МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»»

Кафедра прикладной математики и механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы № 1
для студентов всех направлений
заочной формы обучения

Воронеж 2022

УДК 531(07)
ББК 22.21я7

Составители:
канд. физ.-мат. наук Н. С. Переславцева,
канд. техн. наук А. А. Воропаев,
д-р техн. наук Д. В. Хван,
канд. техн. наук Л. В. Хливненко
канд. техн. наук О. А. Семенихин

Теоретическая механика: методические указания к выполнению контрольной работы № 1 для студентов всех направлений заочной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: Н. С. Переславцева, А. А. Воропаев, Д. В. Хван, Л. В. Хливненко, О. А Семенихин. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022. 33 с.

Методические указания предназначены для направлений, учебные планы которых предусматривают выполнение двух контрольных работ. Они включают правила оформления, содержание заданий первой контрольной работы, примеры решения задач, вопросы для самостоятельной проверки, список рекомендуемой литературы.

Предназначены для студентов 1–2 курсов.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле ТМ КРЗ № 1.pdf.

Табл. 5. Ил. 36. Библиогр.: 7 назв.

УДК 531(07)
ББК 22.21я7

Рецензент - А. В. Келлер, д-р. физ.-мат. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики ВГТУ

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ КУРСА

Изучение дисциплины проводится в течение двух семестров, в каждом из которых студенты выполняют контрольную работу, которая должна быть зачтена до начала сессии. В данных методических указаниях представлена информация, необходимая для выполнения контрольной работы за первый семестр изучения дисциплины. Небрежно оформленные или выполненные не по тому варианту работы **не проверяются**! Незачтенные работы возвращаются с замечаниями для исправления.

Контрольная работа оформляется в тонкой тетради или на листах формата А4. На обложке (титульном листе) указывается следующая информация:

Контрольная работа
по дисциплине «ххххх»
(МУ № «ххххх»)
студента группы «ххххх»
Ххххх Ххххх Ххххх (*Ф.И.О. полностью*)
№ зачетной книжки: ххххх
Дата сдачи на проверку: ххххх
Подпись: ххххх

Контрольная работа состоит из четырех задач: ***К1а*** и ***К1б***, ***К2*** (кинематика), ***С1*** (статика). К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица дополнительных условий. Нумерация рисунков двойная. Например, рис. К1.4 – это рис. 4 к задаче К1 и т.д. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-ом столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре номера зачетной книжки, а номер условия в таблице – по последней. Например, если номер книжки оканчивается числом 46, то берется рисунок 4 и условие 6 из таблицы.

Решение каждой задачи должно начинаться с новой страницы на развороте тетради. Сверху указывается номер задачи, делается чертеж (только **карандашом**!) и записывается, что в задаче дано и требуется определить (текст задачи не переписывать). ***Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи,*** на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. При изучении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. Без оговорок считается, что все нити являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок (шкив), по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы и критерии применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний. На зачет/экзамен необходимо представить зачтенную преподавателем работу, в которой все погрешности и замечания должны быть исправлены. Зачтенная работа является необходимым допуском к аттестационному испытанию, во время которого студент должен ответить на любой вопрос, относящийся к выполненному заданию.

При выполнении работы следует пользоваться обозначениями, приведенными в таблице ниже.

Методические указания по решению задач даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой ***«Указания»***, затем приводится пример решения задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизводить его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно проделаны с необходимыми пояснениями, в конце должны быть даны ответы.

Естественно, решение задач необходимо предварять изучением теоретического материала. При изучении теории сначала следует прочитать весь материал темы, особенно не задерживаясь на том, что представляется не совсем понятным. Часто первоначально неясные положения становятся понятны при дальнейшем изложении материала. Затем следует вернуться к местам, вызвавшим затруднения и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении следует обратить на формулировки основных понятий, определений, теорем и т.п. В точных формулировках существенно каждое слово и очень полезно понять, почему данное положение сформулировано именно так.

Закончив изучение темы, полезно составить краткий конспект. При составлении конспекта следует указывать страницы учебника, на которых излагается соответствующий раздел, и заносить возникающие вопросы. При составлении конспекта следует использовать и материалы лекции.

Данные указания разработаны с учётом того, что в настоящих учебных планах выделяется значительное число часов на самостоятельное изучение дисциплины. Для освоения программы курса ***необходимо*** воспользоваться дополнительными источниками. Список рекомендуемой литературы приведен в конце пособия.

Приведенные контрольные вопросы позволяют студентам самостоятельно оценить степень их знаний.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначения	Размерность	Величина
$\vec{F}$	Н (ньютон)	- вектор силы;
$F = \left\|\vec{F}\right\|$	Н	- величина (модуль) силы;
F_x, F_y, F_z	Н	- проекции силы на оси;
$M_O(\vec{F})$ или $m_O(\vec{F}) = F \cdot h$	Н $\cdot$ м (м – метр)	- алгебраический момент силы относительно точки O на плоскости;
h	м	- плечо силы (расстояние от моментной точки до линии действия силы)
$\vec{M}_O(\vec{F})$ или $\vec{m}_O(\vec{F})$	Н $\cdot$ м	- векторный момент силы относительно центра O;
$M_{Ox}(\vec{F})$, $M_{Oy}(\vec{F})$, $M_{Oz}(\vec{F})$ или $m_{Ox}(\vec{F})$, $m_{Oy}(\vec{F})$, $m_{Oz}(\vec{F})$	Н $\cdot$ м	- моменты силы относительно координатных осей;
M	Н $\cdot$ м	- момент пары сил,
$\vec{v}$	м/с (с – секунда)	- вектор скорости;
$\vec{a}$	м/с^2	- вектор ускорения;
a_n	м/с^2	- нормальное ускорение;
a_τ	м/с^2	- касательное ускорение;
ρ	м	- радиус кривизны траектории;

		Продолжение таблицы
φ		- угол поворота тела;
$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$	с^{-1}	- угловая скорость;
$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$	с^{-2}	- угловое ускорение;
P_v, C_v		- мгновенный центр скоростей;
$v_e, v_{пер}$	м/с	- переносная скорость точки;
$v_r, v_{отн}$	м/с	- относительная скорость точки;
$a_e, a_{пер}$	м/с^2	- переносное ускорение;
$a_r, a_{отн}$	м/с^2	- относительное ускорение;
$a_{кор}$	м/с^2	- кориолисово ускорение;
$P = mg$	Н	- вес;
m	кг (килограмм)	- масса;
C		- центр масс системы;
$\vec{q} = m\vec{v}$	$\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$	- количество движения точки;
$\vec{Q} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k$	$\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$	- количество движения системы, состоящей из n материальных точек;
$\vec{k}_O = \bar{r} \times m\vec{v}$	$\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$	- кинетический момент точки относительно центра O;

Окончание таблицы

$\vec{K}_{\hat{I}} = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \vec{v}_k$	$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$	- кинетический момент системы относительно центра O;
R, r	м	- радиусы шкивов,
f		- коэффициент трения;
$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}$	$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$	- кинетическая энергия системы;
J	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$	- момент инерции тела;
$A(\vec{F})$	$\text{Н} \cdot \text{м}$	- работа силы $\vec{F}$;
$\sum A_k^{(e)}$	$\text{Н} \cdot \text{м}$	- сумма работ внешних сил;
$\overline{\Phi} = -m\vec{a}$	Н	- сила инерции точки;
$\overline{\Phi}_k, \vec{M}_k^{\Phi}$		- главный вектор и главный момент сил инерции k-го тела механической системы;
p		- число степеней свободы системы;
q_i		- обобщенные координаты системы;
$\dot{q}_i$		- обобщенная скорость;
δq_i		- независимые возможные перемещения системы;
δA_F		- возможная работа силы $\vec{F}$;
Q		- обобщенная сила;

ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

КИНЕМАТИКА

Задача К1а

Точка B движется в плоскости xy (рис. К1.0–К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

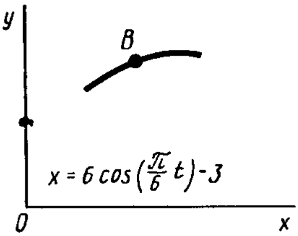


Рис. К1.0

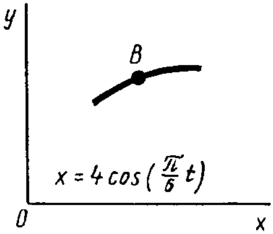


Рис. К1.1

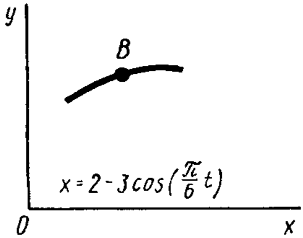


Рис. К1.2

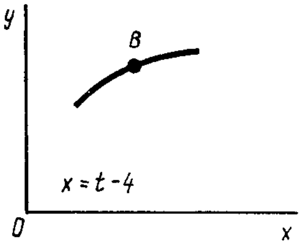


Рис. К1.3

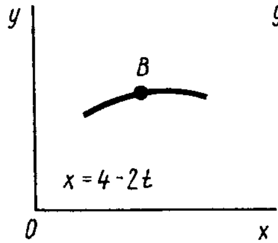


Рис. К1.4

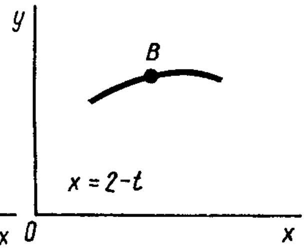


Рис. К1.5

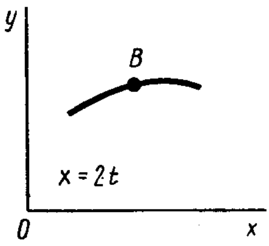


Рис. К1.6

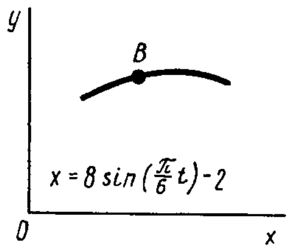


Рис. К1.7

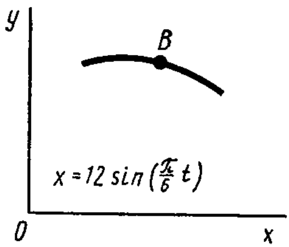


Рис. К1.8

Таблица К1

Номер условия	$y = f_2(t)$			$s = f(t)$
	Рис. 0–2	Рис. 3–6	Рис. 7–9	
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
1	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$6t-2t^2$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^3$	$10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
5	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-3t^2$	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2-10t$
7	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(1+t)^3$	$-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

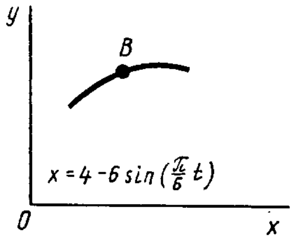


Рис. К1.9

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. К1.0– К1.2 в столбце 2, для рис. К1.3– К1.6 в столбце 3, для рис. К1.7– К1.9 в столбце 4).

Указания. Задача К1а относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки).

В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1 = 1$ с. В некоторых вариантах задачи К1а при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные тригонометрические соотношения.

Пример К1а.

Д а н ы уравнения движения точки в плоскости xy:

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3, \qquad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(x, y – в сантиметрах, t – в секундах).

О п р е д е л и т ь уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение:

1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t.

Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha:$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \qquad (1)$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2},$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. К1,а):

$$x = (y+1)^2 + 1. \qquad (2)$$

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right),$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Для момента времени $t_1 = 1$ с: $v_{1x} = 11{,}1$ см/с, $v_{1y} = 0{,}73$ см/с, $v_1 = 1{,}33$ см/с.

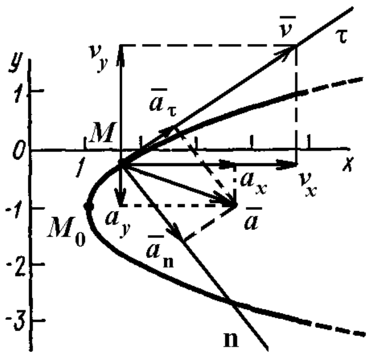


Рис. К1,а

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right),$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ .$$

Для момента времени $t_1 = 1$ с: $a_{1x} = 0{,}87$ см/с^2, $a_{1y} = -0.12$ см/с^2, $a_1 = 0{,}88$ см/с^2. (4)

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

Получим

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + 2v_y\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t},$$

откуда

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}\ . \qquad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и ,(4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при $t_1 = 1$ с: $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные при $t_1 = 1$ с числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$. Подставляя сюда числовые значения v_1 и a_{1n} при $t_1 = 1$ с, найдем, что $\rho = 3{,}05$ см.

О т в е т : $v_1 = 1{,}33$ см/с, $a_1 = 0{,}88$ см/с^2, $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2, $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2, $\rho = 3{,}05$ см.

Задача К1б

Точка движется по дуге окружности радиуса $R=2$ м по закону $s=f(t)$, заданному в табл. К1 в столбце 5 (s – в метрах, t – в секундах), где $s=\overset{\frown}{AM}$ — расстояние точки от некоторого начала A, измеренное вдоль дуги окружности. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1=1$ с. Изобразить на рисунке векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$, считая, что точка в этот момент находится в положении M, а положительное направление отсчета s – от A к M.

Указания. Задача К1б относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки при естественном способе задания ее движения. (координатный способ задания движения точки).

В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1=1$ с. В некоторых вариантах задачи К1а при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные тригонометрические соотношения.

Пример К1б.

Точка движется по дуге окружности радиуса $R=2$ м по закону $s=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)$, ($s$ – в метрах, t – в секундах), где $s=\overset{\frown}{AM}$ (рис. К1,б).

Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1=1$ с.

Решение:

1. За время $t_1=1$ с точка пройдет по дуге окружности расстояние

$$s=2\sin\left(\frac{\pi}{4}1\right)=1{,}41 \text{ м},$$

что соответствует углу

$$\angle ACM = \frac{s}{R} = \frac{1,41}{2} = 0,705 \text{ рад.}$$

Переведём радианы в градусы:

$$\angle ACM = \frac{0,705 \cdot 180}{3,14} = 40,41^\circ .$$

2. Определяем скорость точки:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

При $t_1 = 1$ с получим $v = \pi\sqrt{2}/4 = 1,11$ м/с.

3. Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

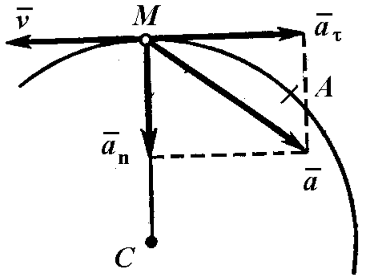


Рис. К1,б

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R},$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

При $t_1 = 1$ с получим $a_\tau = -\pi^2\sqrt{2}/16 = -0,87$ м/с^2, $a_n = \pi^2/16 = 0,62$ м/с^2, $a_1 = \pi^2\sqrt{3}/16 = 1,07$ м/с^2.

Изобразим на рис. 4 векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$, учитывая знаки и считая положительным направление от A к M.

О т в е т : $v = 1,11$ м/с, $a = 1,07$ м/с^2, движение замедленное.

Задача К2

Плоский механизм (рис. К2.0 – К2.9) состоит из стержней 1–4 и ползуна B, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами. Точка D находится в середине стержня AB. Длины стержней равны соответственно $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $l_4 = 0{,}8$ м. Положение механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К2. Точка D на всех рисунках и точка K на рис. К2.7 – К2.9 в середине соответствующего стержня. Угловое ускорение стержня 1 $\varepsilon_1 = 10$ с$^{-1}$.

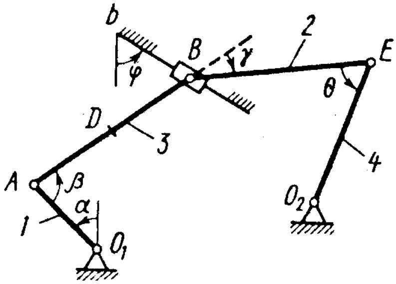


Рис. К2.0

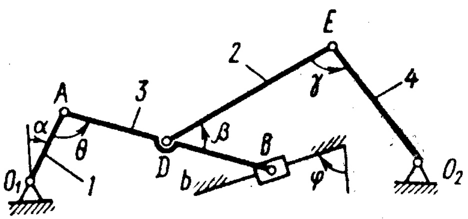


Рис. К2.1

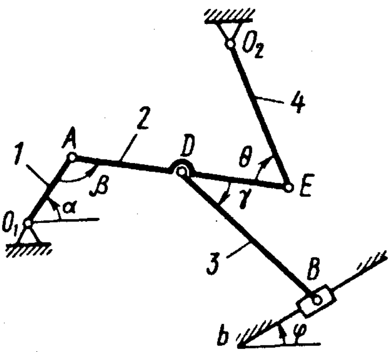


Рис. К2.2

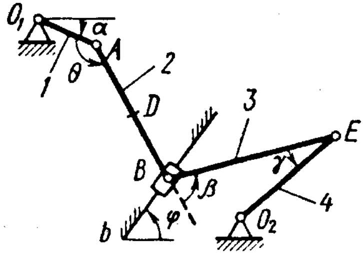


Рис. К2.3

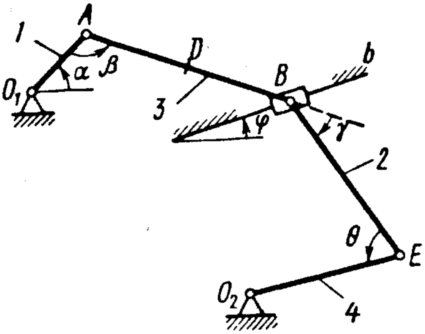


Рис. К2.4

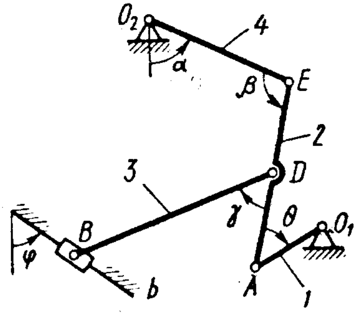


Рис. К2.5

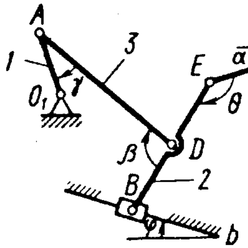


Рис. К2.6

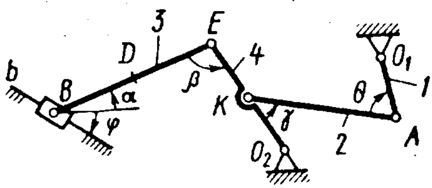


Рис. К2.7

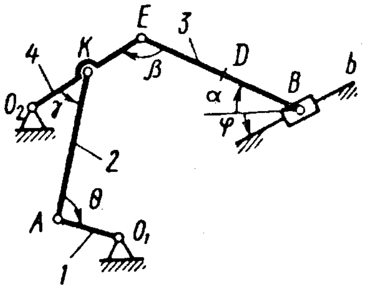


Рис. К2.8

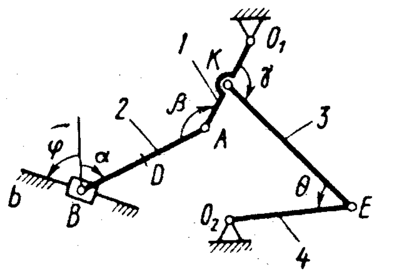


Рис. К2.9

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. К2.8 отложить от O_2K против хода часовой стрелки, а на рис. К2.9 – по ходу часовой стрелки и т.д.).

Определить ускорение точки A звена 1 и величины, указанные в таблице в столбце «Найти».

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К2 (см. рис. К2,б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданную скорость $\bar{v}_B$ – от точки B к b (на рис. К2.5 – К2.9).

Таблица К2

№ условия	Углы, град					Дано			Найти	
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/c	ω_4, 1/c	v_B, м/с	ω звена	v точки
0	30	150	120	0	60	2	–	–	2	*B, E*
1	60	60	60	90	120	–	3	–	3	*A ,D*
2	0	120	120	0	60	–	–	10	2	*A, E*
3	90	120	90	90	60	3	–	–	2	*D, E*
4	0	150	30	0	60	–	4	–	2	*A, B*
5	60	150	120	90	30	–	–	8	3	*A, E*
6	30	120	30	0	60	5	–	–	3	*B, E*
7	90	150	120	90	30	–	5	–	3	*A, D*
8	0	60	30	0	120	–	–	6	2	*A, E*
9	30	120	120	0	60	4	–	–	3	*B,E*

Указания. Задача К2 – на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

Пример К2.

Механизм (рис. К2,а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Д а н о : $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD = DB$, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 – против хода часовой стрелки).

О п р е д е л и т ь : v_B, v_E, a_A, ω_2.

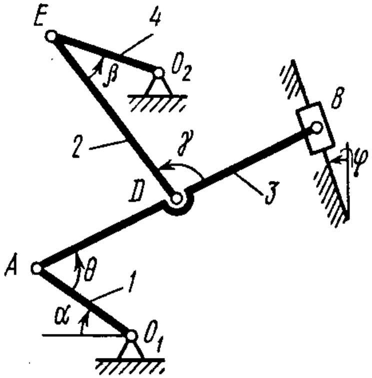


Рис. К2,а

Решение:

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами и выбранным масштабом длин (рис. К2,б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

2. Определяем v_B. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти v_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{v}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\bar{v}_A$. Численно:

$$v_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \text{ м/с}, \ \bar{v}_A \perp O_1A. \qquad (1)$$

Направление $\bar{v}_B$ найдем, учтя, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{v}_A$ и направление $\bar{v}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{v}_B$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 60^\circ, \qquad v_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (2)$$

3. Определяем $\bar{v}_E$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar{v}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB. Это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, восставленных из точек A и B (к $\bar{v}_A$ перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора $\bar{v}_A$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор $\bar{v}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину v_D найдем из пропорции:

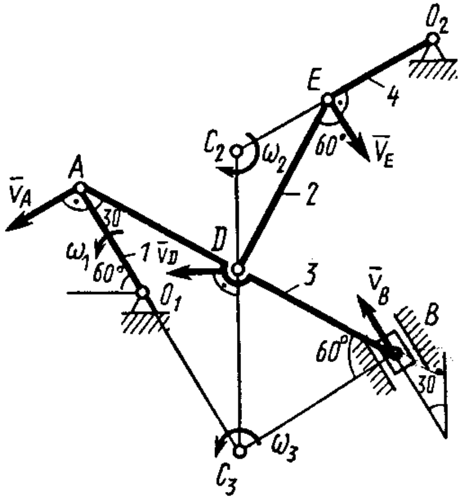


Рис. К2,б

$$\frac{v_D}{C_3D} = \omega_3 = \frac{v_B}{C_3B}. \qquad (3)$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB\sin 30^\circ = 0{,}5AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3D = C_3B$. В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_B = 0{,}46 \text{ м/с}, \qquad \bar{v}_D \perp C_3D. \qquad (4)$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\bar{v}_E \perp O_2E$. Тогда, восставляя из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\bar{v}_E$ и $\bar{v}_D$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\bar{v}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\bar{v}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К2,б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_E}{C_2E} = \omega_2 = \frac{v_D}{C_2D}, \qquad v_E = v_D = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (5)$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и $C_2D = l/(2\cos 30^\circ) = 0{,}69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ с}^{-1}. (6)$$

5. Определяем $\bar{a}_A$ (рис. К2,в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка A принадлежит стержню 1. Полное ускорение точки A разложим на тангенциальную и нормальную составляющие:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n},$$

где численно

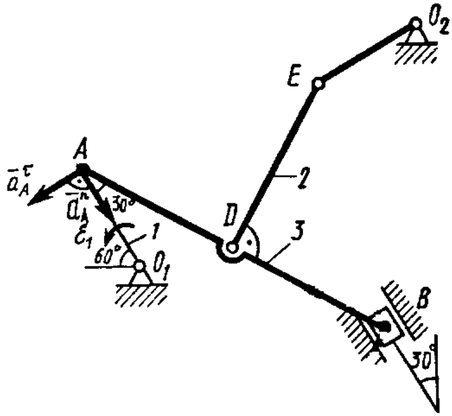


Рис. К2,в.

$a_A^{\tau} = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8$ м/с^2, $a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6$ м/с^2.

Вектор $\overline{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\overline{a}_A^{\tau}$ – перпендикулярно AO_1. Изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. К2,в). Вычисляем

$$a_A = \sqrt{(a_A^{\tau})^2 + (a_A^n)^2} = 3{,}23 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $v_B = 0{,}46$ м/с, $v_E = 0{,}46$ м/с, $\omega_2 = 0{,}67$ с$^{-1}$, $a_A = 3{,}23$ м/с^2.

Статика

Задача С1

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке C или соединены друг с другом шарнирно (рис. С1.0–С1.5), или свободно опираются друг о друга (рис. С1.6–С1.9).

Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке A или шарнир, или жесткая заделка; в точке B или гладкая плоскость (рис. С1.0 и С1.1), или невесомый стержень BB' (рис. С1.2 и С1.3), или шарнир (рис. С1.4– С1.9); в точке D или невесомый стержень DD' (рис. С1.0, С1.3, С1.8), или шарнирная опора на катках (рис. С1.7).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом $M = 60$ кН $\cdot$ м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 20$ кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. С1; там же в столбце «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условиях № 1 на конструкцию действуют сила $\overline{F}_2$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке L, сила $\overline{F}_4$ под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке E, и нагрузка, распределенная на участке CK).

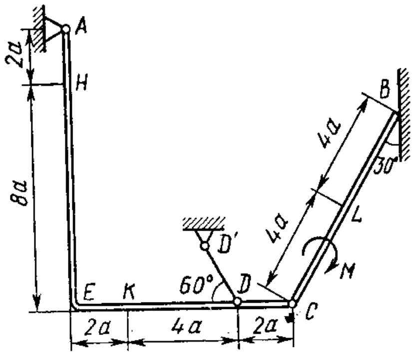


Рис. С1.0

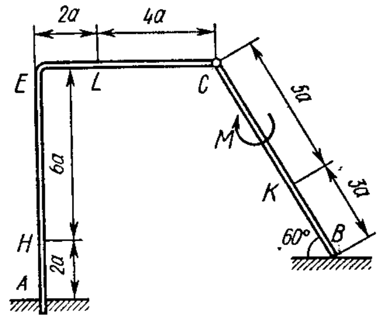


Рис. С1.1

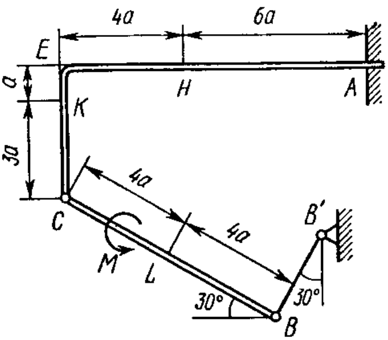


Рис. С1.2

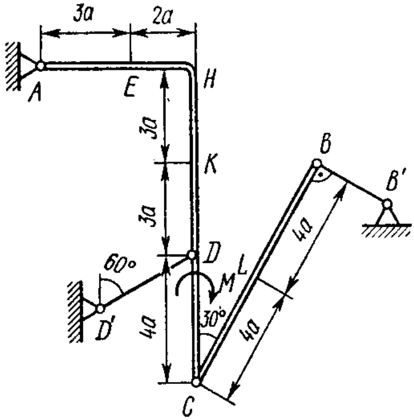


Рис. С1.3

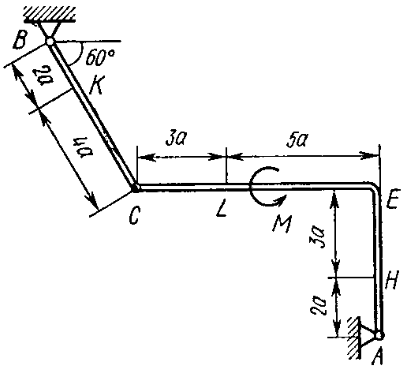


Рис. С1.4

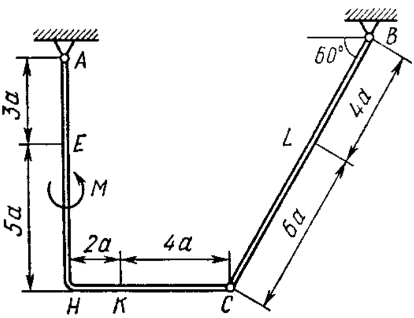


Рис. С1.5

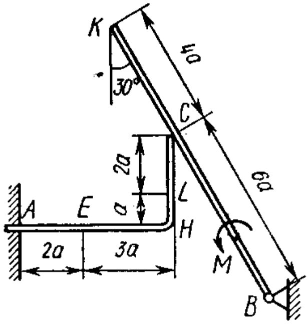


Рис. С1.6

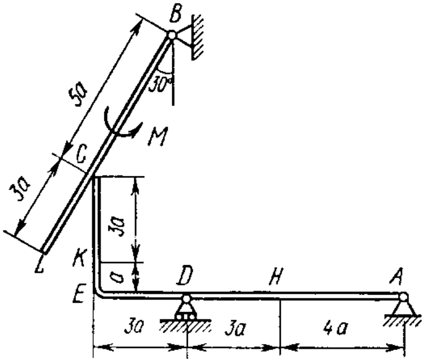


Рис. С1.7

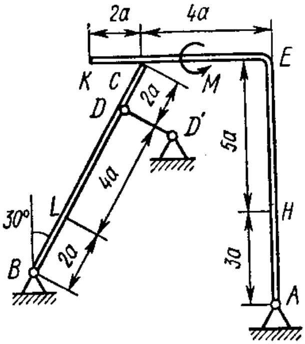


Рис. С1.8

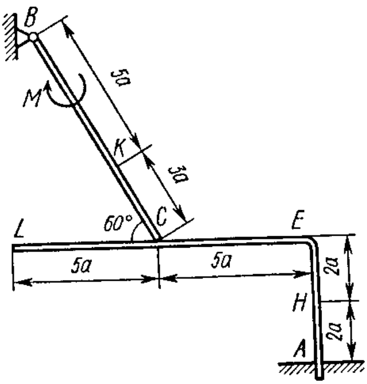


Рис. С1.9

Определить реакции связей в точках A, B, C (для рис. С1.0, С1.3, С1.7, С1.8 еще и в точке D), вызванные заданными нагрузками.

При окончательных расчетах принять $a = 0{,}2$ м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. С1а.

Указания. Задача С1 – на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы,

Таблица С1

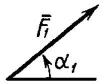
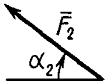
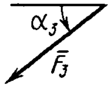
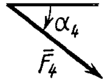
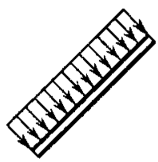
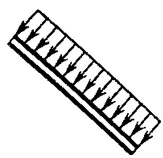
Сила									Нагруженный участок
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН		
№ условия	Точка приложения	α, град	Точка приложения	α, град	Точка приложения	α, град	Точка приложения	α, град	
0	K	60	–	–	H	30	–	–	CL
1	–	–	L	60	–	–	E	30	CK
2	L	15	–	–	K	60	–	–	AE
3	–	–	K	30	–	–	H	60	CL
4	L	30	–	–	E	60	–	–	CK
5	–	–	L	75	–	–	K	30	AE
6	E	60	–	–	K	75	–	–	CL
7	–	–	H	60	L	30	–	–	CK
8	–	–	K	30	–	–	E	15	CL
9	H	30	–	–	–	–	L	60	CK

Таблица С1а

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. С1.0, С1.3, С1.5, С1.7, С1.8	рис. С1.1, С1.2, С1.4, С1.6, С1.9
			

изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия.
В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

Пример С1.

На угольник ABC ($\angle ABC = 90°$), конец A которого жестко заделан, в точке C опирается стержень DE (рис. С1,а). Стержень имеет в точке D неподвижную шарнирную опору и к нему приложена сила $\overline{F}$, а к угольнику – равномерно распределенная на участке KB нагрузка интенсивности q и пара с моментом M.

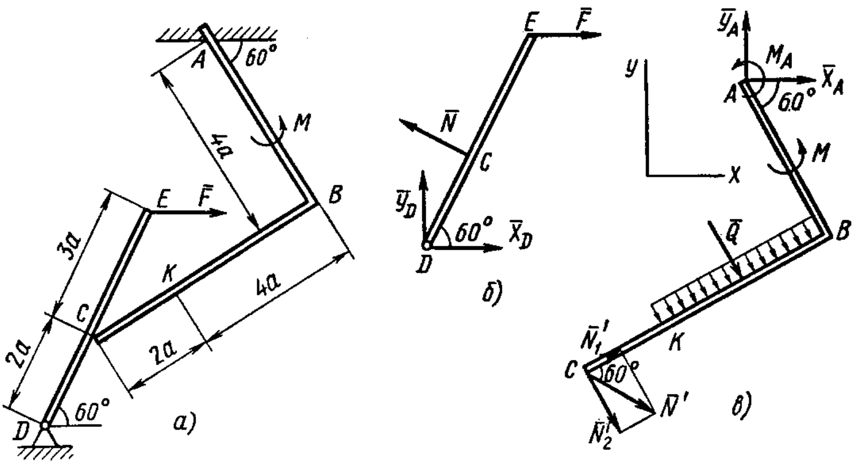


Рис. С1

Д а н о : $F = 10$ кН, $M = 5$ кН·м, $q = 20$ кН/м, $a = 0{,}2$ м.

О п р е д е л и т ь : реакции в точках A, C, D.

Решение:

1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня DE (рис. С1,б).

Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на стержень силы: силу $\overline{F}$, реакцию $\overline{N}$, направленную перпендикулярно стержню, и составляющие $\overline{X}_D$ и $\overline{Y}_D$ реакции шарнира D. Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_D + F - N\sin 60^\circ = 0; \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad Y_D + N\cos 60^\circ = 0; \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_D(\overline{F}_k) = 0, \quad N \cdot 2a - F \cdot 5a\sin 60^\circ = 0. \qquad (3)$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. С1,в). На него действуют сила давления стержня $\overline{N}'$, направленная противоположно реакции $\overline{N}$, равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем силой $\overline{Q}$, приложенной в середине участка KB (численно $Q = q \cdot 4a = 16$ кН), пара сил с моментом M и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, и пары с моментом M_A. Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_A + Q\cos 60^\circ + N'\sin 60^\circ = 0; \qquad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad Y_A - Q\sin 60^\circ - N'\cos 60^\circ = 0; \qquad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0, \quad M_A + M + Q \cdot 2a + N'\cos 60^\circ \cdot 4a +$$

$$+ N'\sin 60^\circ \cdot 6a = 0. \qquad (6)$$

При вычислении момента силы $\overline{N}'$ разлагаем ее на составляющие $\overline{N}_1'$ и $\overline{N}_2'$ и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (1)–(6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что $\overline{N}' = -\overline{N}$ в силу равенства действия и противодействия.

О т в е т : $N = 21{,}7$ кН, $X_D = 8{,}8$ кН, $Y_D = -10{,}8$ кН, $X_A = -26{,}8$ кН, $Y_A = 24{,}7$ кН, $M_A = -42{,}6$ кН $\cdot$ м. Знаки «–» указывают, что силы $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_D$ и момент M_A направлены противоположно показанным на рисунках.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Задача С1

1) Основные виды силовых воздействий и их свойства:

– сосредоточенная сила (проекции силы на оси; момент силы относительно точки как характеристика вращательного действия силы; величина и знак алгебраического момента;

– вращающий момент (пара сил), изображение пары на плоскости, момент пары;

– распределенные силы с постоянной интенсивностью (эпюра распределенных сил, приведение к равнодействующей).

2) Силы активные и реакции связей. Внешние закрепления конструкции (подвижный и неподвижный цилиндрические шарниры, скользящая заделка – втулка, жесткая заделка, невесомый стержень, нить, идеальная поверхность). Как направлены реакции этих связей? Сколько неизвестных составляющих реакции имеет каждая из перечисленных связей? В каком случае реакция связи содержит вращающий момент?

3) Виды представленных в конструкциях соединений тел между собой. Метод разбиения. Внутренние двусторонние и односторонние связи.

4) Каковы аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил?

5) Статическая определимость и неопределимость конструкции. Какие дополнительные условия представлены в задаче, которые делают конструкцию статически определимой? Как определяется статическая определимость в сочлененных конструкциях?

Задачи К1а и К1б

1) Координатный способ задания движения точки.

2) Определение скорости точки. Нахождение скорости при координатном способе задания движения.

3) Определение ускорения. Разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие.

4) Естественный способ изучения движения. Определение кинематических характеристик в естественных координатах.

Задача К2

1) Виды движений различных звеньев плоского механизма задачи К1.

2) Поступательное движение.

3) Вращательное движение вокруг неподвижной оси (центра O). Угловая скорость и угловое ускорение вращающихся звеньев. Как направлены и чему равны скорости точек вращающегося тела?

4) Плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей и его свойства. Как найдены МЦС звеньев механизма задачи?

5) Как формулируется теорема о проекциях скоростей двух точек тела? Как она используется для нахождения скоростей различных точек механизма?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: учебник для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов / Н.Н. Никитин. – М.: Высш. шк., 1990. 607 с.
2. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: в 2х т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2002. 736 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М: Высш. шк., 2008. 416 с.
4. Цывильский В.Л. Теоретическая механика / В.Л. Цывильский. – М: Высш. шк., 2008. 368 с.
5. Переславцева Н.С. Теоретическая механика: учеб. пособие / Н.С. Переславцева, Н.П. Бестужева. – Воронеж: ВГТУ, 2009. – 157 с.
6. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике / И.В. Мещерский. – СПб.: Лань, 2001. 448 с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для техн. вузов / под ред. А.А. Яблонского. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. 384 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Методические рекомендации по изучению курса. . . . 3
Принятые обозначения 6
Задачи к контрольным заданиям 9
Кинематика. Задача К1а 9
Задача К1б 14
Задача К2. 16
Статика. Задача С1 22
Контрольные вопросы 29
Библиографический список 31

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы № 1
для студентов всех направлений
заочной формы обучения

Составители:
Переславцева Наталья Сергеевна
Воропаев Алексей Алексеевич
Хван Дмитрий Владимирович
Хливненко Любовь Владимировна
Семенихин Олег Александрович

В авторской редакции

Компьютерный набор Н. С. Переславцевой

Подписано к изданию . .2022.
Уч.-изд. л. .

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14