут быть записаны из-за невозможности задания граничных условий на нестационарной поверхности раздела фаз.

Такое положение вынуждает при составлении математических описаний прибегать к использованию более простого, приближённого представления о внутренней структуре потоков, т.е. возникает необходимость познавать процесс через модели структуры потоков в аппаратах.

Структура движущейся среды характеризуется степенью перемешивания частиц потока, которая определяет поле температур. Это важное обстоятельство послужило предпосылкой для установления по признаку перемешивания некоторых типовых моделей движущихся потоков.

К типовым, прежде всего, относятся модель идеального перемешивания и модель идеального вытеснения. Модели структуры потока (гидродинамические модели) математически записываются в виде дифференциальных уравнений, которые выражают связь между наиболее характерными параметрами процесса. Для теплоэнергетических систем эту связь имеет смысл находить, исходя из анализа явлений перемещения и распределения температуры в потоке. Поэтому универсальным видом гидродинамической математической модели является уравнение, характеризующее изменение температуры в потоке, которое обуславливается только движением.

В связи с этим можно сформулировать требования при построении моделей структуры потоков:

1) отражать физическую сущность реального потока и иметь достаточно простое математическое описание;

2) давать возможность определить её параметры (коэффициенты уравнений экспериментальным или расчётным способом);

3) быть удобной для использования при теплоэнергетических расчётах.

## **3.2. Предварительные сведения о математическом аппарате**

### ***3.2.1. Классификация линейных дифференциальных уравнений***

Объекты теплоэнергетики в ряде случаев с допустимым приближением описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Ниже приведена аналитическая запись решений в общем виде для некоторых групп уравнений, которые будут наиболее часто встречаться.

Группа однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами  $a_0, a_1, a_2$ :

а) заданное уравнение приводится к виду:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0;$$

б) записывается характеристическое уравнение, соответствующее заданному:

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0;$$

в) корни характеристического уравнения:

$$r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2};$$

г) общий вид решения зависит от корней характеристического уравнения и может иметь одну из следующих записей:

- если  $r_1 \neq r_2$  (корни различные и действительные), то

$$y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x};$$

- если  $r_1 = r_2$  (корни равные и действительные), то

$$y = e^{r_1 x} (\lambda_1 + \lambda_2 x);$$

- если  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  (корни комплексные;  $\alpha$  – действительная и  $\beta i$  – мнимая часть корней), то

$$y = e^{\alpha x} (\lambda_1 \cos \beta x + \lambda_2 \sin \beta x),$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – постоянные интегрирования.

Группа неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (правая часть уравнения может быть постоянной величиной или функцией аргумента):

а) заданное уравнение записывается в виде:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = Q(x);$$

б) решение уравнения представляется как сумма

$$y = y_{одн} + y_{ч.н.},$$

где  $y_{одн}$  – общее решение однородного уравнения, соответствующее заданному (находят по указанной выше методике);  $y_{ч.н.}$  – частное решение заданного неоднородного уравнения.

### ***3.2.2. Применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений***

Из курса математики известно, что операционное исчисление устанавливает некоторые свойства операционного соответствия или правила преобразования Лапласа, которые с практической точки зрения следует рассматривать как математический приём, позволяющий относительно просто решать дифференциальные уравнения. Кратно напомним этот приём.

Функцию можно определить как закон соответствия между двумя множествами чисел:  $y = f(x)$ , т.е. множеству чисел  $x$  соответствует определённое множество чисел  $y$ . Но соответствие может быть не только между величинами из разных множеств, но и между функциями из разных множеств функций. При этом функция одного множества называется оригиналом, а соответствующая ей функция из другого множества – изображением:

$$\underset{\text{оригинал}}{f(t)} \xrightarrow{\text{соответствует}} \underset{\text{изображение}}{\phi(p)}.$$

Возможны различные формы преобразования функции действительной переменной  $t$  в соответствующие функции комплексного переменного  $p$ . Причины, побуждающие переход из области одних функций в область других, могут быть различны, чаще всего это вызвано стремлением упростить вычислительные действия с исходной функцией. Широко приме-

няемое в научных и инженерных исследованиях преобразование Лапласа преследует такую же цель и позволяет вместо дифференциальных уравнений оперировать алгебраическими уравнениями. При этом преобразование осуществляется следующим образом:

$$L[f(t)] = \phi(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

где  $L$  – символ прямого преобразования по Лапласу;  $p = \alpha + \beta i$  ( $i = \sqrt{-1}$ ;  $\alpha$  – действительная часть  $p$ ;  $\beta i$  – мнимая часть  $p$ ); ограничения, накладываемые на временную функцию,  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Переход в область  $t$  осуществляется с помощью формулы обратного преобразования Лапласа:

$$L^{-1}[\phi(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \phi(p)e^{-pt} dt.$$

Последовательность решения дифференциального уравнения с использованием преобразований по Лапласу можно представить следующей схемой:

- а) приведение исходного уравнения к операторной форме (используются правила и таблица преобразований по Лапласу);
- б) решение операторного уравнения;
- в) нахождение решения исходного уравнения по решению операторного уравнения (используются таблица преобразований по Лапласу).

### 3.2.3. Передаточная функция

В результате действий с дифференциальными уравнениями в операторной форме можно получить так называемую передаточную функцию, которая широко используется для характеристики исследуемого объекта как эквивалент дифференци-

ального уравнения. Смысл этого понятия проиллюстрируем на примере преобразования дифференциального уравнения второго порядка

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = x_{ex},$$

где  $y$  и  $x_{ex}$  – соответственно выходная и входная величины;  $a_{0,1,2} = const$ .

В результате преобразований по Лапласу (при нулевых начальных условиях) это уравнение может быть записано в операторной форме:

$$a_2 p^2 Y(p) + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = X_{ex}(p)$$

или

$$\frac{Y(p)}{X_{ex}(p)} = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = W(p).$$

Выражение  $Y(p)/X_{ex}(p)$  называется передаточной функцией и обозначается  $W(p)$ . Таким образом, под передаточной функцией объекта понимается отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях. Если выходным параметром является исходная функция, а входным возмущение, то передаточной функцией будет отношение изображения функции к изображению возмущения. Передаточная функция, так же как и дифференциальное уравнение, полностью определяет динамические свойства объекта. Зная передаточную функцию, можно найти решение дифференциального уравнения, которое описывает этот объект, совершив обратное преобразование по Лапласу:

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = L^{-1}[W(p)X_{ex}(p)].$$

### 3.3. Структурные схемы теплоэнергетических объектов

Теплоэнергетические объекты многообразны по устройству, неодинаковы по сложности, отличаются физической природой процессов и могут состоять из большего или меньшего числа элементов, взаимосвязанных между собой. При изучении сложных объектов удобно расчленить их на ряд звеньев и затем составить из этих звеньев структурные схемы. Составление структурных схем во многих случаях облегчает нахождение математического описания объекта в целом, если предварительно составить математические описания отдельных его звеньев. В качестве звеньев обычно выделяют участки, которые либо являются повторяющимися элементами конструкции аппарата, либо отличаются от других участков типом лимитирующего процесса, либо конструктивно представляют самостоятельную часть установки, либо разнятся по динамическим свойствам.

Задача составления структурной схемы объекта является весьма ответственной и трудно формализуемой, так как степень детализации при разделении одного и того же объекта на звенья может быть различной. Принципиально расчленение объекта на звенья не имеет предела, поэтому выбор числа звеньев должен производиться не произвольно, а с учётом уровня знаний о процессе, реальной возможности решения получаемых уравнений и т.д.

Элементарные звенья описываются соответствующими дифференциальными уравнениями или характеризуются передаточными функциями, которые имеют довольно простой вид.

Общая (эквивалентная) передаточная функция изучаемого объекта будет зависеть от количества звеньев и их передаточных функций, а также от порядка соединения звеньев между собой. В структурных схемах каждый элемент (звено) изображается прямоугольником, а связи между звеньями – линиями со стрелками, которые показывают направление потоков. Кружки на схемах обозначают алгебраическое сложение потоков.



Передаточная функция цепочки соответствующего соединения элементов определяется по следующим правилам.

1) Последовательное соединение элементов. Передаточная функция  $W(p)$  двух последовательно соединённых элементов с передаточными функциями  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  может быть записана так (рис. 3.1):

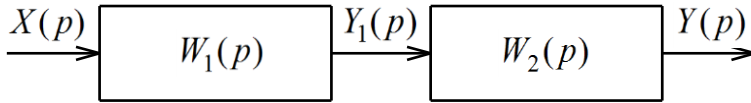


Рис. 3.1. Последовательное соединение элементов

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_2(p)Y_1(p)}{X(p)} = W_2(p) \cdot W_1(p).$$

Аналогично для цепочки из  $n$  последовательно соединённых элементов получим

$$W(p) = \prod_{k=1}^n W_k(p).$$

2) Параллельное соединение элементов. Предположим, что два элемента с передаточными функциями  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  соединены параллельно (рис. 3.2).

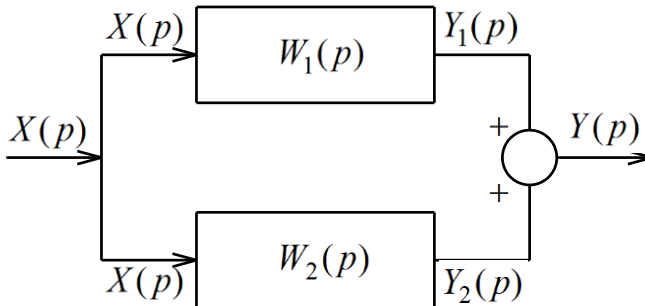


Рис. 3.2. Параллельное соединение элементов

Передаточная функция такой цепочки  $W(p)$  имеет вид:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Y_1(p) + Y_2(p)}{X(p)} = W_1(p) + W_2(p).$$

Для  $n$  элементов, соединённых параллельно, запишем

$$W(p) = \sum_{k=1}^n W_k(p).$$

3) Соединение элементов по схеме с обратной связью.

Для получения передаточной функции  $W(p)$  такой цепочки соединения элементов с передаточными функциями  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  воспользуемся записанными в соответствии с рис. 3.3 очевидными равенствами:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}; \quad W_1(p) = \frac{Y(p)}{X_1(p)}; \quad W_2(p) = \frac{Y_1(p)}{X(p)}$$

и  $X_1(p) = X(p) + Y_1(p)$  – для положительной обратной связи (обратное взаимодействие), или  $X_1(p) = X(p) - Y_1(p)$  – при отрицательной обратной связи (обратное воздействие замедляет процесс).

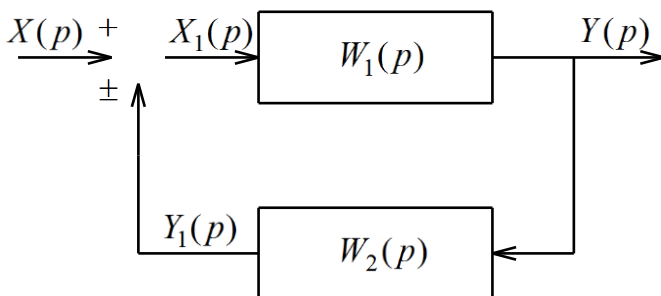


Рис. 3.3. Соединение элементов по схеме с обратной связью

В результате совместного решения этих уравнений получаем два выражения для передаточной функции цепочки:

- при положительной обратной связи

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)} ;$$

- при отрицательной обратной связи

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}$$

### 3.4. Математические модели процессов перемешивания веществ

#### 3.4.1. Модель идеального перемешивания

##### 3.4.1.1. Общая характеристика модели идеального перемешивания

Модель идеального перемешивания представляет идеализированный поток и является теоретической моделью. Согласно этой модели принимается, что поступающий в аппарат поток мгновенно распределяется по всему объёму вследствие полного перемешивания частиц среды. При этом температуры во всех точках аппарата и в потоке на выходе из него одинаковы.

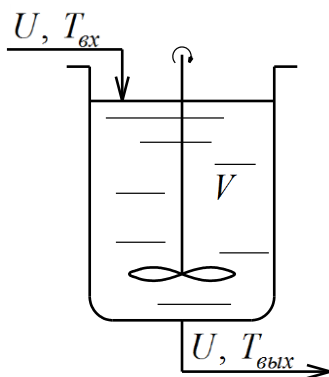


Рис. 3.4. Схематическое изображение модели идеального перемешивания

Схематическое изображение модели идеального перемешивания приведено на рис. 3.4, пользуясь которым можно записать определение модели идеального перемешивания в виде

$$T_{\text{ex}} \xrightarrow[\text{(мгновенно)}]{\text{скачок}} T = T_{\text{вых}}.$$

### 3.4.1.2. Вывод дифференциального уравнения модели

Для получения дифференциального уравнения, описывающего распределение температуры во времени, принимаем следующие обозначения:  $T_{\text{ex}}$ ,  $T_{\text{вых}}$ ,  $T$  – температура в потоке соответственно на входе, выходе и в любой точке объёма аппарата, К;  $V$  – объём зоны идеального перемешивания;  $\text{м}^3$ ;  $U$  – объёмный расход потока, поступающего в зону идеального перемешивания и выходящего из неё (для проточных систем принимается, что  $U$  сохраняет своё постоянное значение),  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $t$  – время, с;  $\rho$  и  $c_p$  – плотность и массовая теплоёмкость потока соответственно,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ,  $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ .

Количество теплоты в потоке в общем случае можно представить как

$$Q(t) = \rho c_p U T(t).$$

Для рассматриваемого объекта (рис. 3.4) входной и выходной потоки будут

$$Q_{\text{ex}}(t) = \rho c_p U T_{\text{ex}}(t), \quad Q_{\text{вых}}(t) = \rho c_p U T_{\text{вых}}(t),$$

тогда в аппарате будет аккумулироваться некоторое количество теплоты за время  $dt$ :

$$dq(t) = [Q_{\text{ex}}(t) - Q_{\text{вых}}(t)] dt = \rho c_p U [T_{\text{ex}}(t) - T_{\text{вых}}(t)] dt,$$

откуда, разделив обе части на  $\rho c_p V dt$ , получим

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{U}{V} [T_{\text{ex}}(t) - T_{\text{вых}}(t)],$$

но  $T_{\text{вых}}(t) = T(t)$ , тогда окончательно будем иметь

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [T_{ex}(t) - T(t)], \quad (3.1)$$

где  $\tau = V/U$  – время пребывания потока в аппарате, с.

К полученному уравнению добавляется начальное условие

$$T(0) = T_0. \quad (3.2)$$

Обратим внимание, что сформулированная задача математически идентична задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

### 3.4.1.3. Решение уравнений модели

Применим к уравнению (3.1) преобразование Лапласа в предположении, что  $T_0 = 0$ , тогда получим

$$pT_L(p) = \frac{1}{\tau} [T_{L_{ex}}(p) - T_L(p)],$$

откуда передаточная функция модели идеального перемешивания есть

$$W(p) = \frac{T_L(p)}{T_{L_{ex}}(p)} = \frac{1}{\tau p + 1},$$

где  $T_L(p)$ ,  $T_{L_{ex}}(p)$  – изображения  $T(t)$  и  $T_{ex}(t)$ .

Чтобы получить решение исходного дифференциального уравнения (с нулевым начальным условием (3.2)) необходимо произвести обратное преобразование по Лапласу:

$$T(t) = L^{-1} [W(p)T_{L_{ex}}(p)].$$

Для практических целей характерны два важных случая:

- когда  $T_{ex}(t) = 1(t)$  – функция Хэвисайда, для которой  $T_{L_{ex}}(p) = 1/p$ ;
- когда  $T_{ex}(t) = \delta(t)$  – функция Дирака, для которой  $T_{L_{ex}}(p) = 1$ .

Поэтому для этих случаев имеем:

$$T(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{\tau p + 1} \cdot \frac{1}{p} \right] = 1 - e^{-t/\tau}; \quad (3.3)$$

$$T(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{\tau p + 1} \cdot 1 \right] = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (3.4)$$

Характерный вид (3.3) и (3.4) приведён соответственно на рис. 3.5 и рис. 3.6.

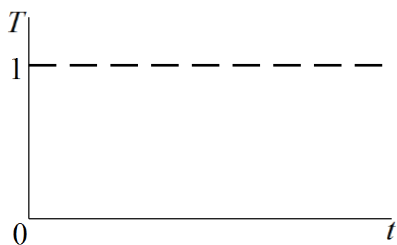
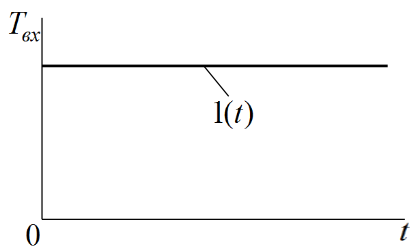


Рис. 3.5. Температуры на входе и выходе из аппарата при  $T_{ex}(t) = 1(t)$

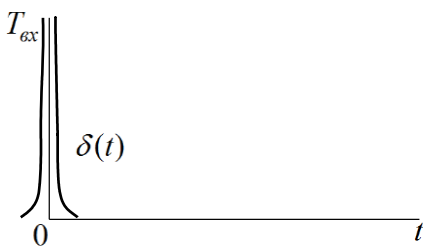


Рис. 3.6. Температуры на входе и выходе из аппарата при  $T_{ex}(t) = \delta(t)$

### 3.4.2. Модель идеального вытеснения

#### 3.4.2.1. Общая характеристика модели идеального вытеснения

Модель идеального вытеснения – это теоретическая модель с идеализированной структурой движущегося потока. В соответствии с моделью идеального вытеснения принимается

поршневое течение без перемешивания вдоль потока при равномерном распределении температуры вещества в направлении, перпендикулярном движению (рис. 3.7). При этом время пребывания всех частиц в зоне идеального вытеснения одинаково и равно отношению объёма зоны вытеснения к объёмному расходу среды  $\tau = V/U$ .

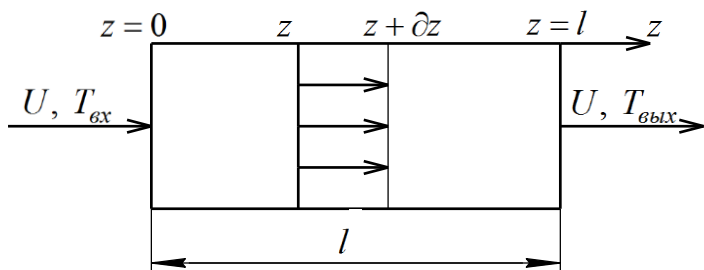


Рис. 3.7. Схематичное изображение модели идеального вытеснения

### 3.4.2.2. Дифференциальное уравнение модели

Пусть зона идеального вытеснения имеет площадь  $S$ ,  $\text{м}^2$  и выделим элементарный объём вдоль потока размером  $\partial z$ , для которого составим тепловой баланс (рис. 3.8).

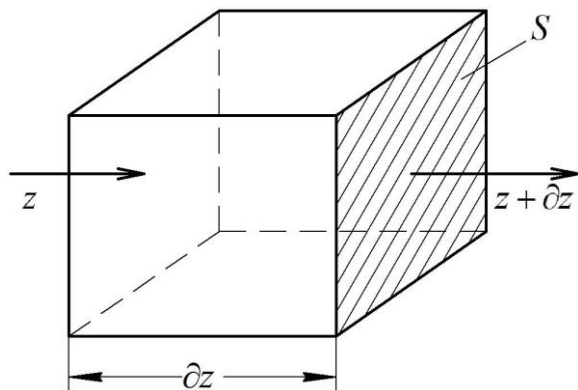


Рис. 3.8. Элементарный объём зоны потока вытеснения

Количество теплоты, входящее через сечение  $z$  в элементарный объём, составляет за время  $\delta t$

$$\delta q(z, t) = \rho c_p U T(z, t) \delta t,$$

где  $\rho$ ,  $c_p$  – плотность и теплоёмкость потока,  $\text{кг/м}^3$ ,  $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ .

Количество теплоты, уходящее через сечение  $z + \delta z$  из элементарного объёма, составляет за время  $\delta t$

$$\delta q(z + \delta z, t) = \rho c_p U T(z + \delta z, t) \delta t.$$

Тогда в элементарном объёме аккумулируется теплота

$$\begin{aligned} \delta Q(z, t) &= \delta q(z, t) - \delta q(z + \delta z, t) = \\ &= \rho c_p U T(z, t) \delta t - \rho c_p U T(z + \delta z, t) \delta t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как

$$T(z + \delta z, t) \approx T(z, t) - \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \delta z$$

и разделив (3.5) на  $S \rho c_p \delta z \delta t$ , получим

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial T(z, t)}{\partial z}, \quad (3.6)$$

где  $v = U/S$ .

Уравнение (3.6) дополняется начальным условием

$$T(z, 0) = T_0(z) \quad (3.7)$$

и граничным условием

$$T(0, t) = T_{ex}(t). \quad (3.8)$$

Полученная математическая задача (3.6) - (3.8) классифицируется как начально-краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.



### 3.4.2.3. Решение уравнения модели

Установим, прежде всего, структуру передаточной функции модели. Для этого, не нарушая общности рассуждений, положим  $T_0(z) \equiv 0$ , тогда система (3.6) - (3.8) перепишется в виде:

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial T(z, t)}{\partial z}; \quad (3.9)$$

$$T(z, 0) = 0; \quad (3.10)$$

$$T(0, t) = T_{ex}(t). \quad (3.11)$$

После преобразования системы (3.9) - (3.11) путём применения оператора Лапласа получим:

$$v \frac{dT_L(z, p)}{dz} = -pT_L(z, p); \quad (3.12)$$

$$T_L(0, p) = L[T_{ex}(t)] = T_{L_{ex}}(p). \quad (3.13)$$

Интегрирование (3.12) с начальным условием (3.13) даёт

$$T_L(z, p) = T_{L_{ex}}(p) \exp\left(-\frac{p}{v} z\right). \quad (3.14)$$

Так как нас интересует температура на выходе из аппарата, т.е. при  $z = l$ , то из (3.14) следует

$$T_L(l, p) = T_{L_{ex}}(p) \exp\left(-\frac{p}{v} l\right),$$

но  $\tau = l/v$  – время пребывания потока в аппарате, поэтому

$$W(p) = \frac{T_L(l, p)}{T_{L_{ex}}(p)} = \exp(-p\tau) \quad (3.15)$$

есть передаточная функция модели идеального вытеснения.

Таким образом, температура на выходе из аппарата идентифицируется по формуле

$$T(l, t) = L^{-1} [\exp(-p\tau) T_{L_{ex}}(p)],$$

откуда, если

$$T_{ex}(t) = 1(t), \text{ то } T(l, t) = 1(t - \tau);$$

если

$$T_{ex}(t) = \delta(t), \text{ то } T(l, t) = \delta(t - \tau).$$

Характерный вид  $T(l, t)$  представлен на рис. 3.9 и 3.10.

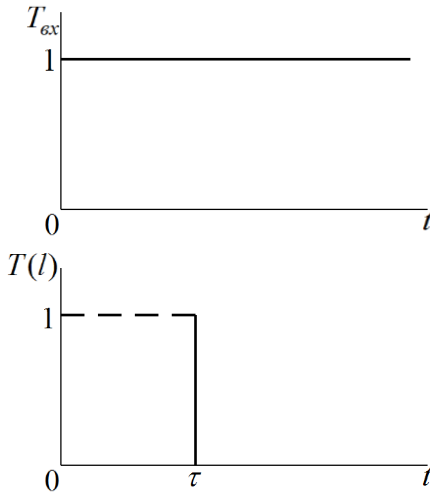


Рис. 3.9. Температуры на входе и выходе из аппарата при  $T_{ex}(t) = 1(t)$

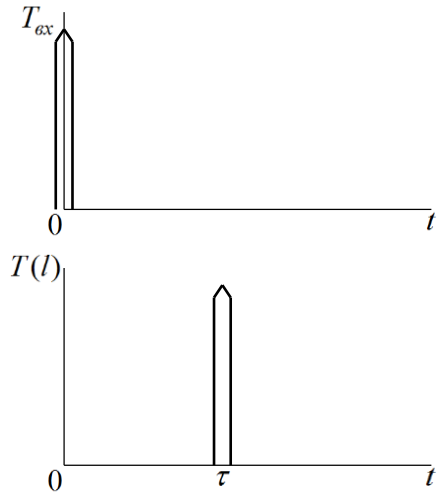


Рис. 3.10. Температуры на входе и выходе из аппарата при  $T_{ex}(t) = \delta(t)$

Модель идеального вытеснения широко используется в теплоэнергетике при описании аппаратов, работающих по принципу вытеснения, например, теплообменников.

Достоинствами модели являются относительная простота решения уравнений математического описания, построенного с применением данной модели, и допустимая степень воспроизведения реальных гидродинамических условий.

Практически трубчатые аппараты с большим отношением длины трубок к их диаметру ( $l/d > 20$ ) при турбулентном движении жидкости или газа ( $Re > 2300$ ) могут описываться как модели идеального вытеснения. Это объясняется тем, что при  $l/d > 20$  продольное перемешивание незначительно и мало искажает поток вытеснения, а турбулентное движение при этом обеспечивает равномерное распределение температуры по сечению аппарата.

### 3.4.3. Диффузионная модель

#### 3.4.3.1. Характеристика модели

Диффузионная модель получила широкое распространение при оценке реальных потоков в аппаратах, в которых происходит продольное и (или) радиальное перемешивание.

Природа возникновения продольного и радиального перемешивания весьма сложна. Исходя из теории массообмена, в настоящее время считают, что перемешивание возникает в результате молекулярной и конвективной диффузии. Молекулярная диффузия – это перенос массы вещества молекулами. Основным законом молекулярной диффузии является первый закон Фика, согласно которому количество продиффундировавшего вещества пропорционально градиенту концентрации, площади, перпендикулярной направлению диффузионного потока, и времени:

$$dM = -D \frac{\partial c}{\partial z} dF dt, \quad (3.16)$$

где  $dM$  – количество продиффундировавшего вещества;  $\partial c / \partial z$  – градиент концентрации в направлении диффузии  $z$ ;  $dF$  – элементарная площадь, через которую происходит диффузия (перпендикулярная направлению диффузионного

потока);  $dt$  – время диффузии;  $D$  – коэффициент диффузии. Знак «минус» в (3.16) показывает, что при молекулярной диффузии в направлении перемещения вещества концентрация убывает.

Конвективная диффузия – это перенос вещества макро-частицами среды, которая определяется турбулентностью потока, его гидродинамическим состоянием. Основным закон конвективной диффузии устанавливает, что количество вещества, перенесённое от поверхности раздела фаз в воспринимающую фазу, пропорционально разности концентраций у поверхности раздела фаз и в ядре потока воспринимающей фазы, поверхности фазового контакта и времени:

$$dM = \beta (c_s - c_f) dF dt, \quad (3.17)$$

где  $\beta$  – коэффициент массоотдачи;  $c_s$  – концентрация в воспринимающей фазе у поверхности раздела фаз;  $c_f$  – концентрация в ядре потока воспринимающей фазы.

Различают однопараметрическую и двухпараметрическую диффузионные модели. Если при построении модели учитывают только продольное перемешивание, а в радиальном направлении концентрацию принимают постоянной, то такая модель называется однопараметрической. Эта модель характеризуется одним параметром, учитывающим продольное перемешивание, который обозначается  $D_L$ . Основой однопараметрической диффузионной модели является модель вытеснения, осложнённая обратным перемешиванием.

Если задача требует, чтобы математическое описание учитывало, кроме продольного, и радиальное перемешивание, то при составлении модели необходимо ввести дополнительно второй параметр – коэффициент радиального перемешивания –  $D_R$ . Тогда модель становится двухпараметрической. Она более точно отражает процесс, но её описание и решение значительно усложняется. Кроме того, решение обычно имеет настолько сложный вид, что применять его на практике крайне неудобно,

поэтому двухпараметрическая модель используется сравнительно редко и рассматриваться в дальнейшем не будет.

### 3.4.3.2. Дифференциальное уравнение модели

Структуру потока, соответствующую однопараметрической диффузионной модели, можно представить так: некоторая технологическая среда перемещается со средней линейной скоростью  $u$  в продольном канале, вдоль которого происходит перемешивание за счёт прямого и обратного потоков при равномерном распределении концентрации вещества в направлении, перпендикулярном движению.

Воспользуемся рис. 3.7 и рис. 3.8, записав плотность переноса вещества в виде

$$j(z, t) = uc(z, t) - D_L \frac{\partial c(z, t)}{\partial z}, \quad (3.18)$$

где  $u = U/S$ .

Масса вещества, поступившая в элементарный объём через сечение  $z$  за промежуток времени  $\partial t$  равна

$$M(z, t) = \left[ uc(z, t) - D_L \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} \right] S \partial t;$$

масса вещества, вышедшая из элементарного объёма через сечение  $z + \partial z$  за промежуток времени  $\partial t$  есть

$$M(z + \partial z, t) = \left[ uc(z + \partial z, t) - D_L \frac{\partial c(z + \partial z, t)}{\partial z} \right] S \partial t,$$

а с учётом того, что

$$c(z + \partial z, t) = c(z, t) + \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} dz;$$

$$\frac{c(z + \partial z, t)}{\partial z} = \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial^2 c(z, t)}{\partial z^2} dz,$$

накопление массы вещества в элементарном объёме за время  $\partial t$  составит

$$\begin{aligned} \partial M(z, t) &= M(z, t) - M(z + \partial z, t) = \\ &= \left[ -u \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} + D_L \frac{\partial^2 c(z, t)}{\partial z^2} \right] S \partial z \partial t. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Разделив обе части (3.19) на  $S \partial z \partial t$  и имея в виду, что

$$\frac{\partial M(z, t)}{S \partial z \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial M(z, t)}{\partial V} \right] = \frac{\partial c(z, t)}{\partial t},$$

получим окончательное уравнение диффузионной модели:

$$\frac{\partial c(z, t)}{\partial t} = -u \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} + D_L \frac{\partial^2 c(z, t)}{\partial z^2}. \quad (3.20)$$

Следует отметить, что при отсутствии продольного перемешивания ( $D_L = 0$ ) уравнение (3.20) превращается в уравнение модели идеального вытеснения, что полностью соответствует физическому представлению об однопараметрической диффузионной модели, как о модели вытеснения, осложнённой продольным перемешиванием.

Коэффициент продольного перемешивания  $D_L$  ( $\text{м}^2/\text{с}$ ) находится опытным путём или вычисляется по расчётным формулам, составленным для аппаратов различных типов. При экспериментальном определении  $D_L$  его обычно представляют в виде безразмерного комплекса. При этом используют критерий Пекле  $\text{Pe}_L = uL/D_L$ , где  $L$  – определяющий линейный размер зоны (системы). Если вместо (3.18) использовать плотность переноса теплоты в виде

$$i(z, t) = c_p \rho u T(z, t) - D_T \frac{\partial T(z, t)}{\partial z}, \quad (3.21)$$

где  $D_T$  – коэффициент продольного переноса тепла (Вт/(м·К)), при этом  $D_T = \varepsilon\lambda$ , где  $\varepsilon$  – коэффициент конвекции,  $\lambda$  – теплопроводность среды (таким образом,  $D_T$  по физическому смыслу является «эффективным» коэффициентом теплопроводности среды), то можно получить аналогичное по форме (3.20) уравнение, отражающее распределение температуры:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = -u \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} + a_{\text{эф}} \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}, \quad (3.22)$$

где  $a_{\text{эф}}$  – эффективный коэффициент температуропроводности.

### 3.4.3.3. Решение уравнений модели в общем виде

Применим к (3.20) преобразование Лапласа по переменной  $t$

$$\frac{d^2 \phi(z,p)}{dz^2} - \frac{u}{D_L} \frac{d\phi(z,p)}{dz} - \frac{p}{D_L} \phi(z,p) = 0, \quad (3.23)$$

считая, что  $c(z,0) = 0$ , где  $\phi(z,p) = L[c(z,p)]$ . Общее решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.23) есть

$$\phi(z,p) = \lambda_1 \exp(r_1 z) + \lambda_2 \exp(r_2 z), \quad (3.24)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – постоянные интегрирования, а

$$r_{1,2} = \frac{u}{2D_L} \pm \sqrt{\left(\frac{u}{2D_L}\right)^2 + \frac{p}{D_L}},$$

причём  $r_1$  и  $r_2$  – действительные и различные. Обозначим

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{u}{2D_L}\right)^2 + \frac{p}{D_L}}; \quad \beta = \frac{u}{2D_L},$$

тогда (3.24) запишется в более компактном виде

$$\phi(z, p) = \lambda_1 \exp[(\beta + \alpha)z] + \lambda_2 \exp[(\beta - \alpha)z]. \quad (3.25)$$

Для нахождения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  необходимо сформулировать граничные условия. При  $z=0$  обычно используется так называемое условие Данквертса

$$c_{\text{ex}}(t) = c(0, t) - \frac{D_L}{u} \frac{\partial c(0, t)}{\partial z}, \quad (3.26)$$

при  $z=l$  (на выходе из аппарата)

$$\frac{\partial c(l, t)}{\partial z} = 0. \quad (3.27)$$

Изображения по Лапласу граничных условий (3.26) и (3.27) таковы:

$$\phi_{\text{ex}} = \phi(0, p) - \frac{D_L}{u} \frac{d\phi(0, p)}{dz}; \quad (3.28)$$

$$\frac{d\phi(l, p)}{dz} = 0. \quad (3.29)$$

Найдём производную от (3.25) по  $z$ :

$$\phi'(z, p) = \lambda_1 (\beta + \alpha) \exp[(\beta + \alpha)z] + \lambda_2 (\beta - \alpha) \exp[(\beta - \alpha)z].$$

Тогда

$$\phi(0, p) = \lambda_1 + \lambda_2;$$

$$\frac{d\phi(z, p)}{dz} = \lambda_1 (\beta + \alpha) + \lambda_2 (\beta - \alpha);$$

$$\phi(l, p) = \lambda_1 \exp[(\beta + \alpha)l] + \lambda_2 \exp[(\beta - \alpha)l];$$



$$\frac{d\phi(l, p)}{dz} = \lambda_1 (\beta + \alpha) \exp[(\beta + \alpha)l] + \lambda_2 (\beta - \alpha) \exp[(\beta - \alpha)l].$$

Таким образом, из (3.28) и (3.29) найдём

$$\lambda_1 = -\frac{2\phi_{ex}(1-a)\exp(-\alpha l)}{\left[(1+a)^2 \exp(\alpha l) - (1-a)^2 \exp(-\alpha l)\right]};$$

$$\lambda_2 = -\frac{2\phi_{ex}(1+a)\exp(\alpha l)}{\left[(1+a)^2 \exp(\alpha l) - (1-a)^2 \exp(-\alpha l)\right]},$$

где  $\alpha = \alpha/\beta$ .

Подставляя найденные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в (3.25), получим

$$\begin{aligned} \phi(z, p) &= 2\phi_{ex} \exp(\beta z) \times \\ &\times \frac{\{(1+a)\exp[\alpha(l-z)] - (1-a)\exp[-a(l-z)]\}}{\left[(1+a)^2 \exp(\alpha l) - (1-a)^2 \exp(-\alpha l)\right]}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Если в (3.30) положить  $z=l$ , то получим передаточную функцию однопараметрической диффузионной модели:

$$W(p) = \frac{\phi(l, p)}{\phi_{ex}(p)} = \frac{4\alpha \exp(\beta l)}{\left[(1+a)^2 \exp(\alpha l) - (1-a)^2 \exp(-\alpha l)\right]}.$$

Характерный качественный вид  $c_{вых}$  при  $c_{ex} = 1(t)$  и  $c_{ex} = \delta(t)$  показан соответственно на рис. 3.11 и рис. 3.12.

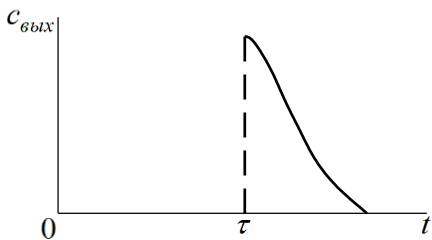
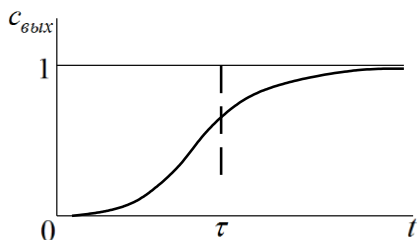
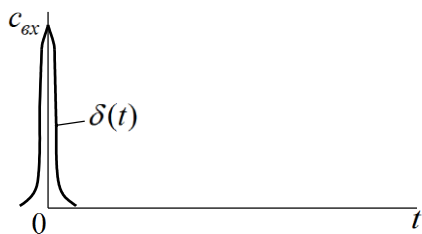
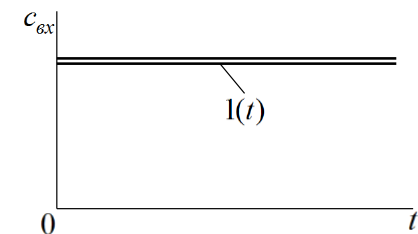


Рис. 3.11. Концентрация на входе и выходе из аппарата при  $c_{вх}(t) = 1(t)$

Рис. 3.12. Концентрация на входе и выходе из аппарата при  $c_{вх}(t) = \delta(t)$

### 3.4.4. Ячеечная модель

#### 3.4.4.1. Характеристика модели

Типовые модели идеального перемешивания, идеально-го вытеснения, диффузионная модель с определённой степенью точности могут применяться для воспроизведения структуры и гидродинамических свойств потоков в различных аппаратах. Однако идеальные модели в ряде случаев неадекватны реальному процессу, а диффузионная модель отличается сложностью. По этой причине удобнее представлять реальные потоки в виде так называемой ячейочной модели.

Физическая сущность ячейочной модели заключается в том, что движущийся материальный поток рассматривается состоящим из ряда последовательно соединённых ячеек. При этом принимается, что в каждой из таких ячеек поток имеет структуру полного перемешивания, а между ячейками перемешивание отсутствует. Количество предполагаемых ячеек идеального перемешивания  $n$  является параметром, характеризую-

ющим ячеечную модель реального потока. Если  $n = 1$ , ячеечная модель переходит в модель идеального перемешивания, а если  $n \rightarrow \infty$  – в модель идеального вытеснения.

#### 3.4.4.2. Математическое описание ячеечной модели

Схематическое изображение ячеечной модели представлено на рис. 3.13.

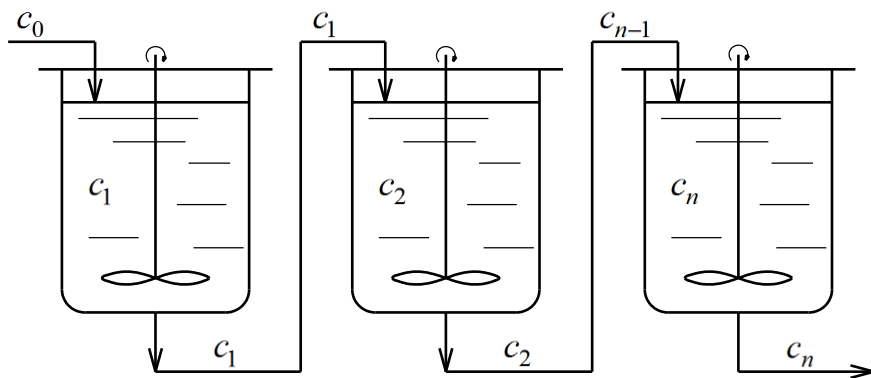


Рис. 3.13. Схема ячеечной модели

Сущность ячеечной модели предопределяет такие допущения:

а) в каждой ячейке поток имеет структуру полного перемешивания, и концентрация  $c_i$  не изменяется в пределах любой ячейки ( $i = \overline{1, n}$  – индекс ячейки);

б) между ячейками перемешивание отсутствует;

в) объемный расход  $U$  не изменяется по длине и сечению потока. Для удобства также принимается, что объемы каждой из предполагаемых  $n$  ячеек одинаковы и равны  $V_1$ ; сумма объемов всех ячеек равна объёму зоны, для которой справедлива ячеечная модель ( $V = kV_1$ ); среднее время пребывания частиц в каждой ячейке  $\tau_1 = V_1/U = \tau/n$ , а среднее время пребывания в системе  $\tau = V/U$ .

Поскольку в каждой ячейке поток находится в состоянии идеального перемешивания, то для любой  $i$ -ой ячейки справедливо уравнение модели идеального перемешивания

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{1}{\tau_1}(c_{i-1} - c_i). \quad (3.31)$$

Если учесть, что  $\tau_1 = \tau/n$ , то уравнение (3.31) примет вид:

$$\frac{1}{n} \frac{dc_i}{dt} = \frac{1}{\tau}(c_{i-1} - c_i), \quad (3.32)$$

где  $i = \overline{1, n}$ . Совокупность уравнений (3.32), образующих систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, является математическим образом ячеечной модели.

Если вместо  $c_i$  иметь в виду температуру  $T_i$ , то получим аналогичную систему и для описания температур в аппарате.

#### 3.4.4.3. Решение системы уравнений ячеечной модели

В силу данных определений ячеечную модель представим объектом, состоящим из  $n$  элементарных звеньев идеального перемешивания, которые имеют передаточные функции

$$W(p) = \frac{1}{\tau_1 p + 1}.$$

Структурная схема такого объекта представлена на рис. 3.14.

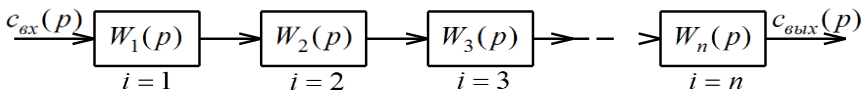


Рис. 3.14. Структурная схема ячеечной модели

Из правила произведения передаточных функций следует

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_1(p) = \frac{1}{(\tau_1 p + 1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{n} p + 1\right)^n}. \quad (3.33)$$

Из (3.33) при  $n \rightarrow \infty$  следует

$$W(p) = e^{-p\tau},$$

т.е. действительно передаточная функция модели идеального вытеснения.

Используя обратное преобразование Лапласа, получим

$$c_{\text{был}}(t) = L^{-1}[c_{\text{был}}(p)] = L^{-1}[W(p)c_{\text{ex}}(p)].$$

Если  $c_{\text{ex}}(p) = 1$ , т.е.  $c_{\text{ex}}(t) = \delta(t)$ , то

$$c_{\text{был}}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{n-1} \frac{1}{\tau_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right);$$

если  $c_{\text{ex}}(p) = 1/p$ , т.е.  $c_{\text{ex}}(t) = 1(t)$ , то

$$c_{\text{был}}(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{t^k}{\tau_1^k}.$$

При определении числа ячеек в ряде случаев можно воспользоваться аналогией между числом  $Pe$  и  $n$ . Между этими параметрами существует связь, которая с достаточной для практических расчётов точностью выражается зависимостью

$$n = \frac{1}{2} Pe.$$

Ячеечная модель достаточно точно воспроизводит свойства потоков в последовательно соединённых аппаратах с интенсивным перемешиванием, например, в абсорбционных колоннах, а также в аппаратах с псевдоожиженным слоем.

## **3.5. Комбинированные модели**

### ***3.5.1. Принцип построения комбинированных моделей***

Типовые гидродинамические модели идеального перемешивания, идеального вытеснения, диффузионная, ячеечная воспроизводят свойства потоков, характеризующихся различной гидродинамикой, но в каждом случае гидродинамический режим по-своему упорядочен и отличается однородностью структуры. При характеристике движения реальных потоков, как правило, ни одна из перечисленных гидродинамических моделей не воспроизводит свойства потока. Это объясняется тем, что в разных частях аппарата устанавливается своя структура потока, при этом гидродинамика не упорядочена и наблюдаются явления такого рода, как застойные зоны, байпасирование, рециклы и т.д.

В подобных случаях необходимо синтезировать так называемые комбинированные модели, принцип построения которых состоит в том, что исследуемый процесс рассматривается декомпозированным на отдельные участки (зоны), соединённые последовательно, параллельно или по схеме с обратной связью, которые отличаются неодинаковой структурой потоков.

### ***3.5.2. Классификация гидродинамических неоднородностей***

При изучении процесса в застойных зонах обычно предполагают, что их содержимое неподвижно или очень медленно обменивается с основным потоком, проходящим через аппарат. В первом случае – представление теоретическое, второй случай приближается к реальной ситуации, так как фактически абсолютно застойных зон быть не может. На практике всегда наблюдается некоторый обмен веществом между застойной зоной и другими частями аппарата, осуществляемый за счёт микро- и макроявлений.

Байпасный поток – часть жидкости (газа), движущаяся параллельно аппарату или некоторой его зоне, в результате че-

го часть потока попадает на выход аппарата, не претерпевая никаких изменений (проскок части потока).

Циркуляционные потоки (рециклы или обратные потоки) – это всякого рода возвраты потока. Они возникают потому, что часть жидкости (газа), которая выводится за пределы сосуда или определённой его части, возвращается в него снова и затем смешивается со свежими порциями вещества на входе в аппарат или некоторую его зону.

Струйный поток (проскальзывание) – местный поток, мгновенно переносящий вещество непосредственно из одной зоны сосуда в другую.

Ниже в качестве примеров рассматриваются некоторые комбинированные модели объектов с усложнённой структурой потока. При этом математическое описание в виде дифференциальных уравнений не записывается, а применяется методика составления уравнений материальных балансов, структурная схема сложного объекта, нахождение его передаточной функции и изображения решения. Затем находится оригинал решения.

### ***3.5.3. Объект, сочетающий зоны идеального перемешивания и байпасирования***

Согласно рис. 3.15, входящий поток с объёмным расходом  $U$  раздваивается: часть потока поступает в зону идеального перемешивания; другая часть – байпасный поток – не претерпевает изменений, проскальзывая сразу на выход, минуя аппарат. Оба потока в точке  $M$  соединяются в один. Пусть  $c$  – массовая концентрация, кг/м<sup>3</sup>, тогда для точки  $M$  запишем величину массового расхода

$$G_{\text{вых}}(t) = U c_{\text{вых}}(t), \quad (3.34)$$

где  $U$  – объёмный расход, м<sup>3</sup>/с. Представим (3.34) в виде

$$G_{\text{вых}}(t) = G_1(t) + G_2(t) = U_1 c_1(t) + U_2 c_{\text{ex}}(t),$$

тогда отсюда получаем

$$G_{\text{вых}}(t) = \frac{U_1}{U} c_1(t) + \frac{U_2}{U} c_{\text{ex}}(t), \quad (3.35)$$

где  $U_1/U = 1 - \beta$ ,  $U_2/U = \beta$  – доля байпасного потока. С учётом данных обозначений соотношение (3.35) запишется после преобразования Лапласа в виде:

$$G_{\text{вых}}(p) = (1 - \beta) c_1(p) + \beta c_{\text{ex}}(p). \quad (3.36)$$

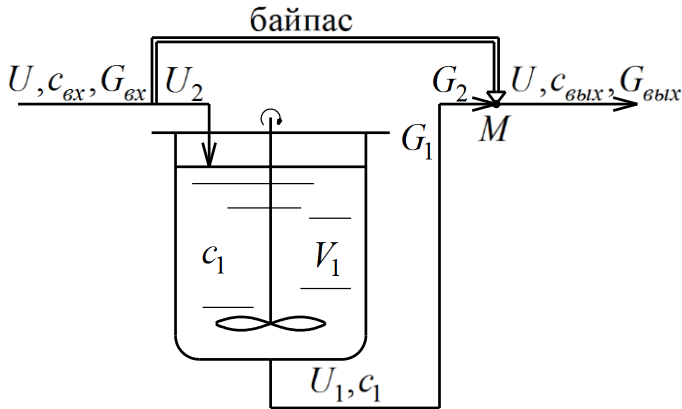


Рис. 3.15. Схема объекта, сочетающего зоны идеального перемешивания и байпасирования

Так как

$$W_1(p) = \frac{c_1(p)}{c_{\text{ex}}(p)} = \frac{1}{\tau_1 p + 1}, \text{ т.е. } c_1(p) = c_{\text{ex}}(p) \frac{1}{\tau_1 p + 1},$$

то из (3.36) следует передаточная функция объекта

$$W(p) = \frac{c_{\text{вых}}(p)}{c_{\text{ex}}(p)} = \beta + (1 - \beta) \frac{1}{\tau_1 p + 1}.$$

Если  $c_{\text{ex}}(t) = 1(t)$ , то



$$\begin{aligned}
 c_{\text{вых}}(t) &= L^{-1}[W(p) \cdot c_{\text{вх}}(p)] = L^{-1}\left[\beta + (1-\beta) \frac{1}{\tau_1 p + 1} \cdot \frac{1}{p}\right] = \\
 &= \beta + (1-\beta) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)\right].
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

Как следует из рис. 3.16, построенного по (3.37),  $c_{\text{вых}}$  в начале координат имеет скачок за счёт байпасного потока, а затем изменение концентрации происходит экспоненциально за счёт зоны идеального перемешивания.

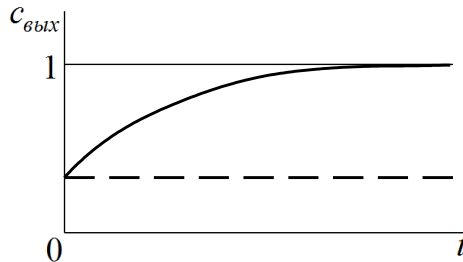


Рис. 3.16. Концентрация на выходе из объекта, состоящего из зоны идеального перемешивания и байпасирования

### ***3.5.4. Объект, сочетающий параллельные зоны идеального перемешивания и идеального вытеснения***

Комбинированная модель такого объекта (рис. 3.15) должна описывать гидродинамику потока, часть которого сначала попадает в зону идеального вытеснения, а затем в точке  $M$  соединяется с другой частью потока, прошедшего зону перемешивания.

Аналогично предыдущему, из уравнений баланса вещества в точке  $M$ , где соединяется поток перемешивания ( $G_1 = U_1 c_1$ ) и поток вытеснения ( $G_2 = U_2 c_2$ ), можно найти

$$G_{\text{вых}}(t) = \frac{U_1}{U} c_1(t) + \frac{U_2}{U} c_2(t) = (1-\beta) c_1(t) + \beta c_2(t). \tag{3.38}$$

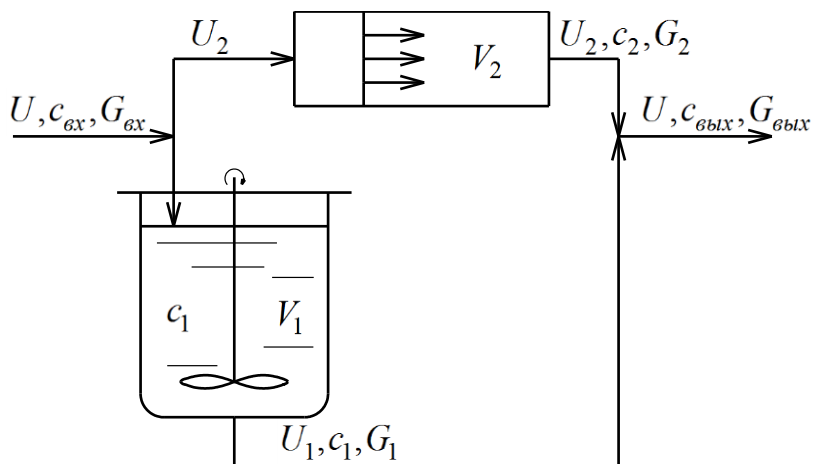


Рис. 3.17. Схема объекта, сочетающего зоны идеального перемешивания и вытеснения

Изображение (3.38) по Лапласу есть

$$G_{\text{вых}}(p) = (1 - \beta)c_1(p) + \beta c_2(p). \quad (3.39)$$

Так как

$$W_1(p) = \frac{c_1(p)}{c_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{\tau_1 p + 1} \quad \text{и} \quad c_1(p) = c_{\text{вх}}(p) \frac{1}{\tau_1 p + 1};$$

$$W_2(p) = \frac{c_2(p)}{c_{\text{вх}}(p)} = \exp(-p\tau_2) \quad \text{и} \quad c_2(p) = c_{\text{вх}}(p) \exp(-p\tau_2),$$

то после подстановки полученных выражений в (3.39) получим

$$W(p) = \frac{c_{\text{вых}}(p)}{c_{\text{вх}}(p)} = (1 - \beta) \frac{1}{\tau_1 p + 1} + \beta \exp(-p\tau_2),$$

где  $\tau_1 = V_1/U_1$ ;  $\tau_2 = V_2/U_2$ ;  $V_1, V_2$  – объёмы зон идеального перемешивания и вытеснения соответственно.

При  $c_{\text{вх}}(t) = 1(t)$  найдём

$$\begin{aligned}
c_{\text{вых}}(t) &= L^{-1} [W(p) \cdot c_{\text{вх}}(p)] = \\
&= (1-\beta) L^{-1} \left[ \frac{1}{\tau_1 p + 1} \cdot \frac{1}{p} \right] + \beta L^{-1} \left[ \frac{1}{p} \exp(-p\tau_2) \right] = \quad (3.40) \\
&= (1-\beta) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right] + \beta \cdot 1(t - \tau_2).
\end{aligned}$$

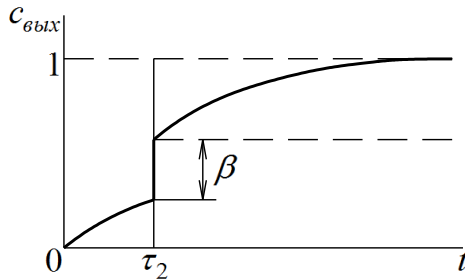


Рис. 3.18. Концентрация на выходе из объекта, сочетающего зоны идеального перемешивания и вытеснения при  $c_{\text{вх}}(t) = 1(t)$

### ***3.5.5. Объект, сочетающий последовательно расположенные зоны идеального перемешивания и идеального вытеснения***

Последовательное расположение указанных зон можно представить в двух вариантах (рис. 3.19).

Для установления передаточной функции такого объекта воспользуемся тем, что передаточные функции зон известны:

- зона идеального перемешивания

$$W_1(p) = \frac{1}{\tau_1 p + 1};$$

- зона идеального вытеснения

$$W_2(p) = \exp(-p\tau_2).$$

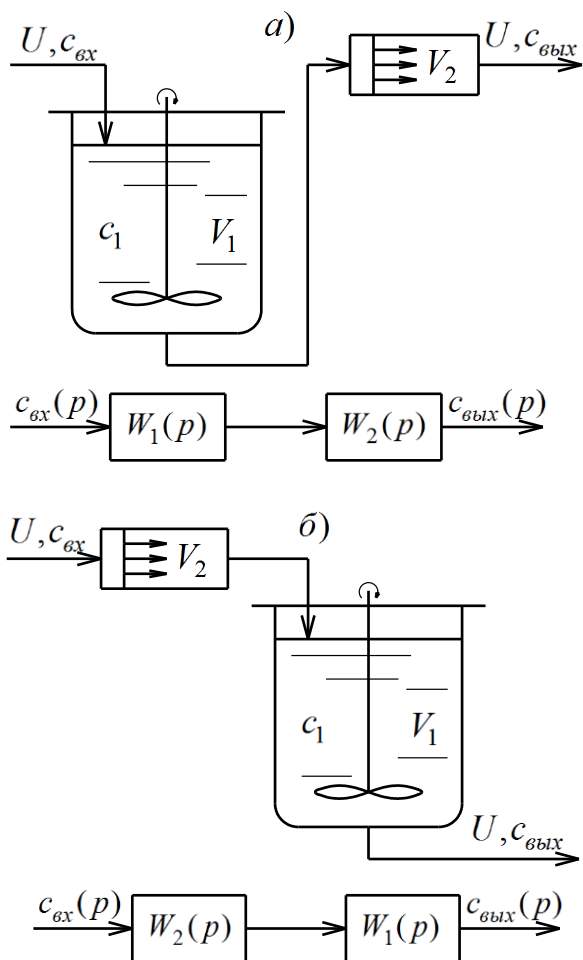


Рис. 3.19. Схемы объекта, сочетающего последовательное расположение зон идеального перемешивания и вытеснения (а) и зон идеального вытеснения и перемешивания (б) и их структурные схемы

Передаточную функцию всего рассматриваемого объекта по праву последовательного соединения элементарных звеньев запишем как произведение передаточных функций этих звеньев:

$$W(p) = \frac{c_{\text{вbx}}(p)}{c_{\text{ex}}(p)} = W_1(p)W_2(p) = \frac{1}{\tau_1 p + 1} \exp(-p\tau_2).$$

При  $c_{\text{ex}}(t) = 1(t)$   $\left( c_{\text{ex}}(p) = \frac{1}{p} \right)$

$$c_{\text{вbx}}(p) = \frac{1}{\tau_1 p + 1} \cdot \frac{1}{p} \exp(-p\tau_2),$$

откуда

$$\begin{aligned} c_{\text{вbx}}(t) &= L^{-1} \left[ \frac{1}{\tau_1 p + 1} \cdot \frac{1}{p} \exp(-p\tau_2) \right] = \\ &= \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t - \tau_2}{\tau_1}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Заметим, что полученный результат в виде (3.41) справедлив для обоих вариантов соединения.

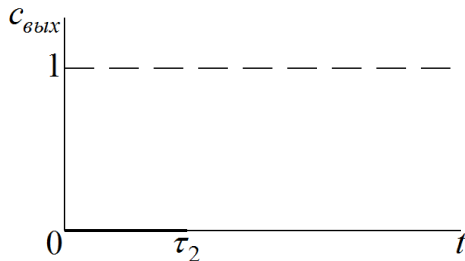


Рис. 3.20. Концентрация на выходе из объекта, сочетающего последовательное соединение зон перемешивания и вытеснения

На рис. 3.20 изображена концентрация вещества в потоке для такого объекта при  $c_{\text{ex}}(t) = 1(t)$ . Очевидно, что идентифицировать взаимное расположение по рис. 3.20 некорректно.

### 3.5.6. Объект, сочетающий участки идеального перемешивания и застойной зоны

Аппараты с застойной зоной довольно часто встречаются на практике, так как участки относительно медленного обмена веществом (температурой) возникают во многих случаях. Застойная зона не всегда очевидна, но влияние её на структуру потока может быть значительным, и в расчёте этот факт следует учитывать. Это, например, можно сделать, если имеется возможность составить структурную схему сложного теплоэнергетического объекта и найти его передаточную функцию. Однако в случае сочетания участков идеального перемешивания и застойной зоны характер соединения звеньев объекта не очевиден. Поэтому для анализа комбинированной модели с застойной зоной применяется методика составления материальных балансов всего аппарата и отдельно застойной зоны.

Схема объекта, в котором поток включает участок идеального перемешивания и застойной зоны, может быть описана соответствующей комбинированной моделью (рис. 3.21).

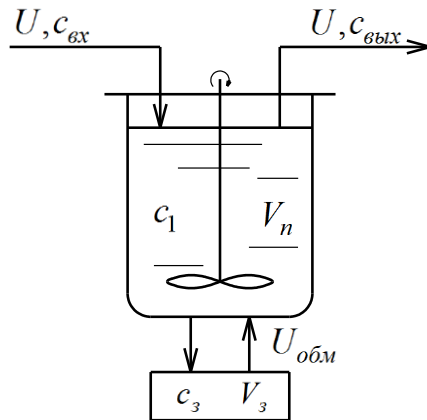


Рис. 3.21. Схема объекта, сочетающего участки идеального перемешивания и застойной зоны

Примем следующие обозначения:  $V$  — объём всего аппарата;  $V_n$  — объём участка перемешивания;  $V_3$  — объём застой-

ной зоны;  $U$  – объёмный расход потока на входе и выходе из аппарата;  $U_{обм} = \beta U$  – объёмный расход части потока в застойную зону или уходящего из неё, где  $\beta$  – доля единицы;  $c_{вх}$ ,  $c_{вых}$  ( $c = c_{вых}$ ) – концентрация вещества в потоке на входе и на выходе;  $c_з$  – концентрация вещества в застойной зоне;  $\tau_n = V_n/U_n$ ,  $\tau_з = V_з/U_{обм}$ ;  $G_{вх}$ ,  $G_{вых}$ ,  $G_{вх}^{(з)}$ ,  $G_{вых}^{(з)}$  – массовые потоки соответственно на входе и на выходе из аппарата и то же для застойной зоны.

Рассмотрим баланс потоков вещества, входящего и выходящего из аппарата:

$$G_{вх} = Uc_{вх}; \quad (3.42)$$

$$G_{вых} = Uc_{вых} + U_{обм}(c_{вых} - c_з). \quad (3.43)$$

В общем случае  $G_{вх}(t) \neq G_{вых}(t)$ , в результате чего происходит аккумулярование некоторого количества вещества  $\Delta M$  в аппарате:

$$\Delta M = \int_0^t [G_{вх}(t) - G_{вых}(t)] dt. \quad (3.44)$$

Если обе части равенства (3.44) поделить на  $V_n$ , подставить  $G_{вх}$  из (3.42),  $G_{вых}$  из (3.43),  $U_{обм} = \beta U$  и произвести преобразования, то получим

$$\frac{\Delta M}{V_n} = \frac{U}{V_n} \int_0^t [c_{вх}(t) - (1 + \beta)c_{вых}(t) + \beta c_з(t)] dt, \quad (3.45)$$

при этом

$$\frac{\Delta M}{V_n} = \Delta c = c(t) - c(0), \quad (3.46)$$

где  $\Delta c$  – изменение концентрации в аппарате в результате подачи на входе;  $c(0)$  – начальная концентрация в аппарате;

$c(t)$  – концентрация в зоне идеального перемешивания в любой момент времени. Тогда, заменив левую часть (3.45) на (3.46) и продифференцировав по  $t$ , получим

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{\tau_n} [c_{\text{вх}}(t) - (1 + \beta)c_{\text{вых}}(t) + \beta c_3(t)]. \quad (3.47)$$

Преобразование Лапласа по  $t$  в (3.47) даёт с учётом, что  $c = c_{\text{вых}}$ :

$$pc_{\text{вых}}(p) = \frac{1}{\tau_n} [c_{\text{вх}}(p) - (1 + \beta)c_{\text{вых}}(p) + \beta c_3(p)],$$

откуда

$$c_{\text{вых}}(p) = c_{\text{вх}}(p) \frac{1}{\tau_n p + (1 + \beta)} + c_3(p) \frac{\beta}{\tau_n p + (1 + \beta)}.$$

Составим баланс потоков в застойной зоне:

$$G_{\text{вх}}^{(3)} = U_{\text{обм}} c_{\text{вых}};$$

$$G_{\text{вых}}^{(3)} = U_{\text{обм}} c_3.$$

При нарушении динамического равновесия в застойной зоне, т.е.  $G_{\text{вх}}^{(3)} \neq G_{\text{вых}}^{(3)}$ , в ней аккумулируется некоторое количество вещества

$$\Delta M_3 = \int_0^t [G_{\text{вх}}^{(3)}(t) - G_{\text{вых}}^{(3)}(t)] dt.$$

Поскольку

$$\Delta c_3 = \frac{\Delta M_3}{V_3} = c_3(t) - c_3(0),$$

то

$$c_3(t) - c_3(0) = \frac{U_{\text{обм}}}{V_3} \int_0^t [c_{\text{вых}}(t) - c_3(t)] dt.$$



Повторяя процедуру дифференцирования, аналогичную участка идеального перемешивания, получим

$$\frac{dc_3}{dt} = \frac{1}{\tau_3} [c_{\text{вблх}}(t) - c_3(t)]. \quad (3.48)$$

Преобразование Лапласа по  $t$  от (3.48) даёт

$$c_3(p) = c_{\text{вблх}}(p) \frac{1}{\tau_3 p + 1}.$$

В этом случае получаем окончательно

$$\begin{aligned} c_{\text{вблх}}(p) = \\ = c_{\text{вх}}(p) \frac{1}{\tau_n p + (1 + \beta)} + c_{\text{вблх}}(p) \frac{1}{\tau_n p + (1 + \beta)} \cdot \frac{\beta}{\tau_3 p + 1}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Из (3.49) следует, что выходная концентрация зависит как от входной концентрации (первое слагаемое), так и от некоторой величины (второе слагаемое), которая выражает воздействие выходной концентрации самой на себя. Этот вывод даёт основание полагать, что рассматриваемый объект, в котором имеются участок идеального перемешивания и застойная зона, можно представить как соединение элементарных звеньев по структурной схеме с обратной связью. Действительно, если обозначить

$$W_1(p) = \frac{1}{\tau_n p + (1 + \beta)}, \quad W_2(p) = \frac{\beta}{\tau_3 p + 1}, \quad (3.50)$$

то (3.49) примет вид

$$c_{\text{вблх}}(p) = c_{\text{вх}}(p)W_1(p) + c_{\text{вблх}}(p)W_1(p)W_2(p).$$

или

$$[1 - W_1(p)W_2(p)]c_{\text{вблх}}(p) = W_1(p)c_{\text{вх}}(p).$$

Из последнего соотношения получаем выражение передаточной функции рассматриваемого объекта

$$W(p) = \frac{c_{\text{вых}}(p)}{c_{\text{вх}}(p)} = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}. \quad (3.51)$$

А это означает, что структурная схема соответствует объекту с положительной обратной связью (рис. 3.22).

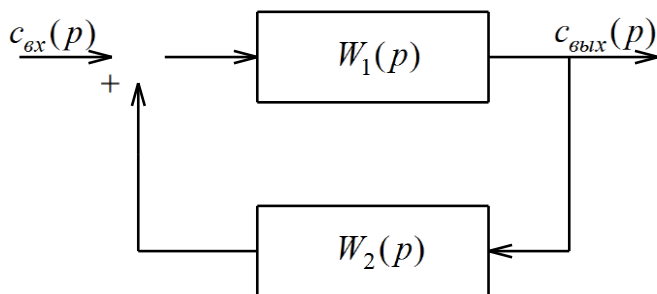


Рис. 3.22. Структурная схема объекта, сочетающая участки идеального перемешивания и застойной зоны

Подставив (3.50) в (3.51) окончательно получим

$$W(p) = \frac{c_{\text{вых}}(p)}{c_{\text{вх}}(p)} = \frac{\tau_3 p + 1}{\{\tau_n \tau_3 p^2 + [\tau_n + \tau_3 (1 + \beta)] p + 1\}}.$$

Качественное изображение  $c_{\text{вых}}(t)$  для случаев  $c_{\text{вх}}(t) = 1(t)$  и  $c_{\text{вх}}(t) = \delta(t)$  показано на рис. 3.23.

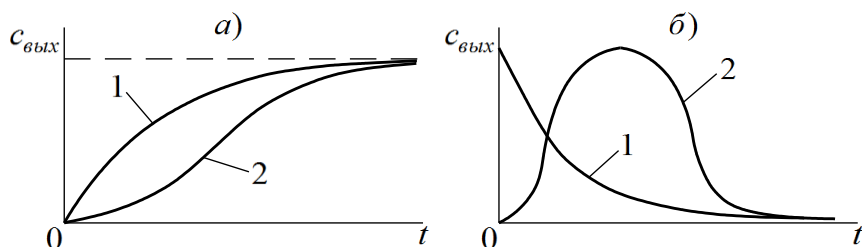


Рис. 3.23. Концентрация на выходе из аппарата с застойной зоной при  $c_{\text{вх}}(t) = 1(t)$  (а) и при  $c_{\text{вх}}(t) = \delta(t)$  (б): 1 – при отсутствии застойной зоны; 2 – при наличии застойной зоны

### 3.6. Математические модели некоторых теплообменных аппаратов

#### 3.6.1. Исходные положения

Математическое описание процесса в теплообменных аппаратах удобно записать в виде выражения, которое характеризует изменение температуры в потоке теплоносителя во времени, обусловленное, во-первых, движением потока, и, во-вторых, теплопередачей.

Если структура потока теплоносителя соответствует модели идеального перемешивания, то для математического описания этого потока можно использовать дифференциальное уравнение (3.1) с учётом источника тепла, возникающего в потоке за счёт теплопередачи

$$Vc_p \frac{dT}{dt} = Uc_p (T_{\text{ex}} - T) + Vq_m$$

или

$$Vc_p \frac{dT}{dt} = Uc_p (T_{\text{ex}} - T) + FK_m \Delta T, \quad (3.52)$$

где  $Vq_m = FK_m \Delta T$  – интенсивность теплообмена в объёме;  $q_m$  – удельная объёмная интенсивность источника тепла;  $F$  – поверхность теплообмена;  $K_m$  – коэффициент теплопередачи;  $\Delta T = T_1 - T_2$  – разность температур первичного и вторичного теплоносителей (движущая сила теплообмена).

Если перемешивание отсутствует и структура потока теплоносителя отвечает модели идеального вытеснения, то для математического описания этого потока можно использовать уравнение (3.6) с учётом теплопередачи

$$s_B c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -Uc_p \frac{\partial T}{\partial z} + s_B q_m.$$

Поскольку  $V = s_B L$ , где  $s_B$  – площадь поперечного сечения зоны вытеснения,  $L$  – её длина, то

$$s_B q_m = \frac{s_B F K_m \Delta T}{s_B L} = \frac{F}{L} K_m \Delta T.$$

В итоге

$$s_B c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -U c_p \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{F}{L} K_m \Delta T. \quad (3.53)$$

Возможны три типа теплообменных аппаратов, в которых движущиеся потоки первичного и вторичного теплоносителей характеризуются моделями идеального перемешивания (3.52) и идеального вытеснения (3.53).

### 3.6.2. Теплообменник типа «перемешивание-перемешивание»

Схема такого теплообменника приведена на рис. 3.24.

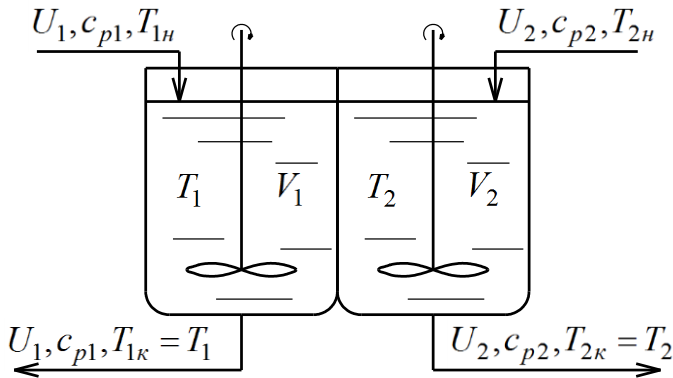


Рис. 3.24. Схематическое изображение теплообменника «перемешивание-перемешивание»

Математическая модель такого теплообменника представляет собой систему двух уравнений типа (3.52), записанных для первичного и вторичного теплоносителей:

$$V_1 c_{p1} \frac{dT_1}{dt} = U_1 c_{p1} (T_{1н} - T_1) - FK_m (T_1 - T_2);$$

$$V_2 c_{p2} \frac{dT_2}{dt} = U_2 c_{p2} (T_{2н} - T_2) - FK_m (T_1 - T_2).$$

$$T_1(0) = T_{10};$$

$$T_2(0) = T_{20}.$$

### 3.6.3. Теплообменник типа «перемешивание-вытеснение»

Схема такого теплообменника представлена на рис. 3.25.

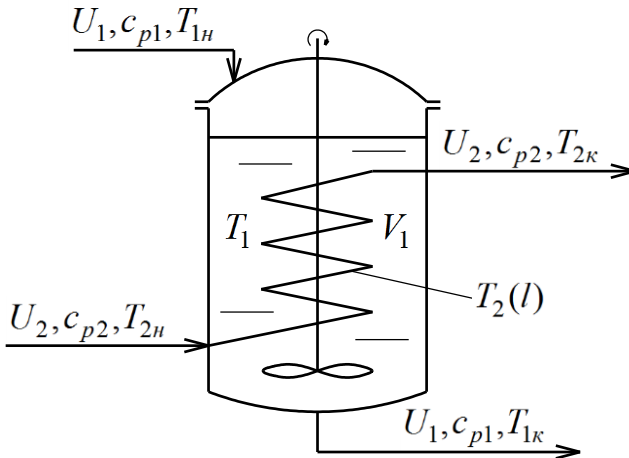


Рис. 3.25. Схематическое изображение теплообменника «перемешивание-вытеснение»

Математическая модель включает уравнение (3.52) для потока первичного теплоносителя и уравнение (3.53) для потока вторичного теплоносителя:

$$V_1 c_{p1} \frac{dT_1}{dt} = U_1 c_{p1} (T_{1н} - T_1) - FK_m (T_1 - T_2);$$

$$s_{2B} c_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = -U_2 c_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{F}{L} K_m (T_1 - T_2),$$

где  $s_{2B}$  – поперечное сечение зоны идеального вытеснения;  
 $L$  – длина зоны идеального вытеснения.

### 3.6.4. Теплообменник типа «вытеснение-вытеснение»

Схема теплообменника приведена на рис. 3.26.

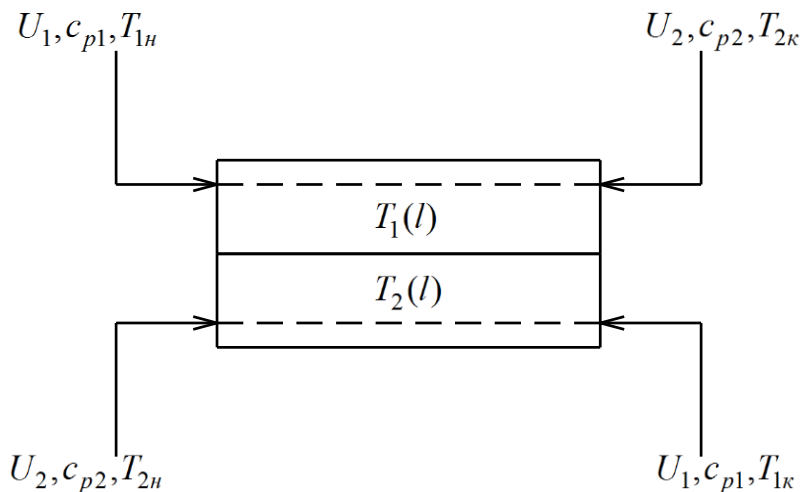


Рис. 3.26. Схематическое изображение теплообменника  
 «вытеснение-вытеснение»

Математическая модель имеет вид системы двух уравнений типа (3.53):

$$s_{1B}c_{p1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = -U_1c_{p1} \frac{\partial T_1}{\partial l} - \frac{F}{L} K_m (T_1 - T_2);$$

$$s_{2B}c_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = -U_2c_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial l} + \frac{F}{L} K_m (T_1 - T_2).$$

Для реальных теплообменных аппаратов, в которых структура потоков теплоносителей приближается к структуре потоков идеального перемешивания или вытеснения, можно выбирать приведённые выше математические модели. В иных случаях реальный теплообмен характеризуется моделями, промежуточными между моделями идеального перемешивания и идеального вытеснения.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Данный теоретический курс с практическими занятиями позволит магистру овладеть умением синтеза математических моделей основных задач промышленной теплоэнергетики, самостоятельно анализировать математические формулировки с помощью аналитических и численных подходов. Реализация метода математического моделирования в конкретных предметных областях промышленной теплоэнергетики позволит магистру овладеть навыками самостоятельного обоснования формулировок задач на основе построения и модификации рассмотренных алгоритмов вычислительного эксперимента.



## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### 1.1. Аналитические выражения для векторных операций.

Всюду в дальнейшем используется прямоугольная система координат. Оси координат обозначаются цифровыми индексами 1, 2 и 3, которые соответствуют  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -направлениям.

Введём в рассмотрение символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Если вектор  $\bar{v}$  можно полностью определить, задав значения его проекций  $v_1, v_2, v_3$  на координатные оси 1, 2 и 3, и если обозначить через  $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3$  векторы единичной длины, или орты, направление которых совпадает соответственно с направлением осей 1, 2, 3, то

$$\bar{v} = \bar{\delta}_1 v_1 + \bar{\delta}_2 v_2 + \bar{\delta}_3 v_3 = \sum_{i=1}^3 \bar{\delta}_i v_i.$$

Сложение и вычитание векторов есть

$$\bar{u} \pm \bar{v} = \sum_i \bar{\delta}_i u_i \pm \sum_i \bar{\delta}_i v_i = \sum_i \bar{\delta}_i (u_i \pm v_i).$$

Умножение вектора на скаляр  $s$ :

$$s\bar{u} = s \sum_i \bar{\delta}_i u_i = \sum_i \bar{\delta}_i (s u_i).$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$\begin{aligned} (\bar{u} \cdot \bar{v}) &= \left( \sum_i \bar{\delta}_i u_i \right) \cdot \left( \sum_j \bar{\delta}_j v_j \right) = \sum_i \sum_j (\bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_j) u_i v_j = \\ &= \sum_i \sum_j \bar{\delta}_{ij} u_i v_j = \sum_i u_i v_i. \end{aligned}$$

Векторное произведение двух векторов:

$$\begin{aligned}
 [\bar{u} \times \bar{v}] &= \left( \sum_j \bar{\delta}_j u_j \right) \times \left( \sum_k \bar{\delta}_k v_k \right) = \sum_j \sum_k [\bar{\delta}_j \times \bar{\delta}_k] u_j v_k = \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \bar{\delta}_i u_j v_k = \begin{vmatrix} \bar{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{при } ijk = 123, 231, 312, \\ -1, & \text{при } ijk = 321, 132, 213. \end{cases}$$

### 1.2. Дифференциальные векторные операции.

В векторном анализе часто используется дифференциальный оператор  $\nabla$ , который носит название «набла» и в прямоугольных координатах записывается так:

$$\nabla = \bar{\delta}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{\delta}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{\delta}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_i \bar{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Если величина  $s$  представляет собой некоторую скалярную функцию переменных  $x_1, x_2, x_3$ , то в результате действия оператора  $\nabla$  на эту величину получается вектор, называемый градиентом скалярного поля

$$\nabla s = \bar{\delta}_1 \frac{\partial s}{\partial x_1} + \bar{\delta}_2 \frac{\partial s}{\partial x_2} + \bar{\delta}_3 \frac{\partial s}{\partial x_3} = \sum_i \bar{\delta}_i \frac{\partial s}{\partial x_i}.$$

Дивергенция векторного поля вводится следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \bar{v}) &= \left( \sum_i \bar{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \sum_j \bar{\delta}_j v_j \right) = \sum_i \sum_j (\bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_j) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \\
 &= \sum_i \sum_j \bar{\delta}_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.
 \end{aligned}$$

Ротор векторного поля определяется так:

$$\begin{aligned} [\nabla \times \bar{v}] &= \left( \sum_j \bar{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \times \left( \sum_k \bar{\delta}_k v_k \right) = \sum_j \sum_k [\bar{\delta}_j \times \bar{\delta}_k] \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \\ &= \begin{vmatrix} \bar{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \bar{\delta}_1 \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \bar{\delta}_2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + \\ &\quad + \bar{\delta}_3 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Лапласиан скалярного поля есть

$$(\nabla \cdot \nabla s) = \left( \sum_i \bar{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \sum_j \bar{\delta}_j \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) = \sum_i \sum_j \bar{\delta}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial s}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial^2 s}{\partial x_i^2}.$$

Лапласиан векторного поля есть

$$\Delta \bar{v} = \Delta \left( \sum_i \bar{\delta}_i v_i \right) = \bar{\delta}_1 \Delta v_1 + \bar{\delta}_2 \Delta v_2 + \bar{\delta}_3 \Delta v_3.$$

Субстанциальная производная от скалярного поля:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla),$$

т.е.

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla s) = \frac{\partial s}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial s}{\partial x_i}.$$

Субстанциальная производная от векторного поля

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \sum_i \bar{\delta}_i \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) v_i \right].$$

### 1.3. Тензоры второго ранга.

Тензор второго ранга характеризуется девятью величинами и записывается в виде

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix},$$

из определения видно, что он симметричен.

Диадное произведение векторов  $\bar{v}$  и  $\bar{w}$ :

$$\bar{v}\bar{w} = \begin{bmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{bmatrix}.$$

Единичный тензор

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В тензорном анализе применяются так называемые единичные диады, являющиеся всевозможными диадными произведениями единичных векторов  $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3$ . Например,

$$\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ и т.д.}$$

Вид тензора и диадного произведения, записанный через единичные диады:

$$\tau = \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \tau_{ij};$$
$$\bar{v}\bar{w} = \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j v_i w_j.$$

Сложение тензоров и диадных произведений:

$$\begin{aligned}\sigma + \tau &= \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \sigma_{ij} + \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \tau_{ij} = \\ &= \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j (\sigma_{ij} + \tau_{ij}).\end{aligned}$$

Умножение тензора на скаляр:

$$s\tau = s \left( \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \tau_{ij} \right) = \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j (s\tau_{ij}).$$

Скалярное произведение двух тензоров

$$\begin{aligned}(\sigma; \tau) &= \left( \left( \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \sigma_{ij} \right); \left( \sum_k \sum_l \bar{\delta}_k \bar{\delta}_l \tau_{kl} \right) \right) = \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l (\bar{\delta}_i \bar{\delta}_j; \bar{\delta}_k \bar{\delta}_l) \sigma_{ij} \tau_{kl} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta_{il} \delta_{jk} \sigma_{ij} \tau_{kl} = \\ &= \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \tau_{ji},\end{aligned}$$

т.к.  $(\bar{\delta}_i \bar{\delta}_j; \bar{\delta}_k \bar{\delta}_l) = \delta_{il} \delta_{jk}$ .

Тензорное произведение двух тензоров:

$$\begin{aligned}\{\sigma \cdot \tau\} &= \left\{ \left( \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \sigma_{ij} \right) \cdot \left( \sum_k \sum_l \bar{\delta}_k \bar{\delta}_l \tau_{kl} \right) \right\} = \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l (\bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \cdot \bar{\delta}_k \bar{\delta}_l) \sigma_{ij} \tau_{kl} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta_{jk} \bar{\delta}_i \bar{\delta}_l \sigma_{ij} \tau_{kl} = \\ &= \sum_i \sum_l \bar{\delta}_i \bar{\delta}_l (\sigma_{ij} \tau_{jl}).\end{aligned}$$

Векторное произведение тензора на вектор

$$\begin{aligned}
[\tau \cdot v] &= \left[ \left( \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \tau_{ij} \right) \cdot \left( \sum_k \bar{\delta}_k v_k \right) \right] = \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k [\bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \cdot \bar{\delta}_k] \tau_{ij} v_k = \sum_i \sum_j \sum_k \bar{\delta}_j \delta_{jk} \tau_{ij} v_k = \\
&= \sum_i \bar{\delta}_i \left( \sum_j \tau_{ij} v_j \right).
\end{aligned}$$

Дифференциальные операции над тензорами и диадами:

$$\begin{aligned}
[\nabla \cdot \tau] &= \left[ \left( \sum_i \bar{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \sum_j \sum_k \bar{\delta}_j \bar{\delta}_k \tau_{jk} \right) \right] = \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k [\bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_j \bar{\delta}_k] \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} = \sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij} \bar{\delta}_k \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} = \\
&= \sum_k \bar{\delta}_k \left( \sum_i \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i} \right);
\end{aligned}$$

$$[w \cdot \nabla \bar{v}] = \sum_i \sum_k \bar{\delta}_k w_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i};$$

$$(\tau; \nabla \bar{v}) = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### 2.1. Уравнение неразрывности.

Цилиндрические координаты  $(r, \theta, z)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0.$$

Сферические координаты  $(r, \theta, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \\ + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho v_\varphi) = 0. \end{aligned}$$

### 2.2. Уравнение движения в цилиндрических координатах.

В компонентах напряжений:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial p}{\partial r} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] + \rho g_r; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] + \rho g_\theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial p}{\partial z} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] + \rho g_z. \end{aligned}$$

2.3. Уравнение движения в сферических координатах.

$$\begin{aligned}
 & \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) = \\
 & = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi}}{r} \right] + \rho g_r; \\
 & \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) = \\
 & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} \tau_{\varphi\varphi} \right] + \rho g_\theta; \\
 & \rho \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta \right) = \\
 & = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{r\varphi}}{r} + \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r} \tau_{\theta\varphi} \right] + \rho g_\varphi.
 \end{aligned}$$

2.4. Компоненты тензора напряжений для ньютоновских жидкостей в цилиндрических координатах.

$$\tau_{rr} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right];$$



$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right];$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right];$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right];$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[ \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right];$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left[ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right];$$

$$(\nabla \cdot \vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

2.5. Компоненты тензора напряжений для ньютоновских жидкостей в сферических координатах.

$$\tau_{rr} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right];$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right];$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = -\mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right];$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right];$$

$$\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi\theta} = -\mu \left[ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right];$$

$$\tau_{\varphi r} = \tau_{r\varphi} = -\mu \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) \right];$$

$$(\nabla \cdot \bar{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}.$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шеремет М.А. Лекции по курсу «Математическое моделирование и алгоритмизация задач теплоэнергетики» [Электронный ресурс] / М.А. Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 49 с. – [http://portal.tpu.ru/SHARED/s/SHEREMET/instructional\\_work/new/Tab/Math-simulat.pdf](http://portal.tpu.ru/SHARED/s/SHEREMET/instructional_work/new/Tab/Math-simulat.pdf).
2. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности: учеб. пособие / А.В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
4. Математическое моделирование: учеб. пособие / В.Ф. Белов, Г.И. Шабанов, С.А. Карпушкина и др. – Саранск: Изд-во Мордовского университета, 2001. – 340 с.
5. Математическое моделирование в технике: учебник для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 496 с.
6. Монахов Г.В. Моделирование управления режимами тепловых сетей / Г.В. Монахов, Ю.А. Войтинская. – М.: Энергоатомиздат, 1995. - 224 с.
7. Ляшков, В.И. Математическое моделирование и алгоритмизация задач теплоэнергетики: учеб. пособие [Электронный ресурс] / В.И. Ляшков. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 140 с. – Издание № 032/202534, сайт <http://www.tstu.ru>.
8. Методы математического программирования в задачах оптимизации сложных технических систем: учеб. пособие / А.М. Загребаев, Н.А. Крицына, Ю.П. Кулябичев, Ю.Ю. Шумилов. – М.: МИФИ, 2007. – 332 с.
9. Султангузин И.А. Математическое моделирование и оптимизация промышленных теплоэнергетических систем: учеб. пособие / И.А. Султангузин, Ю.В. Яворовский. – М.: Изд. дом МЭИ, 2009. – 92 с.

10. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.
11. Пирумов У.Г. Численные методы: учеб. пособие / У.Г. Пирумов. – М.: Дрофа, 2007. – 221 с.
12. Киреев В.И. Численные методы в примерах и задачах / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. – М.: Высш. шк., 2008. – 480 с.
13. Очков В.Ф. Современные информационные технологии в теплоэнергетике / В.Ф. Очков. – М.: Изд. дом МЭИ, 2007. – 67 с.
14. Пасконов В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
15. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
16. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – Т. 1, 2. – 384 с.
17. Кафаров В.В. Математическое моделирование основных процессов химических производств: учеб. пособие / В.В. Кафаров, М.Б. Глебов. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.
18. Ларсен Р. Инженерные расчеты в Excel. – М.: Вильямс, 2002. – 545 с.
19. Васильев А.Н. Excel 2007 на примерах / А.Н. Васильев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 656 с.
20. Моделирование, алгоритмизация и оптимизация элементов и систем в теплоэнергетике [Электронный ресурс]/ Методический комплекс. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2004. – [http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rid=24926](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rid=24926).
21. Уравнения математической физики. Сборник примеров и упражнений / А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: ПетрГУ, 2001. – 220с.
22. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

23. Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям / А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
24. Полянин А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
25. Полянин А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.
26. Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 532 с.
27. Соловейчик Ю.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач: учеб. пособие / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова. – Новосибирск: НГТУ, 2007. – 896 с.
28. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
29. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
30. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике / О.С. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 543 с.
31. Connor J.J., Finite Element Techniques for Fluid Flow / J.J. Connor, C.A. Brebbia. – London-Boston: Newnes-Butterworths, 1977. – 264 p.
32. Байков В.А. Уравнения математической физики / В.А. Байков, А.В. Жибер. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2003. – 262 с.
33. Берд Р. Явления переноса / Р. Берд, В. Стьюарт, Е. Лайтфут. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
34. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
35. Lewis R.W. Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow / R.W. Lewis, P. Nithiarasu, K. Seetharamu. – Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2004. – 341 p.
36. Цветков Ф.Ф. Тепломассообмен / Ф.Ф. Цветков, Б.А. Григорьев. – М: Изд. дом МЭИ, 2011. – 562 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ .....	5
1.1. Понятие математической модели .....	5
1.2. Классификация математических моделей .....	7
1.3. Состав математического описания .....	8
1.4. Общий алгоритм математического моделирования .....	10
1.5. Общие материальные и энергетические балансы. Закономерности процессов .....	12
1.5.1. Перенос количества движения .....	12
1.5.2. Перенос теплоты .....	20
1.5.3. Перенос массы .....	28
1.5.4. Замыкание уравнений переноса .....	35
1.6. Классическая система уравнений в задачах теплоэнергетических систем .....	39
1.6.1. Общий вид уравнений и схема моделирования .....	39
1.6.2. Моделирование гидродинамических задач .....	40
1.6.3. Моделирование тепловых задач .....	51
1.6.4. Моделирование массообменных задач .....	59
2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ .....	65
2.1. Общие замечания .....	65
2.2. Сравнение экспериментального, теоретического и вычислительного подходов .....	66
2.3. Уравнения в частных производных .....	68
2.3.1. Физическая классификация уравнений .....	69
2.3.2. Математическая классификация уравнений .....	70
2.4. Элементы разностных систем .....	72
2.4.1. Построение сетки .....	72
2.4.2. Аппроксимация производных .....	73
2.4.3. Погрешность аппроксимации уравнений .....	76
2.4.4. Согласованность разностных схем .....	76
2.4.5. Устойчивость конечно-разностных схем .....	77
2.5. Численное решение гиперболического уравнения .....	80
2.5.1. Явная конечно-разностная схема .....	80

2.5.2. Неявная конечно-разностная схема.....	83
2.5.3. Метод прогонки.....	84
2.5.4. Пример.....	87
2.6. Численное решение параболического уравнения (уравнения теплопроводности).....	88
2.6.1. Явная конечно-разностная схема.....	88
2.6.2. Неявная конечно-разностная схема.....	91
2.6.3. Понятие о схемах расщепления.....	93
2.7. Методы взвешенных невязок и вариационные.....	94
2.7.1. Основные понятия.....	94
2.7.2. Метод взвешенных невязок.....	101
2.7.3. Обобщённые формулировки.....	113
2.8. Метод конечных элементов.....	131
<b>3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКИ НА ОСНОВЕ ИДЕАЛЬНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.....</b>	<b>137</b>
3.1. Вводные положения.....	137
3.2. Предварительные сведения о математическом аппарате.....	138
3.2.1. Классификация линейных дифференциальных уравнений.....	138
3.2.2. Применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений.....	140
3.2.3. Передаточная функция.....	141
3.3. Структурные схемы теплоэнергетических объектов....	143
3.4. Математические модели процессов перемешивания веществ.....	146
3.4.1. Модель идеального перемешивания.....	146
3.4.2. Модель идеального вытеснения.....	149
3.4.3. Диффузионная модель.....	154
3.4.4. Ячеечная модель.....	161
3.5. Комбинированные модели.....	165
3.5.1. Принцип построения комбинированных моделей	165
3.5.2. Классификация гидродинамических неоднородностей.....	165

3.5.3. Объект, сочетающий зоны идеального перемешивания и байпасирования .....	166
3.5.4. Объект, сочетающий параллельные зоны идеального перемешивания и идеального вытеснения ..	168
3.5.5. Объект, сочетающий последовательно расположенные зоны идеального перемешивания и идеального вытеснения.....	170
3.5.6. Объект, сочетающий участки идеального перемешивания и застойной зоны .....	173
3.6. Математические модели некоторых теплообменных аппаратов.....	178
3.6.1. Исходные положения.....	178
3.6.2. Теплообменник типа «перемешивание-перемешивание».....	179
3.6.3. Теплообменник типа «перемешивание-вытеснение».....	180
3.6.4. Теплообменник типа «вытеснение-вытеснение»..	181
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	183
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	184
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	190
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	194



Научное издание

Бараков Александр Валентинович  
Надеев Александр Александрович  
Ряжских Виктор Иванович

МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКИ

В авторской редакции

Подписано в печать 25.09.2015.  
Формат 60x84/16. Бумага для множительных аппаратов.  
Усл. печ. л. 12,4. Уч.-изд. л. 10,3. Тираж 250 экз.  
Заказ №

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический  
университет»  
394026 Воронеж, Московский просп., 14