

Типовой расчет по теме «Аналитическая геометрия»

1. Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ и $A_4(x_4, y_4)$. Составить уравнения:

- а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2 ;
- в) прямой A_4M , перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;
- г) прямой A_3N , параллельной прямой A_1A_2 ;
- д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2 .

Вычислить:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

1.1. $A_1(3, 1, 4)$, $A_2(-1, 6, 1)$, $A_3(-1, 1, 6)$, $A_4(0, 4, -1)$.

1.2. $A_1(3, -1, 2)$, $A_2(-1, 0, 1)$, $A_3(1, 7, 3)$, $A_4(8, 5, 8)$.

1.3. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(5, 8, 3)$, $A_3(1, 2, -2)$, $A_4(-1, 0, 2)$.

1.4. $A_1(2, 4, 3)$, $A_2(1, 1, 5)$, $A_3(4, 9, 3)$, $A_4(3, 6, 7)$.

1.5. $A_1(9, 5, 5)$, $A_2(-3, 7, 1)$, $A_3(5, 7, 8)$, $A_4(6, 9, 2)$.

1.6. $A_1(0, 7, 1)$, $A_2(2, -1, 5)$, $A_3(1, 6, 3)$, $A_4(3, -9, 8)$.

1.7. $A_1(5, 5, 4)$, $A_2(1, -1, 4)$, $A_3(3, 5, 1)$, $A_4(5, 8, -1)$.

1.8. $A_1(6, 1, 1)$, $A_2(4, 6, 6)$, $A_3(4, 2, 0)$, $A_4(1, 2, 6)$.

1.9. $A_1(7, 5, 3)$, $A_2(9, 4, 4)$, $A_3(4, 5, 7)$, $A_4(7, 9, 6)$.

1.10. $A_1(6, 8, 2)$, $A_2(5, 4, 7)$, $A_3(2, 4, 7)$, $A_4(7, 3, 7)$.

1.11. $A_1(4, 2, 5)$, $A_2(0, 7, 1)$, $A_3(0, 2, 7)$, $A_4(1, 5, 0)$.

1.12. $A_1(4, 4, 10)$, $A_2(7, 10, 2)$, $A_3(2, 8, 4)$, $A_4(9, 6, 9)$.

1.13. $A_1(4, 6, 5)$, $A_2(6, 9, 4)$, $A_3(2, 10, 10)$, $A_4(7, 5, 9)$.

1.14. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(8, 7, 4)$, $A_3(5, 10, 4)$, $A_4(4, 7, 8)$.

1.15. $A_1(10, 9, 6)$, $A_2(2, 8, 2)$, $A_3(9, 8, 9)$, $A_4(7, 10, 3)$.

1.16. $A_1(1, 8, 2)$, $A_2(5, 2, 6)$, $A_3(5, 7, 4)$, $A_4(4, 10, 9)$.

1.17. $A_1(6, 6, 5)$, $A_2(4, 9, 5)$, $A_3(4, 6, 11)$, $A_4(6, 9, 3)$.

1.18. $A_1(7, 2, 2)$, $A_2(-5, 7, -7)$, $A_3(5, -3, 1)$, $A_4(2, 3, 7)$.

1.19. $A_1(8, -6, 4)$, $A_2(10, 5, -5)$, $A_3(5, 6, -8)$, $A_4(8, 10, 7)$.

- 1.20. $A_1(1, -1, 3)$, $A_2(6, 5, 8)$, $A_3(3, 5, 8)$, $A_4(8, 4, 1)$.
 1.21. $A_1(1, -2, 7)$, $A_2(4, 2, 10)$, $A_3(2, 3, 5)$, $A_4(5, 3, 7)$.
 1.22. $A_1(4, 2, 10)$, $A_2(1, 2, 0)$, $A_3(3, 5, 7)$, $A_4(2, -3, 5)$.
 1.23. $A_1(2, 3, 5)$, $A_2(5, 3, -7)$, $A_3(1, 2, 7)$, $A_4(4, 2, 0)$.
 1.24. $A_1(5, 3, 7)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(4, 2, 10)$, $A_4(1, 2, 7)$.
 1.25. $A_1(4, 3, 5)$, $A_2(1, 9, 7)$, $A_3(0, 2, 0)$, $A_4(5, 3, 10)$.
 1.26. $A_1(3, 2, 5)$, $A_2(4, 0, 6)$, $A_3(2, 6, 5)$, $A_4(6, 4, -1)$.
 1.27. $A_1(2, 1, 6)$, $A_2(1, 4, 9)$, $A_3(2, -5, 8)$, $A_4(5, 4, 2)$.
 1.28. $A_1(2, 1, 7)$, $A_2(3, 3, 6)$, $A_3(2, -3, 9)$, $A_4(1, 2, 5)$.
 1.29. $A_1(2, -1, 7)$, $A_2(6, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 8)$, $A_4(2, -3, 7)$.
 1.30. $A_1(0, 4, 5)$, $A_2(3, -2, 1)$, $A_3(4, 5, 6)$, $A_4(3, 3, 2)$.

2. Решить следующие задачи.

2.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y - 7 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.

2.2. Найти проекцию точки $A(-8, 12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2, -3)$ и $C(-5, 1)$.

2.3. Даны две вершины треугольника ABC : $A(-4, 4)$, $B(4, -12)$ и точка $M(4, 2)$ пересечения его высот. Найти вершину C .

2.4. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y - x = 3$.

2.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -3)$ и точку пересечения прямых $2x - y = 5$ и $x + y = 1$.

2.6. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция, если $A(3, 6)$, $B(5, 2)$, $C(-1, -3)$, $D(-5, 5)$.

2.7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно к прямой BC , если $B(2, 5)$, $C(1, 0)$.

2.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 1)$ параллельно прямой MN , если $M(-3, -2)$, $N(1, 6)$.

2.9. Найти точку, симметричную точке $M(2, -1)$ относительно прямой $x - 2y + 3 = 0$.

2.10. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1, -3)$, $B(3, 5)$, $C(5, 2)$, $D(3, -5)$.

2.11. Через точку пересечения прямых $6x - 4y + 5 = 0$, $2x + 5y + 8 = 0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс.

2.12. Известны уравнения стороны AB треугольника ABC $4x + y = 12$, его высот BH $5x - 4y = 12$ и AM $x + y = 6$. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC .

2.13. Даны две вершины треугольника ABC : $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ и точка пересечения его высот $H(1, 2)$. Найти координаты точки M пересечения стороны AC и высоты BH .

2.14. Найти уравнения высот треугольника ABC , проходящих через вершины A и B , если $A(-4, 2)$, $B(3, -5)$, $C(5, 0)$.

2.15. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(2, 3)$, $B(0, -3)$, $C(6, -3)$.

2.16. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину A треугольника ABC , зная уравнения его сторон: $AB - 2x - y - 3 = 0$, $AC - x + 5y - 7 = 0$, $BC - 3x - 2y + 13 = 0$.

2.17. Дан треугольник с вершинами $A(3, 1)$, $B(-3, -1)$ и $C(5, -12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C .

2.18. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$.

2.19. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x + 5y - 15 = 0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.

2.20. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x - y = 0$, $x + 3y = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x + y - 12 = 0$. Найти уравнения его диагоналей.

2.21. Составить уравнения медианы CM и высоты CK треугольника ABC , если $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, -4)$.

2.22. Через точку $P(5, 2)$ провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ox ; в) параллельную оси Oy .

2.23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45° , б) 90° , в) 0° .

2.24. Какую ординату имеет точка C , лежащая на одной прямой с точками $A(-6, -6)$ и $B(-3, -1)$ и имеющая абсциссу, равную 3?

2.25. Через точку пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$ и $x + 4y - 7 = 0$ провести прямую, делящую отрезок между точками $A(4, -3)$ и $B(-1, 2)$ в отношении $\lambda = 2/3$.

2.26. Известны уравнения двух сторон ромба $2x - 5y - 1 = 0$ и $2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $x + 3y - 6 = 0$. Найти уравнение второй диагонали.

2.27. Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3, 1)$, $B(7, 5)$ и $C(5, -3)$.

2.28. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 1)$ под углом 45° к прямой $2x + 3y = 6$.

2.29. Даны уравнения высот треугольника ABC $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ и координаты его вершины $A(2, 3)$. Найти уравнения сторон AB и AC треугольника.

2.30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3, -1)$. Найти уравнения двух других сторон.

3. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданным условиям.

3.1. Отстоит от прямой $x = -6$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(1, 3)$.

3.2. Отстоит от прямой $x = -2$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(4, 0)$.

3.3. Отстоит от прямой $y = -2$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(5, 0)$.

3.4. Отношение расстояний от точки M до точек $A(2, 3)$ и $B(-1, 2)$ равно $3/4$.

3.5. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(4, 0)$ и $B(-2, 2)$ равна 28.

3.6. Отстоит от точки $A(1, 0)$ на расстоянии, в пять раз меньшем, чем от прямой $x = 8$.

3.7. Отстоит от точки $A(4, 1)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2, -1)$.

3.8. Отстоит от прямой $x = -5$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(6, 1)$.

3.9. Отстоит от прямой $y = 7$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4, -3)$.

3.10. Отношение расстояний от точки M до точек $A(-3, 5)$ и $B(4, 2)$ равно $1/3$.

3.11. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, -1)$ и $B(3, 2)$ равна 40,5.

3.12. Отстоит от точки $A(2, 1)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = -5$.

3.13. Отстоит от точки $A(-3, 3)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(5, 1)$.

3.14. Отстоит от прямой $x = 8$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(-1, 7)$.

3.15. Отстоит от прямой $x = 9$ на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от точки $A(-1, 2)$.

3.16. Отношение расстояний от точки M до точек $A(2, -4)$ и $B(3, 5)$ равно $2/3$.

3.17. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-3, 3)$ и $B(4, 1)$ равна 31.

3.18. Отстоит от точки $A(0, -5)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от прямой $x = 3$.

3.19. Отстоит от точки $A(4, -2)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $B(1, 6)$.

3.20. Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(1, 4)$.

3.21. Отстоит от прямой $x = 14$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $A(2, 3)$.

3.22. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -2)$ и $B(4, 6)$ равно $3/5$.

3.23. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, 3)$ и $B(2, -4)$ равна 65 .

3.24. Отстоит от точки $A(3, -4)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = 5$.

3.25. Отстоит от точки $A(5, 7)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2, 1)$.

3.26. Отстоит от прямой $x = 2$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4, -3)$.

3.27. Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(3, 1)$.

3.28. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -5)$ и $B(4, 1)$ равно $1/4$.

3.29. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-1, 2)$ и $B(3, -1)$ равна $18,5$.

3.30. Отстоит от точки $A(1, 5)$ на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от прямой $x = -1$.

4. Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат.

4.1. $\rho = 2 \sin 4\varphi$.

4.2. $\rho = 2(1 - \sin 2\varphi)$.

4.3. $\rho = 2 \sin 2\varphi$.

4.4. $\rho = 3 \sin 6\varphi$.

4.5. $\rho = 2/(1 + \cos \varphi)$.

4.6. $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$.

4.7. $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$.

4.8. $\rho = 3(1 - \cos 2\varphi)$.

4.9. $\rho = 4 \sin 3\varphi$.

4.10. $\rho = 4 \sin 4\varphi$.

4.11. $\rho = 3(\cos \varphi + 1)$.

4.12. $\rho = 1/(2 - \sin \varphi)$.

4.13. $\rho = 5(1 - \sin 2\varphi)$.

4.14. $\rho = 3(2 - \cos 2\varphi)$.

4.15. $\rho = 6 \sin 4\varphi$.

4.16. $\rho = 2 \cos 6\varphi$.

4.17. $\rho = 3/(1 - \cos 2\varphi)$.

4.18. $\rho = 2(1 - \cos 3\varphi)$.

4.19. $\rho = 3(1 - \cos 4\varphi)$.

4.20. $\rho = 5(2 - \sin \varphi)$.

4.21. $\rho = 3 \sin 4\varphi$.

4.22. $\rho = 2 \cos 4\varphi$.

4.23. $\rho = 4(1 + \cos 2\varphi)$.

4.24. $\rho = 1/(2 - \cos 2\varphi)$.

4.25. $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$.

4.26. $\rho = 3(1 + \cos 2\varphi)$.

4.27. $\rho = 3 \cos 2\varphi$.

4.28. $\rho = 2 \sin 3\varphi$.

4.29. $\rho = 2/(2 - \cos \varphi)$.

4.30. $\rho = 2 - \cos 2\varphi$.

5. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями ($0 \leq t \leq 2\pi$).

5.1. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$

- 5.3. $\begin{cases} x = 4 \cos 2t, \\ y = 3 \sin 2t. \end{cases}$
- 5.5. $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$
- 5.7. $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$
- 5.9. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 3 \sin 2t. \end{cases}$
- 5.11. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$
- 5.13. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$
- 5.15. $\begin{cases} x = 3 \cos 2t, \\ y = 2 \sin 2t. \end{cases}$
- 5.17. $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$
- 5.19. $\begin{cases} x = 4 \cos 2t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$
- 5.21. $\begin{cases} x = 4 \cos 3t, \\ y = 2 \sin 3t. \end{cases}$
- 5.23. $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$
- 5.25. $\begin{cases} x = 3 \cos 2t, \\ y = 3 \sin 2t. \end{cases}$
- 5.27. $\begin{cases} x = 5 \cos 3t, \\ y = \sin 3t. \end{cases}$
- 5.29. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$
- 5.4. $\begin{cases} x = 2 \sin t, \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$
- 5.6. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.8. $\begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.10. $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 1 - \sin t. \end{cases}$
- 5.12. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.14. $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.16. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2(1 - \sin t). \end{cases}$
- 5.18. $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.20. $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.22. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3(2 - \sin t). \end{cases}$
- 5.24. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.26. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.28. $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 4(1 - \sin t). \end{cases}$
- 5.30. $\begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$

Типовой расчет по теме «Векторная алгебра»

1. Даны векторы $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \gamma\mathbf{m} + \delta\mathbf{n}$, где

$|\mathbf{m}| = k$; $|\mathbf{n}| = l$; $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \varphi$. Найти: а) $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \cdot (\nu\mathbf{a} + \tau\mathbf{b})$;

б) $\text{пр}_{\nu}(\nu\mathbf{a} + \tau\mathbf{b})$; в) $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \tau\mathbf{b}})$.

1.1. $\alpha = -5$, $\beta = -4$, $\gamma = 3$, $\delta = 6$, $k = 3$, $l = 5$, $\varphi = 5\pi/3$, $\lambda = -2$, $\mu = 1/3$, $\nu = 1$, $\tau = 2$.

1.2. $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$, $\delta = -1$, $k = 1$, $l = 3$, $\varphi = \pi$, $\lambda = 3$, $\mu = 2$, $\nu = -2$, $\tau = 4$.

1.3. $\alpha = 5$, $\beta = -2$, $\gamma = -3$, $\delta = -1$, $k = 4$, $l = 5$, $\varphi = 4\pi/3$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\nu = -1$, $\tau = 5$.

1.4. $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\gamma = -6$, $\delta = -4$, $k = 3$, $l = 2$, $\varphi = 5\pi/3$, $\lambda = -1$, $\mu = 1/2$, $\nu = 2$, $\tau = 3$.

1.5. $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = -4$, $\delta = 5$, $k = 2$, $l = 3$, $\varphi = \pi/3$, $\lambda = 2$, $\mu = -3$, $\nu = 5$, $\tau = 1$.

1.6. $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = -3$, $\delta = 4$, $k = 2$, $l = 4$, $\varphi = 2\pi/3$, $\lambda = 3$, $\mu = -4$, $\nu = 2$, $\tau = 3$.

1.7. $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = -4$, $\delta = -2$, $k = 2$, $l = 5$, $\varphi = 4\pi/3$, $\lambda = 1$, $\mu = -3$, $\nu = 0$, $\tau = -1/2$.

1.8. $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $\delta = -4$, $k = 3$, $l = 2$, $\varphi = \pi$, $\lambda = 1$, $\mu = -2$, $\nu = 3$, $\tau = -4$.

1.9. $\alpha = -3$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$, $\delta = 5$, $k = 3$, $l = 6$, $\varphi = 4\pi/3$, $\lambda = -1$, $\mu = 2$, $\nu = 1$, $\tau = 1$.

1.10. $\alpha = 5$, $\beta = -3$, $\gamma = 4$, $\delta = 2$, $k = 4$, $l = 1$, $\varphi = 2\pi/3$, $\lambda = 2$, $\mu = -1/2$, $\nu = 3$, $\tau = 0$.

1.11. $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = 3$, $\delta = -6$, $k = 6$, $l = 3$, $\varphi = 5\pi/3$, $\lambda = 3$, $\mu = -1/3$, $\nu = 1$, $\tau = 2$.

1.12. $\alpha = -2$, $\beta = -4$, $\gamma = 3$, $\delta = 1$, $k = 3$, $l = 2$, $\varphi = 7\pi/3$, $\lambda = -1/2$, $\mu = 3$, $\nu = 1$, $\tau = 2$.

1.13. $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$, $\delta = 2$, $k = 4$, $l = 5$, $\varphi = 3\pi/2$, $\lambda = 2$, $\mu = -3$, $\nu = 1$, $\tau = 2$.

1.14. $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$, $\delta = 1$, $k = 2$, $l = 5$, $\varphi = 2\pi$, $\lambda = -3$, $\mu = 4$, $\nu = 2$, $\tau = 3$.

1.15. $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = 5$, $\delta = 2$, $k = 4$, $l = 7$, $\varphi = 4\pi/3$, $\lambda = -3$, $\mu = 2$, $\nu = 2$, $\tau = -1$.

1.16. $\alpha = -5$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\delta = 4$, $k = 5$, $l = 4$, $\varphi = \pi$, $\lambda = -3$, $\mu = 1/2$, $\nu = -1$, $\tau = 1$.

$$1.17. \alpha = 5, \beta = -2, \gamma = 3, \delta = 4, k = 2, l = 5, \varphi = \pi/2, \lambda = 2, \mu = 3, \nu = 1, \tau = -2.$$

$$1.18. \alpha = 7, \beta = -3, \gamma = 2, \delta = 6, k = 3, l = 4, \varphi = 5\pi/3, \lambda = 3, \mu = -1/2, \nu = 2, \tau = 1.$$

$$1.19. \alpha = 4, \beta = -5, \gamma = -1, \delta = 3, k = 6, l = 3, \varphi = 2\pi/3, \lambda = 2, \mu = -5, \nu = 1, \tau = 2.$$

$$1.20. \alpha = 3, \beta = -5, \gamma = -2, \delta = 3, k = 1, l = 6, \varphi = 3\pi/2, \lambda = 4, \mu = 5, \nu = 1, \tau = -2.$$

$$1.21. \alpha = -5, \beta = -6, \gamma = 2, \delta = 7, k = 2, l = 7, \varphi = \pi, \lambda = -2, \mu = 5, \nu = 1, \tau = 3.$$

$$1.22. \alpha = -7, \beta = 2, \gamma = 4, \delta = 6, k = 2, l = 9, \varphi = \pi/3, \lambda = 1, \mu = 2, \nu = -1, \tau = 3.$$

$$1.23. \alpha = 5, \beta = 4, \gamma = -6, \delta = 2, k = 2, l = 9, \varphi = 2\pi/3, \lambda = 3, \mu = 2, \nu = 1, \tau = -1/2.$$

$$1.24. \alpha = -5, \beta = -7, \gamma = -3, \delta = 2, k = 2, l = 11, \varphi = 3\pi/2, \lambda = -3, \mu = 4, \nu = -1, \tau = 2.$$

$$1.25. \alpha = 5, \beta = -8, \gamma = -2, \delta = 3, k = 4, l = 3, \varphi = 4\pi/3, \lambda = 2, \mu = -3, \nu = 1, \tau = 2.$$

$$1.26. \alpha = -3, \beta = 5, \gamma = 1, \delta = 7, k = 4, l = 6, \varphi = 5\pi/3, \lambda = -2, \mu = 3, \nu = 3, \tau = -2.$$

$$1.27. \alpha = -3, \beta = 4, \gamma = 5, \delta = -6, k = 4, l = 5, \varphi = \pi, \lambda = 2, \mu = 3, \nu = -3, \tau = -1.$$

$$1.28. \alpha = 6, \beta = -7, \gamma = -1, \delta = -3, k = 2, l = 6, \varphi = 4\pi/3, \lambda = 3, \mu = -2, \nu = 1, \tau = 4.$$

$$1.29. \alpha = 5, \beta = 3, \gamma = -4, \delta = -2, k = 6, l = 3, \varphi = 5\pi/3, \lambda = -2, \mu = -1/2, \nu = 3, \tau = 2.$$

$$1.30. \alpha = 4, \beta = -3, \gamma = -2, \delta = 6, k = 4, l = 7, \varphi = \pi/3, \lambda = 2, \mu = -1/2, \nu = 3, \tau = 2.$$

2. По координатам точек A , B и C для указанных векторов найти: а) модуль вектора \mathbf{a} ; б) скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ; в) проекцию вектора \mathbf{c} на вектор \mathbf{d} ; г) координаты точки M , делящей отрезок l в отношении $\alpha:\beta$.

$$2.1. A(4, 6, 3), B(-5, 2, 6), C(4, -4, -3), \mathbf{a} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}, \mathbf{b} = \overrightarrow{AB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{CB}, \mathbf{d} = \overrightarrow{AC}, l = AB, \alpha = 5, \beta = 4.$$

2.2. $A(4, 3, -2), B(-3, -1, 4), C(2, 2, 1), \mathbf{a} = -5\vec{AC} + 2\vec{CB}, \mathbf{b} = \vec{AB}, \mathbf{c} = \vec{AC}, \mathbf{d} = \vec{CB}, l = BC, \alpha = 2, \beta = 3.$

2.3. $A(-2, -2, 4), B(1, 3, -2), C(1, 4, 2), \mathbf{a} = 2\vec{AC} - 3\vec{BA}, \mathbf{b} = \vec{BC}, \mathbf{c} = \vec{BC}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = BA, \alpha = 2, \beta = 1.$

2.4. $A(2, 4, 3), B(3, 1, -4), C(-1, 2, 2), \mathbf{a} = 2\vec{BA} + 4\vec{AC}, \mathbf{b} = \vec{BA}, \mathbf{c} = \mathbf{b}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = BA, \alpha = 1, \beta = 4.$

2.5. $A(2, 4, 5), B(1, -2, 3), C(-1, -2, 4), \mathbf{a} = 3\vec{AB} - 4\vec{AC}, \mathbf{b} = \vec{BC}, \mathbf{c} = \mathbf{b}, \mathbf{d} = \vec{AB}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 3.$

2.6. $A(-1, -2, 4), B(-1, 3, 5), C(1, 4, 2), \mathbf{a} = 3\vec{AC} - 7\vec{BC}, \mathbf{b} = \vec{AB}, \mathbf{c} = \mathbf{b}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = AC, \alpha = 1, \beta = 7.$

2.7. $A(1, 3, 2), B(-2, 4, -1), C(1, 3, -2), \mathbf{a} = 2\vec{AB} + 5\vec{CB}, \mathbf{b} = \vec{AC}, \mathbf{c} = \mathbf{b}, \mathbf{d} = \vec{AB}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 4.$

2.8. $A(2, -4, 3), B(-3, -2, 4), C(0, 0, -2), \mathbf{a} = 3\vec{AC} - 4\vec{CB}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AB}, \mathbf{d} = \vec{CB}, l = AC, \alpha = 2, \beta = 1.$

2.9. $A(3, 4, -4), B(-2, 1, 2), C(2, -3, 1), \mathbf{a} = 5\vec{CB} + 4\vec{AC}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{BA}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = BA, \alpha = 2, \beta = 5.$

2.10. $A(0, 2, 5), B(2, -3, 4), C(3, 2, -5), \mathbf{a} = -3\vec{AB} + 4\vec{CB}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AC}, \mathbf{d} = \vec{AB}, l = AC, \alpha = 3, \beta = 2.$

2.11. $A(-2, -3, -4), B(2, -4, 0), C(1, 4, 5), \mathbf{a} = 4\vec{AC} - 8\vec{BC}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AB}, \mathbf{d} = \vec{BC}, l = AB, \alpha = 4, \beta = 2.$

2.12. $A(-2, -3, -2), B(1, 4, 2), C(1, -3, 3), \mathbf{a} = 2\vec{AC} - 4\vec{BC}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AB}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = BC, \alpha = 3, \beta = 1.$

2.13. $A(5, 6, 1), B(-2, 4, -1), C(3, -3, 3), \mathbf{a} = 3\vec{AB} - 4\vec{BC}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AC}, \mathbf{d} = \vec{AB}, l = BC, \alpha = 3, \beta = 2.$

2.14. $A(10, 6, 3), B(-2, 4, 5), C(3, -4, -6), \mathbf{a} = 5\vec{AC} - 2\vec{CB}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{BA}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = CB, \alpha = 1, \beta = 5.$

2.15. $A(3, 2, 4), B(-2, 1, 3), C(2, -2, -1), \mathbf{a} = 4\vec{BC} - 3\vec{AC}, \mathbf{b} = \vec{BA}, \mathbf{c} = \vec{AC}, \mathbf{d} = \vec{BC}, l = AC, \alpha = 2, \beta = 4.$

2.16. $A(-2, 3, -4), B(3, -1, 2), C(4, 2, 4), \mathbf{a} = 7\vec{AC} + 4\vec{CB}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AB}, \mathbf{d} = \vec{CB}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 5.$

2.17. $A(4, 5, 3), B(-4, 2, 3), C(5, -6, -2), \mathbf{a} = 9\vec{AB} - 4\vec{BC}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AC}, \mathbf{d} = \vec{AB}, l = BC, \alpha = 5, \beta = 1.$

2.18. $A(2, 4, 6), B(-3, 5, 1), C(4, -5, -4), \mathbf{a} = -6\vec{BC} + 2\vec{BA}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{CA}, \mathbf{d} = \vec{BA}, l = BC, \alpha = 1, \beta = 3.$

2.19. $A(-4, -2, -5), B(3, 7, 2), C(4, 6, -3), \mathbf{a} = 9\vec{BA} + 3\vec{BC}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AC}, \mathbf{d} = \vec{BC}, l = BA, \alpha = 4, \beta = 3.$

2.20. $A(5, 4, 4), B(-5, 2, 3), C(4, 2, -5), \mathbf{a} = 11\vec{AC} - 6\vec{AB}, \mathbf{b} = \vec{BC}, \mathbf{c} = \vec{AB}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = BC, \alpha = 3, \beta = 1.$

2.21. $A(3, 4, 6), B(-4, 6, 4), C(5, -2, -3), \mathbf{a} = -7\vec{BC} + 4\vec{CA}, \mathbf{b} = \vec{BA}, \mathbf{c} = \vec{CA}, \mathbf{d} = \vec{BC}, l = BA, \alpha = 5, \beta = 3.$

2.22. $A(-5, -2, -6), B(3, 4, 5), C(2, -5, 4), \mathbf{a} = 8\vec{AC} - 5\vec{BC}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AB}, \mathbf{d} = \vec{BC}, l = AC, \alpha = 3, \beta = 4,$

2.23. $A(3, 4, 1), B(5, -2, 6), C(4, 2, -7), \mathbf{a} = -7\vec{AC} + 5\vec{AB}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{BC}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 3.$

2.24. $A(4, 3, 2), B(-4, -3, 5), C(6, 4, -3), \mathbf{a} = 8\vec{AC} - 5\vec{BC}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{BA}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = BC, \alpha = 2, \beta = 5.$

2.25. $A(-5, 4, 3), B(4, 5, 2), C(2, 7, -4), \mathbf{a} = 3\vec{BC} + 2\vec{AB}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{CA}, \mathbf{d} = \vec{AB}, l = BC, \alpha = 3, \beta = 4.$

2.26. $A(6, 4, 5), B(-7, 1, 8), C(2, -2, -7), \mathbf{a} = 5\vec{CB} - 2\vec{AC}, \mathbf{b} = \vec{AB}, \mathbf{c} = \vec{CB}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = AB, \alpha = 3, \beta = 2.$

2.27. $A(6, 5, -4), B(-5, -2, 2), C(3, 3, 2), \mathbf{a} = 6\vec{AB} - 3\vec{CB}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AC}, \mathbf{d} = \vec{CB}, l = BC, \alpha = 1, \beta = 5.$

2.28. $A(-3, -5, 6), B(3, 5, -4), C(2, 6, 4), \mathbf{a} = 4\vec{AC} - 5\vec{BA}, \mathbf{b} = \vec{CB}, \mathbf{c} = \vec{BA}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = BA, \alpha = 4, \beta = 2.$

2.29. $A(3, 5, 4), B(4, 2, -3), C(-2, 4, 7), \mathbf{a} = 3\vec{BA} - 4\vec{AC}, \mathbf{b} = \vec{AB}, \mathbf{c} = \vec{BA}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = BA, \alpha = 2, \beta = 5.$

2.30. $A(4, 6, 7), B(2, -4, 1), C(-3, -4, 2), \mathbf{a} = 5\vec{AB} - 2\vec{AC}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{BC}, \mathbf{d} = \vec{AB}, l = AB, \alpha = 3, \beta = 4.$

3. Доказать, что векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} образуют базис, и найти координаты вектора \mathbf{d} в этом базисе.

3.1. $\mathbf{a} = (5, 4, 1)$, $\mathbf{b} = (-3, 5, 2)$, $\mathbf{c} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{d} = (7, 23, 4)$.

3.2. $\mathbf{a} = (2, -1, 4)$, $\mathbf{b} = (-3, 0, -2)$, $\mathbf{c} = (4, 5, -3)$, $\mathbf{d} = (0, 11, -14)$.

3.3. $\mathbf{a} = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -3, -5)$, $\mathbf{c} = (-6, 3, -1)$, $\mathbf{d} = (28, -19, -7)$.

3.4. $\mathbf{a} = (1, 3, 4)$, $\mathbf{b} = (-2, 5, 0)$, $\mathbf{c} = (3, -2, -4)$, $\mathbf{d} = (13, -5, -4)$.

3.5. $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (-5, -3, 1)$, $\mathbf{c} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{d} = (-15, -10, 5)$.

3.6. $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-7, -2, -4)$, $\mathbf{c} = (-4, 0, 3)$, $\mathbf{d} = (16, 6, 15)$.

3.7. $\mathbf{a} = (-3, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 7, -3)$, $\mathbf{c} = (-4, 3, 5)$, $\mathbf{d} = (-16, 33, 13)$.

3.8. $\mathbf{a} = (5, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, -3)$, $\mathbf{c} = (4, -3, 5)$, $\mathbf{d} = (15, -15, 24)$.

3.9. $\mathbf{a} = (0, 2, -3)$, $\mathbf{b} = (4, -3, -2)$, $\mathbf{c} = (-5, -4, 0)$, $\mathbf{d} = (-19, -5, -4)$.

3.10. $\mathbf{a} = (3, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 3, 1)$, $\mathbf{c} = (4, -5, -3)$, $\mathbf{d} = (-3, 2, -3)$.

3.11. $\mathbf{a} = (5, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, -3)$, $\mathbf{c} = (3, -4, 2)$, $\mathbf{d} = (-9, 34, -20)$.

3.12. $\mathbf{a} = (3, 1, -3)$, $\mathbf{b} = (-2, 4, 1)$, $\mathbf{c} = (1, -2, 5)$, $\mathbf{d} = (1, 12, -20)$.

3.13. $\mathbf{a} = (6, 1, -3)$, $\mathbf{b} = (-3, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (-1, -3, 4)$, $\mathbf{d} = (15, 6, -17)$.

3.14. $\mathbf{a} = (4, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (-3, 1, -8)$, $\mathbf{c} = (2, -4, 5)$, $\mathbf{d} = (-12, 14, -31)$.

3.15. $\mathbf{a} = (-2, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (3, -6, 2)$, $\mathbf{c} = (-5, -3, -1)$, $\mathbf{d} = (31, -6, 22)$.

3.16. $\mathbf{a} = (1, 3, 6)$, $\mathbf{b} = (-3, 4, -5)$, $\mathbf{c} = (1, -7, 2)$, $\mathbf{d} = (-2, 17, 5)$.

3.17. $\mathbf{a} = (7, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (5, 1, -2)$, $\mathbf{c} = (-3, 4, 5)$, $\mathbf{d} = (26, 11, 1)$.

3.18. $\mathbf{a} = (3, 5, 4)$, $\mathbf{b} = (-2, 7, -5)$, $\mathbf{c} = (6, -2, 1)$,
 $\mathbf{d} = (6, -9, 22)$.

3.19. $\mathbf{a} = (5, 3, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -5, 1)$, $\mathbf{c} = (-7, 4, -3)$,
 $\mathbf{d} = (36, 1, 15)$.

3.20. $\mathbf{a} = (11, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-3, 3, 4)$, $\mathbf{c} = (-4, -2, 7)$,
 $\mathbf{d} = (-5, 11, -15)$.

3.21. $\mathbf{a} = (9, 5, 3)$, $\mathbf{b} = (-3, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (4, -7, 4)$,
 $\mathbf{d} = (-10, -13, 8)$.

3.22. $\mathbf{a} = (7, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (3, -5, 6)$, $\mathbf{c} = (-4, 3, -4)$,
 $\mathbf{d} = (-1, 18, -16)$.

3.23. $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (-5, 3, -1)$, $\mathbf{c} = (-6, 4, 5)$,
 $\mathbf{d} = (-4, 11, 20)$.

3.24. $\mathbf{a} = (-2, 5, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 2, -7)$, $\mathbf{c} = (4, -3, 2)$,
 $\mathbf{d} = (-4, 22, -13)$.

3.25. $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-4, 3, -1)$, $\mathbf{c} = (2, 3, 4)$, $\mathbf{d} =$
 $= (14, 14, 20)$.

3.26. $\mathbf{a} = (3, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 4, 1)$, $\mathbf{c} = (4, -5, -1)$,
 $\mathbf{d} = (-5, 11, 1)$.

3.27. $\mathbf{a} = (4, 5, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 3, 1)$, $\mathbf{c} = (-3, -6, 7)$, $\mathbf{d} =$
 $= (19, 33, 0)$.

3.28. $\mathbf{a} = (1, -3, 1)$, $\mathbf{b} = (-2, -4, 3)$, $\mathbf{c} = (0, -2, 3)$,
 $\mathbf{d} = (-8, -10, 13)$.

3.29. $\mathbf{a} = (5, 7, -2)$, $\mathbf{b} = (-3, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (1, -4, 6)$,
 $\mathbf{d} = (14, 9, -1)$.

3.30. $\mathbf{a} = (-1, 4, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 2, -4)$, $\mathbf{c} = (-2, -7, 1)$,
 $\mathbf{d} = (6, 20, -3)$.

4. Даны векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} . Необходимо: а) вычислить смешанное произведение трех векторов; б) найти модуль векторного произведения; в) вычислить скалярное произведение двух векторов; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора; д) проверить, будут ли компланарны три вектора.

4.1. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; а) \mathbf{a} , $3\mathbf{b}$, \mathbf{c} ; б) $3\mathbf{a}$, $2\mathbf{c}$; в) \mathbf{b} , $-4\mathbf{c}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; д) \mathbf{a} , $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$.

4. 2. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$;
а) $5\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, \mathbf{c} ; б) $4\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; в) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ; д) $2\mathbf{a}$, $-3\mathbf{b}$, \mathbf{c} .

4. 3. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$;
а) \mathbf{a} , $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $3\mathbf{a}$, $-7\mathbf{b}$; в) \mathbf{c} , $-2\mathbf{a}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; д) $3\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$.

4. 4. $\mathbf{a} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$;
а) \mathbf{a} , $-2\mathbf{b}$, $-7\mathbf{c}$; б) $4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; в) $2\mathbf{a}$, $-7\mathbf{c}$; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ; д) $2\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$.

4. 5. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$;
а) \mathbf{a} , $6\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $2\mathbf{b}$, \mathbf{a} ; в) \mathbf{a} , $-4\mathbf{c}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{b} ; д) \mathbf{a} , $6\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$.

4. 6. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$;
а) \mathbf{a} , $-3\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $5\mathbf{a}$, $3\mathbf{c}$; в) $-2\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; д) $5\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$.

4. 7. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$;
а) $7\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $3\mathbf{a}$, $5\mathbf{c}$; в) $2\mathbf{b}$, $4\mathbf{c}$; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ; д) $7\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $5\mathbf{c}$.

4. 8. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -12\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$;
а) $2\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$, \mathbf{c} ; б) $4\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$; в) \mathbf{b} , $-4\mathbf{c}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; д) $2\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$, $-4\mathbf{c}$.

4. 9. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$;
а) $3\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $7\mathbf{a}$, $-3\mathbf{c}$; в) $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{a}$; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ; д) $7\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $-3\mathbf{c}$.

4. 10. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 8\mathbf{k}$;
а) $2\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $3\mathbf{b}$, $-9\mathbf{c}$; в) $3\mathbf{a}$, $-5\mathbf{c}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{b} ; д) $3\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $-9\mathbf{c}$.

4. 11. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$;
а) \mathbf{a} , $-4\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $-2\mathbf{b}$, $4\mathbf{c}$; в) $-3\mathbf{a}$, $6\mathbf{c}$; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ;
д) \mathbf{a} , $-2\mathbf{b}$, $6\mathbf{c}$.

4. 12. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$;
а) $-2\mathbf{a}$, \mathbf{b} , $-2\mathbf{c}$; б) $4\mathbf{b}$, $7\mathbf{c}$; в) $5\mathbf{a}$, $-3\mathbf{b}$;
г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ; д) $-2\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $7\mathbf{c}$.

4.13. $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$;
а) $2\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $-5\mathbf{c}$; б) $-3\mathbf{b}$, $11\mathbf{c}$; в) $8\mathbf{a}$, $-6\mathbf{c}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ;
д) $8\mathbf{a}$, $-3\mathbf{b}$, $11\mathbf{c}$.

4.14. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$;
а) $5\mathbf{a}$, $7\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $-4\mathbf{b}$, $11\mathbf{a}$; в) $3\mathbf{a}$, $-7\mathbf{c}$;
г) \mathbf{a} , \mathbf{b} ; д) $3\mathbf{a}$, $7\mathbf{b}$, $-2\mathbf{c}$.

4.15. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$;
а) $5\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $-7\mathbf{a}$, $4\mathbf{c}$; в) $3\mathbf{a}$, $9\mathbf{b}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; д) $3\mathbf{a}$, $-9\mathbf{b}$, $4\mathbf{c}$.

4.16. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$;
а) $4\mathbf{a}$, $-6\mathbf{b}$, $5\mathbf{c}$; б) $-7\mathbf{a}$, $9\mathbf{c}$; в) $3\mathbf{b}$, $-8\mathbf{c}$; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ; д) $4\mathbf{a}$, $-6\mathbf{b}$, $9\mathbf{c}$.

4.17. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -9\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$;
а) $7\mathbf{a}$, $5\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$; б) $-5\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$; в) $3\mathbf{b}$, $-8\mathbf{c}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; д) $7\mathbf{a}$, $5\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$.

4.18. $\mathbf{a} = 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$;
а) $2\mathbf{a}$, $-7\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $-6\mathbf{a}$, $4\mathbf{c}$; в) $5\mathbf{b}$, $7\mathbf{a}$; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ;
д) $2\mathbf{a}$, $-7\mathbf{b}$, $4\mathbf{c}$.

4.19. $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$;
а) \mathbf{a} , $-6\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $-8\mathbf{b}$, $5\mathbf{c}$; в) $-9\mathbf{a}$, $7\mathbf{c}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{b} ;
д) \mathbf{a} , $-6\mathbf{b}$, $5\mathbf{c}$.

4.20. $\mathbf{a} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$;
а) $-2\mathbf{a}$, $7\mathbf{b}$, $5\mathbf{c}$; б) $-6\mathbf{b}$, $7\mathbf{c}$; в) $9\mathbf{a}$, $4\mathbf{c}$;
г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ; д) $-2\mathbf{a}$, $7\mathbf{b}$, $4\mathbf{c}$.

4.21. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$;
а) $-3\mathbf{a}$, $6\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$; б) $5\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; в) $7\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ;
д) $7\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$.

4.22. $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;
а) $3\mathbf{a}$, $-7\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $2\mathbf{b}$, $6\mathbf{c}$; в) $-4\mathbf{a}$, $-5\mathbf{c}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ;
д) $-4\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $6\mathbf{c}$.

4. 23. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$; а) $6\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$, $8\mathbf{c}$; б) $-7\mathbf{b}$, $6\mathbf{a}$; в) $-5\mathbf{a}$, $4\mathbf{c}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{b} ; д) $-5\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$, $4\mathbf{c}$.

4. 24. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; а) $4\mathbf{a}$, $-7\mathbf{b}$, $-2\mathbf{c}$; б) $6\mathbf{a}$, $-4\mathbf{c}$; в) $-2\mathbf{a}$, $5\mathbf{b}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; д) $6\mathbf{a}$, $-7\mathbf{b}$, $-2\mathbf{c}$.

4. 25. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$; а) $2\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $-9\mathbf{a}$, $4\mathbf{c}$; в) $5\mathbf{b}$, $-6\mathbf{c}$; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ; д) $2\mathbf{a}$, $5\mathbf{b}$, $-6\mathbf{c}$.

4. 26. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$; а) $-2\mathbf{a}$, \mathbf{b} , $7\mathbf{c}$; б) $5\mathbf{a}$, $-2\mathbf{c}$; в) $3\mathbf{b}$, \mathbf{c} ; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; д) $-2\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$, $7\mathbf{c}$.

4. 27. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; а) $-3\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $-5\mathbf{c}$; б) $6\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; в) \mathbf{a} , $4\mathbf{c}$; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ; д) $-3\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $-5\mathbf{c}$.

4. 28. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; а) \mathbf{a} , $7\mathbf{b}$, $-2\mathbf{c}$; б) $-5\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$; в) $8\mathbf{c}$, $-3\mathbf{a}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; д) $-3\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $8\mathbf{c}$.

4. 29. $\mathbf{a} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; а) $3\mathbf{a}$, $-5\mathbf{b}$, $-4\mathbf{c}$; б) $6\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; в) $-2\mathbf{a}$, $8\mathbf{c}$; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ; д) $3\mathbf{a}$, $6\mathbf{b}$, $-4\mathbf{c}$.

4. 30. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; а) $5\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$, $-4\mathbf{c}$; б) $4\mathbf{b}$, \mathbf{a} ; в) $7\mathbf{a}$, $-2\mathbf{c}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{b} ; д) $5\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $-2\mathbf{c}$.

5. Вершины пирамиды находятся в точках A , B , C и D . Вычислить: а) площадь указанной грани; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды; в) объем пирамиды $ABCD$.

5. 1. $A(3, 4, 5)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-2, -3, 6)$, $D(3, -6, -3)$; а) ACD ; б) $l = AB$, C и D .

5. 2. $A(-7, -5, 6)$, $B(-2, 5, -3)$, $C(3, -2, 4)$, $D(1, 2, 2)$; а) BCD ; б) $l = CD$, A и B .

5. 3. $A(1, 3, 1)$, $B(-1, 4, 6)$, $C(-2, -3, 4)$, $D(3, 4, -4)$; а) ACD ; б) $l=BC$, A и D .

5. 4. $A(2, 4, 1)$, $B(-3, -2, 4)$, $C(3, 5, -2)$, $D(4, 2, -3)$; а) ABD ; б) $l=AC$, B и D .

5. 5. $A(-5, -3, -4)$, $B(1, 4, 6)$, $C(3, 2, -2)$, $D(8, -2, 4)$; а) ACD ; б) $l=BC$, A и D .

5. 6. $A(3, 4, 2)$, $B(-2, 3, -5)$, $C(4, -3, 6)$, $D(6, -5, 3)$; а) ABD ; б) $l=BD$, A и C .

5. 7. $A(-4, 6, 3)$, $B(3, -5, 1)$, $C(2, 6, -4)$, $D(2, 4, -5)$; а) ACD ; б) $l=AD$, B и C .

5. 8. $A(7, 5, 8)$, $B(-4, -5, 3)$, $C(2, -3, 5)$, $D(5, 1, -4)$; а) BCD ; б) $l=BC$, A и D .

5. 9. $A(3, -2, 6)$, $B(-6, -2, 3)$, $C(1, 1, -4)$, $D(4, 6, -7)$; а) ABD ; б) $l=BD$, A и C .

5. 10. $A(-5, -4, -3)$, $B(7, 3, -1)$, $C(6, -2, 0)$, $D(3, 2, -7)$; а) BCD ; б) $l=AD$, B и C .

5. 11. $A(3, -5, -2)$, $B(-4, 2, 3)$, $C(1, 5, 7)$, $D(-2, -4, 5)$; а) ACD ; б) $l=BD$, A и C .

5. 12. $A(7, 4, 9)$, $B(1, -2, -3)$, $C(-5, -3, 0)$, $D(1, -3, 4)$; а) ABD ; б) $l=AB$, C и D .

5. 13. $A(-4, -7, -3)$, $B(-4, -5, 7)$, $C(2, -3, 3)$, $D(3, 2, 1)$; а) BCD ; б) $l=BC$, A и D .

5. 14. $A(-4, -5, -3)$, $B(3, 1, 2)$, $C(5, 7, -6)$, $D(6, -1, 5)$; а) ACD ; б) $l = BC$, A и D .

5. 15. $A(5, 2, 4)$, $B(-3, 5, -7)$, $C(1, -5, 8)$, $D(9, -3, 5)$; а) ABD ; б) $l = BD$, A и C .

5. 16. $A(-6, 4, 5)$, $B(5, -7, 3)$, $C(4, 2, -8)$, $D(2, 8, -3)$; а) ACD ; б) $l = AD$, B и C .

5. 17. $A(5, 3, 6)$, $B(-3, -4, 4)$, $C(5, -6, 8)$, $D(4, 0, -3)$; а) BCD ; б) $l = BC$, A и D .

5. 18. $A(5, -4, 4)$, $B(-4, -6, 5)$, $C(3, 2, -7)$, $D(6, 2, -9)$; а) ABD ; б) $l = BD$, A и C .

5. 19. $A(-7, -6, -5)$, $B(5, 1, -3)$, $C(8, -4, 0)$, $D(3, 4, -7)$; а) BCD ; б) $l = AD$, B и C .

5. 20. $A(7, -1, -2)$, $B(1, 7, 8)$, $C(3, 7, 9)$, $D(-3, -5, 2)$; а) ACD ; б) $l = BD$, A и C .

5. 21. $A(5, 2, 7)$, $B(7, -6, -9)$, $C(-7, -6, 3)$, $D(1, -5, 2)$; а) ABD ; б) $l = AB$, C и D .

5. 22. $A(-2, -5, -1)$, $B(-6, -7, 9)$, $C(4, -5, 1)$, $D(2, 1, 4)$; а) BCD ; б) $l = BC$, A и D .

5. 23. $A(-6, -3, -5)$, $B(5, 1, 7)$, $C(3, 5, -1)$, $D(4, -2, 9)$; а) ACD ; б) $l = BC$, A и D .

5. 24. $A(7, 4, 2)$, $B(-5, 3, -9)$, $C(1, -5, 3)$, $D(7, -9, 1)$;
а) ABD ; б) $l = BD$, A и C .

5. 25. $A(-8, 2, 7)$, $B(3, -5, 9)$, $C(2, 4, -6)$, $D(4, 6, -5)$;
а) ACD ; б) $l = AD$, B и C .

5. 26. $A(4, 3, 1)$, $B(2, 7, 5)$, $C(-4, -2, 4)$, $D(2, -3, -5)$; а) ACD ; б) $l = AB$, C и D .

5. 27. $A(-9, -7, 4)$, $B(-4, 3, -1)$, $C(5, -4, 2)$,
 $D(3, 4, 4)$; а) BCD ; б) $l = CD$, A и B .

5. 28. $A(3, 5, 3)$, $B(-3, 2, 8)$, $C(-3, -2, 6)$, $D(7, 8, -2)$; а) ACD ; б) $l = BD$, A и C .

5. 29. $A(4, 2, 3)$, $B(-5, -4, 2)$, $C(5, 7, -4)$, $D(6, 4, -7)$;
а) ABD ; б) $l = AD$, B и C .

5. 30. $A(-4, -2, -3)$, $B(2, 5, 7)$, $C(6, 3, -1)$, $D(6, -4, 1)$; а) ACD ; б) $l = BC$, A и D .

Типовой расчет по теме «Кратные интегралы»

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y , если область D задана указанными линиями.

1.1. $D: y = \sqrt{4 - x^2}, y = \sqrt{3x}, x \geq 0.$

1.2. $D: x^2 = 2y, 5x - 2y - 6 = 0.$

1.3. $D: x = \sqrt{8 - y^2}, y \geq 0, y = x.$

1.4. $D: x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1, y = \ln x.$

1.5. $D: x^2 = 2 - y, x + y = 0.$

1.6. $D: y = \sqrt{2 - x^2}, y = x^2.$

1.7. $D: y = x^2 - 2, y = x.$

1.8. $D: x \geq 0, y \geq 1, y \leq 3, y = x.$

1.9. $D: y^2 = 2x, x^2 = 2y, x \leq 1.$

1.10. $D: x \geq 0, y \geq x, y = \sqrt{9 - x^2}.$

1.11. $D: y^2 = 2 - x, y = x.$

1.12. $D: x = \sqrt{2 - y^2}, x = y^2, y \geq 0.$

1.13. $D: y \geq 0, x + 2y - 12 = 0, y = \lg x.$

1.14. $D: x \leq 0, y \geq 1, y \leq 3, y = -x.$

1.15. $D: y = 0, y \geq x, y = -\sqrt{2 - x^2}.$

2. Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты.

2.1.
$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy.$$

2.2.
$$\int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

2.3.
$$\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}{-\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$2.4. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy.$$

$$2.5. \int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx.$$

$$2.6. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2+y^2} dy.$$

$$2.7. \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2} dy.$$

$$2.8. \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \operatorname{tg}(x^2+y^2) dy.$$

$$2.9. \int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2) dy.$$

$$2.10. \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2} dy.$$

$$2.11. \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$$

$$2.12. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2) dy.$$

$$2.13. \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}.$$

$$2.14. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$2.15. \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

3. Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат.

$$3.1. \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad v: x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x \geq 0, \\ y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

$$3.2. \iiint_V y \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \quad v: z \geq 0, \quad z = 2, \quad y \geq \pm x, \quad z^2 = \\ = 4(x^2 + y^2).$$

$$3.3. \iiint_V z^2 dx dy dz, \quad v: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 36, \quad y \geq x, \quad x \geq 0, \\ z \geq 0.$$

$$3.4. \iiint_V y dx dy dz, \quad v: x^2 + y^2 + z^2 = 32, \quad y^2 = x^2 + z^2, \quad y \geq 0.$$

$$3.5. \iiint_V x dx dy dz, \quad v: x^2 + y^2 + z^2 = 8, \quad x^2 = y^2 + z^2, \quad x \geq 0.$$

$$3.6. \iiint_V y dx dy dz, \quad v: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \quad y \leq \sqrt{3}x, \quad y \geq 0, \\ z \geq 0.$$

$$3.7. \iiint_V y dx dy dz, \quad v: z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y \geq 0.$$

$$3.8. \iiint_V \frac{y^2 dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v: x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y \geq \sqrt{3}x, \quad 4 \leq x^2 + \\ + y^2 + z^2 \leq 36.$$

$$3.9. \iiint_V \frac{y^2 z dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad v: y \geq 0, \quad y \leq \sqrt{3}x, \quad z = 3(x^2 + y^2), \\ z = 3.$$

$$3.10. \iiint_V \frac{x^2 dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad v: x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad z \geq 0.$$

$$3.11. \iiint_V \frac{xz dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v: z = 2(x^2 + y^2), \quad y \geq 0, \quad y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x, \\ z = 18.$$

$$3.12. \iiint_V \frac{xy dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad v: z = x^2 + y^2, \quad y \geq 0, \quad y \leq x, \quad z = 4.$$

$$3.13. \iiint_V \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v: x^2 + y^2 = 4y, \quad y + z = 4, \quad z \geq 0.$$

$$3.14. \iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v: x^2 + y^2 = 2x, \quad x + z = 2, \quad y \geq 0, \\ z \geq 0.$$

$$3.15. \iiint_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v: x^2 + y^2 = 16y, \quad y + z = 16, \quad x \geq 0, \\ z \geq 0.$$

4. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной заданными линиями.

$$4.1. D: y^2 = 4x, \quad x + y = 3, \quad y \geq 0.$$

$$4.2. D: y = 6x^2, \quad x + y = 2, \quad x \geq 0.$$

$$4.3. D: y^2 = x + 2, \quad x = 2.$$

$$4.4. D: x = -2y^2, \quad x = 1 - 3y^2, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0.$$

$$4.5. D: y = 8/(x^2 + 4), \quad x^2 = 4y.$$

$$4.6. D: y = x^2 + 1, \quad x + y = 3.$$

$$4.7. D: y^2 = 4x, \quad x^2 = 4y.$$

$$4.8. D: y = \cos x, \quad y \leq x + 1, \quad y \geq 0.$$

$$4.9. D: x = \sqrt{4 - y^2}, \quad y = \sqrt{3x}, \quad x \geq 0.$$

4.10. $D: y = x^2 + 2, x \geq 0, x = 2, y = x.$

4.11. $D: y = 4x^2, 9y = x^2, y \leq 2.$

4.12. $D: y = x^2, y = -x.$

4.13. $D: x = y^2, x = \frac{3}{4}y^2 + 1.$

4.14. $D: y = \sqrt{2 - x^2}, y = x^2.$

4.15. $D: y = x^2 + 4x, y = x + 4.$

5. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

5.1. $z = x^2 + y^2, x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

5.2. $z = 2 - (x^2 + y^2), x + 2y = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

5.3. $z = x^2, x - 2y + 2 = 0, x + y - 7 = 0, z \geq 0.$

5.4. $z = 2x^2 + 3y^2, y = x^2, y = x, z \geq 0.$

5.5. $z = 2x^2 + y^2, y \leq x, y = 3x, x = 2, z \geq 0.$

5.6. $z = x, y = 4, x = \sqrt{25 - y^2}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

5.7. $y = \sqrt{x}, y = x, x + y + z = 2, z \geq 0.$

5.8. $y = 1 - x^2, x + y + z = 3, y \geq 0, z \geq 0.$

5.9. $z = 2x^2 + y^2, x + y = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

5.10. $z = 4 - x^2, x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

5.11. $2x + 3y - 12 = 0, 2z = y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

5.12. $z = 10 + x^2 + 2y^2, y = x, x = 1, y \geq 0, z \geq 0.$

5.13. $z = x^2, x + y = 6, y = 2x, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

5.14. $z = 3x^2 + 2y^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = 1$, $z \geq 0$.

5.15. $3y = \sqrt{x}$, $y \leq x$, $x + y + z = 10$, $y = 1$, $z = 0$.

Типовой расчет по теме «Криволинейные интегралы»

Вычислить данные криволинейные интегралы.

1

1.1. $\int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, где L_{AB} — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$. (Ответ: -6 .)

1.2. $\int_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, где L_{AB} — дуга астроида $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$ от точки $A(2, 0)$ до точки $B(0, 2)$. (Ответ: $3\sqrt[3]{2\pi/8}$.)

1.3. $\int_{L_{OA}} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, где L_{OA} — дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$. (Ответ: $4/3$.)

1.4. $\oint_L (x + 2y)dx + (x - y)dy$, где L — окружность $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ при положительном направлении обхода. (Ответ: -4π .)

1.5. $\oint_L (x^2 y - x)dx + (y^2 x - 2y)dy$, где L — дуга эллипса $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$ при положительном направлении обхода. (Ответ: $-7,5\pi$.)

1.6. $\oint_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2 y dy$, где L_{AB} — дуга эллипса $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 2)$. (Ответ: $5/6$.)

1.7. $\int_{L_{OBA}} 2xydx - x^2 dy$, где L_{OBA} — ломаная OBA ; $O(0, 0)$; $B(2, 0)$; $A(2, 1)$. (Ответ: -4 .)

1.8. $\int_{L_{AB}} (x^2 - y^2)dx + xydy$, где L_{AB} — отрезок прямой AB ; $A(1, 1)$; $B(3, 4)$. (Ответ: $11\frac{5}{6}$.)

1.9. $\int_{L_{AB}} \cos y dx - \sin x dy$, где L_{AB} — отрезок прямой AB , $A(2\pi, -2\pi)$; $B(-2\pi, 2\pi)$. (Ответ: 0 .)

1.10. $\int_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, где L_{AB} — отрезок прямой AB ; $A(1, 2)$; $B(3, 6)$. (Ответ: $\frac{4}{5} \ln 3$.)

1.11. $\int_{L_{AB}} xy dx + (y - x) dy$, где L_{AB} — дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$. (Ответ: $1/4$.)

1.12. $\int_{L_{ABC}} (x^2 + y^2) dx + (x + y^2) dy$, где L_{ABC} — ломаная ABC ; $A(1, 2)$; $B(3, 2)$; $C(3, 5)$. (Ответ: $64 \frac{2}{3}$.)

1.13. $\int_{L_{OB}} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 z dz$, где L_{OB} — отрезок прямой OB ; $O(0, 0, 0)$; $B(-2, 4, 5)$. (Ответ: 91.)

1.14. $\int_{L_{OA}} y dx + x dy$, где L_{OA} — дуга окружности $x = R \cos t$, $y = R \sin t$; $O(R, 0)$; $A(0, R)$. (Ответ: 0.)

1.15. $\int_{L_{OA}} xy dx + (y - x) dy$, где L_{OA} — дуга параболы $y^2 = x$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$. (Ответ: $17/30$.)

1.16. $\int_{L_{AB}} x dx + y dy + (x - y + 1) dz$, где L_{AB} — отрезок прямой AB ; $A(1, 1, 1)$; $B(2, 3, 4)$. (Ответ: 7.)

1.17. $\int_{L_{AB}} (xy - 1) dx + x^2 y dy$, где L_{AB} — дуга параболы $y^2 = 4 - 4x$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 2)$. (Ответ: $17/15$.)

1.18. $\int_{L_{OB}} xy dx + (y - x) dy$, где L_{OB} — дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$. (Ответ: $1/12$.)

1.19. $\int_{L_{OB}} (xy - y^2) dx + x dy$, где L_{OB} — дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$. (Ответ: $43/60$.)

1.20. $\int_{L_{AB}} x dy - y dx$, где L_{AB} — дуга астроида $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$ от точки $A(2, 0)$ до точки $B(0, 2)$. (Ответ: $3\pi/4$.)

- 2.1. $\int_L \sqrt{2-z^2} (2z - \sqrt{x^2+y^2}) dl$, где L — дуга кривой $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Ответ: $4\pi^2(1 + \pi^2)$.)
- 2.2. $\oint_L (x^2 + y^2) dl$, где L — окружность $x^2 + y^2 = 4$. (Ответ: 16π .)
- 2.3. $\int_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, где L_{OB} — отрезок прямой, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $B(2, 2)$. (Ответ: $\pi/2$.)
- 2.4. $\int_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$, где L_{AB} — отрезок прямой AB ; $A(-1, 0)$; $B(0, 1)$. (Ответ: $-5\sqrt{2}$.)
- 2.5. $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, где L_{AB} — отрезок прямой, заключенный между точками $A(0, 4)$ и $B(4, 0)$. (Ответ: 0 .)
- 2.6. $\int_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dl$, где L — дуга кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. (Ответ: $16/3$.)
- 2.7. $\int_{L_{AB}} y dl$, L_{AB} — дуга астроиды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, заключенная между точками $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$. (Ответ: $0,6$.)
- 2.8. $\int_{L_{OB}} y dl$, где L_{OB} — дуга параболы $y^2 = \frac{2}{3}x$ между точками $O(0, 0)$ и $B(\sqrt{35}/6, \sqrt{35}/3)$. (Ответ: $7\frac{26}{27}$.)
- 2.9. $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, где L — дуга кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sqrt{3}t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Ответ: $4\pi(1 + 4\pi^2)$.)
- 2.10. $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$, где L — дуга кардиоиды $\rho = (1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. (Ответ: $(\pi + 2)\sqrt{2} - 8$.)
- 2.11. $\int_L \sqrt{2y} dl$, где L — первая арка циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$. (Ответ: $8\pi\sqrt{2}$.)

2.12. $\int_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где L_{OA} — отрезок прямой, со-

единяющий точки $O(0, 0)$ и $A(1, 2)$. (Ответ: $\ln((\sqrt{5} + 3)/2)$.)

2.13. $\int_L \frac{(y^2 - x^2)xy}{(x^2 + y^2)^2} dl$, где L — дуга кривой $\rho = 9 \sin 2\varphi$,

$0 \leq \varphi \leq \pi/4$. (Ответ: $-9/8$.)

2.14. $\int_{L_{OABC}} xy dl$, где L_{OABC} — контур прямоугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(4, 2)$, $C(0, 2)$. (Ответ: 24.)

2.15. $\int_{L_{ABO}} (x + y) dl$, где L_{ABO} — контур треугольника с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $O(0, 0)$. (Ответ: $-\sqrt{2}$.)

2.16. $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, где L — первый виток винтовой линии

$x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 2t$. (Ответ: $\frac{16}{3} \sqrt{2} \pi^3$.)

2.17. $\int_{L_{OAB}} (x + y) dl$, где L_{OAB} — контур треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$. (Ответ: 0.)

2.18. $\int_L (x + y) dl$, где L — дуга лемнискаты Бернулли $\rho^2 = \cos 2\varphi$, $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$. (Ответ: $\sqrt{2}$.)

2.19. $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где L — окружность $x^2 + y^2 = 2y$.

(Ответ: 8.)

2.20. $\int_{L_{OABC}} xy dl$, где L_{OABC} — контур прямоугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $B(5, 3)$, $C(0, 3)$. (Ответ: -15 .)

Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$.

1.1. $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$. (Ответ: $x^2 + x + 2y - 3xy^2 + C$.)

1.2. $\left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2} - 3\right)dx + \left(\frac{2x^2y}{1+x^2y^2} - 5\right)dy$.
(Ответ: $\ln(1+x^2y^2) - 3x - 5y + C$.)

1.3. $-\left(\frac{1}{2} \cos 2y + y \sin 2x\right)dx + (x \sin 2y + \cos^2 x + 1)dy$. (Ответ: $y \cos^2 x - \frac{x}{2} \cos 2y + y + C$.)

1.4. $(y^2 e^{xy^2} + 3)dx + (2xye^{xy^2} - 1)dy$. (Ответ: $3x + e^{xy^2} - y + C$.)

1.5. $\left(\frac{1}{x+y} + \cos x \cos y - 3x^2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} - \sin x \sin y + 4y\right)dy$. (Ответ: $\ln(x+y) + \sin x \cos y - x^3 + 2y^2 + C$.)

1.6. $(y/x + \ln y + 2x)dx + (\ln x + x/y + 1)dy$. (Ответ: $x^2 + y \ln x + x \ln y + y + C$.)

1.7. $(e^{x+y} - \cos x)dx + (e^{x+y} + \sin y)dy$. (Ответ: $e^{x+y} - \cos y - \sin x + C$.)

1.8. $(y/\sqrt{1-x^2y^2} + 2x)dx + (x/\sqrt{1-x^2y^2} + 6y)dy$.
(Ответ: $\arcsin xy + x^2 + 3y^2 + C$.)

1.9. $(e^{xy} + xye^{xy} + 2)dx + (x^2e^{xy} + 1)dy$. (Ответ: $xe^{xy} + 2x + y + C$.)

1.10. $(ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy$. (Ответ: $e^{xy} + xy^2 + C$.)

1.11. $(y \cos(xy) + 2x - 3y)dx + (x \cos(xy) - 3x + 4y)dy$.
(Ответ: $\sin(xy) + x^2 - 3xy + 2y^2 + C$.)

1.12. $(y \sin(x+y) + xy \cos(x+y) - 9x^2)dx + (x \sin(x+y) + xy \cos(x+y) + 2y)dy$. (Ответ: $xy \sin(x+y) - 3x^3 + y^2 + C$.)

1.13. $(5y + \cos x + 6xy^2)dx + (5x + 6x^2y)dy$.
(Ответ: $\sin x + 5xy + 3x^2y^2 + C$.)

1.14. $(y^2 e^{xy} - 3) dx + e^{xy} (1 + xy) dy$. (Ответ: $ye^{xy} - 3x + C$.)

1.15. $(1 + \cos(xy))y dx + (1 + \cos(xy))x dy$. (Ответ: $xy + \sin(xy) + C$.)

1.16. $(y - \sin x) dx + (x - 2y \cos y^2) dy$. (Ответ: $\cos x + xy - \sin y^2 + C$.)

1.17. $(\sin 2x - \frac{1}{x^2 y}) dx - \frac{1}{xy^2} dy$. (Ответ: $\frac{1}{xy} - \frac{1}{2} \cos 2x + C$.)

1.18. $\frac{x+y}{xy} dx + \frac{y-x}{y^2} dy$. (Ответ: $\ln(xy) + x/y + C$.)

1.19. $(20x^3 - 21x^2y + 2y) dx + (3 + 2x - 7x^3) dy$.
(Ответ: $5x^4 - 7x^3y + 2xy + 3y + C$.)

1.20. $(ye^{xy} - 2 \sin x) dx + (xe^{xy} + \cos y) dy$.
(Ответ: $e^{xy} + 2 \cos x + \sin y + C$.)

4

Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S , где S — часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

2.1. $\iint_S (2x + 3y + 2z) dS$, $(p): x + 3y + z = 3$. (Ответ: $15\sqrt{11}/2$.)

2.2. $\iint_S (2 + y - 7x + 9z) dS$, $(p): 2x - y - 2z = -2$.
(Ответ: 12.)

2.3. $\iint_S (6x + y + 4z) dS$, $(p): 3x + 3y + z = 3$. (Ответ: $19\sqrt{19}/6$.)

2.4. $\iint_S (x + 2y + 3z) dS$, $(p): x + y + z = 2$. (Ответ: $8\sqrt{3}$.)

2.5. $\iint_S (3x - 2y + 6z) dS$, $(p): 2x + y + 2z = 2$. (Ответ: $5/2$.)

2.6. $\iint_S (2x + 5y - z) dS$, $(p): x + 2y + z = 2$. (Ответ: $7\sqrt{6}/3$.)

2.7. $\iint_S (5x - 8y - z) dS$, $(p): 2x - 3y + z = 6$. (Ответ: $25\sqrt{14}$.)

2.8. $\iint_S (3y - x - z) dS$, $(p): x - y + z = 2$. (Ответ: $-20\sqrt{3}/3$.)

2.9. $\iint_S (3y - 2x - 2z) dS$, $(p): 2x - y - 2z = -2$. (Ответ: 3.)

2.10. $\iint_S (2x - 3y + z) dS$, $(p): x + 2y + z = 2$. (Ответ: $\sqrt{6}$.)

2.11. $\iint_S (5x + y - z) dS$, $(p): x + 2y + 2z = 2$. (Ответ: 5.)

2.12. $\iint_S (3x + 2y + 2z) dS$, $(p): 3x + 2y + 2z = 6$. (Ответ: $9\sqrt{17}$.)

2.13. $\iint_S (2x + 3y - z) dS$, $(p): 2x + y + z = 2$. (Ответ: $2\sqrt{6}$.)

2.14. $\iint_S (9x + 2y + z) dS$, $(p): 2x + y + z = 4$. (Ответ: $40\sqrt{6}$.)

2.15. $\iint_S (5x + 8y + 8z) dS$, $(p): x + 4y + 2z = 8$. (Ответ: $96\sqrt{21}$.)

2.16. $\iint_S (4y - x + 4z) dS$, $(p): x - 2y + 2z = 2$. (Ответ: -1.)

2.17. $\iint_S (7x + y + 2z) dS$, $(p): 3x - 2y + 2z = 6$. (От-
вет: $17\sqrt{17}/2$.)

2.18. $\iint_S (2x + 3y + z) dS$, $(p): 2x + 3y + z = 6$. (От-
вет: $18\sqrt{14}$.)

2.19. $\iint_S (4x - y + z) dS$, $(p): x - y + z = 2$. (Ответ: $8\sqrt{3}$.)

2.20. $\iint_S (6x - y + 8z) dS$, $(p): x + y + 2z = 2$. (Ответ:
 $6\sqrt{6}$.)

5

Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

3.1. $\iint_S (y^2 + z^2) dydz$, где S — часть поверхности параболоида $x = 9 - y^2 - z^2$ (нормальный вектор \mathbf{n} которой образует острый угол с ортом \mathbf{i}), отсеченная плоскостью $x = 0$. (Ответ: $81\pi/2$.)

3.2. $\iint_S z^2 dx dy$, где S — внешняя сторона поверхности эллипсоида $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$. (Ответ: 0.)

3.3. $\iint_S z dx dy + y dx dz + x dy dz$, где S — внешняя сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. (Ответ: 3.)

3.4. $\iint_S (z + 1) dx dy$, где S — внешняя сторона поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. (Ответ: $256\pi/3$.)

3.5. $\iint_S yz dy dz + xz dx dz + xy dx dy$, где S — верхняя сторона плоскости $x + y + z = 4$, отсеченной координатными плоскостями. (Ответ: 32.)

3.6. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, лежащая в первом октанте. (Ответ: 96π.)

3.7. $\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Ответ: 4π.)

3.8. $\iint_S xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$, где S — верхняя часть плоскости $x + y + z = 1$, отсеченной координатными плоскостями. (Ответ: $1/8$.)

3.9. $\iint_S yz dx dy + xz dy dz + xy dx dz$, где S — наружная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, отсеченная плоскостями $z = 0$, $z = 5$. (Ответ: 25π .)

3.10. $\iint_S y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz$, где S — часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор \mathbf{n} которой образует тупой угол с ортом \mathbf{k}), вырезаемая цилиндром $x^2 + y^2 = 1$. (Ответ: $\pi/8$.)

3.11. $\iint_S (x^2 + y^2) z dx dy$, где S — внешняя сторона нижней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. (Ответ: $324\pi/5$.)

3.12. $\iint_S x^2 dy dz + z^2 dx dy$, где S — часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$ (нормальный вектор \mathbf{n} которой образует тупой угол с ортом \mathbf{k}), лежащая между плоскостями $z = 0$, $z = 1$. (Ответ: $-\pi/2$.)

3.13. $\iint_S (2y^2 - z) dx dy$, где S — часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор \mathbf{n} которой образует тупой угол с ортом \mathbf{k}), отсекаемая плоскостью $z = 2$. (Ответ: 0 .)

3.14. $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$, где S — часть поверхности гиперболоида $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ (нормальный вектор \mathbf{n} которой образует тупой угол с ортом \mathbf{k}), отсекаемая плоскостями $z = 0$, $z = \sqrt{3}$. (Ответ: $-2\sqrt{3}\pi$.)

3.15. $\iint_S xy dy dz + yz dx dz + xz dx dy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, лежащая в первом октанте. (Ответ: $3\pi/16$.)

3.16. $\iint_S x^2 dy dz + z dx dy$, где S — часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор \mathbf{n} которой образует тупой угол с ортом \mathbf{k}), отсекаемая плоскостью $z = 4$. (Ответ: 8π .)

3.17. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dxdz - z dx dy$, где S — часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$ (нормальный вектор \mathbf{n} которой образует острый угол с ортом \mathbf{k}), отсекаемая плоскостями $z = 0$ и $z = 3$. (Ответ: -18π .)

3.18. $\iint_S x^2 dydz - z^2 dxdz + z dx dy$, где S — часть поверхности параболоида $z = 3 - x^2 - y^2$ (нормальный вектор \mathbf{n} которой образует острый угол с ортом \mathbf{k}), отсекаемая плоскостью $z = 0$. (Ответ: $9\pi/2$.)

3.19. $\iint_S yz dydz - x^2 dxdz - y^2 dx dy$, где S — часть поверхности конуса $x^2 + z^2 = y^2$ (нормальный вектор \mathbf{n} которой образует тупой угол с ортом \mathbf{j}), отсекаемая плоскостями $y = 0$, $y = 1$. (Ответ: $\pi/4$.)

3.20. $\iint_S x^2 dydz + 2y^2 dxdz - z dx dy$, где S — часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор \mathbf{n} которой образует острый угол с ортом \mathbf{k}), отсекаемая плоскостью $z = 1$. (Ответ: $-\pi/2$.)

Типовой расчет по теме

«Определители. Матрицы. Системы линейных уравнений»

1. Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2} , a_{3j} . Вычислить определитель Δ : а) разложив его по элементам i -й строки; б) разложив его по элементам j -го столбца; в) получив предварительно нули в i -й строке.

$$1.1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix},$$

$i=4, j=1.$

$$1.2. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix},$$

$i=3, j=3.$

$$1.3. \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$

$i=4, j=1.$

$$1.4. \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix},$$

$i=1, j=3.$

$$1.5. \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix},$$

$i=2, j=4.$

$$1.6. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix},$$

$i=1, j=2.$

$$1.7. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix},$$

$i=2, j=3.$

$$1.8. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$

$i=3, j=1.$

$$1.9. \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix},$$

$i=4, j=3.$

$$1.10. \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix},$$

$i=4, j=2.$

$$1.11. \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix},$$

$i=3, j=4.$

$$1.12. \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

$i=1, j=2.$

$$1.13. \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

$$i=1, j=4.$$

$$1.14. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

$$i=2, j=4.$$

$$1.15. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix},$$

$$i=1, j=3.$$

$$1.16. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$i=3, j=2.$$

$$1.17. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$i=3, j=1.$$

$$1.18. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$i=2, j=4.$$

$$1.19. \begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix},$$

$$i=2, j=3.$$

$$1.20. \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix},$$

$$i=4, j=3.$$

$$1.21. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix},$$

$$i=1, j=2.$$

$$1.22. \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$i=3, j=2.$$

$$1.23. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$i=4, j=4.$$

$$1.24. \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix},$$

$$i=3, j=2.$$

$$1.25. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$i=2, j=3.$$

$$1.26. \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$i=4, j=1.$$

$$1.27. \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}, \quad 1.28. \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$i=3, j=4. \quad i=1, j=2.$$

$$1.29. \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad 1.30. \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$i=4, j=4. \quad i=2, j=2.$$

2. Даны две матрицы A и B . Найти: а) AB ; б) BA ; в) A^{-1} ; г) AA^{-1} ; д) $A^{-1}A$.

$$2.1. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2.2. A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$2.3. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$2.4. A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.5. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2.6. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$2.7. A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$2.8. A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.9. A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.10. A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$2.11. A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.12. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$2.13. A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$2.14. A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$2.15. A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$2.16. A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.17. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2.18. A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.19. A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$2.20. A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.21. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2.22. A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.23. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.24. A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$2.25. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$2.26. A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.27. A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2.28. A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.29. A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.30. A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$3. 1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases} \quad 3. 2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

$$3. 3. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \quad 3. 4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

$$3. 5. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$$

$$3. 6. \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

$$3. 7. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$$

$$3. 8. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$$

$$3. 9. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases}$$

$$3. 10. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases}$$

$$3. 11. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

$$3. 12. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

$$3. 13. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \quad 3. 14. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$3. 15. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$$

$$3. 16. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$$

$$3. 17. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

$$3. 18. \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$$

$$3. 19. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$$

$$3. 20. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$$

$$3. 21. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$$

$$3. 22. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$3. 23. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3. 24. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$$

$$3. 25. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

$$3. 26. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$3. 27. \begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$$

$$3. 28. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$3. 29. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$$

$$3. 30. \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$$

4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

$$4.1. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 4.2. \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases} \quad 4.4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \quad 4.6. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.7. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.8. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.10. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.11. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.12. \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.13. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.14. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.15. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.16. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.17. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.18. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.19. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.20. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.21. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.22. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.23. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.24. \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.25. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.26. \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.27. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.28. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.29. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.30. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Типовой расчет по теме «Неопределенный интеграл»

Найти неопределенные интегралы.

- 1.1. $\int \frac{2-3x}{x^2+2} dx.$
- 1.2. $\int \frac{3-5x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
- 1.3. $\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}} dx.$
- 1.4. $\int \frac{6x+1}{2x^2-1} dx.$
- 1.5. $\int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}} dx.$
- 1.6. $\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$
- 1.7. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}} dx.$
- 1.8. $\int \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}} dx.$
- 1.9. $\int \frac{3x+2}{2x^2+1} dx.$
- 1.10. $\int \frac{1-5x}{1+25x^2} dx.$
- 1.11. $\int \frac{4x-3}{3x^2-4} dx.$
- 1.12. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}} dx.$
- 1.13. $\int \frac{x-3}{9x^2+7} dx.$
- 1.14. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx.$
- 1.15. $\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$
- 1.16. $\int \frac{5-x}{2+x^2} dx.$
- 1.17. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}} dx.$
- 1.18. $\int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
- 1.19. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-3}} dx.$
- 1.20. $\int \frac{1-3x}{4x^2-1} dx.$
- 1.21. $\int \frac{x-5}{3-2x^2} dx.$
- 1.22. $\int \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}} dx.$
- 1.23. $\int \frac{2x-7}{x^2-5} dx.$
- 1.24. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-1}} dx.$
- 1.25. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$
- 1.26. $\int \frac{x-5}{x^2+7} dx.$
- 1.27. $\int \frac{3-7x}{1+x^2} dx.$
- 1.28. $\int \frac{8-2x}{1+3x^2} dx.$
- 1.29. $\int \frac{3x+7}{\sqrt{x^2+4}} dx.$
- 1.30. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}} dx.$

2.1. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx.$

2.2. $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2} dx.$

2.3. $\int \frac{3x^2 + 1}{(x-1)(x^2-1)} dx.$

2.4. $\int \frac{x+2}{x^3-x^2} dx.$

2.5. $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx.$

2.6. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx.$

2.7. $\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)} dx.$

2.8. $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3} dx.$

2.9. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx.$

2.10. $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - x - 2}{x(x+1)^2} dx.$

2.11. $\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} dx.$

2.12. $\int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2} dx.$

2.13. $\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)} dx.$

2.14. $\int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)} dx.$

2.15. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx.$

2.16. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} dx.$

2.17. $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)} dx.$

2.18. $\int \frac{4xdx}{(x^2-1)(x+1)}.$

2.19. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}.$

2.20. $\int \frac{x^3-4x^2+2x-1}{x^3-x^2} dx.$

2.21. $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x} dx.$

2.22. $\int \frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2} dx.$

2.23. $\int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)} dx.$

2.24. $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2} dx.$

2.25. $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1} dx.$

2.26. $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)} dx.$

2.27. $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2} dx.$

2.28. $\int \frac{dx}{x^3-x^2}.$

2.29. $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x} dx.$

2.30. $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2} dx.$

3.1. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx.$

3.2. $\int \cos(\ln x) dx.$

3.3. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

3.4. $\int \ln(x+2) dx.$

3.5. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} dx.$

3.6. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$

3.7. $\int \ln^2 x dx.$

3.8. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

3.9. $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

3.10. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

3.11. $\int \ln(x+4) dx.$

3.12. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

3.13. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$

3.14. $\int x^2 \ln(x+1) dx.$

3.15. $\int \frac{\ln x \ln(\ln x)}{x} dx.$

3.16. $\int \ln(x^2+1) dx.$

$$3.17. \int \frac{\ln x}{x^3} dx.$$

$$3.18. \int \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$3.19. \int \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$$

$$3.20. \int (x^2 - x + 1) \ln x dx.$$

$$4.1. \int \sin^2 (1-x) dx.$$

$$4.2. \int \sin^3 (1-x) dx.$$

$$4.3. \int \left(1 - 2 \sin \frac{x}{5}\right)^2 dx$$

$$4.4. \int \cos^3 5x \sin 5x dx.$$

$$4.5. \int \cos^3 (1-x) dx.$$

$$4.6. \int (3 - \sin 2x)^2 dx.$$

$$4.7. \int \sin^2 \frac{3x}{2} dx. \text{ (Or } \int \cos^2 \frac{3x}{2} dx \text{)}$$

$$4.8. \int (\cos x + 3)^2 dx. \text{ (Or } \int \sin^2 (x+3) dx \text{)}$$

$$4.9. \int \cos^3 (x+3) dx.$$

$$4.10. \int \sin^3 \frac{4x}{5} dx.$$

$$5.1. \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x+3}}.$$

$$5.2. \int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}.$$

$$5.3. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}.$$

$$3.21. \int \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$3.22. \int \frac{\ln (\sin x)}{\cos^2 x} dx.$$

$$3.23. \int x \ln (x^2 + 1) dx.$$

$$3.24. \int x \ln^2 x dx.$$

$$3.25. \int x^2 \ln x dx.$$

$$3.26. \int x \ln (x+1) dx.$$

4

$$4.11. \int (1 - \cos x)^2 dx.$$

$$4.12. \int \sin^2 (2x-1) dx.$$

$$4.13. \int \sin^3 6x dx.$$

$$4.14. \int \sin^2 0,5x dx.$$

$$4.15. \int \sin^2 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx.$$

$$4.16. \int \cos^2 2x dx.$$

$$4.17. \int \left(1 + 2 \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx.$$

$$4.18. \int \cos^2 3x dx.$$

$$4.19. \int \sin^4 2x dx.$$

$$3.27. \int \sin (\ln x) dx.$$

$$3.28. \int (x^2 - 4) \sin 5x dx.$$

$$3.29. \int \ln (x+5) dx.$$

$$3.30. \int \ln \frac{2-x}{2+x} dx.$$

$$4.20. \int \sin^2 3x dx. \text{ (Or } \int \cos^2 3x dx \text{)}$$

$$4.21. \int (1 - \cos 3x)^2 dx.$$

$$4.22. \int \cos^2 \frac{2x}{5} dx.$$

$$4.23. \int \sin^3 5x dx. \text{ (Or } \int \cos^3 5x dx \text{)}$$

$$4.24. \int \sin^4 x dx.$$

$$4.25. \int \cos^4 x dx.$$

$$4.26. \int \cos^3 4x dx.$$

$$4.27. \int \cos^2 7x dx. \text{ (Or } \int \sin^2 7x dx \text{)}$$

$$4.28. \int (\sin x - 5)^2 dx.$$

$$4.29. \int \sin^3 4x dx.$$

$$4.30. \int \sin^2 \frac{3x}{4} dx.$$

5

$$5.4. \int \frac{x dx}{2 + \sqrt{x+4}}$$

$$5.5. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}}$$

$$5.6. \int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}} dx.$$

$$5.7. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$$

$$5.8. \int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3} dx.$$

$$5.9. \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$$

$$5.10. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$$

$$5.11. \int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}} dx.$$

$$5.12. \int \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$5.13. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x-1}$$

$$5.14. \int \frac{dx}{3 + \sqrt{x+5}}$$

$$5.15. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x-1}}$$

$$5.16. \int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$$

$$5.17. \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx.$$

$$5.18. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-7}}$$

$$5.19. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-4}}$$

$$5.20. \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx.$$

$$5.21. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}}$$

$$5.22. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x+10}$$

$$5.23. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$$

$$5.24. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x-2}}$$

$$5.25. \int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$$

$$5.26. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}$$

$$5.27. \int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}} dx.$$

$$5.28. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}$$

$$5.29. \int \frac{dx}{3 + \sqrt{x-6}}$$

$$5.30. \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x-8}}$$

Типовой расчет по теме «Вычисление и применение производных»

Продифференцировать данные функции.

1

$$1. y = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} \log_2(x-3x^2).$$

$$2. y = \sqrt[3]{\frac{2x-5}{2x+3}} \lg(4x+7).$$

$$3. y = \sqrt[4]{\frac{x+3}{x-3}} \ln(5x^2-2x+1).$$

$$4. y = \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} \log_3(x^2+x+4).$$

$$5. y = \sqrt[6]{\frac{7x-4}{7x+4}} \log_5(3x^2+2x).$$

$$6. y = \sqrt[7]{\frac{2x-3}{2x+1}} \lg(7x-10).$$

$$7. y = \sqrt[8]{\frac{5x+1}{5x-1}} \ln(3x-x^2).$$

$$8. y = \sqrt[9]{\frac{x+3}{x-3}} \log_5(2x-3).$$

$$9. y = \sqrt{\frac{6x+5}{6x-5}} \lg(4x+7).$$

$$10. y = \sqrt[3]{\frac{4x-1}{4x+1}} \ln(2x^3-3).$$

$$11. y = \sqrt[4]{\frac{x+6}{x-6}} \sin(3x^2+1).$$

$$12. y = \sqrt[5]{\frac{x-7}{x+7}} \cos(2x^3+x).$$

$$13. y = \sqrt[6]{\frac{x-9}{x+9}} \operatorname{tg}(3x^2-4x+1).$$

14. $y = \sqrt[7]{\frac{x-4}{x+4}} \operatorname{ctg}(2x+5).$
15. $y = \sqrt[8]{\frac{x-2}{x+2}} \sin(4x^2 - 7x + 2).$
16. $y = \sqrt[9]{\frac{x-3}{x+3}} \cos(x^2 - 3x + 2).$
17. $y = \sqrt{\frac{3x-2}{3x+2}} \operatorname{tg}(2x^2 - 9).$
18. $y = \sqrt{\frac{2x+3}{2x-3}} \operatorname{ctg}(3x^2 + 5).$
19. $y = \sqrt[4]{\frac{x+5}{x-5}} \sin(3x^2 - x + 4).$
20. $y = \sqrt[5]{\frac{x-6}{x+6}} \cos(7x + 2).$
21. $y = \sqrt[6]{\frac{x-7}{x+7}} \arcsin(2x + 3).$
22. $y = \sqrt[7]{\frac{x-8}{x+8}} \arccos(3x - 5).$
23. $y = \sqrt[8]{\frac{x-4}{x+4}} \operatorname{arctg}(5x + 1).$
24. $y = \sqrt[9]{\frac{x-1}{x+1}} \operatorname{arcctg}(7x + 2).$
25. $y = \sqrt{\frac{7x-4}{7x+4}} \arcsin(x^2 + 1).$
26. $y = \sqrt[3]{\frac{8x-3}{8x+3}} \arccos(x^2 - 5).$
27. $y = \sqrt[4]{\frac{2x-5}{2x+5}} \operatorname{arctg}(3x + 2).$
28. $y = \sqrt[5]{\frac{3x-4}{3x+4}} \operatorname{arcctg}(2x + 5)$

$$29. y = \sqrt[6]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} \arcsin 2x.$$

$$30. y = \sqrt[7]{\frac{x^2 + 3}{x^2 - 3}} \arccos 4x.$$

2. Найти y' и y'' .

$$2.1. \begin{cases} x = (2t + 3) \cos t, \\ y = 3t^3. \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$2.5. \begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases}$$

$$2.7. \begin{cases} x = 2t/(1 + t^3), \\ y = t^2/(1 + t^2). \end{cases}$$

$$2.9. \begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases}$$

$$2.11. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases}$$

$$2.17. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$2.19. \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$$

$$2.21. \begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} x = 1/(t + 2), \\ y = (t/(t + 2))^2. \end{cases}$$

$$2.6. \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$$

$$2.8. \begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}, \\ y = (t + 1)/\sqrt{t^2 - 1}. \end{cases}$$

$$2.10. \begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = t \ln t. \end{cases}$$

$$2.12. \begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$$

$$2.16. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$$

$$2.18. \begin{cases} x = 3(\sin t - t \cos t), \\ y = 3(\cos t + t \sin t). \end{cases}$$

$$2.20. \begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t}. \end{cases}$$

$$2.22. \begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$$

$$2.23. \begin{cases} x = 1/(t+1), \\ y = (t/(t+1))^2. \end{cases}$$

$$2.24. \begin{cases} x = 5 \sin^3 t, \\ y = 3 \cos^3 t. \end{cases}$$

$$2.25. \begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}. \end{cases}$$

$$2.26. \begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$$

$$2.27. \begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$$

$$2.28. \begin{cases} x = te^t, \\ y = t/e^t. \end{cases}$$

$$2.29. \begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases}$$

$$2.30. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

С помощью дифференциала приближенно вычислить данные величины и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

3

$$1. \sqrt[5]{34}.$$

$$2. \sqrt[3]{26,19}.$$

$$3. \sqrt[4]{16,64}.$$

$$4. \sqrt{8,76}.$$

$$5. \sqrt[5]{31}.$$

$$6. \sqrt[3]{70}.$$

$$7. (2,01)^3 + (2,01)^2.$$

$$8. \sqrt[3]{65}.$$

$$9. 2,9/\sqrt{(2,9)^2 + 16}.$$

$$10. \sqrt{\frac{4-3,02}{1+3,02}}.$$

$$11. \sqrt[4]{15,8}.$$

$$12. \sqrt[3]{10}.$$

$$13. \sqrt[5]{200}.$$

$$14. (3,03)^5.$$

$$15. \sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}.$$

$$16. \sqrt[7]{130}.$$

$$17. \sqrt[3]{27,5}.$$

$$18. \sqrt{17}.$$

$$19. \sqrt{640}.$$

$$20. \sqrt{1,2}.$$

$$21. \sqrt[10]{1025}.$$

$$22. (3,02)^4 + (3,02)^3.$$

$$23. (5,07)^3.$$

$$24. (4,01)^{1,5}.$$

$$25. \sqrt[3]{1,02}.$$

$$26. \cos 151^\circ.$$

$$27. \operatorname{arctg} 1,05.$$

$$28. \cos 61^\circ.$$

$$29. \operatorname{tg} 44^\circ.$$

$$30. \operatorname{arctg} 0,98.$$

4

Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

1. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

3. $y = e^{1/(5+x)}$.

5. $y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}$.

7. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

9. $y = x - \ln(1 + x^2)$.

11. $y = x^2 - 2 \ln x$.

13. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$.

15. $y = -\ln \frac{1+x}{1-x}$.

17. $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$.

19. $y = (x - 1)e^{3x+1}$.

21. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

23. $y = (x^3 + 4)/x^2$.

25. $y = x^3/(x^4 - 1)$.

27. $y = x^2 + 1/x^2$.

29. $y = \frac{4 - 2x}{1 - x^2}$.

2. $y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}$.

4. $y = x/(9 - x)$.

6. $y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$.

8. $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

10. $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$.

12. $y = x^3 e^{-x^2/2}$.

14. $y = \frac{(x - 2)^2}{x + 1}$.

16. $y = \ln(x^2 + 1)$.

18. $y = x \ln x$.

20. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$.

22. $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$.

24. $y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2}(x - 5)$.

26. $y = (e^{2x} + 1)/e^x$.

28. $y = (5x^4 + 3)/x$.

30. $y = \frac{5x}{4 - x^2}$.

5

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

1. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$, $[0; 3]$.
2. $y = 3x/(x^2 + 1)$, $[0; 5]$.
3. $y = (2x - 1)/(x - 1)^2$, $[-1/2; 0]$.
4. $y = (x + 2)e^{1-x}$, $[-2; 2]$.
5. $y = \ln(x^2 - 2x + 4)$, $[-1; 3/2]$.
6. $y = x^3/(x^2 - x + 1)$, $[-1; 1]$.
7. $y = ((x + 1)/x)^3$, $[1; 2]$.
8. $y = \sqrt{x - x^3}$, $[-2; 2]$.
9. $y = 4 - e^{-x^2}$, $[0; 1]$.
10. $y = (x^3 + 4)/x^2$, $[1; 2]$.
11. $y = xe^x$, $[-2; 0]$.
12. $y = (x - 2)e^x$, $[-2; 1]$.
13. $y = (x - 1)e^{-x}$, $[0; 3]$.
14. $y = x/(9 - x^2)$, $[-2; 2]$.
15. $y = (1 + \ln x)/x$, $[1/e; e]$.
16. $y = e^{4x - x^2}$, $[1; 3]$.
17. $y = (x^5 - 8)/x^4$, $[-3; -1]$.
18. $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$, $[-1; 2]$.
19. $y = x \ln x$, $[1/e^2; 1]$.
20. $y = x^3 e^{x+1}$, $[-4; 0]$.
21. $y = x^2 - 2x + 2/(x - 1)$, $[-1; 3]$.
22. $y = (x + 1)\sqrt[3]{x^2}$, $[-4/5; 3]$.
23. $y = e^{6x - x^2}$, $[-3; 3]$.
24. $y = (\ln x)/x$, $[1; 4]$.
25. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$, $[-3; 1]$.
26. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $[-1; 2]$.
27. $y = (3 - x)e^{-x}$, $[0; 5]$.
28. $y = \sqrt{3}/2 + \cos x$, $[0; \pi/2]$.
29. $y = 108x - x^4$, $[-1; 4]$.
30. $y = x^4/4 - 6x^3 + 7$, $[16; 20]$.

Типовой расчет по теме

«Ряды»

1. Исследовать на сходимость указанные ряды с положительными членами.

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+2)!}{n^5}.$$

$$1.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n(n+1)!}.$$

$$1.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)^7.$$

$$1.4. \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}.$$

$$1.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{3^n}.$$

$$1.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)}.$$

$$1.7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n n^7.$$

$$1.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)}.$$

$$1.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n}.$$

$$1.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}.$$

$$1.11. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2\pi}{3^n}.$$

$$1.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/2}}{n!}$$

$$1.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n(n+3)!}$$

$$1.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}$$

$$1.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}$$

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды.

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}$$

$$2.2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$$

$$2.3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$$

$$2.4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}$$

$$2.5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$$

$$2.6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$2.7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$$

$$2.8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)n}.$$

$$2.9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$2.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \sqrt[3]{n}}.$$

$$2.11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

$$2.12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}.$$

$$2.13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}.$$

$$2.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

$$2.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}.$$

3. Найти область сходимости ряда.

$$3.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n \ln(1+1/n)}.$$

$$3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}.$$

$$3.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}.$$

$$3.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}.$$

$$3.6. \sum_{n=1}^{\infty} (2+x)^n.$$

$$3.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}.$$

$$3.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1} \sqrt{n^2+1}}.$$

$$3.9. \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} (x+2)^{n^2}.$$

$$3.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)}.$$

$$3.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+10)^n}{n^n}.$$

$$3.12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}.$$

$$3.13. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1} (x+1)^n.$$

$$3.14. \sum_{n=0}^{\infty} (2-x)^n \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$3.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2x)^n}{n - \ln^2 n}.$$

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$4.1. y' = xy + e^y, y(0) = 0.$$

$$4.2. y' = x^2 y^2 + 1, y(0) = 1.$$

$$4.3. y' = x^2 - y^2, y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$4.4. y' = x^3 + y^2, y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$4.5. y' = x + y^2, y(0) = -1.$$

$$4.6. y' = x + x^2 + y^2, y(0) = 1.$$

$$4.7. y' = 2 \cos x - xy^2, y(0) = 1.$$

$$4.8. y' = e^x - y^2, y(0) = 0.$$

$$4.9. y' = x + y + y^2, y(0) = 1.$$

$$4.10. y' = x^2 + y^2, y(0) = 1.$$

$$4.11. y' = x^2 y^2 + y \sin x, y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$4.12. y' = 2y^2 + ye^x, y(0) = \frac{1}{3}.$$

$$4.13. y' = e^{3x} + 2xy^2, y(0) = 1.$$

$$4.14. y' = x + e^y, y(0) = 0.$$

$$4.15. y' = y \cos x + 2 \cos y, y(0) = 0.$$

5. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$.

$$5.1. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x - 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.2. f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.3. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x + 2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.4. f(x) = \begin{cases} -x + 1/2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.5. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x/2 + 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.6. f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.7. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3 - x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.8. f(x) = \begin{cases} x - 2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.9. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 4x - 3, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.10. f(x) = \begin{cases} 5 - x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.11. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3x - 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.12. f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.13. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ (\pi - x)/2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.14. f(x) = \begin{cases} 5x + 1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.15. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 1 - 4x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$