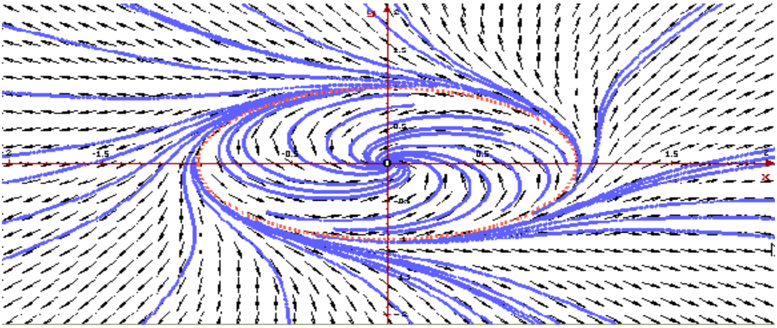
ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к решению прикладных задач
по курсу «Математический анализ»
для студентов специальностей
230104 «Системы автоматизированного проектирования», 230101 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»
очной формы обучения
Часть 1



Воронеж 2010

Составители: канд. физ.-мат. наук Е.Г. Глушко,
канд. физ.-мат. наук А.П. Дубровская,
канд. физ.-мат. наук Е.Н. Провоторова

УДК 517.9

Методические указания к решению прикладных задач по курсу «Математический анализ» для студентов специальностей 230104 «Системы автоматизированного проектирования», 230101 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» очной формы обучения. Ч.1 / ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Е.Г. Глушко, А.П. Дубровская, Е.Н. Провоторова. Воронеж, 2010. 48 с.

В методических указаниях содержится решение задач прикладного характера с помощью соответствующих методов математического анализа, алгебры и геометрии. Приведены задачи для самостоятельного решения, соответствующие темам курсовых работ по дисциплине «Математический анализ». Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 230100 «Информатика и вычислительная техника», специальностям 230104 «Системы автоматизированного проектирования», 230101 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» очной формы обучения.

Ил. 12. Библиогр.: 7 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Ломакин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой

д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.Есть ли разница в записи векторов $\overline{F}=-\gamma\dfrac{m}{r^2}\overline{r_0}$ и $\overline{F}=-\gamma\dfrac{m}{r^3}\overline{r}$, где m и γ - постоянные; $\overline{r}$ - радиус-вектор точки, $r=|\overline{r}|$? С каким физическим законом связаны эти записи?

2. Записать разложение силового вектора $\overline{F}$ по базису $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$, зная, что сила $\overline{F}$ приложена к точке $M(x,y,z)$ и направлена к началу координат, а величина силы $\overline{F}$ прямо пропорциональна расстоянию от точки M до начала координат. Коэффициент пропорциональности равен k.

3. Вектор $\overline{E}$ приложенный в произвольной точке пространства M имеет направление радиус-вектора $\overline{r}=\overline{OM}$ и длину $|\overline{E}|=\dfrac{q}{r^2}$, $r=|\overline{r}|$, $q>0-const.$ Как записать вектор $\overline{E}$? С каким физическим законом связан вектор $\overline{E}$?

Ответ: $\overline{E}=\dfrac{q}{r^2}\overline{r^0}$ или $\overline{E}=\dfrac{q}{r^3}\overline{r}$.

4. К точке O приложены силы $\overline{F_i}$, $i=1,2,3,4$, одинаковой величины $|\overline{F_i}|=F$. Зная, что $(\overline{F_1},\overline{F_2})=(\overline{F_2},\overline{F_3})=(\overline{F_3},\overline{F_4})=72^\circ$, найти значение и направление равнодействующей.

Ответ: Равнодействующая $\overline{R}$ делит пополам угол между векторами $\overline{F_2}$ и $\overline{F_3}$, $|\overline{R}|=F.$

5. Найти центр тяжести системы, состоящей из двух материальных точек A_1 и A_2, в которых сосредоточены массы m_1

и m_2. Радиус-векторы точек A_1 и A_2 соответственно равны $\overline{r_1}$ и $\overline{r_2}$.

Указание. Известно, что центр тяжести двух масс лежит на линии, соединяющей эти массы, и делит ее в отношении, обратно пропорциональном массам.

Ответ: $\overline{r_M} = \dfrac{m_1\overline{r_1} + m_2\overline{r_2}}{m_1 + m_2}$, где точка M - центр масс – расположена на отрезке $[A_1, A_2]$.

6. а) Сформулировать задачу и ее результат в случае трех точек и указать метод решения.

б) Сформулировать задачу и ее результат в случае n точек и указать метод решения.

7. Найти величину равнодействующей двух сил, приложенных к одной точке, зная величину составляющих сил и угол между ними.

Ответ: $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + 2\,|\,\overline{F_1}\,|\cdot|\,\overline{F_2}\,|\cos(\overline{F_1},\overline{F_2})$.

Решить задачу для случая трех составляющих сил, предполагая известными величины этих сил и три угла между направлениями сил, взятых попарно.

8. Пусть жидкость течет так, что все частицы движутся прямолинейно с одинаковой скоростью $\overline{\mathrm{v}}$. Показать, что объем жидкости, протекающей через плоскую площадку σ в единицу времени, равен $\sigma\overline{\mathrm{v}}\cdot\overline{n^0}$, где $\overline{n^0}$ - единичный вектор, перпендикулярный к площадке σ и направленный в сторону течения жидкости.

9. Пусть электрон, заряд которого равен e, движется со скоростью $\overline{\mathrm{v}}$ в магнитном поле постоянной напряженности $\overline{H}$.

В таком случае на электрон действует отклоняющая сила $\overline{F}$, определяемая формулой $\overline{F} = \frac{e}{c}[\overline{v} \times \overline{H}]$, где c - скорость света. Найти величину силы $\overline{F}$.

10. В жидкость погружено тело, имеющее форму прямой треугольной призмы. Каждая грань тела испытывает со стороны жидкости давление, которое при определенных условиях можно считать перпендикулярным к площади грани и по величине пропорциональным этой площади. Коэффициент пропорциональности обозначен через P (“гидростатическое давление”). Показать, что давление жидкости на грани $KNN'K'$ и $K'M'N'$ соответственно равно $\overline{F_1} = P[\overline{NN'}, \overline{NK}]$ и $\overline{F_2} = \frac{1}{2}P[\overline{N'M'}, \overline{N'K'}]$.

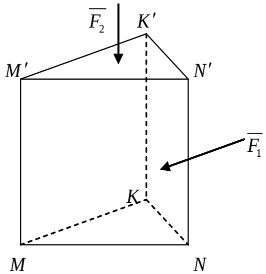


Рис.1.

11. Пусть l - длина проводника, $\overline{v}$ - скорость его перемещения в магнитном поле, $\overline{H}$ - напряженность магнитного поля. Известно, что ЭДС индукции $\overline{E_i}$ имеет величину $E_i = Hl\mathrm{v}\sin\varphi$ и направление, указанное на чертеже.

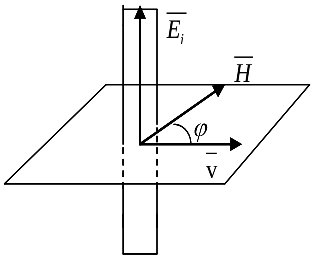


Рис.2.

Какова связь вектора $\overline{E_i}$ с векторами $\overline{v}$ и $\overline{H}$?

12. Три силы $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}$, приложены в одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направ-

ления, $F_i = |\overline{F_i}|$, $i = 1,2,3$. Определить величину их равнодействующей $\overline{F}$ и работу, которую она совершает, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из начала в конец вектора $\overline{F_3}$.

13. Постоянный электрический ток J течет в направлении оси Oz. Вектор напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в произвольной точке $M(x,y,z)$, $\overline{H} = \frac{2}{|\overline{\rho}|^2}\overline{J}\overline{\rho}$,

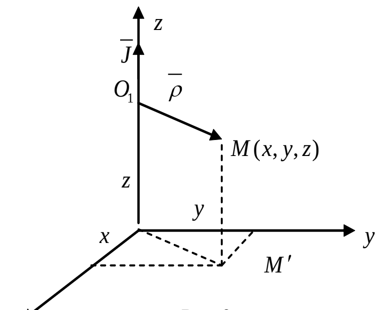


Рис.3.

где $\overline{J} = J\overline{k}$. $\overline{\rho} = \overline{O_1M}$ (точка O_1 - проекция точки M на ось Oz). Найти координаты вектора $\overline{H}$ и его величину $|\overline{H}|$. Вектор $\overline{H}$ показать на чертеже.

14. Постоянный электрический ток J течет снизу по бесконечному проводу, совпадающему с осью Oz. Вектор $\vec{H}$ напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в произвольной точке $M(x,y,z)$ имеет вид $\overline{H} = \frac{2J}{\rho^2}(-y\overline{i} + x\overline{j})$,

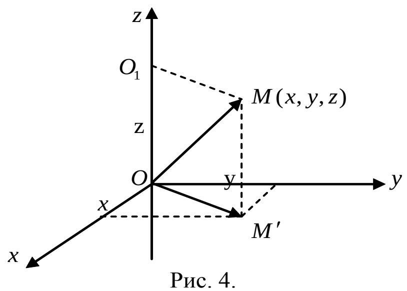


Рис. 4.

где $\rho^2 = x^2 + y^2$.

1) Записать векторы $\overline{OM}$ и $\overline{OM'}$ в виде разложения по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. Найти $|\overline{OM'}|$ (M'- проекция точки M на плоскость xOy).

2) Показать, что $\overline{H} \perp \overline{OM'}$ и указать на чертеже направление вектора $\overline{H}$ (считая его выходящим из точки M).

3) Найти геометрическое место точек $M(x, y, z)$, для которых $|\overline{H}| = const$.

15. Пусть вращательное движение жидкости вокруг оси Oz задано вектором угловой скорости $\overline{\omega} = \omega\overline{k}$. Радиус-вектор частицы жидкости, находящейся в точке $M(x, y, z)$ относительно центра ее вращения, обозначим через $\overline{\rho}$. Вектор $\overline{\mathrm{v}}(M) = [\overline{\omega} \times \overline{\rho}]$ является вектором линейной скорости вращающейся частицы жидкости.

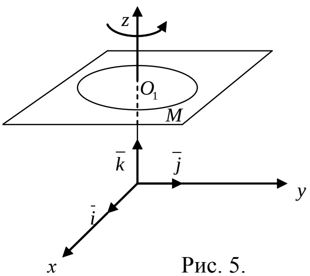


Рис. 5.

1) Показать на чертеже векторы $\overline{\omega}, \overline{\rho}, \overline{\mathrm{v}}$.

2) Найти разложение вектора $\overline{\mathrm{v}}$ по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ и значение $|\overline{\mathrm{v}}|$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

1. Пусть в электрической цепи течет постоянный ток. Под током мы будем понимать количество электричества, протекающее в цепи в единицу времени. Дать определение переменного тока в момент времени t и вычислить его, если количество электричества, протекающее в цепи за промежуток $[0, t]$, равно $q(t)$.

2. Напряжение конденсатора изменяется по закону $u = u_m \sin\omega t$. Вычислить зарядный ток i, протекающий через конденсатор, если $i = \dfrac{dq}{dt}$, $q = cu$, u_m, c - постоянные.

3. Закон изменения тока в электромагните без шунта определяется формулой $i(t)=\dfrac{E}{R_1+R_2}(I-e^{\frac{L}{R_1+R_2}t})$. Считая все параметры этой формулы постоянными, найти скорость тока в момент времени $t=0$.

4. Сила действия кругового электрического тока на небольшой магнит, ось которого расположена на перпендикуляре к плоскости круга, проходящем через его центр, выражается формулой $F=\dfrac{cx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$, где $c-const$, x - расстояние от центра круга до магнита $(0<x<\infty)$, a - радиус круга. При каком значении x величина F будет наибольшей?

5. Электростанции 1 и 2 питают током линию n последовательно подсоединенных равных нагрузок. На каком расстоянии от электростанции 1 необходимо разорвать цепь, чтобы на линии достигался минимум потерь мощности? Известна линейная плотность тока $i_0=\dfrac{J}{L}(A/м)$, погонное сопротивление $r_0(Ом/м)$, общая длина линии $L(м)$.

Решение. Известно, что в случае последовательного соединения нагрузок потери мощности вычисляются по формуле $P=3i^2r$. Суммарные потери мощности на линии

$$P=P_1+P_2=(i_0x)^2r_0x+(i_0(L-x))^2r_0(L-x)=i_0{}^2r_0x^3+i_0^2r_0(L-x)^3.$$

Найдем минимум функции $P(x)$: $\dfrac{dP}{dx}=0;$

$$3i_0^2r_0x^2-3i_0^2r_0(L-x)^2=0;\ L^2-2Lx=0;\ x=L/2;$$

$\frac{d^2P}{dx^2}\Big|_{x=\frac{L}{2}} = 6i_0^2 r_0 L > 0$. Минимум потерь достигается при $x = \frac{L}{2}$.

6. Движение материальной точки происходит по закону $S = Ae^{-kt}\sin\omega t$, $(A, k, \omega > 0)$, который называется законом затухающих колебаний. Найти скорость движения, ускорение и силу, под действием которой происходит это движение.

Решение. Взяв производную от пути по времени t, найдем скорость движения $\mathrm{v} = S_t' = Ae^{-kt}(\omega\cos\omega t - k\sin\omega t)$. Производная от v по t

$$a = \mathrm{v}_t' = -Ae^{-kt}(\omega^2\sin\omega t + 2\omega k\cos\omega t - k^2\sin\omega t)$$

даст нам ускорение, с которым движется точка. После очевидных преобразований получим

$$a = -Ae^{-kt}((\omega^2 + k^2)\sin\omega t + 2k(\omega\cos\omega t - k\sin\omega t) =$$
$$= -(\omega^2 + k^2)S - 2k\,\mathrm{v}.$$

Сила, под действием которой происходит подобное движение,

$$F = -(\omega^2 + k^2)mS - 2km\,\mathrm{v}.$$

Видно, что она состоит из двух сил: силы пропорциональной расстоянию точки от среднего положения и направленной к этому среднему положению и тормозящей движение силы, пропорциональной скорости и направленной противоположно скорости.

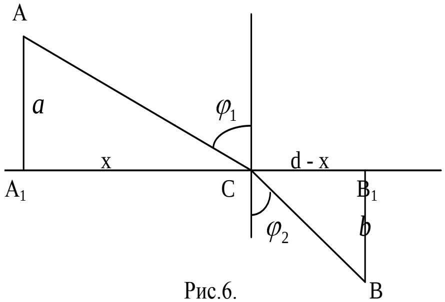


Рис.6.

7. Две среды разделены прямой. Известны скорости движения точки в средах v_1 и v_2 соответственно Данные точки A и B находятся

в разных средах на расстояниях a и b от границы раздела. Расстояние между проекциями этих точек на границу раздела равно $A_1B_1 = d$. Требуется найти на границе сред точку C такую, чтобы время движения из точки A в C и далее в точку B было наименьшим.

Решение. Время прохождения пути $AC+CB$

$t(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(d-x)^2+b^2}$, где x - расстояние A_1C.

Найти такое значение x, при котором функция $t(x)$ имеет минимум. Производная $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$ обращается в нуль при условии

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}},$$

которое равносильно следующему: $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}$. Можно доказать, что при этом условии функция $t(x)$ имеет минимум. Итак, чтобы время движения из A в B было минимальным, надо точку C выбрать так, чтобы отношение синусов углов φ_1 и φ_2 было равно отношению скоростей v_1 и v_2. Именно такой путь выбирает луч света при движении из A и B.

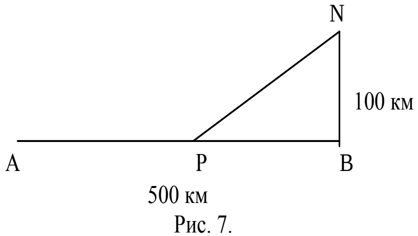


Рис. 7.

8. Для доставки продукции завода N в город A (рис.   ) строится шоссе NP, соединяющее завод с железной дорогой

АВ, проходящей через город А. Стоимость перевозок по шоссе вдвое больше, чем по железной дороге. К какому пункту Р нужно провести шоссе, чтобы общая стоимость перевозок продукции завода N в город А по шоссе и по железной дороге была наименьшей?

9. Коническая воронка, радиус основания которой R, а высота H, наполнена водой. В воронку погружается шар. Каким должен быть радиус шара r чтобы объем воды, вытесненный из воронки погруженной частью шара был наибольшим?

10. Определить, каким должно быть сопротивление электронагревательного прибора, включенного в цепь тока с сопротивлением R для того, чтобы в нем выделилось максимальное количество теплоты W, если $W = rJ^2, J = E/(r+R)$.

11. Переходный процесс замкнутой системы регулирования определяется выражением $y = q_0[1 - e^{-\alpha t}(\cos\beta t - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t)]$. Определить перерегулирование $\sigma = (y_{\max} - q_0)/q_0$.

12. Лампа висит над центром круглого стола радиусом R. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей? (Освещенность вычисляется по формуле $f = \frac{J\cos\varphi}{r^2}$, где φ - угол падения лучей, r - расстояние до источника, J - характеристика источника).

13. Дождевая капля, начальная масса которой m_0, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь, так что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько секунд после начала

падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она (сопротивлением воздуха пренебрегаем)?

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Электрический точечный заряд $+e_1$ движется в электрическом поле, созданном точечным зарядом $+e$. Согласно закону Кулона, сила взаимодействия между двумя точечными зарядами в пустоте численно определяется по формуле $F=\frac{e_1e}{r^2}$. Определить работу при перемещении заряда e_1 из точки A в точку B, считая, что A и B находятся на прямой, проходящей через заряд $+e$.

<u>Решение</u>. Элементарная работа на перемещении dr равна $dA=Fdr=\frac{e_1e}{r^2}dr$, а полная работа определяется интегрированием:

$$A=\int_{r_1}^{r_2}\frac{e_1e}{r^2}dr=e_1e(-\frac{1}{r})\Big|_{r_1}^{r_2}=e_1e(-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1})=e_1(\frac{e}{r_1}-\frac{e}{r_2}).$$

Выражение, стоящее в скобках - разность потенциалов или напряжение между точками A и B.

2. Определить потенциальную энергию u тела, удаленного от центра Земли на расстояние r. Вычислить работу, необходимую для подъема ракеты на высоту $r=10r_0$ и на высоту $r=100r_0$, где $r_0=6400\,км$ - радиус Земли.

<u>Решение</u>. По закону тяготения сила, действующая на тело, равна $F=-\frac{c}{r^2}$, на поверхности Земли - $F(r_0)=-mg=-\frac{c}{r_0^2}$.

Отсюда $c=mgr_0^2$, где g - ускорение свободного падения на поверхность Земли. Тогда $F = -\dfrac{mgr_0^2}{r^2}$. Примем потенциальную энергию тела на поверхности Земли за нуль. Тогда получим $u(r) = -\int\limits_{r_0}^{r} Fdr = mg\dfrac{r_0}{r}(r - r_0)$. пользуясь этой формулой и принимая $r_0 = 6,4 \cdot 10^8 \, см$, найдем, что для подъема на высоту $r = 10r_0$ работа $A_1 = 5,76 \cdot 10^8 mg$, а для $r = 100r_0$ работа $A_2 = 6,34 \cdot 10^8 mg.$

3. Напряжение синусоидального тока дается формулой $E(t) = E_0 \sin\dfrac{2\pi t}{T}$, а ток формулой $J(t) = J_0 \sin(\dfrac{2\pi t}{T} - \varphi_0)$, где E_0 и J_0 - постоянные величины; T - период; φ_0 - так называемая разность фаз. Вычислить работу тока за время от
$t_1 = 0$ до $t_2 = T$.

<u>Решение</u>. Искомая работа вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_{t_1}^{t_2} E(t)J(t)dt.$$

Подставляя пределы интегрирования и выражения для $E(t)$ и $J(t)$, находим:

$$A = E_0 J_0 \int\limits_0^T \sin\frac{2\pi t}{T}\sin(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0)dt = \frac{E_0 J_0}{2}\int\limits_0^T (\cos\varphi_0 - \cos(\frac{4\pi t}{T} - \varphi_0))dt =$$

$$= \frac{E_0 J_0}{2}(t\cos\varphi_0 \,\Big|_0^T - \frac{T}{4\pi}\sin(\frac{4\pi t}{T} - \varphi_0)\,\Big|_0^T) = \frac{E_0 J_0}{2}(T\cos\varphi_0 -$$

$$-\frac{T}{4\pi}(\sin(4\pi - \varphi_0) + \sin\varphi_0)) = \frac{E_0 J_0}{2}T\cos\varphi_0.$$

4. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если известно, что для удлинения ее на 1 см необходимо приложить силу в 1 кН.

<u>Решение.</u> Согласно закону Гука, сила F, растягивающая пружину, пропорциональна ее растяжению, то есть $F = kx$, где x - растяжение пружины (в метрах); k - коэффициент пропорциональности.

Так как по условию при $x = 0,01$ м сила $F = 1$кН, то из равенства $1 = 0,01k$ получаем $k = 100$ и $F = 100x$. Следовательно, искомая работа

$$A = \int_0^{0,1} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,5\,\text{кДж}.$$

5. Котел, имеющий форму эллиптического параболоида $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ и высотой $H = 4$ м, заполнен жидкостью плотностью $\delta = 0,8$ т/м^3. Вычислить работу, которую нужно затратить на перекачивание жидкости через край котла.

<u>Решение</u>. Выделим на высоте z_i элементарный слой жидкости толщиной Δz_i, объем которого $\Delta V_i = \pi \cdot 2\sqrt{z_i} \cdot 3\sqrt{z_i}\Delta z_i$, а масса $\Delta m_i \approx 6\pi\delta z_i \Delta z_i$, так как в горизонтальном сечении получается эллипс с полуосями $a = 2\sqrt{z_i}, b = \sqrt{z_i}$. Работа, затраченная на перекачивание жидкости,

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 6\pi g\delta z_i (H - z_i)\Delta z_i = \int_0^H 6\pi g\delta z(H - z)dz =$$

$$= 6\pi g\delta(H\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3})\Big|_0^H = \pi\delta g H^3 = 64 g\pi\delta \approx 1575,53\,\text{кДж}.$$

6. Треугольная пластинка с основанием $a = 3$м и высотой $H = 2$ м погружена вертикально вершиной вниз в жидкость так, что основание параллельно поверхности жидкости и находится на расстоянии $d = 1$м от поверхности. Плотность жидкости $\delta = 0,9$ т/м^3. Вычислить силу давления жидкости на каждую из сторон пластинки.

<u>Решение</u>. Для определения силы давления жидкости воспользуемся законом Паскаля, согласно которому давление Δp жидкости на площадку ΔS, погруженную на глубину h, определяется формулой $\Delta p = \delta g h \Delta S$, где δ - плотность жидкости; g- ускорение свободного падения.

Прямыми, параллельными поверхности жидкости, разобьем треугольник на элементарные полоски шириной dy, отстоящие от поверхности жидкости на расстояние $y + d$. Находим площадь вырезанной плоскости $dS = \frac{a}{H}(H - y)dy$, давление на каждую из сторон полоски треугольной пластины $dp = \frac{a}{H}\delta g(d + y)(H - y)dy.$

Интегрируя обе части последнего равенства, получаем:

$$P = \int_0^H \frac{a}{H}\delta g(d + y)(H - y)dy = \frac{3}{2}\delta g\int_0^2 (2 + y - y^2)dy =$$

$$= \frac{3}{2}\delta g(2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3})\Big|_0^2 = 5\delta g \approx 44{,}1 \text{ кН}.$$

7. Вычислить момент инерции однородного круга массой M и радиусом R относительно его центра.

<u>Решение</u>. Момент инерции материальной точки массой m относительно точки O равен произведению массы этой точки на квадрат ее расстояния до точки O. Момент инерции системы

материальных точек равен сумме моментов инерции всех точек этой системы. Концентрическими окружностями с центром в точке *O* разобьем круг на *n* колец шириной *dr*, площадь каждого из которых $dS = 2\pi r dr$, а масса $dm = 2\pi r dr \delta$, где плотность $\delta = M/(\pi R^2)$.

Элементарные моменты инерции выделенных колец $dI_0 = 2\pi\delta r^3 dr$. Суммируя (интегрируя) элементарные моменты инерции, получаем

$$I = \int_0^R 2\pi\delta r^3 dr = 2\pi\delta\, r^4/4\Big|_0^R = \frac{1}{2}\pi R^4 \frac{M}{\pi R^2} = \frac{1}{2}MR^2.$$

8. Найти координаты центра масс однородной дуги окружности радиусом R с центральным углом 2α.

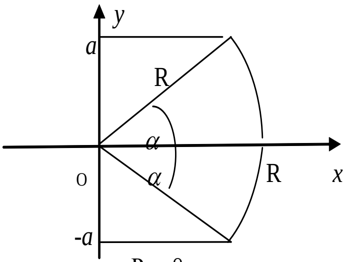


Рис.8.

Решение. Выберем систему координат так, как показано на рис. 8. Тогда вследствие однородности и симметричности расположения дуги имеем $y_C = 0$. Находим x_C по формуле

$$x_C = \left(\int_{-a}^{a} x\sqrt{1+x'^2}\,dy \Big/ \int_{-a}^{a}\sqrt{1+x'^2}\,dy\right),\ \text{так как}\ \delta = const.$$

Воспользуемся параметрическим уравнением окружности $x = R\cos t,\ y = R\sin t,$ тогда

$$x_C = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2\cos t\,dt}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\,dt} = R\frac{\sin t\big|_{-\alpha}^{\alpha}}{t\big|_{-\alpha}^{\alpha}} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

9. Вычислить координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 6 - x^2, y = 2.$

<u>Решение</u>. Из однородности и симметричности данной фигуры следует, что $x_C = 0$ (рис. 10) . Если фигура ограничена снизу линией $y = f_1(x)$, а сверху $y = f_2(x)$, то есть $f_1(x) \le f_2(x)$ на отрезке $[a,b]$, поверхностная плотность фигуры $\delta = \delta(x)$, то вычисление ее центра масс $C(x_C, y_C)$ выполняется по формулам:

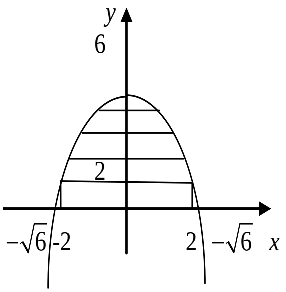


Рис.9.

$$x_C = \frac{\int_a^b x\delta(x)(f_2(x) - f_1(x))dx}{\int_a^b \delta(x)(f_2(x) - f_1(x))dx},$$

$$y_C = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b x\delta(x)(f_2^2(x) - f_1^2(x))dx}{\int_a^b \delta(x)(f_2(x) - f_1(x))dx}.$$

Найдем y_C:

$$y_C = \frac{1}{2}\frac{\int_{-2}^{2}((6-x^2)^2 - 2^2)dx}{\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx} = \frac{1}{2}\frac{2\int_0^2 (32 - 12x^2 + x^4)dx}{2\int_0^2 (4-x^2)dx} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(32x - 4x^3 + x^5/5)\Big|_0^2}{(4x - x^3/3)\Big|_0^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{192/5}{16/3} = 3{,}6.$$

10. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на 0,025 B в секунду. Первоначальное напряже-

ние в цепи $E_0 = 120 B$; сопротивление цепи $R = 60\,Ом$. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебречь.

11. Напряжение электрической цепи равномерно падает, убывая на $1/150\ B$ в секунду. Начальное напряжение в цепи $100\ B$. Сопротивление в цепи $5\ Ом$. Найти среднюю мощность тока в течение первого часа работы.

12. Напряжение на клеммах электрической цепи $V = 120\ B$. В цепь равномерно вводится сопротивление со скоростью $0{,}1\,Ом$ в секунду. Кроме того, в цепь включено постоянное сопротивление $r = 10\,Ом$. Сколько кулонов электричества пройдет через цепь в течение 2 мин?

13. При исследовании затухающего тока, возникающего при разряде, иногда применяются "баллистические" приборы, показания которых пропорциональны не мгновенной силе тока J или ее квадрату J^2, а "интегральной силе тока" $g = \int_0^\infty J^2(t)dt.$ Здесь $t -$ время, отсчитываемое от начала разряда; J - сила переменного тока, зависящая от времени. Процесс теоретически продолжается бесконечно, хотя практически уже через конечный промежуток времени сила тока становится неощутимой. При расчете промежуток времени можно считать бесконечным в целях упрощения формул. Вычислить g и S для следующих процессов:

1) $J = J_0 e^{-kt}$ (простой апериодический процесс); k - положительный постоянный коэффициент;

2) $J = J_0 e^{-kt}\sin\omega t$ (простой колебательный процесс); коэффициенты k и ω постоянны.

14. Вычислить коэффициенты формы ($k_ф = \dfrac{u}{|u_{ср}|}$) и амплитуды ($k_а = \dfrac{u_{\max}}{u|}$) кривой напряжения, заданной уравнением

$$u = u_{1m}\sin\omega_1 t + u_{2m}\sin 2\omega_1 t \ (u_{1m} = 100B;\ u_{2m} = 30\,B).$$

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. В несжимаемой среде потенциал скорости пространственного источника с интенсивностью q, расположенного в точке (x_0, y_0, z_0) определяется по формуле:

$$u(x,y,z) = -\frac{q}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

Найти область его определения и частные производные.

Решение. Из условия задачи имеем, что $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 > 0$, то есть областью определения функции $u(x,y,z)$ будет все трехмерное пространство за исключением точки (x_0, y_0, z_0). Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q(x-x_0)}{4\pi\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{q(y-y_0)}{4\pi\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{q(z-z_0)}{4\pi\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^3}}.$$

2. Показать, что функция $y = \theta_1(x-at) + \theta_2(x+at)$, где θ_1, θ_2 - дважды дифференцируемые функции, удовлетворяет

волновому уравнению $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

Решение. Обозначим через $u = x - at, \mathrm{v} = x + at$, тогда $y = \theta_1(u) + \theta_2(\mathrm{v})$. Дифференцируя эту функцию, находим

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \theta_1'(u) + \theta_2'(\mathrm{v}),\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \theta_1''(u) + \theta_2''(\mathrm{v}),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -a\theta_1'(u) + a\theta_2'(\mathrm{v}),\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2\theta_1''(u) + a^2\theta_2''(\mathrm{v}).$$

Подставляя найденные производные в исходное уравнение, убеждаемся, что функция $y(x,t)$ удовлетворяет этому уравнению.

3. На плоскости даны n точек $A_k(a_k, b_k)$, $k = \overline{1,n}$, в которых сосредоточены массы m_k. Необходимо найти на этой плоскости такую точку $A_0(x_0, y_0)$, относительно которой момент инерции системы точек является минимальным.

Решение. Момент инерции системы материальных точек относительно точки $A(x, y)$ равен

$$J(x,y) = \sum_{k=1}^{n} m_k((x - a_k)^2 + (y - b_k)^2),\ m_k > 0.$$

Поэтому нужно найти точку $A_0(x_0, y_0)$, в которой функция $J(x, y)$ принимает наименьшее значение. Для отыскания точек возможного экстремума функции получаем систему уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 2\sum_{k=1}^{n} m_k(x - a_k) = 0,\ \frac{\partial J}{\partial y} = 2\sum_{k=1}^{n} m_k(y - b_k) = 0.$$

Отсюда находим единственную точку возможного экстремума, координаты которой $x_0 = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}$, $y_0 = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k b_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}$.

Так как $\dfrac{\partial^2 J}{\partial x^2} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} m_k$, $\dfrac{\partial^2 J}{\partial y^2} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} m_k$, $\dfrac{\partial^2 J}{\partial x \partial y} = 0$ и

$\Delta = \begin{vmatrix} 2\sum\limits_{k=1}^{n} m_k & 0 \\ 0 & 2\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \end{vmatrix} = 4(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k)^2 > 0$, то в этой точке функция имеет локальный минимум.

4. На эквипотенциальной поверхности найти точки, наиболее близкие к ее центру и наиболее удаленные от него:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ \ (a > b > 0).$$

Решение. Пусть точка $M(x, y, z)$ лежит на заданной поверхности (трехосном эллипсоиде). Тогда расстояние от центра $O(0,0,0)$ до точки $M(x, y, z)$ находится по формуле $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и задача сводится к исследованию на экстремум функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ при условии $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Составим функцию Лагранжа

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1).$$

Получим систему уравнений для нахождения искомых точек

$$F_x' = 0; \ F_y' = 0; \ F_z' = 0; \ F_\lambda' = 0.$$

В нашем случае имеем:

$$2x+\frac{2\lambda}{a^2}x=0; 2y+\frac{2\lambda}{a^2}y=0;\ 2z+\frac{2\lambda}{a^2}z=0;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Из этой системы следует, что x, y и z одновременно не могут обращаться в нуль. Пусть, например, $x\neq 0$, тогда $1+\frac{\lambda}{a^2}=0$, то есть $\lambda=-a^2$ и $1+\frac{\lambda}{b^2}\neq 0, 1+\frac{\lambda}{c^2}\neq 0$; следовательно, $y=0, z=0$. На основании последнего уравнения системы находим $x=\pm a.$ Таким образом, получим две точки $A_1(a,0,0)$ и $A_2(-a,0,0)$. Аналогичным образом находим остальные точки: при $\lambda=-b^2$ имеем $B_1(0,b,0)$ и $B_2(0,-b,0)$; при $\lambda=-c^2$ точки $C_1(0,0,c)$ и $C_2(0,0,-c)$. Так как по условию $a>b>c$, то максимум будет в точках $A_1(a,0,0)$ и $A_2(-a,0,0)$, а минимум – в точках $C_1(0,0,c)$ и $C_2(0,0,-c)$.

5. Найти дифференцируемую функцию $u = f(x,y)$, которая удовлетворяет уравнению $u''_{y^2}=\cos y$ и условиям $u(x,0)=0, u'_y(x,0)=x^2$.

Решение. Интегрируя уравнение по y при фиксированном x, получим: $u'_y=\sin y+\text{v}(x)$, где $\text{v}(x)$- неизвестная функция. Интегрируя снова полученное уравнение, имеем: $u=-\cos y+\text{v}(x)y+\text{w}(x)$, где $\text{w}(x)$- неизвестная функция. Для нахождения функций $\text{v}(x)$ и $\text{w}(x)$ используем условия

$$u(x,0)=-1+\text{w}(x), u'_y(x,0)=x^2=\text{v}(x).$$

Отсюда $\text{w}(x)=1, \text{v}(x)=x^2$. Следовательно, решением данного уравнения, удовлетворяющим заданным условиям, будет функция $u = -\cos y + x^2 y + 1$.

6. Если в электрической цепи, имеющей сопротивление R, течет ток J, то количество теплоты, выделяющейся в единицу времени, пропорционально $J^2 R$. Определить, как следует разветвить ток J на токи J_1, J_2, J_3 с помощью трех проводов, сопротивления которых R_1, R_2, R_3, чтобы выделение теплоты было наименьшим.

<u>Решение</u>. Количество выделяемой теплоты $Q = J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2 + J_3^2 R_3$. Требуется найти минимум этой функции при условии $J_1 + J_2 + J_3 = J$. Воспользуемся методом Лагранжа и построим вспомогательную функцию $F(J_1, J_2, J_3, \lambda) = J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2 + J_3^2 R_3 + \lambda(J - J_1 - J_2 - J_3)$. Находим ее частные производные и приравниваем их к нулю

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial J_1} = 2J_1 R_1 - \lambda; \\ \dfrac{\partial F}{\partial J_2} = 2J_2 R_2 - \lambda; \\ \dfrac{\partial F}{\partial J_3} = 2J_3 R_3 - \lambda; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = J - J_1 - J_2 - J_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2J_1 R_1 - \lambda = 0; \\ 2J_2 R_2 - \lambda = 0; \\ 2J_3 R_3 - \lambda = 0; \\ J_1 + J_2 + J_3 = J. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений и получаем искомые токи:

$$J - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = 0; \ \ \lambda = \frac{2J}{(1/R_1) + (1/R_2) + (1/R_3)};$$

$$J_k = \frac{J}{R_k((1/R_1) + (1/R_2) + (1/R_3))}, \ \ k = 1, 2, 3.$$

7. Если в электрической цепи, имеющей сопротивление R, течет ток I, то количество терла, выделяющегося в единицу времени, пропорционально I^2R. Определить, как следует разветвить ток I на токи $I_1, I_2, ..., I_n$ при помощи n проводов, сопротивления которых $R_1, R_2, ..., R_n$, чтобы выделение тепла было наименьшим.

Указание. Найти минимум функции

$$f(I_1, I_2, ..., I_n) = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + ... + I_n^2 R_n$$

при $I_1 + I_2 + ... + I_n = I$. Ответ: $I_1 : I_2 : ... : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : ... : \frac{1}{R_n}$.

8. Уравнение траектории движения снаряда, выпущенного из точки О с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту (без учета сопротивления воздуха), есть $y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$. Принимая угол α за параметр, найти огибающую всех траекторий снаряда, расположенных в одной и той же вертикальной плоскости.

Решение. $f(x, y, \alpha) = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} - y$,

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = \frac{x}{\cos^2 \alpha} - \frac{gx^2 \sin\alpha}{v_0^2 \cos^3 \alpha} = \frac{x}{\cos^2 ga}(1 - \frac{gx}{v_0^2} tg\alpha).$$

Составим систему вида

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \frac{x}{\cos^2 ga}(1 - \frac{gx}{v_0^2} tg\alpha) = 0.$$

Из второго уравнения получим: $tg\alpha = \frac{v_0^2}{gx}$ и

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{g^2x^2}{g^2x^2+v_0^4}.$$

Подставляя в первое уравнение, найдем уравнение огибающей (параболы безопасности):

$$y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2+v_0^2}{2v_0^2 g}, \text{ или } y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

9. Найти точки экстремума функции

$$u = z^3 - x^2 - 3y^2 - \frac{3}{2}z^2 - 4x + 6y + 2.$$

<u>Решение</u>**.** Найдём стационарные точки функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x-4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6y+6, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2-3z.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} -2x-4=0, \\ -6y+6=0, \\ 3z^2-3z=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2, \\ y=1, \\ z=0, \quad z=1. \end{cases}$$

Решение этой системы приводит к двум стационарным точкам $M_1(-2;\,1;\,0)$ и $M_2(-2;\,1;\,1)$. Проверим, являются ли эти точки точками экстремума.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6, \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6z-3, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = 0. \ \Delta_1(x;\,y;\,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2,$$

$$\Delta_2(x;\,y;\,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\Delta_3(x;y;z)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 6z-3\end{vmatrix}=36(2z-1).$$

$\Delta_1(M_1)=-2<0,\ \Delta_2(M_1)=12>0,\ \Delta_3(M_1)=-36<0$.

Следовательно, $M_1(-2;1;0)$ является точкой максимума.

$\Delta_1(M_2)=-2<0,\ \Delta_2(M_2)=12>0,\ \Delta_3(M_2)=36>0$, что означает, что $M_2(-2;1;1)$ не является точкой экстремума.

10. В полушар радиусом *R* вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма.

<u>Решение</u>**.** Обозначим через *x*, *y*, *z* измерения параллелепипе-

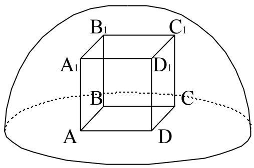


Рис. 10.

да: $|AD|=x$, $|AB|=y$, $|AA_1|=z$. Пусть 0 – центр основания; $|0A_1|=R$. Тогда согласно теореме Пифагора

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+z^2=R^2,$$

или $x^2+y^2+4z^2-4R^2=0$. Это есть уравнение связи. Обозначим левую часть уравнения через $\phi(x;y;z)$. Фактически требуется решить следующую задачу на условный экстремум: найти наибольшее значение функции V = *xyz* при условии, что переменные x, y, z удовлетворяют уравнению. Введём в рассмотрение функцию Лагранжа

$$L(x; y; z; \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + 4z^2 - 4R^2).$$

Найдём стационарные точки функции $L(x;\ y;\ z;\ \lambda)$:

$L'_x = yz + 2\lambda x$, $L'_y = xz + 2\lambda y$, $L'_z = xy + 8\lambda z$,

$L'_\lambda = \phi(x;\ y;\ z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4R^2$.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x = 0, \\ xz + 2\lambda y = 0, \\ xy + 8\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 4R^2 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения, предварительно умноженного на x, второе, предварительно умноженное на y, получим $x^2 - y^2 = 0$. Учитывая особенности задачи $(x > 0, y > 0)$, заключаем, что $x = y$. Действуя так же, находим, что $x = 2z$. Отсюда получаем $x = y = 2R / \sqrt{3}$, $z = R / \sqrt{3}$, $\lambda = -x / 4 = -R / (2\sqrt{3})$.

Таким образом, $N\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}; \frac{2R}{\sqrt{3}}; \frac{R}{\sqrt{3}}; -\frac{R}{2\sqrt{3}}\right)$ или $N(-4\lambda_0; -4\lambda_0; -2\lambda_0; \lambda_0)$, если положить $\lambda_0 = -R / (2\sqrt{3})$, является стационарной точкой функции $L(x;\ y;\ z;\ \lambda)$. Для выяснения того, является ли $M(-4\lambda_0; -4\lambda_0; -2\lambda_0)$ точкой экстремума, исследуем второй дифференциал

$$d^2 L(-4\lambda_0; -4\lambda_0; -2\lambda_0; \lambda_0; dx; dy; dz)$$

при условии, что в точке M dx, dy, dz связаны следующим соотношением (являющимся следствием равенства $x^2 + y^2 + 4z^2 - 4R^2 = 0$): $\phi'_x(M)dx + \phi'_y(M)dy + \phi'_z(M)dz = 0$;

$$(2xdx+2ydy+8zdz)\big|_M=0;\ -8\lambda_0dx-8\lambda_0dy-16\lambda_0dz=0.$$

Из последнего равенства получаем $dz=-(dx+dy)/2.$

Запишем формулу второго дифференциала функции $L(x;\,y;\,z;\,\lambda)$, считая её функцией трёх переменных x, y, z:

$$d^2L=L''_{xx}dx^2+L''_{yy}dy^2+L''_{zz}dz^2+2L''_{xy}dxdy+2L''_{yz}dydz+2L''_{zx}dzdx.$$

Имеем

$$L''_{xx}=2\lambda,\qquad L''_{xy}=z,\qquad L''_{xz}=y,$$

$$L''_{yx}=z,\qquad L''_{yy}=2\lambda,\qquad L''_{yz}=x,$$

$$L''_{zx}=y,\qquad L''_{zy}=x,\qquad L''_{zz}=8\lambda.$$

$$d^2L(M)=L''_{xx}dx^2+L''_{yy}dy^2+L''_{zz}dz^2+2L''_{xy}dxdy+2L''_{yz}dydz+2L''_{zx}dzdx=$$

$$=2\lambda_0dx^2+2\lambda_0dy^2+8\lambda_0dz^2+2zdxdy+2xdydz+2ydzdx=$$

$$\begin{bmatrix} x=y=-4\lambda_0,\ z=-2\lambda_0, \\ dz=-\dfrac{1}{2}(dx+dy) \end{bmatrix}=2\lambda_0dx^2+2\lambda_0dy^2+8\lambda_0\left(-\frac{1}{2}(dx+dy)\right)^2-$$

$$-4\lambda_0dxdy\ -8\lambda_0dy\left(-\frac{1}{2}(dx+dy)\right)-8\lambda_0\left(-\frac{1}{2}(dx+dy)\right)dx=$$

$$=2\lambda_0dx^2+2\lambda_0dy^2+2\lambda_0dx^2+4\lambda_0dxdy+2\lambda_0dy^2-4\lambda_0dxdy+$$

$$+4\lambda_0dxdy+4\lambda_0dy^2+4\lambda_0dx^2+4\lambda_0dxdy=$$

$$=8\lambda_0dx^2+8\lambda_0dy^2+8\lambda_0dxdy=8\lambda_0(dx^2+dxdy+dy^2)=$$

$$=8\lambda_0dy^2\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\frac{dx}{dy}+1\right]=8\lambda_0dy^2\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\frac{dx}{dy}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right]=$$

$$=8\lambda_0dy^2\left[\left(\frac{dx}{dy}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]=8\lambda_0\left[\left(dx+\frac{1}{2}dy\right)^2+\frac{3}{4}dy^2\right].$$

Так как выражение в квадратных скобках положительно при любых dx, dy, удовлетворяющих условию $|dx| + |dy| \neq 0$, а $\lambda_0 = -\dfrac{R}{2\sqrt{3}} < 0$, то $d^2L < 0$; следовательно, точка $M\left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}; \dfrac{2R}{\sqrt{3}}; \dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)$ является точкой условного максимума, и искомый параллелепипед имеет измерения $x = 2R/\sqrt{3}$, $y = 2R/\sqrt{3}$, $z = R/\sqrt{3}$, где x, y – измерения основания прямоугольного параллелепипеда, лежащего на круге полушара, а z – высота.

Замечание. Для решения вопроса знакопостоянства квадратичной формы $d^2L = 8\lambda dx^2 + 8\lambda dxdy + 8\lambda dy^2$ можно было привлечь критерий Сильвестра. Образуем симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 8\lambda_0 & 4\lambda_0 \\ 4\lambda_0 & 8\lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\Delta_1 = 8\lambda_0 < 0, \ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 8\lambda_0 & 4\lambda_0 \\ 4\lambda_0 & 8\lambda_0 \end{vmatrix} = 48\lambda_0^2 > 0$$

($\lambda_0 = -R/(2\sqrt{3}) < 0$). Следовательно, d^2L отрицательно определён и поэтому $M\left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}; \dfrac{2R}{\sqrt{3}}; \dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)$ является точкой условного максимума.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Рассмотреть явление, происходящее при замыкании цепи постоянного электрического тока.

Решение. Если R - сопротивление цепи, E - внешняя ЭДС, то сила тока $I = I9t0$ постепенно возрастает от значения, равного нулю, до конечного стационарного значения E/R.

Пусть L - коэффициент самоиндукции цепи, роль которой такова, что при всяком изменении силы тока в цепи появляется электродвижущая сила, равная $L\dfrac{dI}{dt}$ и направленная противоположно внешней ЭДС. На основании закона Ома, по которому в каждый момент t произведение силы тока на сопротивление равно фактически действующей ЭДС, получаем

$IR = E - L\dfrac{dI}{dt}$, или $\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L}I = \dfrac{E}{L}$, $E, L, R = const$. Последнее уравнение линейное неоднородное относительно $I(t)$. Нетрудно видеть, что его частным решением является функция $I_0(t) = Ce^{-(R/L)t}$, откуда общее решение неоднородного уравнения $I(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + E/R.$ При $t = 0$ имеем $I(0) = 0$, поэтому $C = -E/R$, так что окончательно $I(t) = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-(R/L)t})$.

Отсюда видно, что сила тока при включении асимптотически приближается при $t \to +\infty$ к своему стационарному значению $E/R.$

2. К электрическому контуру, в который последовательно включены самоиндукция L, омическое сопротивление R и емкость C, приложена постоянная ЭДС: $e(t) = a$, $a = const$. Найти ток в цепи как функцию времени t, если в начальный момент ток в контуре и заряд конденсатора равны нулю.

Решение. По закону Кирхгофа ЭДС в цепи равна сумме падений напряжения на индуктивности, сопротивлении и емкости: $e(t)=u_L+u_R+u_C$, связанных с током соотношениями: $u_L=L\frac{di}{dt},\ u_L=Ri,\ u_C=\frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)d\tau.$

В результате получаем интегро-дифференциальное уравнение $e(t)=L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)d\tau.$ Дифференцируя уравнение по t, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{c}i=\frac{de}{dt}.$$

Так как в контур включена постоянная ЭДС $e(t)=a$, то уравнение принимает вид $\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{K}\frac{di}{dt}+\frac{1}{Lc}i=0.$ Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению имеет вид $k^2+\frac{R}{L}k+\frac{1}{Lc}=0,$ корнями которого являются $k_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2c-4L}{4L^2c}}$. Если $R^2c-4L<0$, то общее решение имеет вид $i_0=e^{-\alpha t}(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t),$ где $\alpha=\frac{R}{2L},\omega^2=\frac{1}{Lc}-\frac{R^2}{4L^2}.$ Решение определяет электрические колебания в цепи. Принимая во внимание начальные условия $i\,|_{t=0}=0,\frac{di}{dt}\,|_{t=0}=\frac{a}{L},$ находим, что $i(t)=\frac{a}{L\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t.$

3. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника ЭДС $e(t)$ индуктивности L, сопротивления R и емкости C. Найти ток в цепи, если в начальный момент

ток в контуре и заряд конденсатора равны нулю, а $e(t) = a\sin\nu t.$

Решение. Уравнение в данном случае имеет вид

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = a\nu\cos\nu t.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения определяется формулой $i_0 = e^{-at}(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t)$, где $\alpha = \dfrac{R}{2L}, \omega^2 = \dfrac{1}{Lc} - \dfrac{R^2}{4L^2}$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом неопределенных коэффициентов в форме $i^* = A\cos\nu t + B\sin\nu t$, где A и B - неизвестные постоянные. При этом полагаем, что $\omega \neq \nu$. В результате приходим к системе алгебраических уравнений $\begin{cases}(1/C - L\nu^2)A + \nu RB = a\nu;\\ -\nu RA + (1/C - L\nu^2)B = 0,\end{cases}$

решая которую, получим

$$A = \frac{a\nu(1/C - L\nu^2)}{(1/C - L\nu^2)^2 + \nu^2 R^2};\ B = \frac{a\nu R}{(1/C - L\nu^2)^2 + \nu^2 R^2}.$$

Таким образом, частное решение принимает вид

$$i^* = \frac{a\nu}{(1/C - L\nu^2)^2 + \nu^2 R^2}[(\frac{1}{C} - L\nu^2)\cos\nu t + \nu R\sin\nu t],$$

а общее решение уравнения представится выражением

$$i(t) = e^{-\alpha t}(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t) +$$

$$+\frac{a}{(1/C - L\nu^2)^2 + \nu^2 R^2}[(\frac{1}{C\nu} - L\nu)\cos\nu t + R\sin\nu t],$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные интегрирования. Найдем их из начальных условий $i|_{t=0}=0, \frac{di}{dt}|_{t=0}=0.$ Имеем

$$c_1=\frac{a\nu(L\nu-1/C\nu)}{(1/C\nu-L\nu)^2+R^2};\ c_2=\frac{a(\nu R-(L\nu-1/C\nu)\alpha)}{\omega((1/C\nu-L\nu)^2+R^2)}.$$

Тогда

$$i(t)=e^{-\alpha t}\frac{a}{(1/C\nu-L\nu)^2+R^2}((L\nu-1/C\nu)\cos\omega t-\frac{1}{\omega}(R\nu-(L\nu-$$

$$-1/C\nu)\alpha\sin\omega t)+\frac{a}{(1/C\nu-L\nu)^2+R^2}((1/C\nu-L\nu)\cos\nu t+R\sin\nu t).$$

4. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока ЭДС $e(t)=a\cos(\nu t+\psi)$, индуктивности L и емкости C, причем $\nu\neq 1/CL.$ Найти ток в цепи как функцию времени t, если $i|_{t=0}=0, \frac{di}{dt}|_{t=0}=\frac{a}{L}\cos\psi.$

Решение. Ввиду отсутствия сопротивление R дифференциальное уравнение принимает вид

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{c}i=-a\nu\sin(\nu t+\psi).$$

Соответствующее однородное уравнение имеет общее решение $i_0=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t,\ \omega_0=1/\sqrt{LC},$ где c_1,c_2 - произвольные постоянные.

Частное решение уравнения будем искать в виде

$$i^*=A\cos\nu t+B\sin\nu t$$

с неопределенными коэффициентами $A, B.$ Для нахождения коэффициентов получим систему уравнений

$$\begin{cases}(1/CL-\nu^2)AL=-a\nu\sin\psi;\\(1/CL-\nu^2)BL=-a\nu\cos\psi,\end{cases}$$

откуда $A=\dfrac{a\nu\sin\psi}{L(\nu^2-\omega_0{}^2)}$; $B=\dfrac{a\nu\cos\psi}{L(\nu^2-\omega_0{}^2)}$. Таким образом,

$i^*(t)=\dfrac{a\omega}{L(\nu^2-\omega_0)}\sin(\nu t+\psi)$. Следовательно, общее решение получится в виде

$$i(t)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t+\frac{a\omega}{L(\nu^2-\omega_0{}^2)}\sin(\nu t+\psi).$$

Частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, представится выражением

$$i(t)=\frac{a}{L(\nu^2-\omega_0{}^2)}(\nu\sin(\nu t+\psi)-\nu\sin\psi\cos\nu t-\omega_0\cos\psi\sin\nu t).$$

5. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока ЭДС $e(t)=a\cos(\nu t+\psi)$, индуктивности L и емкости C, причем $\nu=1/\sqrt{LC}$. Найти ток в цепи как функцию времени t, если $i|_{t=0}=0, \dfrac{di}{dt}|_{t=0}=0.$

Решение. Как и в задаче 3, дифференциальное уравнение принимает вид $L\dfrac{d^2i}{dt^2}+\dfrac{1}{c}i=-a\nu\sin(\nu t+\psi)$, а общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения определяется формулой

$$i_0=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t,\ \omega_0=1/\sqrt{LC}.$$

Частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $i^*=t(A\cos\nu t+B\sin\nu t)$. Тогда

$\dfrac{di^*}{dt}=t(-A\nu\sin\nu t+B\nu\cos\nu t)+A\cos\nu t+B\sin\nu t;$

$$\frac{d^2 i^*}{dt^2} = t(-A\nu^2 \cos\nu t - B\nu^2 \sin\nu t) + (-2A\nu t \sin\nu t + 2B\nu \cos\nu t).$$

Подставляя выражения первой и второй производных в исходное уравнение и принимая во внимание условие $L\nu^2 - 1/C = 0$, получим тождество

$$L(-2A\nu \sin\nu t + 2B\nu \cos\nu t) = a\nu \cos\nu t,$$

откуда $A = 0, B = \dfrac{a}{2L}$ и, следовательно, $i^* = \dfrac{a}{2L} t \sin\nu t.$

Общее решение уравнения имеет вид

$$i(t) = c_1 \cos\nu t + c_2 \sin\nu t + \frac{a}{2L} t \sin\nu t.$$

Начальные условия определяют частное решение в виде

$$i = \frac{a}{2L} t \sin\nu t.$$

6. К электрическому контуру, в который последовательно включены самоиндукция L, сопротивление R, приложена ЭДС $e(t) = a\sin(\nu t + \psi)$. Найти ток i в цепи как функцию времени t, если в начальный момент ток в контуре равен нулю.

Ответ: $i(t) = \dfrac{a}{R^2 + L^2\nu^2}(\sin(\gamma - \psi)e^{-\frac{R}{L}t} + \sin(\nu t + \psi - \gamma)),$

$$\text{где} \cos\gamma = \frac{R}{R^2 + L^2\nu^2},\ \sin\gamma = \frac{L\nu}{R^2 + L^2\nu^2}.$$

7. К источнику с постоянной ЭДС $e(t) = a$ подключается цепь, состоящая из двух индуктивно связанных контуров. Найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ в обоих контурах в зависимости от времени t, если подключение производится при нулевых начальных условиях, причем $L_1 L_2 \neq M^2$, где M - коэффициент взаимной индуктивности контуров.

Решение. Согласно закону Кирхгофа, составим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \dfrac{di_2}{dt} = a; \\ L_2 \dfrac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M \dfrac{di_1}{dt} = 0. \end{cases}$$

Исключим $\dfrac{di_2}{dt}$ из системы уравнений. Тогда

$$(L_1 L_2 - M_2)\frac{di_1}{dt} + L_2 R_1 i_1 - M R_2 i_2 = L_2 a,$$

или

$$(1-k^2)\frac{di_1}{dt} + 2\alpha_1 i_1 - \frac{4M\alpha_1\alpha_2}{R_1} i_2 = \frac{2\alpha_2 a}{R_1},$$

где $k^2 = \dfrac{M^2}{L_1 L_2}$, $2\alpha_1 = \dfrac{R_1}{L_1}$, $2\alpha_2 = \dfrac{R_2}{L_2}$.

Продифференцируем обе части последнего уравнения, найдем $\dfrac{di_2}{dt}$ и подставим в первое уравнение системы. После преобразования получим

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + 2\sigma\frac{di_1}{dt} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2} i_1 = \frac{4a\alpha_1\alpha_2}{R_1(1-k^2)},$$

где $\sigma = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{1-k^2}$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$\overline{i_{10}(t)} = e^{-\sigma t}(c_1 \mathrm{ch}\beta t + c_2 \mathrm{sh}\beta t),\ k_{1,2} = -\sigma \pm \beta,\ \beta = \sqrt{\sigma^2 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}},$$

а общее решение неоднородного уравнения запишем в виде

$i_1(t) = a / R_1 + e^{-\sigma t}(c_1 \mathrm{ch}\beta t + c_2 \mathrm{sh}\beta t)$. Принимая во внимание начальные условия $i_1 |_{t=0} = 0;\ i_2 |_{t=0} = 0,$ имеем

$$i_1(t) = \frac{a}{R_1}(1 + +e^{-\sigma t}(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta(1-k^2)} \mathrm{sh}\beta t - \mathrm{ch}\beta t)).$$

Аналогично определяется частное решение $i_2(t)$.

8. Известно, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству x еще не распавшегося вещества. Найти зависимость x от времени t, если в начальный момент $t = t_0$ имелось $x = x_0$ вещества.

Решение. Дифференциальное уравнение процесса

$$\frac{dx}{dt} = -kx. \qquad (1)$$

Здесь $k > 0$ - постоянная распада - предполагается известной, знак «-» указывает на уменьшение x при возрастании t. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\ln|x| = -kt + \ln|C|,$$

откуда $x = Ce^{-kt}$. Учитывая начальное условие $x|_{t=t_0} = x_0$, находим, что $x = Ce^{-kt_0}$, поэтому $x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}$.

Любой процесс (не только радиоактивный распад), при котором скорость распада пропорциональна количеству еще не прореагировавшего вещества, описывается уравнением (1).

Уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx,\ k > 0, \qquad (2)$$

отличающееся лишь знаком правой части уравнения, описывает процесс размножения, например «размножение» нейтронов в цепных ядерных реакциях или размножение бактерий в предположении, что скорость их размножения пропорциональна начальному числу бактерий.

Решение уравнения (2), удовлетворяющее условию $x|_{t=t_0} = x_0$, имеет вид $x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}$ и в отличие от решения уравнения (1) возрастает с возрастанием t.

Уравнения (1), (2) можно объединить в одно

$$\frac{dx}{dt} = kx\,, k = const, \tag{3}$$

которое дает простейшую математическую модель динамики популяций (совокупности особей того или иного вида растительных или животных организмов). Пусть $y(t)$ - число членов популяции в момент времени t. Если предположить, что скорость изменения популяции пропорциональна величине популяции, то мы приходим к уравнению (3). Положим $k = m - n$, где m - коэффициент относительной скорости рождаемости, а n - коэффициент относительной скорости умирания; тогда $k > 0$ при $m > n$ и $k < 0$ при $m < n$.

Если в момент $t = 0$ величина популяции равна y_0, то уравнение (3) приводит к экспоненциальному закону изменения популяции

$$y(t) = y_0 e^{kt};$$

при $k < 0$ имеем $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, при $k > 0$ имеем $y(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Предположение, что величины m и n являются постоянными, не выполняется для больших популяций. Действительно, большое число членов популяции приводит к уменьшению соответствующих ресурсов, что снижает скорость рождаемости и увеличивает скорость умирания. Это можно задать простейшими законами $m = b_1 - b_2 y,\ n = b_3 + b_4 y,$ где b_i - положительные постоянные ($i = 1, 2, 3, 4$); тогда

$$k = m - n = b_1 - b_3 - (b_2 + b_4)y = (b_2 + b_4)\left(\frac{b_1 - b_3}{b_2 + b_4} - y\right) = \alpha(A - y),$$

где $\alpha = b_2 + b_4,\ A = \dfrac{b_1 - b_3}{b_2 + b_4}$.

Уравнение динамики популяции в этой модели имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = \alpha(A - y)y\ .$$

Это так называемое *логистическое уравнение* – фундаментальное уравнение в демографии и в математической теории экологии. Оно применяется в математической теории распространения слухов, болезней и других проблемах физиологии и социологии. Разделяя переменные в последнем уравнении, получаем

$$\frac{dy}{(A - y)y} = \alpha dt\text{, откуда } y = \frac{ACe^{A\alpha t}}{1 + Ce^{A\alpha t}}\ .$$

Считая, что $y(0) = y_0$, найдем уравнение логистической кривой $y(t) = A/(1 + (A/y_0 - 1)e^{-A\alpha t}$. При $\alpha > 0$ и $A > 0$ получаем, что $y(t) \to A$ при $t \to +\infty$. Логистическая кривая содержит два параметра A, α, для их определения надо иметь два дополнительных значения $y(t)$ при каких-то t_1 и t_2.

9. Найти форму зеркала, собирающего пучок параллельно падающих на него лучей в одну точку.

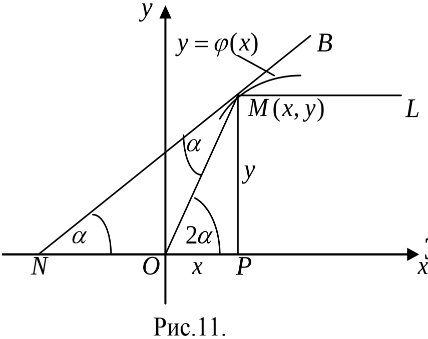


Рис.11.

Решение. Прежде всего зеркало должно иметь форму поверхности вращения, так как только для поверхности вращения все нормали к поверхности проходят через ось вращения. Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы лучи были параллельны оси Ox и точкой, в которой собирались бы отраженные лучи, явилось бы начало координат. Найдем форму сечения зеркала плоскостью xOy. Пусть уравнение сечения есть $y=\varphi(x)$. В точке $M(x,y)$ падения луча L на зеркало проведем касательную BN к сечению и обозначим ее угол с осью Ox через α. Пусть N - точка пересечения этой касательной с осью Ox. По закону отражения углы NMO и BML равны. Нетрудно видеть, что угол MOP равен 2α. Так как $\operatorname{tg}\alpha = y'$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{y}{x}$ и $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, то во всякой точке кривой $y=\varphi(x)$ выполняется соотношение $\dfrac{y}{x}=\dfrac{2y'}{1-y'^2}$ - дифференциальное уравнение, определяющее требуемый ход луча.

Разрешая это уравнение относительно производной, получаем два однородных уравнения:

$$y'=\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y},\ y'=\frac{-x-\sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

Первое из них путем замены $y/x=u$ преобразуется к виду

$$u+xu'=\frac{-1+\sqrt{1+u^2}}{u} \quad \text{или} \quad \frac{udu}{1+u^2-\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x},$$

интегрируя, найдем

$$-\ln|x|+\ln C=\int\frac{udu}{1+u^2-\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{d(\sqrt{1+u^2}-1)}{\sqrt{1+u^2}-1}=$$

$$= \ln(\sqrt{1+u^2} - 1).$$

Потенцируя последнее соотношение и заменяя u через y/x, после несложных преобразований имеем $y^2 = 2Cx + C^2$ или $y^2 = 2C(x + C/2)$. Полученное уравнение в плоскости xOy определяет семейство парабол, симметричных относительно оси Ox; фокусы этих парабол совпадают с началом координат. Фиксируя C и вращая параболу вокруг оси Ox, получаем параболоид вращения $y^2 + z^2 = 2C(x + C/2)$. Таким образом, зеркало в виде параболоида вращения решает поставленную задачу. Это свойства используется в прожекторах.

10**.** Найти кривую, проходящую через точку (1;2) и обладающую тем свойством, что площадь треугольника, образованного касательной, осью абсцисс и радиус-вектором, проведенным к точке касания, есть величина постоянная, равная 5.

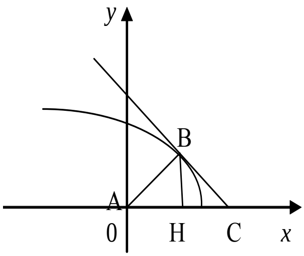


Рис.12.

<u>Решение</u>**.** Пусть B($x;y$) – точка касания, BC – отрезок касательной, $\vec{AB}$ - радиус-вектор, BH – высота треугольника ABC, площадь которого равна 5. Если ∠BCH=φ, то tgφ= $-y'$ и длина основания AC равна $x - \dfrac{y}{y'}$. Так как BH=y, то

$2S_{ABC} = 10 = y\left(x - \dfrac{y}{y'}\right)$. С учетом того, что $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(dx/dy)}$, это уравнение сводится к линейному относительно $x(y)$ дифференциальному уравнению $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}-\frac{10}{y^2}$ с начальным условием $x(2)=1$. Решением этого линейного дифференциального уравнения является $x=\frac{5}{y}+Cy$. Из дополнительного условия $x(2)=1$ следует, что C= –3/4. Таким образом, искомая кривая задается уравнением $x=\frac{5}{y}-\frac{3}{4}y$.

11. Рыболовецкий бот движется по заливу со скоростью 25 км/ч. Через 1 минуту после остановки двигателя его скорость составила 15 км/ч. Считая, что сопротивление воды пропорционально квадрату скорости лодки, найти скорость лодки через 3 минуты после остановки двигателя.

<u>Решение</u>**.** Пусть v(t) – скорость лодки в момент времени t. Из второго закона Ньютона и условия задачи следует, что $m\frac{dv}{dt}=-kv^2$. Отсюда $-\frac{d}{v^2}=\frac{v}{m}dt$ и, следовательно, $v=\frac{m}{kt+cm}=\frac{1}{(k/m)t+C}$. Учитывая начальные условия $v(0)=25$, находим C=0,04, а из условия $v\;1/60\;=15$ следует, что $\frac{k}{m}=\frac{8}{5}$. Наконец, $v\left(\frac{3}{60}\right)=\frac{1}{\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{60}+\frac{1}{25}}=\frac{25}{3}$.

12. Метеорит, находящийся под влиянием земного притяжения, из состояния покоя начинает прямолинейно падать на Землю с высоты *h*. Какой была бы скорость метеорита при достижении им поверхности Земли, если бы отсутствовала земная атмосфера? Радиус Земли $R=6377$ км.

Решение. Пусть $x = x(t)$ - расстояние, пройденное метеоритом с начала падения, $h - x$ - расстояние от метеорита в момент t до центра Земли. В момент tна метеорит действует сила $F = ma$, где m- масса метеорита, а a - его ускорение. На поверхности Земли на тело действует сила тяжести $P=mg$, где g-ускорение свободного падения на поверхности Земли.

По закону Ньютона эти силы обратно пропорциональны квадратам расстояний падающего тела от центра Земли:

$$\frac{F}{P} = \frac{R^2}{(h-x)^2}, \ \frac{ma}{mg} = \frac{R^2}{(h-x)^2}.$$

Отсюда $a = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}$, но $a = \frac{dv}{dt}$, поэтому $\frac{dv}{dt} = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}$. Учитывая равенство $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$, получаем дифференциальное уравнение движения:

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{gR^2}{(h-x)^2} \quad \text{или} \quad \frac{dv^2}{dx} = \frac{2gR^2}{(h-x)^2}.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим $v^2 = \frac{2gR^2}{h-x} + C$.

Движение начиналось из состояния покоя, то есть $x = 0$ и $v = 0$ при $t = 0$: $0 = \frac{2gR^2}{h-0} + C,\ C = -\frac{2gR^2}{h}$. Поэтому изменение скорости метеорита в зависимости от пройденного расстояния x выражается формулой $v^2 = \frac{2gR^2 x}{h(h-x)}$. На поверхности Земли (при $x = h - R$) скорость метеорита $v = \sqrt{2gR(1 - \frac{R}{h})}$. Так как h по условию неограниченно велико, то, переходя к пределу при $h \to \infty$, получим $v = \sqrt{2gR}$. При достижении Земли метеорит имеет скорость $v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6377000} \approx 11{,}2$ км/с.

13. Поглощение светового потока тонким слоем воды пропорционально толщине слоя и потоку, падающему на его поверхность. При прохождении через слой толщиной 1 м поглощается 1/4 первоначального светового потока. Какая часть светового потока дойдет до глубины h?

Решение. Пусть $Q = Q(h)$ - световой поток, падающий на поверхность на глубине h. При прохождении через слой воды толщиной dh поглощенный световой поток dQ равен $dQ = -kQdh,$ где k- коэффициент пропорциональности. Отсюда $Q(h) = Ce^{-kh}$.

Пусть первоначальный световой поток равен Q_0. Тогда из начального условия $Q(0) = Q_0$. Находим, что $C = Q_0$, и поэтому $Q(h) = Q_0 e^{-kh}$. По условию, $Q(1) = (3/4)Q_0$, поэтому $(3/4)Q_0 = Q_0 e^{-k}$, откуда $e^{-k} = 3/4$ и $Q(h) = Q_0 (3/4)^h$. До глубины $h = 4$ м дойдет световой поток $Q(4) = Q_0 (3/4)^4 \approx 0{,}316 Q_0$.

Таким образом, до глубины 4 м дойдет менее 1/3 первоначального светового потока.

14. В прямолинейной трубе радиуса R течет жидкость. Скорость течения v каждого слоя жидкости увеличивается с приближением этого слоя к центру трубы (оси цилиндра). Найти v как функцию расстояния r соответствующего слоя жидкости от оси цилиндра.

Решение. Из гидравлики известно, что зависимость между v и r выражается уравнением $dv = -\frac{\gamma i}{2\varepsilon} r dr$, где ε - коэффициент вязкости: i - гидравлический спад; γ - плотность жидкости (знак минус обусловлен тем, что с увеличением расстояния r скорость течения уменьшается).

Интегрируя уравнение, имеем $v = -\frac{\gamma i}{4\varepsilon} r^2 + C$. Значение постоянной C определим из условия, что скорость течения слоя жидкости, непосредственно прилегающего к трубе, равна нулю, то есть $v(R) = 0$:

$$v(R) = -\frac{\gamma i}{4\varepsilon} R^2 + C = 0; \; C = \frac{\gamma i}{4\varepsilon} R^2.$$

Таким образом, $v(r) = \frac{\gamma i}{4\varepsilon}(R^2 - r^2)$.

15. Пусть N(t) – количество бактерий в сосуде. Известно, что производная $N'(t)$ (скорость размножения бактерий) пропорциональна $N(t)$ с коэффициентом пропорциональности k. Определить k, если в 10 часов в сосуде было 2 000 бактерий, а в 12 часов уже 32 000.

16. В полностью заполненном баке находится 200 литров водного раствора соли с содержанием соли 40 кг. В 9.00 включается устройство, которое подает в бак 20 литров 10-процентного раствора соли в минуту. После мгновенного перемешивания столько же раствора выливается. Найти время, за которое в баке будет 12-процентный раствор соли.

17. Скорость остывания воды в чайнике пропорциональна разности температуры чайника и кухни. Чайник выключился в 10.20 при температуре воды 100С°. В 10.30 температура воды в

чайнике была 80 С°. Найти время, за которое температура воды в чайнике будет равна 40 С°, если температура на кухне 20 С°.

18. 1 января 1980 года захоронено 2 500 кг радиоактивного вещества. На 1 января 2000 года от него осталось 2 000 кг. Сколько радиоактивного вещества будет в захоронении на 1 января 2300 года?

19. Пуля попадает в дерево со скоростью 500 м/с. Через одну сотую доли секунды ее скорость составила 400 м/с. Считая, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости пули, найти скорость пули через две сотых доли секунды после попадания в дерево.

20. Легкое тело массы m падает с высоты 250 м под действием силы тяжести, встречая противодействие силы трения воздуха. Предполагается, что сила трения пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности k) установить:

1) через сколько секунд после начала падения тело достигнет земли;
2) закон движения $h = f(t)$.

Ответ: $t = \frac{m}{k}\ln\frac{g}{g - \frac{k}{m}\mathrm{v}}$, $h = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$.

21. Шар M массы m падает свободно без начальной скорости под действием силы тяжести из точки O, которую примем за начало координат. Сопротивление воздуха F пропорционально скорости падения, то есть $F = -k\,\mathrm{v}$ (k - коэффициент пропорциональности). Найти закон движения шара.

22. Самолет начинает пикировать без начальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Найти зависимость между вертикальной скоростью в

данный момент, пройденным путем y и максимальной скоростью пикирования.

Ответ: $\mathrm{v} = \mathrm{v}_{\max} \sqrt{1 - e^{-\frac{2gy}{\mathrm{v}_{\max}^2}}}$.

23. Влага, содержащаяся в свежеиспеченном хлебе, испаряется в окружающую среду со скоростью, пропорциональной количеству влаги в хлебе, а также разности влажности окружающего и насыщенного воздуха. Некоторое количество свежеиспеченного хлеба, содержащее 3 $кг$ влаги, положено в помещение кубатурой 100 $м^2$, воздух которого первоначально имел влажность 25%. Насыщенный воздух при той же температуре содержит 0,12 $кг$ влаги на 1 $м^2$. Если в течение первых суток хлеб потерял половину своей влаги, то сколько влаги в нем останется по истечении вторых суток?

Ответ: дифференциальное уравнение задачи $\dfrac{ds}{dt} = ks(s+6)$; 0,82 $кг$.

24. Естественный прирост населения большого города пропорционален наличному количеству жителей и промежутку времени. Кроме того, население города увеличивается благодаря иммиграции: скорость прироста населения этим путем пропорциональна времени, отсчитываемому от момента, когда население города равнялось A_0. Найти зависимость числа жителей города от времени (считая процесс непрерывным).

Ответ: $A = (A_0 + \dfrac{k_2}{k_1^2})e^{k_1 t} - \dfrac{k_2}{k_1}t - \dfrac{k_2}{k_1^2}$.

25. Сопротивление, оказываемое воздухом падающему телу, вызывает отрицательное ускорение $-k\mathrm{v}^2$, где v - скорость тела, а k - постоянная. Показать, что снаряд выпущенный вер-

тикально вверх со скоростью v_1, возвратится к исходной точке со скоростью $v_2 = \sqrt{\dfrac{g v_1^2}{g + k v_1^2}}$, где g - ускорение силы тяжести.

Указание. Дифференциальное уравнение движения тела вверх $m\dfrac{d^2 s}{dt^2} = m v \dfrac{dv}{ds} = -mg - k v^2$. Падение происходит по закону $m v \dfrac{dv}{ds} = -mg + k v^2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Задачник-практикум по высшей математике: В 2 ч. Ч.1. Интегральное исчисление: учеб. пособие / Т.Н. Андрианова, Т.А. Ефимова, З.Д. Коломейцева и др.; под ред. В.А. Волкова. СПб.: Изд. Санкт-Петербурского ун-та,1994. 232 с.

2. Задачник-практикум по высшей математике: Множества. Функции. Предел. Непрерывность. Производная: учеб. пособие / В.А. Волков, А.Н. Григорьева, Т.А. Ефимова и др.; под ред. В.А. Волкова. Л.: Изд. Ленингр. ун-та,1988. 224 с.

3. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных/ В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин. М.: Высш. Шк., 1988. 288с.

4. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1: Линейная алгебра и основы математического анализа / В.А. Болгов, Б.П. Демидович, А.В. Ефимов и др.; под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука,1993. 480 с.

5. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. в 4 ч. Ч. 2. / А.П. Рябушко и др.; под общ. ред. А.П. Рябушко. 3-е изд., испр. Минск: Высш. шк., 2007. 396 с.

6. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учеб. пособие / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. М.: Высш. шк., 1989. 383 с.

7. Гутер Р.С. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие для втузов/ Р.С. Гутер, А.Р. Янпольский. М.: Высш. шк., 1976. 304 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к решению прикладных задач по курсу
«Математический анализ»
для студентов специальностей
230104 «Системы автоматизированного проектирования»,
230101 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»
очной формы обучения
Часть 1

Составители:
Глушко Елена Георгиевна
Дубровская Алевтина Петровна
Провоторова Елена Николаевна

В авторской редакции

Подписано в печать 12. 05. 2010.
Формат 60×84/16.
Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л. 3,1. Уч. -изд. л. 2,9. Тираж 50 экз. «С»
Заказ №

ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14