

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

В.П. Литвиненко О.В. Чернояров

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Утверждено учебно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2017

УДК 621.3.013

Литвиненко В.П. Моделирование случайных процессов: учеб. пособие / В.П. Литвиненко, О.В. Чернойров. Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2017. 175 с.

Учебное пособие содержит учебный материал для углубленного изучения вопросов статистического имитационного моделирования случайных процессов по дисциплине «Техническая диагностика и скрытность». Рассматриваются методы формирования на ЭВМ последовательностей случайных чисел с заданным законом распределения вероятностей, их статистической обработки, моделирования гауссовских, квазигармонических и пуассоновских случайных процессов, способы организации статистического имитационного моделирования в задачах технической диагностики и скрытности сигналов.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению 11.04.01 «Радиотехника», магистерской программе «Радиотехнические средства обработки и защиты информации в каналах связи», дисциплине «Техническая диагностика и скрытность».

В пособие включены материалы исследований по ГБ НИР 2016.49 и ГБ НИР №1729.

Табл. 5. Ил. 50. Библиогр.: 18 назв.

Рецензенты: кафедра инфокоммуникационных систем и технологий Воронежского института МВД России (зам. нач. кафедры канд. техн. наук, доц. О.В. Пьянков);
д-р техн. наук, проф. А.Б. Токарев

© Литвиненко В.П., Чернойров О.В., 2017

© Оформление. ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2017

ВВЕДЕНИЕ

В дисциплине «Техническая диагностика и скрытность» рассматриваются общие вопросы оценки скрытности состояния технических систем в задачах их диагностики. В ней рассматриваются общие методы определения затрат на выявление состояний технической системы и оценки их диагностической скрытности. Изучение базируется на теории вероятностей [1-3] и теории скрытности [4, 5].

Одним из методов решения поставленных задач является статистическое имитационное моделирование анализируемой системы на ЭВМ с использованием универсального и специализированного программного обеспечения. В таких моделях необходимо формировать случайные числа и дискретные процессы с заданными свойствами, создавать модель анализируемой системы и проводить статистическую обработку результатов.

Современная вычислительная техника предоставляет широкие возможности по статистическому моделированию [6]. Это направление подготовки специалистов имеет большое самостоятельное значение. Пособие ориентировано на углубленное изучение вопросов имитационного моделирования случайных величин и процессов в ходе подготовки студентов.

Изучение дисциплины базируется на курсах «Математика», «Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике», «Обнаружение сигналов».

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1.1. Способы получения случайных величин

Имеется три основных способа получения случайных величин:

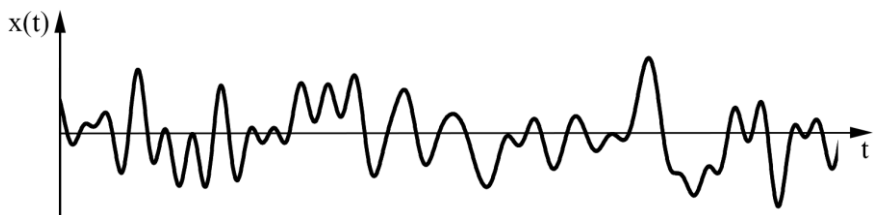
- 1) таблицы случайных чисел;
- 2) физические датчики случайных воздействий;
- 3) генераторы псевдослучайных чисел на ЭВМ.

Таблицы случайных чисел формируются один раз, каким либо внешним источником и запоминаются на носителе с возможностью последующего многократного использования. К достоинствам данного метода следует отнести гарантированное качество случайных чисел и повторяемость (возможность использования одной и той же последовательности случайных чисел при различных условиях). Из недостатков можно отметить необходимость запоминания и относительно небольшой (по сравнению с другими методами) объем уникальных случайных чисел.

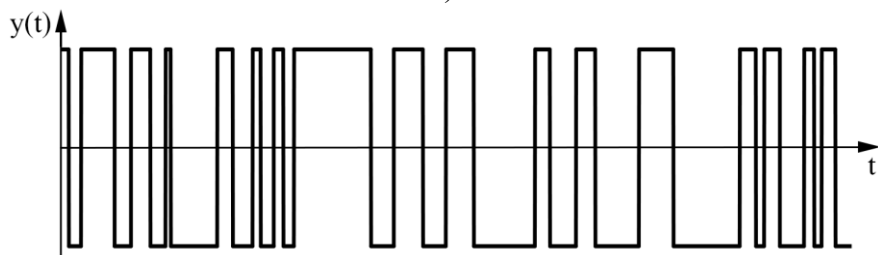
Физические датчики случайных воздействий строятся на основе случайных физических явлений, например, могут использоваться дробовые шумы электронных ламп, шум газового разряда, шумы рекомбинации электронов и дырок в р-п переходе, радиоактивный распад, фотоэффект и пр. Преобразуя какое-либо из случайных физических воздействий с помощью аналого-цифрового преобразователя (АЦП), можно получить искомую последовательность случайных чисел. Достоинства метода - неограниченный объем выборки случайных чисел и быстрое их формирование. Недостатками физических датчиков являются неповторяемость процесса, нестабильность статистических свойств (зависимость от температуры, влажности, напряжения питания и т.д.) и громоздкость аппаратуры.

Для упрощения технической реализации физического датчика случайных воздействий иногда поступают следующим образом. Пусть имеется исходное нестабильное случайное

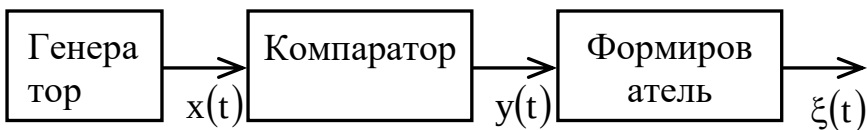
воздействие $x(t)$ (рис. 1.1а). Подадим его реализацию $x(t)$ на компаратор, тогда можно показать, что моменты пересечения сигнала $y(t)$ на выходе ограничителя с осью t (длительности импульсов на выходе компаратора на рис. 1.1б) являются устойчивыми по отношению к внешним факторам. Структурная схема физического генератора случайных величин, работающего по указанному правилу, показана на рис. 1.1в.



а)



б)



в)

Рис. 1.1

1.2. Генераторы псевдослучайных чисел на ЭВМ

Программные датчики случайных (точнее, псевдослучайных) чисел являются доминирующим способом получения случайных величин.

Достоинства метода:

- быстрое получение случайных чисел (программа генерирования случайных чисел, как правило, очень коротка);
- однократная проверка датчика на качество формируемых случайных чисел (нужно лишь один раз проверить статистическое качество псевдослучайной последовательности чисел несколькими специальными статистическими тестами, после чего данный алгоритм генерации можно безбоязненно использовать на практике);
- повторяемость (воспроизводимость) случайных воздействий.

1.3. Датчики равновероятных случайных чисел

1.3.1. Типы датчиков

Исходным материалом для формирования на ЭВМ случайных величин с различными законами распределения служат равномерно распределенные в интервале $[0,1]$ случайные числа. Алгоритм их формирования называют датчиком случайных (псевдослучайных) чисел.

Большинство современных программных датчиков случайных чисел α_i , $i=1, 2, \dots$ с плотностью вероятности $w_\alpha(x)=1$, $0 \leq x \leq 1$ работают по следующему рекуррентному алгоритму:

$$\alpha_{i+1} = F(\alpha_i), \quad (1.1)$$

где $F(\cdot)$ – некоторая функция, отображающая множество $\{\alpha_i\}$ само на себя. Можно использовать и более общее правило

получения псевдослучайных чисел вида

$$\alpha_{i+1} = F(\alpha_i, \alpha_{i-1}, \dots, \alpha_{i-k}). \quad (1.2)$$

Однако, как показали исследования, более громоздкие алгоритмы (1.2) не дают преимуществ по сравнению с (1.1), в то же время проигрывая последним по быстродействию. В этой связи разновидности алгоритмов типа (1.2) на практике не используются.

Нетрудно видеть, что способ формирования чисел (1.1) является, вообще говоря, детерминированным, и может возникнуть вопрос: откуда здесь может появиться случайность? Ответ таков: получив согласно (1.1) последовательность чисел, несколькими (примерно пятью - шестью) статистическими тестами проводится проверка, не противоречат ли свойства этой последовательности гипотезе о том, что составляющие ее числа являются значениями случайной величины с равномерным распределением. Если в результате тестирования указанная гипотеза подтверждается, то алгоритм генерации случайных чисел признается годным. Тесты для проверки качества датчиков случайных чисел описаны, например, в [9,11,14].

Рассмотрим качественные свойства, которым должна удовлетворять функция $F(\cdot)$ (1.1). Пусть имеется два равномерно распределенных в интервале $[0,1]$ случайных числа α_1, α_2 . Будем интерпретировать их как координаты точки, находящейся в квадрате с единичной стороной. Если при генерации нескольких пар чисел α_1, α_2 получается распределение вида, показанного на рис. 1.2а, то есть основания считать, что функция $F(\cdot)$ подобрана сравнительно удачно (получаемые точки распределяются в квадрате случайным образом). Если же при генерации нескольких пар чисел α_1, α_2 получается распределение вида, показанного на рис. 1.2б, то можно сделать вывод о том, что функция $F(\cdot)$

подобрана неудачно (между получаемыми точками наблюдается очевидная детерминированная зависимость, т.е. случайность практически отсутствует).

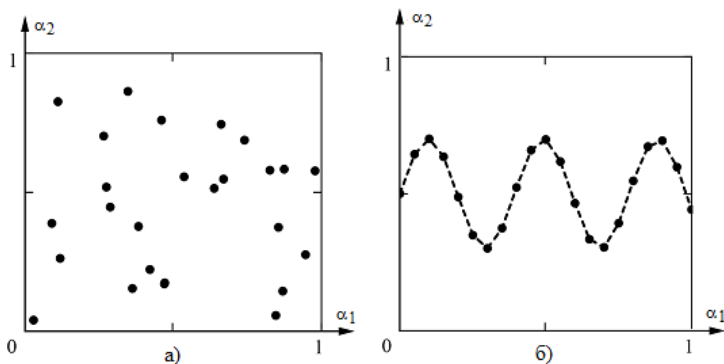


Рис. 1.2

Следует иметь в виду, что из произвольно выбранного алгоритма формирования чисел (1.1) статистически правильной последовательности случайных чисел *не получится*.

1.3.2. Ранние алгоритмы формирования случайных чисел

Исторически первыми алгоритмами для получения псевдослучайных чисел был алгоритм середины квадратов и аналогичный ему алгоритм середины произведения. Идея алгоритма середины квадратов состоит в следующем. Пусть имеется $2n$ -разрядное число α_1 . Возведем его в квадрат и получим в результате $4n$ -значное число. Средние $2n$ цифр получившегося $4n$ -разрядного числа примем за следующее искомое псевдослучайное число α_2 . Снова возведем его в квадрат и извлечем из получившегося результата $2n$ средних цифр. Получим число α_3 и т.д.

Рассмотрим пример. Пусть $\alpha_1 = 0,9876.$, тогда $\alpha_1^2 = 0,97535376$, откуда $\alpha_2 = 0,5353.$, далее $\alpha_2^2 = 0,28654609$, а

$\alpha_2 = 0,6546$, и т.д.

В алгоритме середины произведения изначально задаются два $2n$ -разрядных числа α_1, α_2 . Далее в качестве следующего числа α_3 берутся средние $2n$ цифр $4n$ -разрядного произведения $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, в качестве числа α_4 – средние $2n$ цифр произведения $\alpha_2 \cdot \alpha_3$ и т.д.

Несмотря на кажущуюся простоту и логичность работы указанные датчики оказались одними из самых неудачных – в ходе их работы получалось больше, чем нужно малых значений α_i . Были предприняты попытки повысить качество этих датчиков путем смещения вправо группы выбора цифр у α_i^2 и $\alpha_{i-1} \cdot \alpha_i$ соответственно. Модифицированный с помощью такой процедуры алгоритм середины квадратов выглядит следующим образом:

$$\alpha_{i+1} = \left[\alpha_i^2 \cdot 10^a \right] \cdot 10^{-b} - \left[\alpha_i^2 \cdot 10^{a-b} \right], \quad (1.3)$$

где a – максимальная значность дроби для данной ЭВМ, b – количество знаков после запятой в числе α_i , $[\cdot]$ – целая часть числа. Используя (1.3), при различных a и b можно получить несколько сотен неповторяющихся случайных чисел удовлетворительного качества.

1.3.3. Мультипликативный датчик

В настоящее время для получения датчиков равномерно распределенных в интервале $[0,1]$ случайных чисел в качестве функции $F(\cdot)$ используется преобразование вида

$$y = \{Ax\}, \quad (1.4)$$

где $\{\cdot\}$ – дробная часть числа. Если значение A достаточно

велико, то функция (1.4) плотно заполняет квадрат с единичной стороной, и точки будут расположены внутри него случайным образом (рис. 1.3).

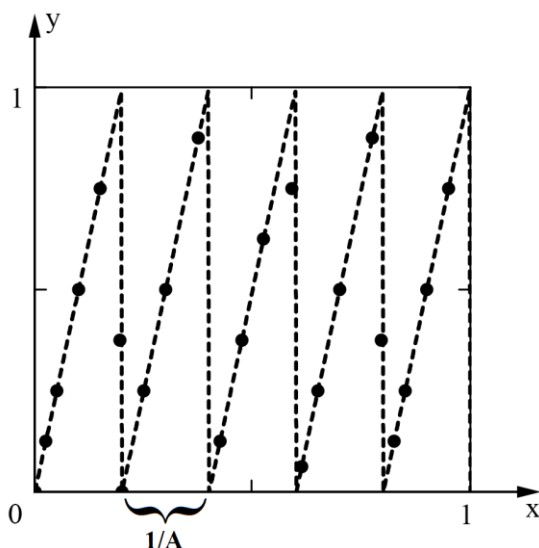


Рис. 1.3

Метод формирования случайных чисел по правилу

$$\alpha_{i+1} = \{A\alpha_i\}, \quad i=1,2,\dots \quad (1.5)$$

называют *методом вычетов* или *мультипликативным (линейным) конгруэнтным методом*, а датчик, работающий на его основе, – *мультипликативным датчиком*.

Проведенные исследования показывают, что наилучшие последовательности, формируемые по правилу (1.5), получаются при

$$A = 5^{2^{p+1}}, \quad p=0,1,2,\dots \quad (1.6)$$

либо

$$A = 2^p + 3, \quad p=3,4,\dots, \quad (1.7)$$

причем в (1.7) предпочтительнее выбирать те значения p , при которых A является простым числом.

Целое число A должно быть как можно больше (в частности, для (1.6) рекомендуется использовать $A > 5^9$), но таким, чтобы $A\alpha_i$ не превышало разрядности процессора. Это связано с тем, что при малых A наблюдается заметная корреляция чисел α_i и α_{i+1} . В качестве начального значения α_1 целесообразно выбирать $\alpha_1 = 2^{-m}$ [11], где m – число двоичных разрядов мантииссы ячейки ЭВМ. При $A = 5^{17}$, $m = 40$ длина датчика (количество неповторяющихся случайных чисел), работающего по алгоритму (1.5), составляет примерно $2 \cdot 10^{11}$.

При программной (на ЭВМ) или аппаратной (цифровых процессорах обработки сигналов (ЦПОС)) реализации датчиков случайных чисел удобнее работать не с вещественными, а с целыми числами. В этом случае алгоритм (1.5) модифицируется следующим образом [11,14,17]:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= (A \cdot w_i) \bmod m = A \cdot w_i - m \cdot [A \cdot w_i / m], \\ \alpha_{i+1} &= w_{i+1} / m, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где m – максимальное целое число в ЭВМ (ЦПОС), w_i – целые числа, такие что $0 < w_i < m$.

Удобство (1.8) проявляется при работе в двоичном коде. В этом случае операция $x \bmod 2^l = y$ сводится к оставлению l младших разрядов числа x , что технически можно осуществить весьма быстро, Например, $1011_2 \bmod 2^2 = 11_2 = 3_{10}$.

Использовать алгоритм (1.8) для построения датчика случайных чисел необходимо весьма аккуратно. Имеется достаточно много датчиков, построенных на (1.8), которые

хотя и обеспечивают генерацию последовательности равномерно распределенных случайных чисел, однако сами числа при этом не являются независимыми (например, тройки чисел оказываются сильно коррелированными) [9]. Поэтому на практике большее распространение получил так называемый *смешанный конгруэнтный метод*, являющийся обобщением (1.5), (1.8) и определяющийся соотношением [9,14,16]

$$\alpha_{i+1} = \{A\alpha_i + C\}, \quad i=1,2,\dots \quad (1.9)$$

или в целочисленной арифметике

$$w_{i+1} = (A \cdot w_i + C) \bmod m, \quad \alpha_{i+1} = w_{i+1}/m, \quad i=1,2,\dots \quad (1.10)$$

Наилучшие последовательности получаются при выполнении ряда условий [16]. Число A должно удовлетворять требованиям:

- 1) $A \bmod 8 = 5$;
- 2) $m/100 < A < m - \sqrt{m}$, $A > \sqrt{m}$;
- 3) двоичный код числа A не должен иметь регулярности, например, $A = 5 + 8 \cdot [\pi m/64]$.

Число C должно быть:

- 1) нечетным;
- 2) $C \approx m(0,5 - \sqrt{3}/6) \approx 0,2113m$.

В этом случае датчик, построенный на основе (1.10), с одной стороны, позволяет получить равномерные независимые числа α_i : $\langle \alpha_{i+1}\alpha_i \rangle = 0$, $\langle \alpha_{i+1}\alpha_i\alpha_{i-1}\dots \rangle = 0$, а, с другой – обладает максимальным отрезком аперiodичности. Под отрезком аперiodичности понимается минимально число L , для которого начинает выполняться равенство $\alpha_i = \alpha_{i+L}$ (т.е. порядковый номер элемента последовательности, при превышении которого последовательность начинает повторяться). Как отмечалось ранее, периодичность

последовательности случайных чисел $\{\alpha_i\}$, формируемых программным способом, обусловлена рекуррентностью алгоритма их формирования.

Можно показать, что значение L всегда меньше, чем максимальное количество различных чисел, которое можно сформировать в ЭВМ. Если обозначить через l – разрядность ЭВМ, то максимально количество различных чисел, которое можно сформировать в ЭВМ, определится как 2^l , а отрезок аperiodичности датчика случайных чисел не превосходит величины 2^{l-1} , то есть $L_{\max} = 2^{l-1}$. При этом датчики, построенные на основе смешанного конгруэнтного метода имеют показатели, приближающиеся к предельным.

В таблице приведены наиболее употребительные значения констант A и C для смешанного конгруэнтного метода.

Начальные числа для датчиков (1.9), (1.10) могут быть произвольными. Однако многочисленные исследования показали, что имеется некоторый набор «хороших» начальных значений w_0 (α_0), которые обеспечивают максимальную длину последовательности, удовлетворяющей всем статистическим тестам [14]. Так, например, желательно иметь нечетное w_0 . Наиболее высокое качество чисел дают датчики № 4, 5 (таблица). Если процессор может без затрат времени работать с 64-битовыми числами, то эти датчики очень быстродействующие. С помощью специальных приемов можно работать и с 32-разрядными числами, но это увеличивает время генерации случайного числа.

1.4. Масштабирование равномерных случайных величин

Пусть имеется датчик равномерно распределенных в интервале $[0,1]$ случайных величин α_i , и необходимо получить случайные величины γ_i , равномерно распределенные в

интервале $[a, b]$. Формула масштабирования выглядит следующим образом:

$$\gamma_i = (b - a) \cdot \alpha_i + a. \quad (1.11)$$

	A	C	m	Период последова- тельности
1	1103515245	12345	2^{32}	10^7
2	$5^7 = 78125$	0	2^{32}	$m - 2$
3	$7^5 = 16807$	0	$2^{31} - 1 =$ $= 2147483647$	$m - 1$
4	1664525	$1013904223 =$ $= \lceil m(\sqrt{5} - 2) \rceil$	2^{32}	$m - 2$
5	$1686629717 =$ $= 5 + 8 \cdot \lceil m\pi/64 \rceil$	$907633385 =$ $= \lceil m(3 - \sqrt{3})/6 \rceil + 1$	2^{32}	m

Пример 1.1. Пусть на основе датчика равномерно распределенных в интервале $[0, 1]$ случайных чисел необходимо сформировать радиосигнал $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ со случайной начальной фазой $\varphi \in [0, 2\pi]$, имеющей плотность вероятности $w_\varphi(x) = 1/2\pi$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Алгоритм формирования сигнала $s(t)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi = 2\pi \cdot \alpha, \quad s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \text{ или } s(t) = A \cos \varphi \cdot \cos \omega t - A \sin \varphi \cdot \sin \omega t.$$

Пример 1.2. Моделирование отсчетов сигнала $s(t)$ на входе АЦП на основе отсчетов, получаемых на выходе АЦП.

Обозначим ΔU – шаг квантования, ε – текущая ошибка квантования, $s_0 = s(t_0)$ – отсчет сигнала в момент времени t_0 , $s_{\text{кв}}$ – соответствующий ему квантованный отсчет на выходе АЦП, так что $s_0 = s_{\text{кв}} + \varepsilon$.

Ошибка квантования ε подчиняется равномерному закону распределения: $w_\varepsilon(x) = 1/\Delta U$, $-\Delta U/2 \leq x \leq \Delta U/2$. Тогда $s_0 = s_{\text{кв}} + \Delta U \cdot (\alpha - 1/2)$.

1.5. Моделирование случайных чисел в типовом программном обеспечении

В широко применяемых программных продуктах, например, MathCAD, C-Builder, Delphi используются процедуры-функции, формирующие массивы (выборки) псевдослучайных чисел с заданными законами распределения вероятностей и различные функции статистической обработки случайных величин. В программе MathCAD имеется группа функций, формирующих массивы случайных чисел с заданным законом распределения вероятностей. Например, функция $\text{rnd}(x)$ возвращает одно равновероятное псевдослучайное число в интервале от 0 до x . Функция $\text{runif}(m,a,b)$ формирует массив из m равновероятных чисел в интервале от a до b .

Пример программы в MathCAD показан на рис. 1.4.



Рис. 1.4

В программах Delphi и C-Builder имеется функция $\text{random}(x)$, формирующая одно равновероятное псевдослучайное число в интервале от 0 до x (как и $\text{rnd}(x)$ в MathCAD). Функция $\text{randG}(m,s)$ формирует случайное число с гауссовским распределением вероятностей при среднем значении m и среднеквадратическом отклонении s .

1.6. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные способы получения случайных величин.

2. Какой метод генерации случайных чисел является наиболее распространенным и почему?

3. Перечислите программные алгоритмы получения равномерно распределенных случайных чисел.

4. В чем суть формирования равномерно распределенных случайных чисел линейным конгруэнтным методом?

5. Как подбираются параметры алгоритма генерации равномерно распределенных случайных чисел?

6. Как осуществляется программная генерация числа, равномерно распределенного в заданном интервале?

1.7. Задачи

1. Смоделировать опыт подбрасывания монеты. Монету считать несимметричной, так что вероятность выпадения “герба” составляет 60 %, а вероятность выпадения “решки” – 40 %.

2. На основе датчика равномерно распределенных в интервале $[0,1]$ случайных чисел смоделировать опыт подбрасывания игральной кости.

3. В урне находится 60 черных и 40 белых шаров. На основе датчика равномерно распределенных в интервале $[0,1]$ случайных чисел смоделировать опыт по вытаскиванию одного

шара из урны.

4. На интервале $[0, 10 \text{ мс}]$ сформировать реализацию “телеграфного” сигнала, амплитуда 5 В которого с вероятностью 0,5 может менять знак на противоположный через отрезок времени 0,5 мс.

5. На интервале $0 \leq \omega t \leq 10\pi$ сформировать реализацию фазоманипулированного сигнала $s(t) = 5\cos(\omega t - \varphi)$, начальная фаза которого через интервал $\omega t = 2\pi$ может с равной вероятностью принимать значения $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

6. Реализовать программно датчик равномерно распределенных в интервале $[-1, 1]$ случайных чисел на основе смешанного конгруэнтного метода.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Методы формирования случайных величин с произвольным законом распределения вероятностей

2.1.1. Исходные случайные числа

Исходным материалом для формирования случайных величин с требуемым законом распределения служат, главным образом, датчики псевдослучайных чисел α_i , $i = 1, 2, \dots$, равномерно распределенных на интервале $[0,1]$.

Для формирования последовательностей независимых случайных величин с требуемой функцией распределения из исходной последовательности равномерно распределенных на интервале $[0,1]$ чисел разработан ряд методов. Рассмотрим основные из них [17].

2.1.2. Метод обратной функции

Идея данного метода формирования случайной величины ξ с заданной функцией распределения $F_\xi(x)$ состоит в том, чтобы найти однозначную монотонную функцию $\varphi(x)$, такую что

$$\xi = \varphi(\alpha). \quad (2.1)$$

Можно показать, что эта функция является обратной $F_\xi(x)$, то есть

$$\varphi(x) = F_\xi^{-1}(x), \quad (2.2)$$

тогда

$$\xi = F_\xi^{-1}(\alpha). \quad (2.3)$$

Таким образом, формирование случайной величины ξ с заданной функцией распределения $F_\xi(x)$ на основе равномерно распределенной в интервале $[0,1]$ случайной величины α сводится к решению нелинейного уравнения вида

$$\alpha = F_\xi(\xi). \quad (2.4)$$

Пример 2.1. Моделирование отклонения пятна лазерного луча при прохождении через атмосферу.

Пусть имеется пучок лазера, проходящий через атмосферу и претерпевающий в связи с этим отклонение от своего первоначального направления распространения (рис. 2.1).

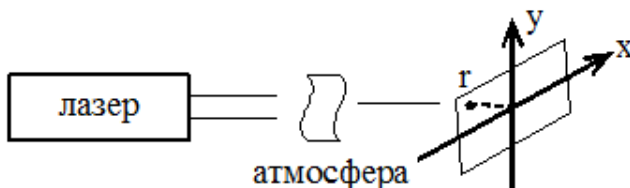


Рис. 2.1

Величина данного отклонения может быть адекватно описана релеевской случайной величиной r , плотность вероятности которой имеет вид

$$w_r(x) = (x/\sigma^2) \exp(-x^2/2\sigma^2), \quad x \geq 0. \quad (2.5)$$

По заданной плотности вероятности определяем функцию распределения $F_r(x)$ случайной величины r :

$$F_r(x) = \int_0^x w_r(x') dx' = 1 - \exp(-x^2/2\sigma^2), \quad x \geq 0. \quad (2.6)$$

С учетом (2.6) решаем уравнение (2.4) является

$$\alpha = 1 - \exp(-\xi^2 / 2\sigma^2),$$

тогда

$$\xi = \sigma\sqrt{-2\ln(1-\alpha)} \text{ или } \xi = \sigma\sqrt{-2\ln\alpha}, \quad (2.7)$$

поскольку случайные числа α и $(1-\alpha)$ статистически эквивалентны.

Пример 2.2. Моделирование работы детектора излучения (фотодетектора).

Как известно, фотодетектор преобразует падающий на него поток квантов излучения в поток электронов (рис. 2.2).



Рис. 2.2

При малой интенсивности потока квантов на выходе фотодетектора будут появляться отдельные электроны в моменты времени $t_1, t_2, \dots$ (рис. 2.3).

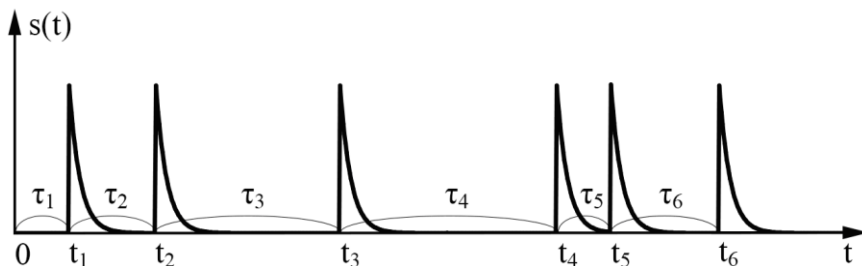


Рис. 2.3

Во многих случаях временные интервалы $\tau_1, \tau_2, \dots$ между последовательными появлениями электронов можно интерпретировать как значения экспоненциально распределенной случайной величины τ с плотностью вероятности

$$w_{\tau}(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0, \quad (2.8)$$

где λ – параметр, характеризующий интенсивность потока фотоэлектронов.

По заданной плотности вероятности определяем функцию распределения $F_{\tau}(x)$ случайной величины τ :

$$F_{\tau}(x) = \int_0^x w_{\tau}(x') dx' = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0. \quad (2.9)$$

Тогда из (2.4) имеем: $\alpha = 1 - \exp(-\lambda \xi)$ и

$$\xi = -(1/\lambda) \ln(1 - \alpha) \text{ или } \xi = -(1/\lambda) \ln \alpha, \quad (2.10)$$

поскольку случайные числа α и $(1 - \alpha)$ статистически эквивалентны.

Достоинства данного метода:

1) 100 % коэффициент использования чисел (для формирования одного числа с требуемым законом распределения необходимо одно равномерно распределенное случайное число);

2) получение без каких-либо приближений искомой случайной величины, в том числе определенной на бесконечном интервале.

Недостатки метода:

1) достаточно высокая чувствительность к датчику исходных случайных чисел α ;

2) далеко не всегда удастся найти аналитически обратную функцию $F_{\xi}^{-1}(x)$.

2.1.3. Метод исключения (метод Неймана)

Для моделирования случайных величин, возможные значения которых не выходят за пределы некоторого ограниченного интервала $[a, b]$ (случайные величины с усеченными законами распределения), а также случайных величин, законы распределения которых можно аппроксимировать усеченными выражениями, достаточно универсальным является метод исключения (метод Неймана).

Согласно этому методу формирование случайной величины ξ с плотностью вероятности $w_\xi(x)$, $a \leq x \leq b$ осуществляется с помощью следующих шагов. Пусть имеется ограниченная функция $g(x)$: $0 \leq g(x) \leq M$, пропорциональная функции $w_\xi(x)$, тогда

1) вырабатываются два числа α_1 , α_2 , равномерно распределенные в интервале $[0, 1]$;

2) выполняется операция масштабирования по правилу $\gamma_1 = a + (b - a) \cdot \alpha_1$, $\gamma_2 = M \cdot \alpha_2$. Будем рассматривать числа γ_1 , γ_2 как координаты некоторой точки А (рис. 2.4);

3) если

$$\gamma_2 \leq g(\gamma_1), \quad (2.11)$$

то в качестве значения искомой случайной величины ξ принимается γ_1 : $\xi = \gamma_1$. Если $\gamma_2 > g(\gamma_1)$, то числа α_1 , α_2 отбрасываются, и осуществляется переход к шагу 1.

Покажем, что после отбрасывания части точек абсциссы γ_1 , найденные согласно (2.11), будут представлять собой значения случайной величины ξ с заданным законом распределения $w_\xi(x)$. С этой целью выделим в окрестности точки А элементарную полосу $[u, u + du]$ (рис. 2.4).

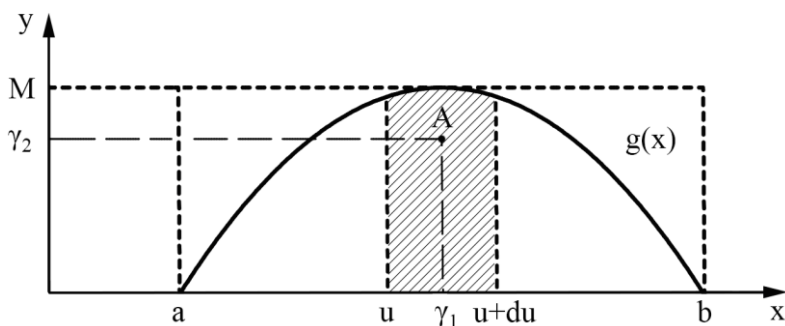


Рис. 2.4

По определению

$$P[u \leq \xi \leq u + du] = w_{\xi}(u) du. \quad (2.12)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P[u \leq \xi \leq u + du] &= P[u \leq \gamma_1 \leq u + du, 0 \leq \gamma_2 \leq g(u)] = \\ &= \int_u^{u+du} dx \int_0^{g(x)} w_{\gamma_1 \gamma_2}(x, y) dy, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $w_{\gamma_1 \gamma_2}(x, y)$ – совместная плотность вероятности случайных величин γ_1, γ_2 . Величины γ_1, γ_2 являются равномерно распределенными и статистически независимыми, поэтому $w_{\gamma_1 \gamma_2}(x, y) = C$, где C – некоторая константа. Тогда из (2.13) имеем:

$$P[u \leq \xi \leq u + du] = C \int_u^{u+du} g(x) dx.$$

Используя в последнем интеграле теорему о среднем, окончательно получаем

$$P[u \leq \xi \leq u + du] = Cg(u) du. \quad (2.14)$$

Из сопоставления (2.12), (2.14) следует, что $w_\xi(u) = Cg(u)$, где константа C определяется из условия нормировки

$$C = 1 / \int_a^b g(x) dx, \quad (2.15)$$

а, значит, $\xi \equiv \gamma_1$.

Пример 2.3. Моделирование углового рассеяния частиц в пучке.

Пусть интенсивность пучка частиц на выходе диафрагмы (рис. 2.5) описывается случайной величиной ξ с плотностью вероятности $w_\xi(x) = \pi \cos(2\pi x)$, $-1/4 \leq x \leq 1/4$.

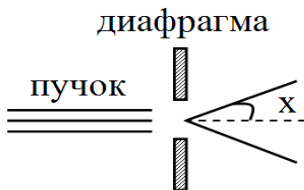


Рис. 2.5

Выберем моделирующую функцию $g(x)$ как $g(x) = \cos(2\pi x)$, причем $-1/4 \leq x \leq 1/4$, $0 \leq g(x) \leq 1$. Сформируем два равномерно распределенных числа $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$, произведем их масштабирование: $\gamma_1 = (2\alpha_1 - 1)/4$, $\gamma_2 = \alpha_2$, и, если выполняется условие $\gamma_2 \leq \cos(2\pi\gamma_1)$, в качестве искомого значения моделируемой случайной величины ξ примем γ_1 : $\xi = \gamma_1$.

Определим коэффициент использования чисел K в описанном алгоритме, который в данном случае может быть найден, как отношение площади S_g фигуры под кривой $g(x)$ к площади $S_\diamond$ прямоугольника, в который вписана функция $g(x)$ (рис. 2.6а):

$$K = S_g / S_\diamond = \int_{-1/4}^{1/4} g(x) dx / 1 \cdot (1/2) = 2/\pi \approx 0,637.$$

Заметим, что коэффициент использования чисел в методе исключения принципиально меньше 1.

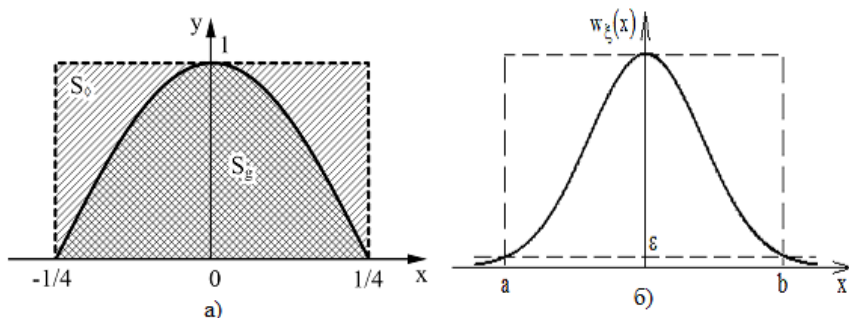


Рис. 2.6

Для моделирования случайной величины ξ с интервалом возможных значений $(-\infty, \infty)$ метод исключения может быть модифицирован следующим образом:

- 1) задается величина $\varepsilon \ll 1$;
- 2) из условий $w_\xi(a) = \varepsilon$, $w_\xi(b) = \varepsilon$ определяются границы интервала $[a, b]$;
- 3) полагается, что $w_\xi(x) = 0$ при $x < a$ или $x > b$ (рис. 2.6б);
- 4) выполняются шаги 1-3 метода исключения.

Однако при использовании такой модификации метода исключения следует соблюдать осторожность. Действительно, если плотность вероятности $w_\xi(x)$ стремится к 0 при $x \rightarrow \pm\infty$ не слишком быстро, то коэффициент использования чисел $K = S_g / S_\diamond$ может быть много меньше 1, и эффективность данного подхода оказывается весьма низкой.

Пример 2.4. Моделирование гауссовской случайной величины.

Пусть случайная величина ξ описывается гауссовской

плотностью вероятности $w_{\xi}(x) = \exp(-x^2/2\sigma^2)/\sigma\sqrt{2\pi}$ показанной на рис. 2.6б. Ограничим диапазон возможных значений величины ξ в соответствии с правилом «трех сигм», т.е. выберем $a = -3\sigma$, $b = 3\sigma$. Тогда нетрудно показать, что при $\sigma=1$ площади $S_g \approx 1$, $S_{\diamond} = 2,4$ и коэффициент использования чисел $K = S_g/S_{\diamond} = 1/2,4 \approx 0,4$. Таким образом, 60 % времени алгоритм моделирования будет работать «в холостую».

Достоинство метода: универсальность (можно получить случайную величину с произвольным законом распределения).

Недостатки метода:

1) очень строгие требования к базисному датчику случайных чисел: числа α_1 , α_2 должны быть независимы и иметь равномерный закон распределения (на практике обычно α_1 формируется из одного датчика, а α_2 – из другого датчика);

2) как правило, метод обладает низкой эффективностью (коэффициентом использования базовых случайных чисел) при моделировании случайных чисел с бесконечным интервалом возможных значений.

2.1.4. Метод кусочной аппроксимации

Метод кусочной аппроксимации был предложен Н.П. Бусленко и является обобщением метода исключения. Он применим для моделирования случайных величин как с ограниченным, так и с неограниченным диапазоном изменения.

Сущность этого метода состоит в следующем [9,14]. Пусть требуется получить случайную величину ξ с плотностью вероятности $w_{\xi}(x)$. Предположим, что область возможных значений величины ξ ограничена интервалом $[a, b]$ (неограниченное распределение можно приближенно заменить ограниченным, например, как было описано в методе исключения). Разобьем интервал $[a, b]$ на n достаточно малых подынтервалов $[a_m, a_{m+1}]$, $m = 0, n-1$, $a_0 = a$, $a_n = b$ так,

чтобы распределение заданной случайной величины в пределах этих интервалов можно было довольно точно аппроксимировать каким-нибудь простым распределением, например равномерным, трапецеидальным и т.д. В дальнейшем рассмотрим кусочную аппроксимацию равномерным распределением, как показано на рис. 2.7.

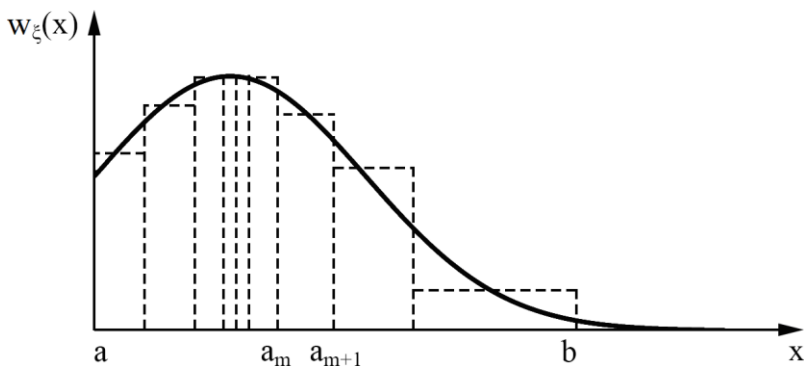


Рис. 2.7

Пусть P_m – вероятность попадания случайной величины ξ в каждый из подынтервалов $[a_m, a_{m+1}]$. Получать значения величины ξ с кусочно-равномерным распределением можно, очевидно, в соответствии со следующей схемой преобразования случайных чисел:

1) случайным образом с вероятностью P_m выбирается подынтервал $[a_m, a_{m+1}]$;

2) на основе выбранного датчика равномерно распределенных в интервале $[0,1]$ чисел формируется случайное число α , которое затем масштабируется по формуле $\gamma = a_m + \Delta_m \alpha$, где $\Delta_m = a_{m+1} - a_m$;

3) в качестве искомого значения случайной величины ξ принимается $\xi = \gamma$.

Случайный выбор подынтервала $[a_m, a_{m+1}]$ с вероятностью

стью P_m означает, по существу, моделирование дискретной случайной величины, принимающей n значений a_m , $m = \overline{0, n-1}$, с вероятностью P_m каждое, что можно сделать достаточно просто [18]. Например, интервал $[0,1]$ разбивается на n подынтервалов $[x_m, x_{m+1}]$, $m = \overline{0, n-1}$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$, длиной $x_{m+1} - x_m = P_m$ каждый. Из датчика случайных равномерно распределенных в интервале $[0,1]$ чисел выбирается некоторое число α . Путем последовательного сравнения α с x_m определяется тот интервал $x_n = 1$, в котором оказывается α .

Для моделирования случайных величин методом кусочной аппроксимации наиболее удобно при машинной реализации выбирать вероятности попадания во все подынтервалы $[a_m, a_{m+1}]$ одинаковыми ($P_m = 1/n$), а число n таким, что $n = 2^N$, где N – целое число, меньше или равное количеству двоичных разрядов чисел, вырабатываемых датчиком случайных чисел. В этом случае величины a_m должны быть выбраны такими, чтобы

$$\int_{a_m}^{a_{m+1}} w_{\xi}(x) dx = 1/n = 2^{-N}.$$

При равенстве вероятностей P_m для случайного выбора индекса m можно использовать первые N разрядов числа, извлекаемого из датчика равномерно распределенных случайных чисел. Используя рассмотренный прием, приходим к следующему способу преобразования равномерно распределенных случайных чисел в случайные числа с заданным законом распределения. Из датчика равномерно распределенных в интервале $[0,1]$ случайных чисел извлекается два числа α_1 , α_2 . Первые $N = \log_2 n$ разрядов числа α_1

используются для нахождения адресов ячеек, в которых хранятся величины a_m и a_{m+1} , а затем по формуле $\xi = a_m + \alpha_2(a_{m+1} - a_m)$ получается значение случайной величины ξ с заданным законом распределения. Такой алгоритм является довольно экономичным по количеству требуемых операций, которое не зависит от числа n , т.е. не зависит от точности кусочной аппроксимации.

При моделировании чисел с бесконечным интервалом возможных значений метод кусочной аппроксимации может оказаться гораздо эффективнее метода исключения. Например, при формировании гауссовского числа, приняв $a = -3\sigma$, $b = 3\sigma$, $\sigma = 1$, $n = 13$, можно добиться коэффициента использования чисел $K \approx 0,9$.

Достоинство метода: полная универсальность (можно получить случайную величину с произвольным законом распределения). **Недостаток метода:** с увеличением точности аппроксимации возрастает количество ячеек памяти, требуемое для хранения величин a_m , $m = \overline{0, n}$.

2.1.5. Метод суперпозиции (метод рандомизации)

Метод суперпозиции имеет два варианта.

В **первом варианте** метода суперпозиции для формирования значений случайной величины ξ , плотность вероятности допускает представление вида

$$w_{\xi}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} P_m w_m(x), \quad \sum_{m=0}^{n-1} P_m = 1, \quad (2.16)$$

где P_m – весовые коэффициенты, $w_m(x)$ – элементарные плотности вероятности.

Формирование случайного числа осуществляется в два этапа:

1) с вероятностью P_m разыгрывается номер варианта $m = 0, 1, \dots, n-1$. Предположим, что в результате розыгрыша

выпал k-ый вариант;

2) каким-либо из рассмотренных выше методов формируется случайная величина с плотностью вероятности $w_k(x)$, которая будет являться искомой величиной ξ .

Использование данного метода особенно удобно при формировании величины ξ с многомодовыми плотностями вероятности.

Пример 2.5. Пусть необходимо сформировать импульсный двуполярный сигнал $s(t)$ с фиксированной амплитудой β , но случайной длительностью, на который накладывается гауссовский шум с дисперсией σ^2 (рис. 2.8). При этом два любых соседних отсчета шума можно считать некоррелированными.

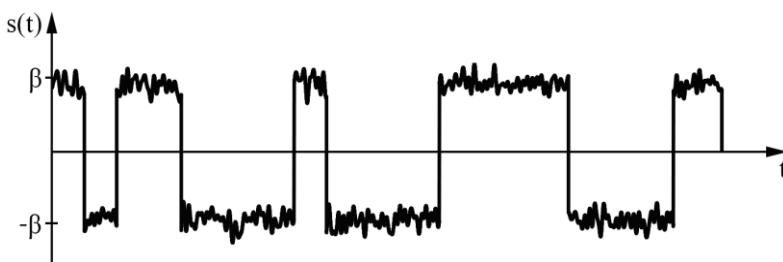


Рис. 2.8

Исходя из условия задачи, нетрудно видеть, что формирование отсчетов сигнала $s(t)$, искаженного гауссовским шумом, сводится к формированию значений случайной величины ξ с плотностью вероятности вида

$$w_{\xi}(x) = \sum_{m=0}^1 P_m w_m(x), \quad P_0 = P_1 = 1/2,$$

где

$$w_0(x) = \exp\left[-(x - \beta)^2 / 2\sigma^2\right] / \sigma\sqrt{2\pi},$$

$$w_1(x) = \exp\left[-(x + \beta)^2 / 2\sigma^2\right] / \sigma\sqrt{2\pi}.$$

Таким образом, на первом шаге разыгрывается одно из

распределений $w_0(x)$ или $w_1(x)$, например, формированием равномерно распределенного в интервале $[0,1]$ случайного числа α . Если $\alpha \leq 0,5$, то выбираем плотность вероятности $w_0(x)$, иначе – $w_1(x)$. На втором шаге формируется гауссовская случайная величина с распределением вероятностей $w_0(x)$ или $w_1(x)$, которая и будет являться текущим искомым отсчетом сигнала $s(t)$, искаженного гауссовским шумом.

Метод суперпозиции можно применять также, если плотность вероятности $w_\xi(x)$ моделируемой случайной величины ξ является одномодовой. В этом случае область определения функции $w_\xi(x)$ разбивается на интервалы $[a_m, a_{m+1}]$, $m = \overline{0, n-1}$, вероятность попадания в каждый из которых равна P_m . Тогда в (2.15) $w_m(x) = w_\xi(x)$ при $x \in [a_m, a_{m+1}]$.

Пример 2.6. При формировании гауссовской случайной величины ξ область определения плотности вероятности $w_\xi(x)$ разбивается на три участка, которые разыгрываются (рис. 2.9).

Средний (второй) участок, где значения плотности вероятности $w_\xi(x)$ существенно отличны от нуля, моделируется методом исключения, крайние (первый и третий) участки – методом обратных функций.

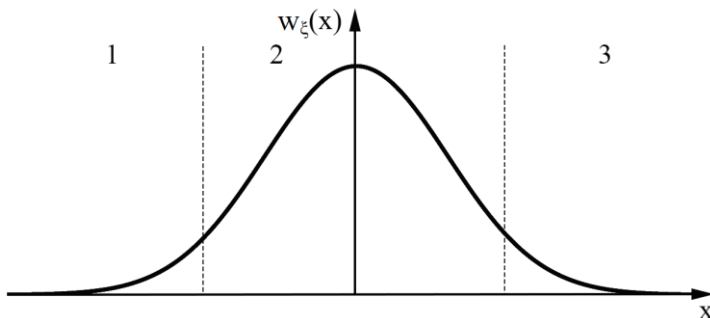


Рис. 2.9

Второй вариант метода суперпозиции для формирования значений случайной величины ξ , используется для плотности вероятностей, представимой в виде

$$w_{\xi}(x) = \int_{\Lambda} w(x, \lambda) d\lambda = \int_{\Lambda} w_{\mu}(x|\lambda) w(\lambda) d\lambda. \quad (2.17)$$

Здесь $w(x, \lambda)$ – совместная плотность вероятности случайной величины ξ и некоторой подобранной специальным образом случайной величины λ с плотностью вероятности $w(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, $w_{\mu}(x|\lambda)$ – условная плотность вероятности, которую можно интерпретировать как плотность вероятности некоторой случайной величины μ , закон распределения которой зависит от λ . Законы $w_{\mu}(x|\lambda)$ и $w(\lambda)$ выбираются так, чтобы случайные величины μ и λ можно было легко моделировать одним из универсальных методов.

Таким образом, при выполнении (2.17) процедура моделирования состоит из трех этапов:

1) моделируется случайная величина λ с законом распределения $w(\lambda)$;

2) моделируется случайная величина μ с законом распределения $w_{\mu}(x|\lambda)$;

3) формируется искомая случайная величина $\xi = \mu(\lambda)$.

Пример 2.7. Сформировать случайную величину ξ с законом распределения

$$w_{\xi}(x) = \sqrt{a} / (2 + ax^2)^{3/2}. \quad (2.18)$$

Представим (2.18) как

$$w_{\xi}(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{\lambda}{a}\right) d\lambda. \quad (2.19)$$

Из (2.18) следует, что λ – случайная величина с экспоненциальным законом распределения $w(\lambda) = \exp(-\lambda/a)/a$. Для ее формирования используем формулу (2.10): $\lambda = -a \ln \alpha$. Случайная величина μ является гауссовской случайной

величиной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $1/\lambda$, которая может быть представлена как $\mu = \eta/\sqrt{\lambda}$. Здесь η – гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, методика моделирования которой изложена ниже. Тогда алгоритм формирования ξ с законом распределения (2.18) имеет вид

$$\xi = \eta/\sqrt{-a \ln \alpha} . \quad (2.20)$$

Алгоритм (2.20) является точным и весьма простым, в то время как другие имитации величин, которые имеют распределения с «тяжелыми хвостами» типа (2.18), в данном случае неэффективны.

2.2. Моделирование стандартных гауссовских случайных величин

2.2.1. Стандартная гауссовская случайная величина

Под стандартной гауссовской случайной величиной $\eta \sim N(0,1)$ понимается случайная величина, описываемая плотностью вероятности вида

$$w_{\eta}(x) = \exp\left(-x^2/2\right)/\sqrt{2\pi} . \quad (2.21)$$

Как следует из (2.19), математическое ожидание и дисперсия стандартной гауссовской случайной величины равны соответственно $m_{\eta} = \langle \eta \rangle = 0$, $D_{\eta} = \langle \eta^2 \rangle = 1$ (символом $\langle \dots \rangle$ обозначена операция усреднения).

Для формирования стандартных гауссовских случайных величин на ЭВМ обычно используют два метода.

2.2.2. Метод центральной предельной теоремы

Пусть имеется последовательность независимо распределенных случайных величин α_i с математическими ожиданиями m_α и дисперсиями D_α . Тогда согласно центральной предельной теореме случайная величина вида

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{KD_\alpha}} \sum_{i=1}^K (\alpha_i - m_\alpha) \quad (2.22)$$

будет являться асимптотически (с ростом числа слагаемых K) гауссовской с параметрами $\sim N(0,1)$. Отметим, что формула (2.22), вообще говоря, справедлива для любых случайных величин α_i с **произвольным** законом распределения.

Если α_i равномерно распределены в интервале $[0,1]$, то $m_\alpha = 1/2$, $D_\alpha = 1/12$, и из (2.22) имеем

$$\xi = \sqrt{\frac{12}{K}} \sum_{i=1}^K (\alpha_i - 1/2). \quad (2.23)$$

Формулу (2.23) удобно использовать при $K=12$, так как в этом случае

$$\xi = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i - 6.$$

При конечных значениях K функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ (2.23) может быть записана через ряд Эджворта (ряд Грамма) как [10]

$$F_\xi(x) = \Phi(x) - \varepsilon, \quad \varepsilon = \Phi^{(4)}(x)/20K. \quad (2.24)$$

Здесь $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ – интеграл вероятности,

$$\Phi^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \Phi(x) = (-1)^n \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} H_n(x),$$

а $H_n(x)$ – полином Эрмита n -го порядка. Величина ε в (2.24) отражает поправку на эксцесс в распределении $F_\xi(x)$ по сравнению с гауссовским. При этом поправка на антисимметрию отсутствует.

На рис. 2.10 изображены функция распределения стандартной гауссовской случайной величины (сплошная линия) и функция распределения $F_\xi(x)$ (2.24) случайной величины ξ (2.23) при $K=5$ (штриховая линия) и $K=20$ (штрихпунктирная линия).

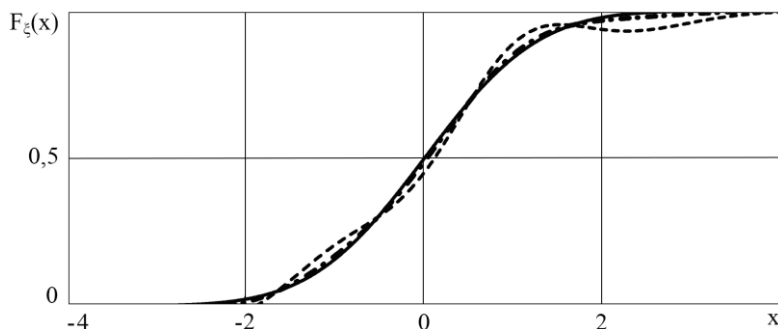


Рис. 2.10

На рис. 2.11 показан характер изменения $\varepsilon = \varepsilon(x)$ при различных значениях K . Сплошная линия здесь соответствует $K=5$, штриховая – $K=8$, штрихпунктирная – $K=20$.

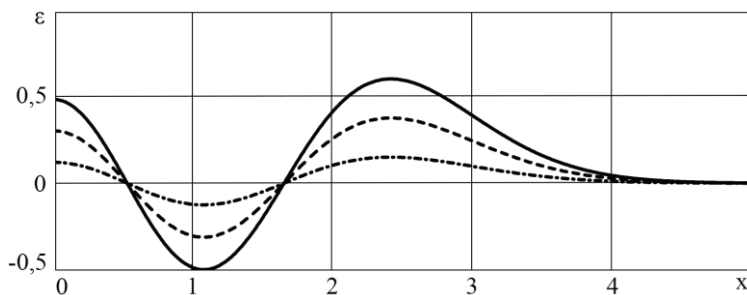


Рис. 2.11

Задаваясь допустимой степенью отличия функции распределения ξ от функции распределения стандартной гауссовской величины, можно из (2.24) определить необходимое число слагаемых в сумме (2.23).

Свойство гауссовости случайной величины ξ (2.23) можно улучшить, если подвергнуть ее дополнительному преобразованию. В качестве такого преобразования на практике наиболее часто используется поправка Корниша-Фишера, определяемая соотношением вида

$$\eta = \xi + (\xi^3 - 3\xi)/20K. \quad (2.25)$$

Данная поправка особенно актуальна, если при моделировании существенное значение играют маловероятные значения $|\xi|$. При этом $|F_\eta(x) - \Phi(x)| \sim \text{const}/K^2$. Исследования показывают, что при использовании (2.25) в сумме (2.23) достаточно взять 5 слагаемых ($K=5$). При этом учет последующих слагаемых не вносит существенного дополнения к улучшению свойства гауссовости случайной величины η .

Указанный способ формирования гауссовских случайных чисел обладает большим преимуществом, а именно, имеет слабую чувствительность к качеству исходных равномерно распределенных чисел α_i . Недостатком является относительно большой расход равномерных чисел на формирование одного значения гауссовской величины. Кроме того, выполнение операции суммирования (2.23) снижает быстродействие датчика.

2.2.3. Метод изотропного вектора

Метод изотропного вектора для формирования стандартных гауссовских величин является более мощным, но в то же самое время более чувствительным к качеству исходных равномерно распределенных. Суть данного метода

состоит в следующем. Пусть имеются две независимые гауссовские случайные величины $\eta_1 \sim N(0,1)$, $\eta_2 \sim N(0,1)$. Хорошо известно [10], что случайная величина вида

$$r = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} \quad (2.26)$$

будет подчиняться релеевскому распределению с плотностью вероятности $w_r(x) = x \exp(-x^2/2)$, $x \geq 0$, а случайная величина вида

$$\varphi = \arctg(\eta_2/\eta_1) \quad (2.27)$$

будет описываться равномерным законом распределения.

Выполняя в (2.24), (2.25) обратное преобразование, имеем:

$$\eta_1 = r \cos \varphi, \quad \eta_2 = r \sin \varphi. \quad (2.28)$$

На основе (2.28) приходим к следующему алгоритму формирования независимых гауссовских случайных величин

$$\left. \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\} = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (2\pi \alpha_2). \quad (2.29)$$

Достоинством метода является единичный коэффициент использования чисел (по двум равномерно распределенным случайным числам получаются два гауссовских).

Недостатки метода:

1) требуется высокое качество исходных равномерных случайных чисел;

2) необходимо вычислять четыре нелинейные функции, что ухудшает точность и увеличивает затраты машинного времени.

Для устранения последнего недостатка на практике используется модификация данного метода, включающая в себя следующие шаги [8]:

1) вырабатываются два равномерно распределенных в интервале $[0,1]$ случайных числа α_1, α_2 ;

2) выполняется их масштабирование для интервала $[-1,1]$: $V_1 = 2\alpha_1 - 1, V_2 = 2\alpha_2 - 1$;

3) рассчитывается величина $D = V_1^2 + V_2^2$;

4) если $D > 1$, то числа α_1, α_2 отбрасываются и осуществляется возврат к шагу 1, иначе согласно (2.29) формируются два искоемых гауссовских случайных числа по формулам

$$\eta_1 = V_1 \sqrt{-2 \ln \alpha_1 / D}, \quad \eta_2 = V_2 \sqrt{-2 \ln \alpha_1 / D}. \quad (2.30)$$

Здесь учтено, что если $D \leq 1$, то $\cos \varphi = \cos(2\pi\alpha_2) = V_1 / \sqrt{D}$, $\sin \varphi = \sin(2\pi\alpha_2) = V_2 / \sqrt{D}$ (рис. 2.12).

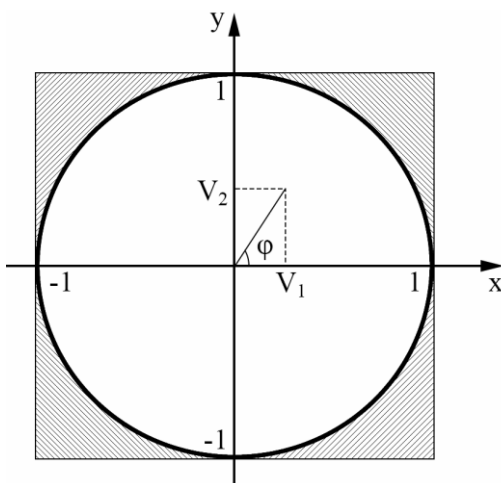


Рис. 2.12

При использовании (2.30) вместо (2.29) быстродействие повышается, однако уменьшается коэффициент использования чисел K . Действительно, как видно из рис. 1.18,

$$K = S_{\text{кр}} / S_{\text{кв}} = \pi/4 = 0,785.$$

Заметим, что логарифм является самой медленно считае- мых на ЭВМ функций. Поэтому, рассматривая по аналогии с (2.30) вместо двумерного n -мерное пространство, можно еще больше повысить вычислительную эффективность данного метода. Однако при этом резко уменьшается коэффициент использования чисел (например, для $n = 3$ имеем $K \approx 0,5$). Поэтому на практике обычно ограничиваются $n = 2$.

2.3. Формирование случайных величин на основе гауссовского датчика

Помимо гауссовских чаще всего на практике приходится сталкиваться с двумя классами случайных величин – описывающихся законами распределения χ_n и χ_n^2 . По определению можно записать

$$\chi_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n \eta_i^2}, \quad \chi_n^2 = \sum_{i=1}^n \eta_i^2. \quad (2.31)$$

Здесь η_i , $i = \overline{1, n}$ – независимые гауссовские случайные величины с параметрами $\sim N(0,1)$.

В частном случае из χ_n -распределения при $n=1$ получается односторонний гауссовский закон, при $n=2$ – распределение Релея, при $n=3$ – распределение Максвелла. Распределением χ_n^2 описываются процессы фотодетектирования, накопления слабых радиолокационных сигналов и т.д. При $n=2$ χ_n^2 -распределение переходит в экспоненциальное (2.8) и т.д.

Из (2.31) нетрудно видеть, что распределение χ_n^2

принадлежит к классу безгранично делимых законов распределения. То есть сумма двух величин ξ_1 и ξ_2 , описывающихся χ_n^2 законом распределения с плотностями вероятности $w_1(x) = x^{k/2-1} \exp(-x)/\Gamma(k/2)$ и $w_2(x) = x^{m/2-1} \exp(-x)/\Gamma(m/2)$ соответственно, даст случайную величину $\xi_3 = \xi_1 + \xi_2$, описывающуюся χ_n^2 законом распределения с плотностью вероятности $w_3(x) = x^{l/2-1} \exp(-x)/\Gamma(l/2)$, где $l = k + m$. Здесь $\Gamma(..)$ - гамма-функция.

Если $n = 2k$, то, используя (2.6), случайные величины χ_n , χ_n^2 (2.29) могут быть сформированы на основе датчика равномерно распределенных в интервале $[0,1]$ случайных чисел α_i как

$$\begin{aligned}\chi_{2k} &= \sqrt{-2 \sum_{i=1}^k \ln \alpha_i} = \sqrt{-2 \ln \left(\prod_{i=1}^k \alpha_i \right)}, \\ \chi_{2k}^2 &= -2 \sum_{i=1}^k \ln \alpha_i = -2 \ln \left(\prod_{i=1}^k \alpha_i \right)\end{aligned}\quad (2.32)$$

Способ формирования χ_{2k} , χ_{2k}^2 через произведение α_i является более быстродействующим, поскольку в этом случае функцию логарифма необходимо вычислять только один раз.

С точки зрения машинной реализации алгоритм (2.32) может оказаться более предпочтительным по сравнению с алгоритмом (2.31). Однако следует иметь в виду, что при переходе к моделированию случайных процессов только алгоритм (2.29) позволит сформировать меняющиеся во времени процессы χ_n , χ_n^2 .

Сопоставление (2.22) и (2.32) позволяет также предложить способ формирования равномерных случайных чисел на основе датчика стандартных гауссовских чисел. Действительно, положив в (2.31), (2.32) $n = 2k = 2$, получаем

$$\alpha = \exp \left[- \left(\eta_1^2 + \eta_2^2 \right) / 2 \right]. \quad (2.33)$$

В качестве альтернативного варианта формирования равномерно распределенного в интервале $[0,1]$ случайного числа α с помощью двух независимых стандартных гауссовских чисел η_1, η_2 согласно (2.27) имеем

$$\alpha = 1/2 + \operatorname{arctg}(\eta_2/\eta_1)/\pi.$$

2.4. Типовые программные датчики случайных чисел

В программе MathCAD представлены датчики случайных чисел с различными распределениями вероятностей. На рис. 1.3 показана программа формирования равновероятных случайных чисел. Кроме того, имеются датчики с другими распределениями вероятностей.

На рис. 2.13 показаны примеры реализаций случайных чисел с различными законами распределения вероятностей в программе MathCAD (всего имеется несколько десятков вариантов).

На рис. 2.14 приведена программа формирования гауссовских случайных чисел в системе Delphi, а на рис. 2.15 - результаты ее работы. Для генерации случайных чисел с произвольным распределением вероятностей можно использовать рассмотренные выше методы.

Как видно, в типовых математических программах имеется возможность формирования случайных чисел с различными распределениями вероятностей.

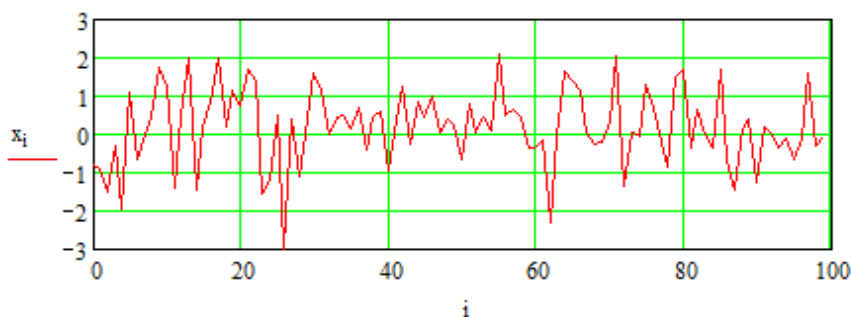
2.5. Контрольные вопросы

1. Назовите последовательность действий при формировании числа с заданным законом распределения методом обратных функций.
2. Сравните различные методы формирования случайных величин с заданным законом распределения. Сформулируйте условия целесообразности применения каждого метода.

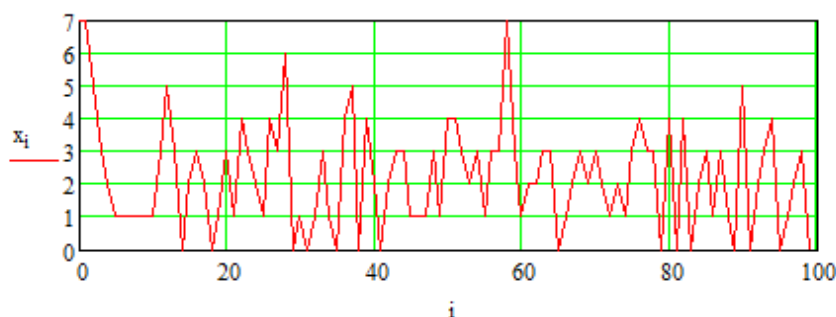
Формирование случайных чисел

$N := 100 \quad i := 0..N - 1$

Нормальное распределение $x := \text{mom}(N, 0, 1)$



Биномиальное распределение $x := \text{rbinom}(N, 10, 0.2)$



Экспоненциальное распределение $x := \text{rexp}(N, 1)$

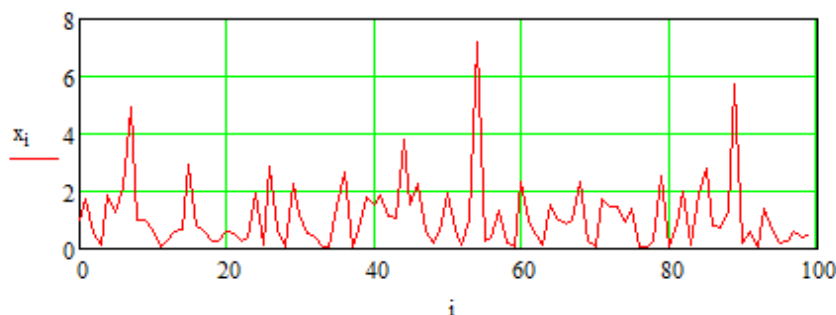


Рис. 2.13

```

unit Unit1;
interface
uses
  Windows, Messages, SysUtils, Classes, Graphics, Controls,
  Forms, Dialogs,
  ExtCtrls, TeeProcs, TeEngine, Chart, StdCtrls, Math, Series;
type
  TForm1 = class(TForm)
    Button1: TButton;
    Chart1: TChart; Series1: TLineSeries;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;
var
  Form1: TForm1;
implementation
{$R *.DFM}
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var x : array[0..19] of extended; i : integer;
begin
  for i:=0 to 19 do
    begin
      x[i]:=RandG(0,1); {фйормирование гауссовских случайных чисел}
    end;
  With Chart1, Series1 do
    begin
      Clear; LeftAxis.Minimum:=0;
      for i:=0 to 19 do Add( x[i], IntToStr(i)); {вывод случайных чисел}
    end;
  end;
end.

```

Рис. 2.14

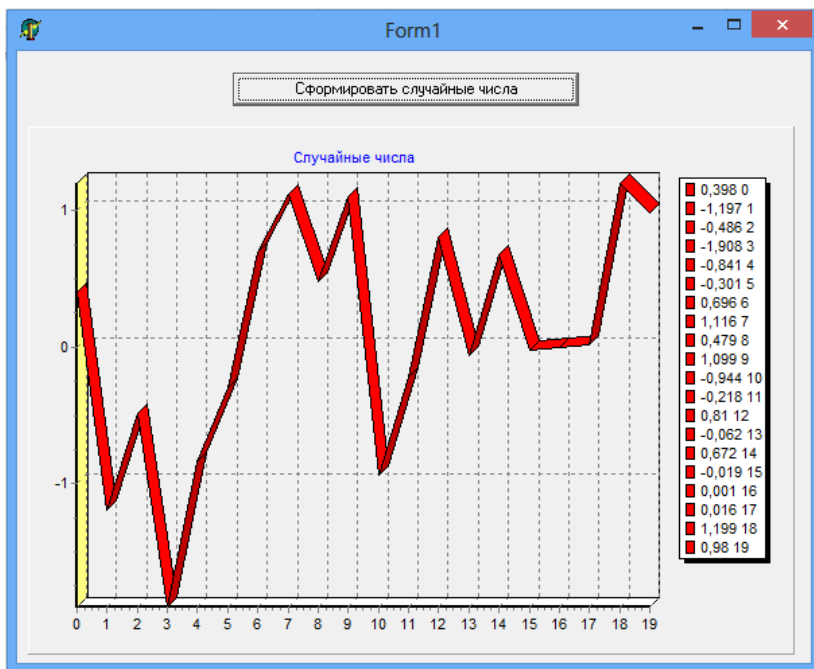


Рис. 2.15

3. Как определяется эффективность метода Неймана для моделирования случайного числа с заданным законом распределения?

4. Из каких соображений выбирается число интервалов разбиения области возможных значений случайной величины при ее моделировании методом кусочной аппроксимации?

5. Как будет выглядеть структура алгоритма моделирования случайной величины, имеющей многомодовый закон распределения?

6. В чем состоит суть метода суперпозиции при моделировании случайной величины как функции двух других случайных величин.

7. Какие методы моделирования гауссовских величин Вы знаете? В чем состоят преимущества и недостатки каждого метода?

8. Каким образом можно сформировать последовательность равномерно распределенных случайных чисел на основе датчика гауссовских чисел (укажите не менее трех вариантов)?

2.6. Задачи

Смоделировать последовательность из 500 случайных чисел с заданным законом распределения. Вычислить теоретически и экспериментально их математическое ожидание и дисперсию. Построить гистограмму распределения и полигон накопленных частот. Принять $\sigma = 0,5$. Определить коэффициент использования базисных чисел.

1. Гауссовское распределение:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right], \quad m = -0,5; 0,5.$$

2. χ_n -распределение:

$$w(x) = \frac{2}{2^{n/2} \sigma^n \Gamma(n/2)} x^{n-1} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right], \quad n = 1; 2; 3.$$

3. χ_n^2 -распределение:

$$w(x) = \frac{1}{2^{n/2} \sigma^n \Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left[-\frac{x}{2\sigma^2}\right], \quad n = 1; 2; 3.$$

4. Распределение Стьюдента:

$$w(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \frac{1}{\left(1 + x^2/n\right)^{(n+1)/2}}, \quad n = 4; 5; 6.$$

5. Гамма-распределение:

$$w(x) = \lambda^c x^{c-1} \exp(-\lambda x) / \Gamma(c), \quad \lambda = 0,5, \quad c = 0,5; 3.$$

6. Распределение Релея-Райса:

$$w(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} + z^2 \right) \right] I_0 \left(\frac{zx}{\sigma} \right), \quad z = 0,5; 2.$$

7. Распределение Максвелла:

$$w(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right).$$

8. Распределение Вейбулла:

$$w(x) = \left[cx^{c-1} / b^c \right] \exp \left[- (x/b)^c \right], \quad 0 \leq x < \infty; \quad b = 0,8, \quad c = 0,5; 3.$$

9. Логистический закон распределения:

$$F(x) = 1 / [1 + \exp(-(x - \mu)/\lambda)] = [1 + \operatorname{th}((x - \mu)/(2\lambda))] / 2, \\ \mu = 0,25; 1, \quad \lambda = 0,5; 2.$$

10. Распределение минимального значения выборки:

$$F(x) = 1 - \exp[-\exp((x - \mu)/\lambda)], \quad \mu = 0,5; 1, \quad \lambda = 1; 3.$$

11. Распределение максимального значения выборки

$$F(x) = \exp[-\exp(-(x - \mu)/\lambda)], \quad \mu = 0,25; 0,5, \quad \lambda = 1; 4.$$

12. Бимодальное распределение:

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{c}{c^2 + (x-a)^2} + \frac{c}{c^2 + (x+a)^2} \right], \quad a = 3; 6, \quad c = 0,5; 1.$$

13. Распределение Парето:

$$w(x) = Cx^{-(a+1)}, \quad 1 \leq x < \infty, \quad a = 0,5; 2$$

(константу C найти из условия нормировки).

$$14. \quad w(x) = b\lambda x^{b-1} \exp(-\lambda x^b), \quad x \geq 0, \quad \lambda = 2, \quad b = 3.$$

$$15. \quad w(x) = C(1 - \cos x), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

(константу C определить из условия нормировки).
Рекомендуется использовать метод Неймана.

$$16. \quad w(x) = c(3 - \sqrt[3]{2x}), \quad x \in [0, 1]$$

(константу C определить из условия нормировки).
Рекомендуется использовать метод Неймана.

3. РАЗЫГРЫВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ, МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1. Разыгрывание случайных событий

Пусть необходимо смоделировать некоторое событие A , вероятность появления которого $P(A)=p$, $0 \leq p \leq 1$. Событию A статистически эквивалентно событие $\{\alpha < p\}$, где α – равномерно распределенное случайное число в интервале $[0,1]$.

Действительно, нетрудно видеть, что $P[\alpha < p] = \int_0^p dx = p$.

Таким образом, моделирование события A может быть сведено к моделированию события $\{\alpha < p\}$. Это осуществляется следующим образом:

- 1) вырабатывается значение случайной величины α ;
- 2) производится сравнение значения α с величиной p ;
- 3) если $\alpha < p$, то имеет место событие A , а если $\alpha \geq p$, то событие A не имеет места.

Рассмотрим теперь задачу разыгрывания полной группы несовместных событий. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, причем $P(A_i) = p_i$,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Разобьем весь интервал $[0,1]$ на n подынтервалов (z_{i-1}, z_i) , $i = \overline{1, n}$, длины которых равны соответственно $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тогда события A_i и $\{\alpha \in (z_{i-1}, z_i)\}$ будут статистически эквивалентны. Действительно:

$$P[\alpha \in (z_{i-1}, z_i)] = \int_{z_{i-1}}^{z_i} dx = p_i = P(A_i).$$

Отсюда следует алгоритм разыгрывания полной группы несовместных событий:

- 1) вырабатывается значение случайной величины α ;
- 2) значение α сравнивается с величиной $z_1 = p_1$. Если $\alpha < z_1$, то имеет место событие A_1 . Если $\alpha \geq z_1$, то формируется $z_2 = z_1 + p_2$;
- 3) значение α сравнивается с величиной z_2 . Если $\alpha < z_2$, то имеет место событие A_2 , иначе формируется $z_3 = z_2 + p_3$. И т.д., до тех пор, пока не достигнем z_{n-1} ;
- 4) если $\alpha < z_{n-1}$, то имеет место событие A_{n-1} , в противном случае – событие A_n .

Таким образом, считаем, что реализовалось событие A_k , если $\sum_{i=1}^{k-1} p_i < \alpha < \sum_{i=1}^k p_i$. Поскольку $\alpha \in [0,1]$, то в результате моделирования значение α обязательно попадет в какой-то подынтервал. Следовательно, обязательно реализуется одно из возможных событий A_k .

Пример 3.1. При падении нейтрона на ядро возможны три исхода: поглощение (1), упругое рассеяние (2) и реакция деления (3). Обозначим σ_s – сечение захвата, σ_c – сечение рассеяния, σ_f – сечение деления. Тогда вероятности возможных исходов определяются как

$$p_1 = \sigma_s / \sigma, \quad p_2 = \sigma_c / \sigma, \quad p_3 = \sigma_f / \sigma, \quad (3.1)$$

где $\sigma = \sigma_s + \sigma_c + \sigma_f$. Следовательно, после генерации равномерно распределенного случайного числа $\alpha \in [0,1]$ мы принимаем решение в пользу первого исхода, если $0 < \alpha < p_1$, в пользу второго исхода, если $p_1 < \alpha < p_1 + p_2$, и в пользу третьего исхода, если $p_1 + p_2 < \alpha < 1$.

3.2. Моделирование дискретных случайных величин

Рассмотрим формирование наиболее распространенных дискретных распределений.

1) *Дискретное равномерное распределение.*

Данному распределению подчиняется случайная величина ξ , представляющая из себя число, выбранное наудачу из M целых чисел ($M \geq 2$), принадлежащих интервалу $[a, a + M - 1]$. Здесь a – целое число, определяющее левую границу области возможных значений случайной величины ξ . Алгоритм формирования может быть записан как

$$\xi = a + [M \cdot \alpha],$$

где α – равномерно распределенное в интервале $[0,1]$ случайное число.

2) *Распределение Бернулли.*

Данному распределению подчиняется реализация случайного события β в однократном испытании: $\beta=1$ с вероятностью p и $\beta=0$ с вероятностью $1-p$. Алгоритм формирования случайной величины с распределением Бернулли на основе равномерно распределенного случайного числа $\alpha \in [0,1]$ имеет вид

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \leq p, \\ 0, & \text{если } \alpha > p. \end{cases}$$

3) *Биномиальное распределение.*

Данному распределению подчиняется случайная величина ξ , представляющая из себя число успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $1-p$ в каждом испытании,

$$P[\xi = k] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Алгоритм формирования случайной величины ξ может быть реализован с помощью имитации серии из n испытаний

Бернулли с вероятностью успеха p :

$$\xi = \sum_{k=0}^n \beta_k, \text{ где } \beta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_k \leq p, \\ 0, & \text{если } \alpha_k > p. \end{cases}$$

Здесь $\alpha_k \in [0,1]$ – равномерно распределенные случайные числа, формируемые в цикле по $k=0 \dots n$.

Рассмотрим теперь общий случай задачи моделирования дискретной случайной величины. Пусть дискретная случайная величина ξ принимает значения $1, 2, \dots, n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$. Случайной величине ξ можно сопоставить полную группу событий $A: A_1, A_2, \dots, A_n$, т.е. $A_1 \leftrightarrow \xi_1, A_2 \leftrightarrow \xi_2, \dots, A_n \leftrightarrow \xi_n$ (если ξ принимает нецелочисленные значения, то в качестве $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ могут выступать соответствующие им номера). Тогда моделирование случайной величины может быть реализовано по следующему алгоритму:

1) вводится вспомогательная переменная с начальным значением $V = \alpha$, где α – равномерно распределенное в интервале $[0,1]$ число;

2) в цикле переменной V присваивается новое значение $V = V - p_k, k=1,2,\dots,n$, и проверяется выполнение условия $V < 0$. Если условие выполняется, то цикл прекращается, и искомое значение моделируемой случайной величины принимается равным $\xi = k$.

Данный метод является весьма эффективным, если число исходов конечно и невелико. Однако многие часто встречающиеся на практике дискретные случайные величины (пуассоновская и др.) имеют бесконечное число исходов. Очевидно, в этом случае использовать напрямую приведенную схему не представляется возможным. Указанную трудность можно обойти, если учесть, что для большинства дискретных законов распределения вероятности на последующем и предыдущем шаге связаны детерминированной зависимостью

$$p_{k+1} = p_k f(k), \quad (3.2)$$

где $f(k)$ – некоторая функция от номера исхода k .

Для биномиального закона распределения

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \quad (3.3)$$

Из (3.3) имеем

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p},$$

отсюда

$$p_{k+1} = p_k \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p}.$$

Пуассоновский закон распределения имеет вид

$$p_k = \lambda^k \exp(-\lambda) / k!,$$

тогда аналогично находим

$$p_{k+1} / p_k = \lambda / (k+1),$$

откуда

$$p_{k+1} = p_k \lambda / (k+1).$$

Распределение Бозе-Эйнштейна записывается в виде

$$p_{k+1} = \lambda^k / (1+\lambda)^{k+1},$$

тогда

$$p_{k+1} = p_k \lambda / (1+\lambda).$$

Для геометрического распределения

$$p_k = p(1-p)^k,$$

тогда

$$p_{k+1} / p_k = 1-p \text{ и } p_{k+1} = p_k (1-p).$$

Отметим также, что для данной случайной величины существует и более экономичный алгоритм моделирования: $\xi = [\ln \alpha / \ln(1-p)]$.

При выполнении (3.1) необходимость запоминания массива p_k , $k=1,2,\dots$ отпадает, и описанная схема

моделирования дискретной случайной величины может быть реализована рекурсивно.

Рассмотрим теперь характерные задачи, где используется моделирование дискретной и непрерывной случайных величин.

Пример 3.2. Моделирование процесса фоторегистрации.

Пусть имеется источник излучения (лазер), сигнал от которого через среду распространения с помощью фокусировки поступает на фотодетектор. На выходе фотодетектора имеем поток фотоэлектронов, поступающих на счетчик (рис. 3.1).

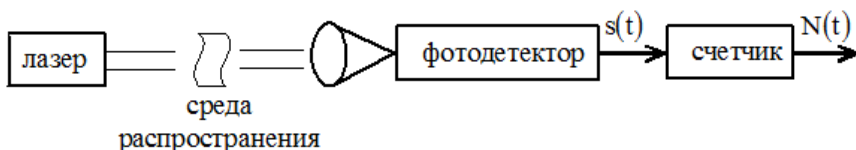


Рис. 3.1

В данной схеме имеется два случайных механизма. Первый механизм связан с процессом фоторегистрации, а именно с тем, что поток фотоэлектронов порождает на выходе счетчика значения дискретной случайной величины N . Второй механизм связан с тем, что излучение проходит через среду распространения, претерпевая случайные искажения.

Считаем, что фотодетектор имеет маленькую площадь. Тогда вероятность того, что число фотоэлектронов $N = k$ может быть описана формулой Манделя

$$p(k, T) = \int_0^{\infty} \frac{(\beta E)^k}{k!} \exp(-\beta E) w(E) dE. \quad (3.4)$$

Здесь параметр β определяется характеристиками фотодетектора, $E = E(T)$ – энергия падающего поля, $w(E)$ – плотность вероятности флуктуаций энергии падающего поля.

В частном случае если энергия падающего поля не

флуктуирует, т.е.

$$w(E) = \delta(E - E_0), \quad (3.5)$$

то из (3.4) имеем:

$$p(k) = (\beta E_0)^k \exp(-\beta E_0) / k! = \lambda^k \exp(-\lambda) / k!,$$

где $\lambda = \beta E_0$. Таким образом, если энергия поля на входе постоянна, то поток фотоэлектронов на выходе будет чисто пуассоновским.

Для некогерентного излучения напряженность электрического и магнитного поля описывается гауссовским законом, а энергия, как квадратичная величина, имеет экспоненциальный закон распределения:

$$w(E) = (1/E_0) \exp(-E/E_0). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.4), находим

$$p(k) = \lambda^k / (1 + \lambda)^{k+1},$$

где $\lambda = \beta E_0$ – средняя энергия падающего поля. Таким образом, при гауссовских флуктуациях поля поток фотоэлектронов будет описываться распределением Бозе-Эйнштейна.

Алгоритм моделирования в рассмотренных частных случаях будет выглядеть следующим образом:

1) формируем случайную энергию E с заданным законом распределения, которая определяет случайную величину $\lambda = \beta E$;

2) формируем закон распределения Пуассона (Бозе-Эйнштейна) с параметром λ ;

3) на выходе получаем интересующую нас случайную величину ξ .

Результаты моделирования и физических исследований показаны на рис. 3.2. Здесь сплошными линиями нанесены теоретические зависимости (кривая 1 – распределение Пуассона, кривая 2 – распределение Бозе-Эйнштейна), а квадратами и треугольниками – соответствующие экспериментальные данные. Как следует из рис. 3.2,

предложенная статистическая модель выходного сигнала счетчика (рис. 3.1) и ее частные случаи являются адекватными.

Если у энергии падающего поля будет тип флуктуаций, отличный от (3.5), (3.6), то надо использовать метод, аналогичный методу суперпозиции.

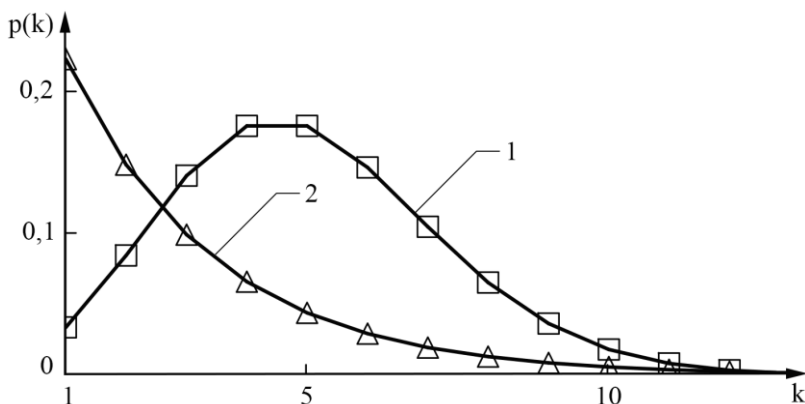


Рис. 3.2

Пример 3.3 Прохождение нейтрона через вещество (расчет защиты).

Пусть имеется слой вещества, на который падает пучок нейтронов (рис. 3.3). Как отмечалось ранее, возможны три исхода: поглощение нейтрона ядром, упругое рассеяние нейтрона и реакция деления ядра. Обозначим σ_s – сечение захвата, σ_c – сечение рассеяния, σ_f – сечение деления.

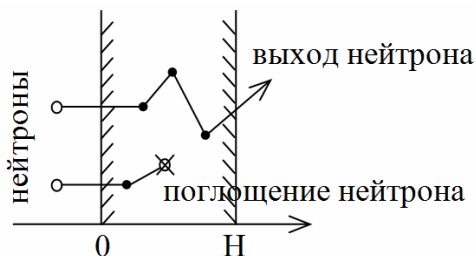


Рис. 3.3

Первый случайный механизм – исход взаимодействия. Если реализуется упругое рассеяние, то имеем два случайных механизма: угол отклонения φ и длина свободного пробега l . Введем в рассмотрение $w(l) = \lambda_0 \exp(-\lambda_0 l)$ – плотность вероятности свободного пробега, φ – случайный угол отклонения нейтрона при упругом рассеянии и связанную с ним величину $\mu = \cos(\varphi)$. Тогда реализация этих случайных механизмов будет состоять в следующем.

1) Разыгрывается исход взаимодействия, для чего вырабатывается равномерно распределенное случайное число $\alpha \in [0,1]$ и проверяется выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i < \alpha < \sum_{i=1}^k p_i, \quad k=1,2,3.$$

2) Если реализовалось упругое рассеяние, то разыгрываются

а) величина свободного пробега с использованием (2.10): $l = -(1/\lambda_0) \ln \alpha'$, $\alpha' \in [0,1]$;

б) косинус угла рассеяния, который согласно экспериментальным данным является равномерно распределенной в интервале $[-1,1]$ случайной величиной: $\mu = 2\alpha'' - 1$, $\alpha'' \in [0,1]$.

Далее вычисляется координата, в которой произойдет следующее взаимодействие: $x_{n+1} = x_n + l \cos \varphi = x_n + l\mu$. Если $x_{n+1} > H$, где H – толщина слоя вещества, то фиксируется событие прохождения нейтрона через вещество.

Объемная (трехмерная) задача моделируется несколько сложнее, но принцип тот же самый. Основное отличие состоит в том, что в этом случае разыгрываются два угла: азимутальный и полярный. Делается определенное количество испытаний и подсчитывается процент вышедших нейтронов. Для сокращения затрат машинного времени на практике часто делается уменьшение объема испытаний с помощью *метода форсирования испытаний (форсирования случайных*

воздействий), рассмотренного ниже.

3.3. Моделирование гауссовского вектора

В ряде практических задач необходимо моделировать не одиночную случайную величину, а некоторую совокупность (вектор) случайных величин.

Пример 3.4. Регистрация пучка лазера, прошедшего через некоторую среду, матрицей из n фотодетекторов (рис. 3.4).

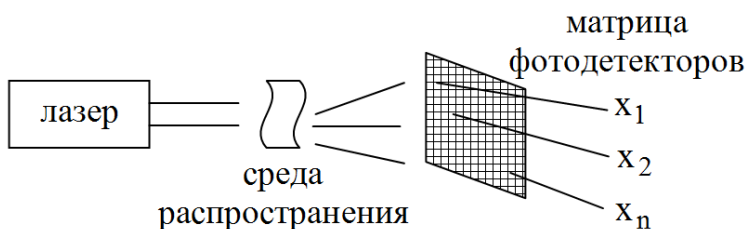


Рис. 3.4

Пример 3.5. Различение n полезных сигналов s_i , $i = \overline{1, n}$ на фоне шума ξ (рис. 3.5).

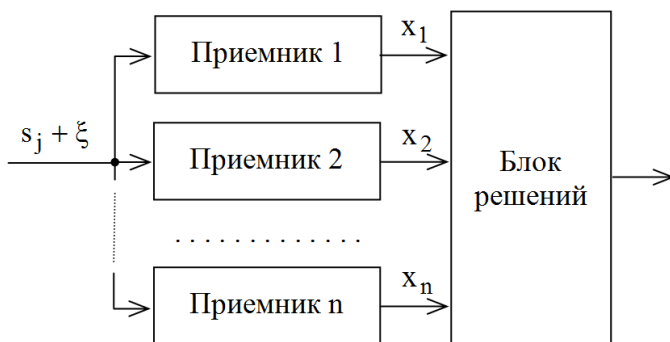


Рис. 3.5

Нетрудно видеть, что и в том, и в другом случае

приходится иметь дело с вектором (вектором-столбцом) случайных величин $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Индекс «Т» означает операцию транспонирования. В дальнейшем ограничимся случаем, когда величины x_i , $i = \overline{1, n}$, являются гауссовскими, что наиболее часто встречается на практике.

Обозначим

$$\vec{m} = \langle \vec{x} \rangle = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T, \quad (3.7)$$

$$\vec{K} = \langle (\vec{x} - \vec{m})(\vec{x} - \vec{m})^T \rangle = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix}$$

– соответственно математическое ожидание и корреляционная матрица вектора $\vec{x}$ соответственно. Здесь $m_i = \langle x_i \rangle$, $K_{ij} = \langle (x_i - m_i)(x_j - m_j) \rangle$, $i, j = \overline{1, n}$.

Алгоритм моделирования (формирования вероятностного аналога) вектора $\vec{x}$, обладающего характеристиками (3.6), можно представить следующим образом

$$\vec{x} = \vec{A}\vec{\eta} + \vec{m}, \quad (3.8)$$

где $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$, η_i , $i = \overline{1, n}$ – независимые гауссовские случайные величины с параметрами $\sim N(0,1)$, так что $\langle \eta_i \eta_j \rangle = \delta_{ij}$, δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$).

Матрица $\vec{A}$ в (3.8) имеет вид

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

и удовлетворяет условию

$$\vec{\mathbf{K}} = \vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{A}}^T, \quad (3.10)$$

где $\vec{\mathbf{K}}$ – корреляционная матрица (3.7). В этой связи матрицу $\vec{\mathbf{A}}$ иногда называют матричным корнем.

Из (3.8), (3.9) следует, что

$$x_i = \sum_{k=1}^i a_{ik} \eta_k + m_i. \quad (3.11)$$

Корреляционная зависимость между различными x_i обеспечивается за счет присутствия в них одних и тех же чисел η_i .

Коэффициенты матрицы $\vec{\mathbf{A}}$ (3.9) могут быть вычислены на основе ее свойства (3.10) с помощью итерационной процедуры, описываемой уравнениями

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{K_{11}}, & a_{k1} &= K_{k1}/a_{11} = K_{k1}/\sqrt{K_{11}}, & k &= \overline{2, n}, \\ a_{ki} &= \left(K_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ki} a_{ij} \right) / a_{ii}, & a_{ii} &= \sqrt{K_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^2}, & i &= \overline{2, k-1}, \\ & i = \overline{2, k-1}, & & 1 \leq j \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Пример 3.6. Различение двух неортогональных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ на фоне гауссовского шума ξ . Подобная задача возникает в оптике, где сигналы принципиально неортогональны, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt \neq 0$.

Структурная схема оптимального различителя двух сигналов может быть представлена в виде, показанном на рис. 3.6 [16].

Не нарушая общности, для упрощения рассуждений будем полагать, что шумы на выходе приемников сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ имеют одинаковую мощность (но коррелированы). Тогда на выходе приемника сигнала $s_i(t)$, $i=1,2$ формируется величина x_i , имеющая гауссовское

распределение с математическим ожиданием $\langle x_i \rangle = m_i$ и дисперсией $\langle (x_i - m_i)^2 \rangle = \sigma^2$. При этом $\langle (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) \rangle = \sigma^2 \rho$, где $\rho = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt / \sqrt{E_1 E_2}$, а $E_i = \int_{-\infty}^{\infty} s_i^2(t)dt$ – энергия сигнала $s_i(t)$, $i=1,2$.

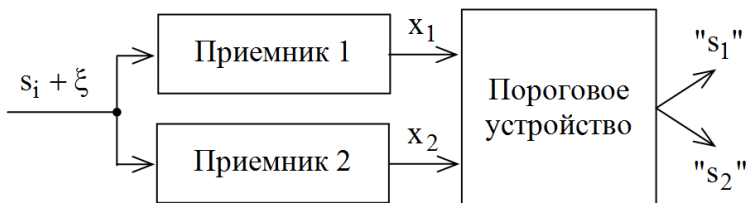


Рис. 3.6

Полагая известными параметры m_1 , m_2 , σ , ρ , необходимо сформировать гауссовский вектор $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$.

Используя исходные данные, составим вначале корреляционную матрицу $\vec{K}$ (3.7)

$$\vec{K} = \sigma^2 \begin{vmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{vmatrix}.$$

Далее согласно (3.12) найдем коэффициенты матрицы $\vec{A}$ (3.9): $a_{11} = \sigma$, $a_{21} = \sigma\rho$, $a_{22} = \sigma(1 - \rho^2)$. Таким образом,

$$\vec{A} = \sigma \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \rho & 1 - \rho^2 \end{vmatrix}.$$

Окончательно, на основе (3.11) формируем две искомые случайные величины:

$$x_1 = \sigma\eta_1 + m_1, \quad x_2 = \sigma[\rho\eta_1 + (1 - \rho^2)\eta_2] + m_2.$$

3.4. Контрольные вопросы

1. Назовите основные этапы алгоритма разыгрывания полной группы несовместных событий с использованием

датчика равномерно распределенных случайных чисел.

2. Перечислите наиболее часто встречающиеся на практике законы распределения дискретных случайных величин. В каких задачах они используются?

3. Как может быть реализовано моделирование дискретной случайной величины на основе датчика равномерно распределенных случайных чисел?

4. Как программно моделируются дискретные случайные величины с бесконечным числом исходов?

5. В каком случае и каким образом реализуется совместное моделирование дискретной и непрерывной случайных величин?

6. Какова структура алгоритма моделирования гауссовского вектора с заданными корреляционными свойствами?

3.5. Задачи

Смоделировать последовательность из 500 случайных чисел с заданным законом распределения. Вычислить теоретически и экспериментально их математическое ожидание и дисперсию. Построить ряд распределения.

1. Распределение Пуассона

$$P(k) = \lambda^k \exp(-\lambda) / k!, \quad \lambda = 0,4; 1; 8.$$

2. Биномиальное распределение

$$P(k, n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad p = 0,4, \quad n = 4, 20, 100.$$

3. Геометрическое распределение

$$P(k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad p = 0,05, 0,2.$$

4. Гипергеометрическое распределение

$$P(m) = C_M^m C_{N-M}^{n-m} / C_N^n, \quad m = 0, 1, \dots, M; \quad n = 12, \quad N = 20, \quad M = 8.$$

5. Выполнить моделирование случайного события A , для которого $P(A) = p$, $p = 0,01; 0,1; 0,5$. Оценить вероятность события по выборке объема $N = 100, 1000, 10000$.

6. Разыграть 10 значений дискретной случайной

величины X , закон распределения которой имеет следующий вид

X	2	3	6	8
p	0,1	0,3	0,5	0,1

7. Известно число событий, зарегистрированных в течение последних 100 часов:

Число событий в час	4	5	6	7	8
Частота (час.)	5	11	16	23	45

Смоделировать регистрацию событий в течение 6 часов.

8. Смоделировать $n=10$ отсчетов гауссовского случайного процесса $x(t)$ с корреляционной функцией $K(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$, взятых с шагом $\Delta t = 1/200\alpha$, при $\sigma^2 = 4$, $\alpha = 0,1$.

4. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ

4.1. Выборочные моменты, расчет погрешностей

4.1.1. Общие соотношения

Набор значений $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ измеряемой величины ξ , полученный при n -кратном повторении эксперимента, называется **реализацией выборки**. Можно считать, что все возможные реализации составляют случайную выборку $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Оценкой $\Theta_m = \Theta_m(\vec{x})$ параметра Θ называется некоторая статистика (функция выборки), приближенно соответствующая его истинному значению при конечном объеме выборки n ($\Theta_m \approx \Theta$) и сходящаяся к нему (в вероятностном смысле) при неограниченном возрастании числа выборок ($\Theta_m \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Theta$). Случайная оценка Θ_m обычно характеризуется следующими числовыми значениями [1,16]:

1) средним значением оценки:

$$m_{\Theta} = \langle \Theta_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u w_{\Theta}(u) du;$$

2) смещением оценки: $b_{\Theta} = m_{\Theta} - \Theta$;

3) дисперсией оценки:

$$D_{\Theta} = \langle (\Theta_m - m_{\Theta})^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (u - m_{\Theta})^2 w_{\Theta}(u) du$$

или рассеянием оценки:

$$V_{\Theta} = \langle (\Theta_m - \Theta)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \Theta)^2 w_{\Theta}(u) du = D_{\Theta} + b_{\Theta}^2;$$

4) доверительной вероятностью P_0 или доверительным интервалом Δ :

$$P_0 = P[|\Theta_m - \Theta| < \Delta] = \int_{\Theta - \Delta}^{\Theta + \Delta} w_{\Theta}(u) du \cdot$$

Здесь $w_{\Theta}(u)$ – плотность вероятности оценки Θ_m .

4.1.2. Основные параметры и характеристики оценок

В дальнейшем будем считать, что выборка $\vec{x}$ подчиняется гауссовскому закону распределения, причем ее значения $x_i, x_j, i, j = \overline{1, n}$ являются некоррелированными (а, следовательно, и статистически независимыми) при $i \neq j$:

$$\langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle = 0.$$

Тогда для наиболее часто используемых на практике параметров можно записать следующие соотношения.

Параметр $\Theta = m_{\xi}$ – математическое ожидание.

Оценка	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
Смещение оценки	0
Дисперсия оценки	σ_{ξ}^2 / n
Распределение оценки	нормальное $\sim N(\Theta, \sigma_{\xi}^2 / n)$
Доверительный интервал	$\Delta = \sigma_{\xi} z_p / \sqrt{n}$, где $z_p = \Phi^{-1}((1 + P_0)/2)$

Параметр $\Theta = \sigma_{\xi}^2$ – дисперсия:

а) математическое ожидание m_{ξ} известно

Оценка	$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_{\xi})^2$
Смещение оценки	0
Дисперсия оценки	$2\sigma_{\xi}^4 / n \approx 2s^4 / n$
Распределение оценки	χ_n^2 (при $n > 100$ – асимптотически нормальное)

Асимптотический
доверительный
интервал

$$\Delta = \sigma_{\xi} z_p \sqrt{2/n}, \text{ где } z_p = \Phi^{-1}((1 + P_0)/2)$$

б) математическое ожидание неизвестно

Оценка

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Смещение оценки 0

Дисперсия оценки $2\sigma_{\xi}^4 / (n-1) \approx 2s^4 / (n-1)$

Распределение
оценки χ_{n-1}^2 (при $n > 100$ – асимптотически нормальное)

Параметр $\Theta = m_k$ – начальный момент k-го порядка

Оценка

$$\tilde{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$$

Смещение оценки 0

Дисперсия оценки $(m_{2k} - m_k^2) / n$

Параметр $\Theta = \mu_k$ – центральный момент k-го порядка

а) математическое ожидание m_{ξ} известно

Оценка

$$\tilde{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_{\xi})^k$$

Смещение 0

Дисперсия μ_{2k} / n

б) математическое ожидание неизвестно

Оценка

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$$

Смещение

0

При $n \gg 1$ оценки $\tilde{m}_k$ и $\hat{\mu}_k$ для $k=2,3,4$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_2 &= \tilde{m}_2 - (\bar{x})^2, \quad \hat{\mu}_3 = \tilde{m}_3 - 3\tilde{m}_2\bar{x} + 2(\bar{x})^3, \\ \hat{\mu}_4 &= \tilde{m}_4 - 4\tilde{m}_3\bar{x} + 6\tilde{m}_2(\bar{x})^2 - 3(\bar{x})^4. \end{aligned}$$

Параметр $\Theta = p$ – вероятность события

Оценка

$$\hat{p} = \frac{k}{n}, \quad k - \text{число положительных} \\ \text{исходов, } n - \text{число испытаний}$$

Смещение оценки

0

Дисперсия оценки

$$p(1-p)/n$$

Асимптотический
доверительный
интервал

$$\Delta = z_p \sqrt{p(1-p)/n}, \text{ где} \\ z_p = \Phi^{-1}((1 + P_0)/2)$$

4.2. Выборочные распределения

4.2.1. Общие соотношения

Теоретическими вероятностными характеристиками для непрерывной случайной величины ξ , полностью характеризующими ее в статистическом смысле, являются плотность вероятности $w_\xi(x)$ и функция распределения

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x w_{\xi}(u) du .$$

Для дискретной случайной величины ξ такими характеристиками являются распределение вероятностей $P_k = P[\xi = x_k]$ и функция распределения

$$F_{\xi}(x) = \sum_{k: x_k < x} x_k P_k .$$

При проведении эксперимента теоретическое распределение $F_{\xi}(x)$ может быть:

- а) частично известно с точностью до некоторых неизвестных параметров;
- б) полностью неизвестным.

В первом случае экспериментальное определение $w_{\xi}(x)$, $F_{\xi}(x)$, P_k сводится к оценке параметров распределения, которые находятся из выборочных моментов $\bar{X}$, s^2 , $\tilde{m}_k$.

Во втором случае производится непараметрическая оценка распределения на основе

- 1) эмпирической функции распределения;
- 2) гистограммы;
- 3) полигона накопленных частот.

Эмпирической функцией распределения называется оценка $F_{\xi}(x)$ по несгруппированной выборке. **Гистограммой** называется оценка плотности вероятности $w_{\xi}(x)$ по сгруппированным данным.

Полигоном накопленных частот называется оценка функции распределения $F_{\xi}(x)$ по сгруппированным данным.

Правило построения эмпирической функции распределения:

- 1) берется выборка $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ объемом $n > 100$ и производится ее упорядочивание: $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$.

2) строится функция

$$F_n(u, \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta(u - x_{(i)}),$$

где $\theta(u) = 0$ при $u < 0$ и $\theta(u) = 1$ при $u \geq 0$ – функция Хевисайда.

Для примера на рис. 4.1 приведены теоретические (сплошными линиями) $F_\xi(u) = \Phi(u)$ и эмпирические (ступеньками) $F_n(u, \bar{x})$ функции распределения стандартной гауссовской величины ξ . Эмпирические функции распределения построены при $n = 200$ (рис. 4.1а) и $n = 1000$ (рис. 4.1б). Видно, что с ростом объема выборки n эмпирическая функция распределения сходится к теоретической.

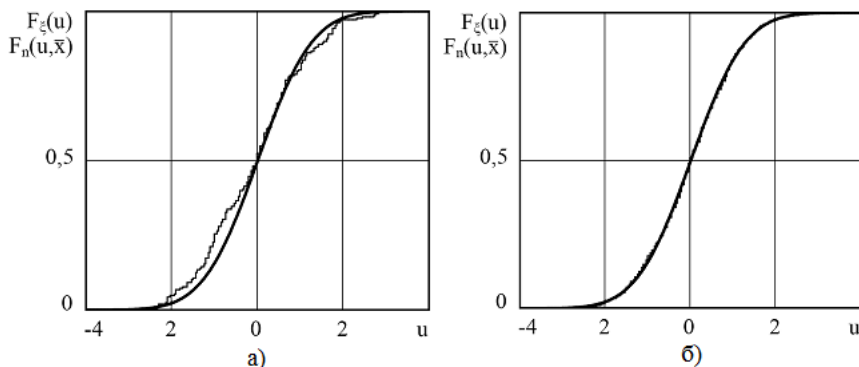


Рис. 4.1

4.2.2. Правило построения гистограмм

1) Берется выборка $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ объемом $n > 100$, как правило, $n \sim (2 \div 20) \cdot 10^2$.

2) Определяется число интервалов группировки r одним из возможных способов, например: $r = (0,55 \div 1,25)n^{0,4}$ или $r = (4 \div 5) \ln n$. При этом обычно число интервалов группировки

$9 < r < 21$. Если распределение предполагается симметричным, то r целесообразно выбирать нечетным.

3) Определяются длина Δx и границы (a_j, b_j) , $j = \overline{1, r}$ интервалов группировки для всех x_i :

$$\begin{aligned} \Delta x &= d/r, & d &= 1,02(x_{\max} - x_{\min}), \\ a_j &= 1,02x_{\min} + (j-1)\Delta x, & b_j &= 1,02x_{\min} + j\Delta x. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $x_{\min}$ и $x_{\max}$ – минимальное и максимальное значение выборки $\bar{X}$. Для односторонних распределений (экспоненциального, релеевского, хи-квадрат и др.) полагается $a_1 = 0$.

4) Подсчитывается количество k_j элементов, попавших в интервал группировки (a_j, b_j) . При этом k_j должно быть не менее $5 \div 10$. Если $k_j < 5 \div 10$, то разбиение на интервалы (a_j, b_j) необходимо произвести другим способом.

5) Определяются относительные частоты

$$v_j = k_j/n \text{ или } \omega_j = k_j/n\Delta x \quad (4.2)$$

попадания значения случайной величины ξ в j -ый интервал и строится диаграмма столбцов высотой v_j или ω_j , $j = \overline{1, r}$.

В идеальном случае гистограмма меньше всего отличается от теоретической плотности вероятности в центре интервала группировки $(a_j + b_j)/2$.

Для примера на рис. 4.2 приведена теоретическая плотность вероятности (сплошной линией) $w_\xi(u)$ стандартной гауссовской случайной величины ξ и ее гистограмма (столбиками)

$$w_g(u) = \omega_j, \quad a_j \leq u \leq b_j. \quad (4.3)$$

При построении гистограммы использовались объем выборки $n = 1000$ и число интервалов $r = \left[1000^{0,4} \right] = 15$.

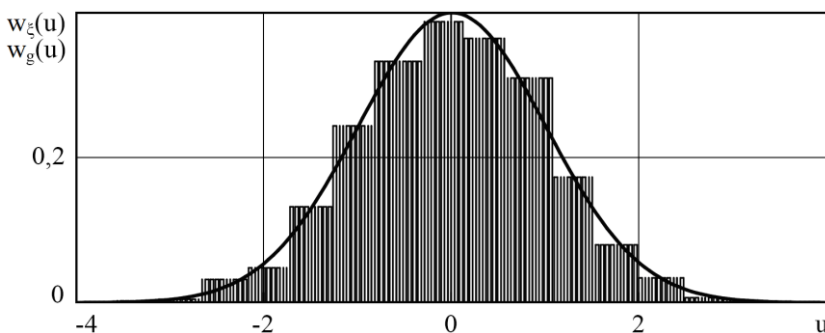


Рис. 4.2

4.2.3. Правило построения полигона накопленных частот

Берется выборка $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и определяется число интервалов группировки так же, как и при построении гистограммы (пункты 1, 2, 3). Далее выполняются следующие действия:

4) подсчитывается количество K_q элементов выборки $\bar{x}$, попавших в интервал $(a_1, a_1 + q\Delta x)$:

$$K_q = \sum_{j=1}^q k_j, \quad q = \overline{1, r};$$

5) определяются выборочные вероятности

$$F_q = K_q/n = \sum_{j=1}^q v_j$$

и строится ступенчатая диаграмма, высота которой равна F_q на интервале $[a_0 + (q-1)\Delta x, a_0 + q\Delta x]$.

В идеальном случае полигон накопленных частот меньше всего отличается от теоретической функции распределения в конце интервала группировки.

Для примера на рис. 4.3 изображены теоретическая функция распределения (сплошной линией) $F_\xi(u)$ стандартной

гауссовской случайной величины ξ и ее полигон (ступеньками)

$$F_q = F_q(u) = \sum_{j: u \geq a_j} \nu_j.$$

Число интервалов и объем выборки использовались такие же, как и при построении гистограммы (рис. 4.2).

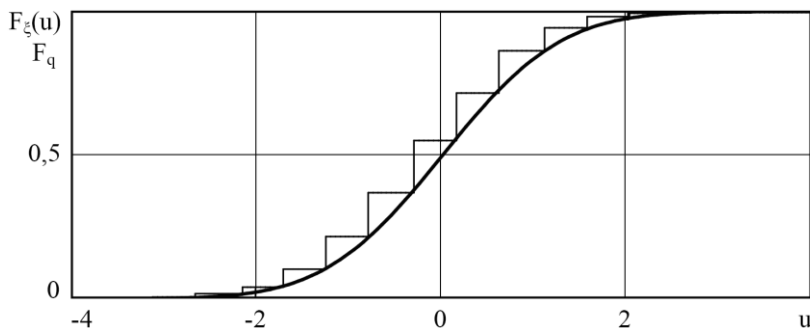


Рис. 4.3

4.3. Сравнение теоретического и эмпирического распределений

4.3.1. Функциональный масштаб

Для удобства графического представления функциональной зависимости $y = f(x)$ могут применяться: а) логарифмический масштаб; б) обратный функциональный масштаб; в) прямой функциональный масштаб.

Рассмотрим **логарифмический масштаб**.

Если $A < y < B$, причем $B/A = 10^k$, $k=1,2,\dots$, т.е. их величины различаются на порядки, то весьма удобным оказывается логарифмический масштаб. Для перехода к нему делается замена переменной $y^* = \lg(y)$ и далее строится зависимость $y^* = \lg[f(x)]$. При этом значению $y = y_0$ на графике в логарифмическом масштабе соответствует отклонение точки

от оси абсцисс

$$l_y = L_y \lg(y_0), \quad (4.4)$$

где L_y – линейный размер в миллиметрах одной единицы переменной y^* (или одного порядка переменной y).

Пример 4.1. Построить в логарифмическом масштабе (x, y^*) точки $(1; 3,6)$ и $(2; 2,5 \cdot 10^2)$. Взять $L_y = 20$ мм.

Решение. Согласно (4.4) для ординат первой и второй точек получаем $l_y = 20 \lg(3,6) = 11$ мм, $l_y = 20 \lg(2,5 \cdot 10^2) = 48$ мм. Тогда итоговое построение будет иметь вид, показанный на рис. 4.4.

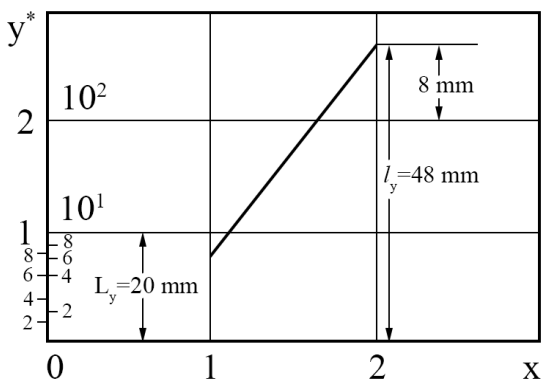


Рис. 4.4

Аналогично рассмотрим **обратный функциональный масштаб**.

Пусть $y = f(x) = f(kx)$. Преобразуем график в прямую линию $y^* = kx$. Это можно сделать преобразованием $y^* = f^{-1}(y)$. Если исходная функция имеет более общую зависимость $y = f(x) = f[(x - c)/s]$, то данное преобразование координаты y дает уравнение в системе координат (x, y^*) вида $y^* = (x - c)/s$.

Обратный функциональный масштаб удобно применять к “S”-образным кривым.

Пример 4.2. Построить в обратном функциональном масштабе график функции $y = 1 - \exp[-k(x - c)]$, $x > c$.

Решение. Преобразование $y^* = -\ln(1 - y)$ приводит к уравнению прямой линии $y^* = k(x - c)$.

Рассмотрим **прямой функциональный масштаб**.

Пусть $y = f(x) = kf(x) + c$, тогда преобразование $x^* = f_1(x)$ приводит исходный график к прямой линии $y = kx^* + c$. Такой масштаб целесообразно использовать для “U” и “J”-образных кривых.

Пример 4.3. Построить в прямом функциональном масштабе функцию $y = 5tg(x) - 2,5$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Решение. Делаем замену переменной: $x^* = tg_1(x)$. Тогда $y = 5x^* - 2,5$.

Обратим внимание на то, что обратный функциональный масштаб в последнем примере менее удобен, так как бесконечную кривую он преобразует в конечный отрезок прямой ($-\pi/2 < x < \pi/2$). А это приведет к сгущению точек на концах отрезка.

4.3.2. Вероятностная бумага

Вероятностная бумага представляет собой функциональный масштаб, в котором функция $F_\xi(x)$ преобразуется в прямую линию, и принадлежит к полукачественному критерию, на основе которого можно судить о соответствии эмпирического распределения и предполагаемого теоретического распределения.

Рассмотрим этапы проверки:

1) построение обратной функциональной зависимости

для функции распределения $y = F_{\xi}(x)$: $y^* = F_{\xi}^{-1}(y)$;

2) построение полигона накопленных частот F_q , $q = \overline{1, r}$;

3) пересчет полигона накопленных частот $F_q^* = F_{\xi}^{-1}(F_q)$, $q = \overline{1, r}$;

4) построение в системе координат (x, y^*) графиков по точкам (x_q, F_q^*) , где $x_q = a_0 + q\Delta x$;

5) если график пересчитанного полигона накопленных частот F_q^* представляет собой прямую линию, то полагается, что эмпирическое распределение F_p соответствует распределению $F_{\xi}(x)$, в противном случае считается, что соответствия нет.

Пример 4.4. При помощи вероятностной бумаги по заданным значениям эмпирической функции распределения случайной величины ξ проверить гипотезу о том, что ее плотность вероятности описывается законом Коши:

$$w_{\xi}(x) = c / [c^2 + (x - x_0)^2].$$

Определить параметры c и x_0 .

x	-1	-0,5	0	0,5	1
F_q	0,148	0,187	0,25	0,352	0,5
x	1,5	2	2,5	3	3,5
F_q	0,647	0,75	0,813	0,852	0,879

Решение. По заданной плотности вероятности $w_{\xi}(x)$ находим теоретическую функцию распределения $F_{\xi}(x) = 1/2 + \arctg[(x - x_0)/c] / \pi$ случайной величины ξ . Далее обозначим $x^* = (x - x_0)/c$, тогда $y^* = F_{\xi}^{-1}(y) = \tg[\pi(y - 1/2)]$.

Пересчитываем полигон накопленных частот по формуле $F_q^* = \tg[\pi(F_q - 1/2)]$ и откладываем полученные

значения точками по оси y^* в системе координат (x^*, y^*) (рис. 4.5). Как видно, график пересчитанного полигона накопленных частот имеет линейную зависимость $F_q^* = kx^* + b$. По методу наименьших квадратов находим $k = 0,999$, $b = -0,999$. Следовательно, гипотеза о том, что исследуемая случайная величина описывается распределением Коши, может быть принята. При этом $c = 1/k = 1,001$, $x_0 = -b = 0,999$

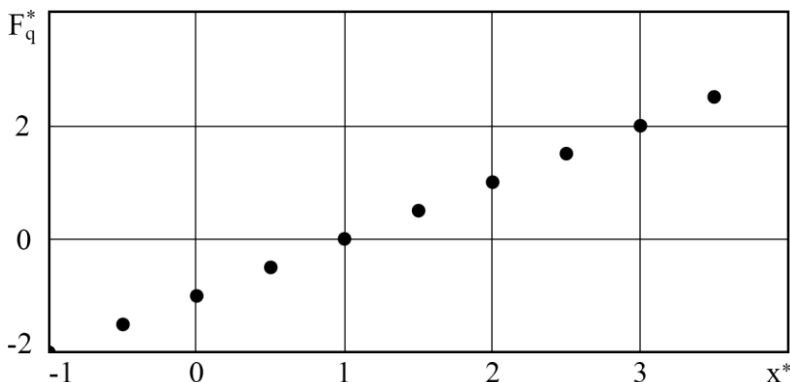


Рис. 4.5

4.3.3. Критерий согласия χ^2 (хи-квадрат) Пирсона

Критерий согласия χ^2 Пирсона принадлежит к универсальным количественным критериям. С помощью этого критерия можно проверить соответствие теоретического и эмпирического распределений для любого типа случайных величин (непрерывных или дискретных). Он имеет вид

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^r \frac{(k_j - np_j)^2}{np_j} = n \sum_{j=1}^r \frac{(\nu_j - p_j)^2}{p_j} = n \left(\sum_{j=1}^r \frac{\nu_j^2}{p_j} - 1 \right) > \chi_{кр}^2(\alpha, 1). \quad (4.5)$$

Здесь n – объем выборки, r – число интервалов группировки, $\nu_j = k_j/n$ – частота попадания (4.2) выборки $\bar{x}$ в интервал (a_j, b_j) ,

$$p_j = \int_{a_j}^{b_j} w_{\xi}(x) dx = F_{\xi}(b_j) - F_{\xi}(a_j)$$

– теоретическая вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (a_j, b_j) , $\chi^2_{кр}(\alpha, l)$ – критическое значение, зависящее от параметров α и l , α – уровень значимости (вероятность отбросить правильную гипотезу о соответствии распределений), $l = r - 1 - \nu$ – число степеней свободы, где ν – количество неизвестных параметров в теоретическом распределении, которые доопределяются по той же выборке. Например:

а) $F_{\xi}(x) = \Phi[(x - m)/\sigma]$, где m и σ известны (или заданы).

Тогда $\nu = 0$.

б) $F_{\xi}(x) = \Phi[(x - m)/\sigma]$, где m неизвестно, а σ задано.

Тогда $m \approx \bar{x} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) / n$ и $\nu = 1$.

в) $F_{\xi}(x) = \Phi[(x - m)/\sigma]$, где m и σ неизвестны, тогда

$$m \approx \bar{x} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) / n, \quad \sigma^2 \approx s^2 = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] / (n - 1) \text{ и } \nu = 2.$$

Если $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha, l)$, то принимается гипотеза соответствия теоретического и эмпирического распределений; если $\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, l)$, то гипотеза соответствия отвергается. Статистика (4.5) подчиняется стандартному χ^2 -распределению. Типичные значения уровня значимости $\alpha = 0,1, 0,05, 0,01$. Чаще всего выбирается $\alpha = 0,1$. Критические значения $\chi^2_{кр}(\alpha, l)$ являются квантилями вероятностей $q = F_{\chi^2}(\chi^2_{кр}) = 1 - \alpha$, где $F_{\chi^2}(x)$ – функция распределения χ^2 с l степенями свободы. Значения квантилей $\chi^2_{кр}(\alpha, l)$ приведены в таблицах [18].

Пример 4.5. Пусть имеется выборка $\vec{X}$ значений случайной величины ξ объемом $n=10000$. По выборке для $r=15$ получены следующие значения первых двух моментов и эмпирической функции распределения

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 2,7 \cdot 10^{-4}, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 1,01, \quad (4.6)$$

x_q	-0,175	0,154	0,483	0,812	1,141	1,470	1,799	2,128
F_q	0,561	0,678	0,777	0,858	0,921	0,963	0,991	1

x_q	-2,478	-2,149	-1,820	-1,491	-1,162	-0,833	-0,504
F_q	$7,3 \cdot 10^{-3}$	0,034	0,075	0,142	0,223	0,319	0,429

Необходимо проверить гипотезу о гауссовском характере распределения выборки.

Решение. Определим относительные частоты ν_j попадания выборки $\vec{X}$ в интервалы $(x_j, x_j + j\Delta)$, $j = \overline{1, r}$, $\Delta = x_j - x_{j-1} = 0,329$:

$$\nu_j = F_j - F_{j-1}, \quad F_0 = 0$$

и соответствующие им теоретические вероятности p_j :

$$p_j = \Phi\left(\frac{x_j + j\Delta - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_j - \bar{x}}{s}\right),$$

где $\bar{x}$ и s определяются из (4.6). В результате имеем

ν_j	$7,3 \cdot 10^{-3}$	0,026	0,042	0,067	0,081	0,096	0,110
p_j	$9,4 \cdot 10^{-3}$	0,019	0,034	0,055	0,080	0,105	0,123

ν_j	0,132	0,116	0,100	0,08	0,063	0,041	0,028	$9,3 \cdot 10^{-3}$
p_j	0,130	0,124	0,106	0,08	0,056	0,035	0,019	$9,8 \cdot 10^{-3}$

По формуле (4.5) рассчитываем величину χ^2 : $\chi^2 = 165,7$. Задавшись уровнем значимости $\alpha = 0,1$, по таблице [18] находим значение $\chi_{кр}^2(\alpha, l)$ для $l = 15 - 1 - 2 = 12$ степеней свободы: $\chi_{кр}^2(0,1, 12) = 18,55$. Таким образом, поскольку $\chi^2 > \chi_{кр}^2$, гипотеза о гауссовском распределении выборки должна быть отвергнута, несмотря на кажущуюся близость значений ν_j и p_j .

4.4. Применение программы MathCAD

Программа MathCAD позволяет не только формировать последовательности псевдослучайных чисел с различными распределениями вероятностей, но и проводить их статистическую обработку. Пример программы показан на рис. 4.6.

Программа формирует массив чисел $x_i, i = \overline{1, N}$, с нормальным распределением вероятностей, средним значением $a = 1$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 1$.

Вычисляются среднее значение $\text{mean}(x)$, медиана $\text{median}(x)$, дисперсия $\text{var}(x)$ и среднеквадратическое отклонение $\text{stdev}(x)$. Для заданных значений интервалов int строится гистграмма $\text{hist}(\text{int}, x)$ или $\text{histogram}(\text{int}, x)$.

С помощью стандартных функций и инструментов программирования MathCAD позволяет проводить любую статистическую обработку массивов случайных чисел, в том числе и полученных от произвольных источников и передаваемых в программу через текстовый файл.

4.5. Контрольные вопросы

1. Какие числовые характеристики используются для статистического описания оценки параметра выборки наблюдаемых данных?

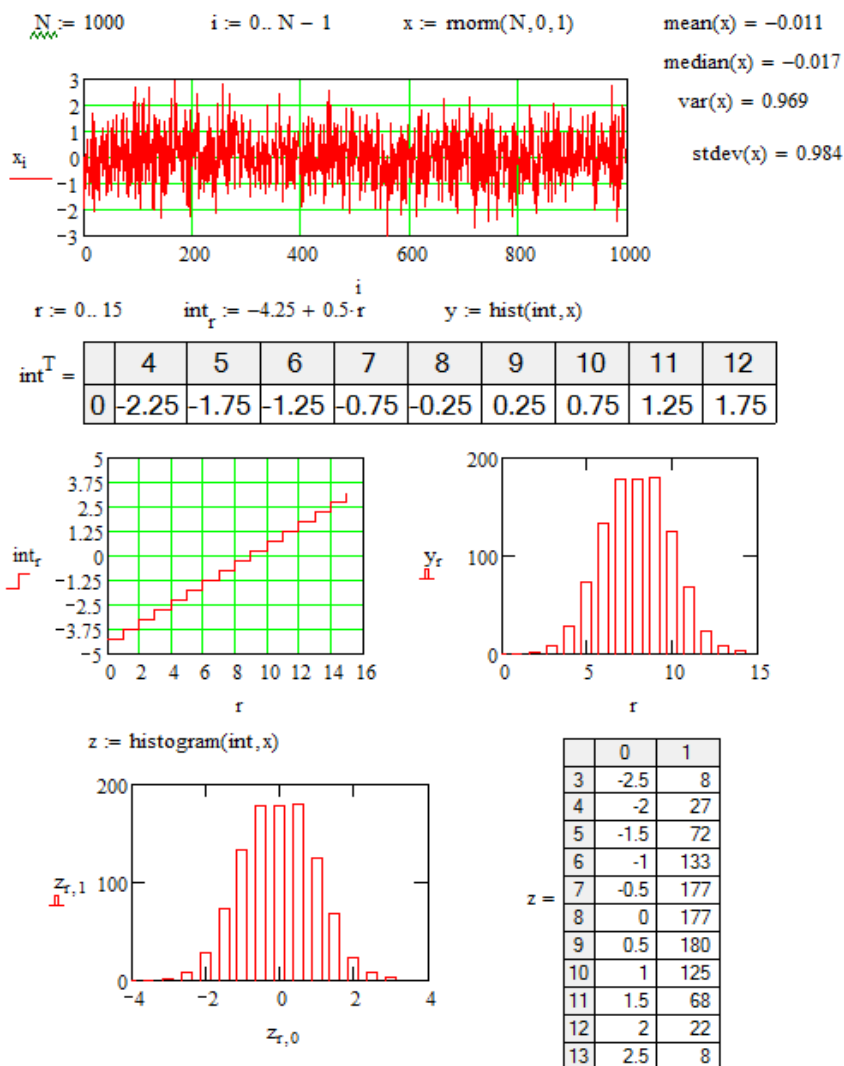


Рис. 4.6

2. Как по выборке наблюдаемых данных оценить начальный и центральный моменты k -го порядка?

3. Что является оценками плотности вероятности и функции распределения выборки наблюдаемых данных? Какова процедура их построения?

4. В каком случае для графического представления функций удобно использовать логарифмический, обратный и прямой функциональный масштаб? Приведите примеры.

5. Как осуществляется проверка соответствия теоретического и экспериментального распределения выборки наблюдаемых данных с помощью вероятностной бумаги?

6. Как осуществляется проверка соответствия теоретического и экспериментального распределения выборки наблюдаемых данных с помощью критерия согласия хи-квадрат Пирсона? В чем особенность использования критерия Пирсона при известных и неизвестных параметрах распределения выборки?

7. Укажите достоинства и недостатки вероятностной бумаги и критерия согласия хи-квадрат Пирсона.

4.6. Задачи

1. Построить в логарифмическом масштабе графики функций

$$f(x) = 1 - \exp[-m \exp(-x^2/2)], \quad x \in [1; 5], \quad m = 10, 50, 80;$$

$$P(k) = \lambda^k \exp(-\lambda)/k!, \quad k \in [1...6], \quad \lambda = 0,5; 1,2;$$

$$f(z, m) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z+4} \exp[-m \exp(-x^2/2) - (x-z)^2/2] dx, \quad z \in [1; 6],$$

$$m = 10, 40;$$

$$f(h, n) = 1 - 2k \int_0^h \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} dx, \quad h \in [0; 8], \quad n = 2, 8, 20.$$

2. Смоделировать $N = 10^3$ случайных величин, подчиняющихся одному из следующих распределений: а) нормальному; б) экспоненциальному; в) пуассоновскому; г) биномиальному; д) релеевскому.

Вычислить выборочные моменты $\bar{x}$, s^2 , m_2 , m_3 , m_4 .
Определить выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса

γ_3, γ_4 . Вычислить теоретические моменты распределений и сравнить их с экспериментальными. Определить доверительные границы оценок параметров для значений доверительных вероятностей $P_0 = 0,9; 0,95$.

3. Сформировать выборку объемом $N = 50 \div 400$ случайных величин, подчиняющихся одному из следующих распределений: а) нормальному; б) экспоненциальному; в) пуассоновскому; г) биномиальному; д) релеевскому.

Построить эмпирическую функцию распределения. Исследовать ее эволюцию от объема N . Сопоставить с теоретической функцией распределения.

4. При помощи вероятностной бумаги определить, к какому типу распределения – нормальному или Коши – принадлежит функция распределения со следующими экспериментальными значениями

x_q	-3,592	-3,127	-2,662	-2,197	-1,732	-1,267	-0,802
F_q	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$	0,018	0,041	0,102	0,215	0,369
x_q	-0,337	0,128	0,593	1,058	1,523	1,988	2,452
F_q	0,549	0,718	0,862	0,943	0,980	0,996	0,999
							1

5. При помощи вероятностной бумаги определить, к какому типу распределения – нормальному или релеевскому – принадлежит функция распределения со следующими экспериментальными значениями

x_q	0,08	0,545	1,01	1,475	1,94	2,405	2,87
F_q	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$	0,022	0,047	0,116	0,237	0,396
x_q	3,335	3,8	4,265	4,73	5,195	5,66	6,124
F_q	0,573	0,744	0,875	0,95	0,986	0,997	0,999
							1

6. При 100 бросаниях монеты выпало 65 гербов и 35 решек. На основе критерия согласия хи-квадрат Пирсона установить, можно ли считать монету симметричной.

7. Сформировать выборку объемом $N = 10^3 \div 2 \cdot 10^3$ случайных чисел, распределенных по релеевскому и биномиальному закону. Для непрерывной случайной величины построить гистограмму и полигон накопленных частот. Для дискретной случайной величины построить распределение вероятностей и полигон накопленных частот. По критерию согласия хи-квадрат Пирсона проверить гипотезу о соответствии теоретического и эмпирического распределений.

5. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. МЕТОД СКОЛЬЗЯЩЕГО СУММИРОВАНИЯ

5.1. Общие положения

Базовой моделью стационарного гауссовского случайного процесса является стандартный гауссовский случайный процесс $x(t)$ с нулевым математическим ожиданием (средним значением) $m = 0$, единичной дисперсией $\sigma^2 = 1$ и заданной нормированной корреляционной функцией (коэффициентом корреляции) $R(t_2 - t_1)$:

$$w(x) = \exp(-x^2/2) / \sqrt{2\pi}, \quad (5.1)$$

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \langle x^2(t) \rangle = 1, \quad \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = R(t_2 - t_1), \quad R(0) = 1.$$

Здесь $w(x)$ – одномерная плотность вероятности, а угловые скобки $\langle \rangle$ означают операцию статистического усреднения (по всем возможным реализациям $x(t)$).

Линейное преобразование

$$X(t) = \sigma x(t) + m$$

позволяет получить стационарный гауссовский случайный процесс с заданным математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 . Линейное преобразование

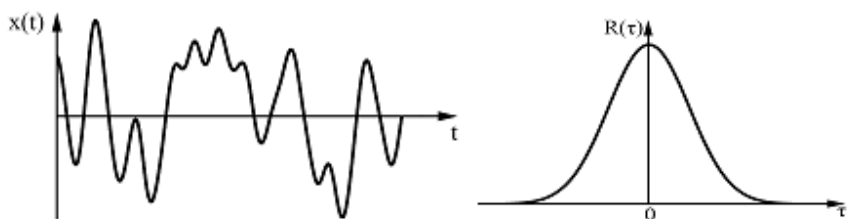
$$X(t) = \sigma(t)x(t) + m(t)$$

позволяет сформировать нестационарный случайный процесс с характеристиками

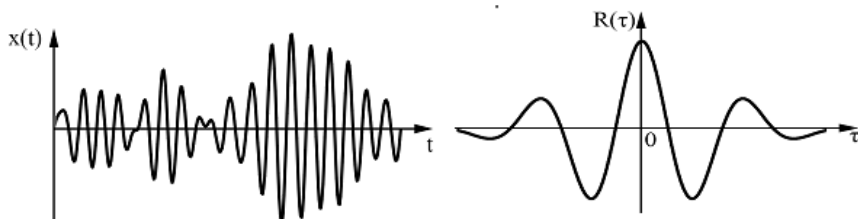
$$\langle X(t) \rangle = m(t), \quad \langle [X(t_1) - m(t_1)][X(t_2) - m(t_2)] \rangle = \sigma(t_1)\sigma(t_2)R(t_2 - t_1).$$

Рассмотрим вначале формирование на ЭВМ стационарных гауссовских случайных процессов с характеристиками (5.1). Особенности формирования случайного процесса зависят от типа случайного процесса. В

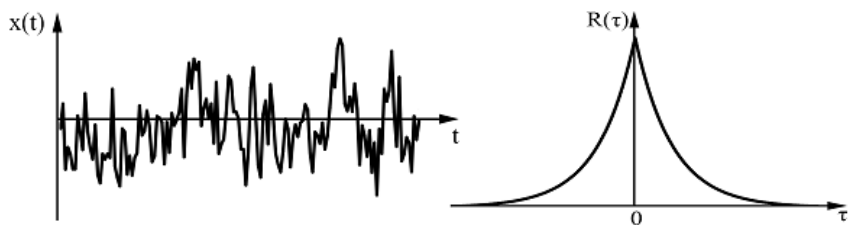
задачах моделирования принято выделять три типа случайных процессов: а) плавно меняющийся (дифференцируемый) процесс, б) плавно меняющийся осциллирующий (квазигармонический) процесс, в) неплавно меняющийся (недифференцируемый) процесс. Качественный вид реализаций указанных типов случайных процессов и соответствующих им корреляционных функций (коэффициентов корреляции) показан на рис. 5.1а-5.1в соответственно.



а)



б)



в)

Рис. 5.1

Случайный процесс называют дифференцируемым, если существует вторая производная $R''(\tau)$ его корреляционной функции в точке $\tau = 0$ [10]. Если же $R''(0)$ не существует или равна бесконечности, то такой процесс называют недифференцируемым. Дифференцируемость процесса можно определить по виду его спектральной плотности. Действительно, согласно теореме Винера-Хинчина корреляционная функция $R(\tau)$ и спектральная $G(\omega)$ связаны между собой парой преобразований Фурье:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \\ R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что

$$R''(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G(\omega) d\omega \quad (5.3)$$

и характеризует эффективную ширину спектра $\Omega = \sqrt{-R''(0)}$ процесса $x(t)$. Тогда процесс $x(t)$ будет являться дифференцируемым, если

$$G(\omega) \sim 1/\omega^{4+c}, \quad c = 0, 2, 4, \dots, \quad (5.4)$$

т.е. интеграл (5.3) существует. Если же

$$G(\omega) \sim 1/\omega^{2-c}, \quad c = 0, 2, 4, \dots, \quad (5.5)$$

то процесс $x(t)$ называют недифференцируемым. При записи условий (5.4), (5.5) учитывалось, что спектральная плотность случайного процесса всегда является четной функцией частоты.

Разложим корреляционную функцию $R(\tau)$ дифференцируемого случайного процесса в ряд Тейлора:

$$R(\tau) = R(0) + R'(0)\tau + R''(0)\tau^2/2 + \dots \quad (5.6)$$

Поскольку $R(\tau)$ достигает максимума в точке $\tau = 0$: $R(0) = 1$,

то $R'(0) = 0$ и для (5.6) имеем:

$$R(\tau) = 1 + R''(0)\tau^2/2 + o(\tau^2). \quad (5.7)$$

Таким образом, при малых значениях τ (в окрестности точки $\tau = 0$) корреляционная функция любого дифференцируемого процесса аппроксимируется параболой.

Если процесс $x(t)$ является недифференцируемым, то при $\tau \rightarrow 0$ для $R(\tau)$ справедливо представление

$$R(\tau) = 1 - \delta|\tau| + o(|\tau|), \quad \delta > 0, \quad (5.8)$$

т.е. в малой окрестности точки $\tau = 0$ корреляционная функция недифференцируемого случайного процесса допускает треугольную аппроксимацию. Величина δ , как и $R''(0)$ в (5.7), определяет корреляционно-спектральные характеристики процесса $x(t)$ и связана прямо пропорциональной зависимостью с эффективной шириной его спектра и обратно пропорциональной зависимостью с его временем корреляции [10,15].

5.2. Выбор шага дискретизации случайного процесса

Непрерывные процессы в ЭВМ реализуются в виде коррелированной дискретной последовательности случайных чисел. Поэтому при моделировании необходимо оценить погрешность, возникающую при замене непрерывного процесса $x(t)$, $t \in [0, T]$ дискретной цепью $x(t_i)$, $i = \overline{1, n}$. Погрешность определяется интервалом временной дискретизации $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ и интервалом квантования по уровню, зависящим от разрядности ЭВМ. Так как разрядность ЭВМ велика, то ошибкой квантования по уровню можно пренебречь.

Будем характеризовать погрешность временной дискретизации процесса $x(t)$ величиной

$$\varepsilon = \max \left\{ \left\langle [x(t) - x(t_i)]^2 \right\rangle \right\}^{1/2}. \quad (5.9)$$

Тогда из (5.9) получаем $\varepsilon = \max \{ 2[1 - R(t - t_i)] \}^{1/2}$.

Пусть имеется два отсчета случайного процесса (рис. 2.2). Очевидно, при малом Δt максимальное отличие непрерывной реализации $x(t)$ от $x(t_i)$, $x(t_{i+1})$ на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ будет в центре между отсчетами, что соответствует условию $t - t_i = \Delta t/2$. Тогда

$$\varepsilon = \max \{ 2[1 - R(\Delta t/2)] \}^{1/2}. \quad (5.10)$$

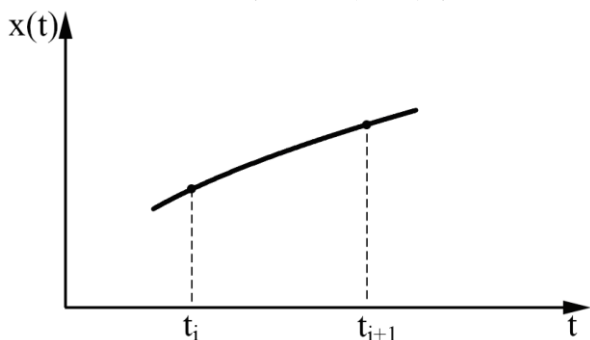


Рис. 5.2

Нетрудно оценить погрешность ε для дифференцируемых и недифференцируемых случайных процессов $x(t)$, учитывая малость Δt . Если процесс $x(t)$ дифференцируем, то с учетом (5.7) выражение (5.10) преобразуется к виду

$$\varepsilon = \Delta t \sqrt{-R''(0)}/2 = \Delta t/2\tau_{кор}, \quad (5.11)$$

где $\tau_{кор} = 1/\sqrt{-R''(0)}$ – интервал корреляции процесса $x(t)$. Если процесс $x(t)$ недифференцируемый, то из (5.8), (5.10) находим

$$\varepsilon = \sqrt{\Delta t/\tau_{кор}}. \quad (5.12)$$

Здесь, следуя [10], в качестве времени корреляции $\tau_{кор}$ принята длительность треугольной аппроксимации (5.8) функции $R(\tau)$ на уровне 0,5: $\tau_{кор} = \delta^{-1}$.

Зададимся некоторой погрешностью дискретизации, например, $\varepsilon = 0,05$. Тогда для дифференцируемого процесса

$$\Delta t = \tau_{кор} / 10, \quad (5.13)$$

а для недифференцируемого –

$$\Delta t = \tau_{кор} / 400. \quad (5.14)$$

Из этой оценки видно, что моделирование недифференцируемых случайных процессов более трудоемкая задача, чем дифференцируемых.

Анализ показывает, что шаг дискретизации (5.13) для формирования дифференцируемых случайных процессов является удовлетворительным со всех точек зрения. При формировании недифференцируемых случайных процессов для широкого класса задач достаточно использовать $\Delta t = \tau_{кор} / 100$.

Пример 5.1. Определить шаг дискретизации процесса с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2 / 2)$, обеспечивающий значение погрешности $\varepsilon = 0,05$.

Решение. Находим $R''(0) = -\alpha^2$. Тогда из (5.11), (5.13) имеем: $\tau_{кор} = 1/\alpha$, $\Delta t = 1/10\alpha$.

Пример 5.2. Определить шаг дискретизации процесса с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$, обеспечивающий значение погрешности $\varepsilon = 0,05$.

Решение. $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \approx 1 - \alpha|\tau|$ при $\tau \rightarrow 0$. Используем формулу (5.14). Тогда $\alpha\Delta t = 1/400$, откуда $\Delta t = 1/400\alpha$.

5.3. Методы формирования гауссовских случайных процессов на ЭВМ

Все алгоритмы формирования реализаций гауссовских случайных процессов могут быть отнесены к одному из следующих методов моделирования:

- метод формирующего фильтра;
- метод ортогональных (канонических) разложений;
- метод коррелированных векторов;
- метод условных распределений.

Идея *метода формирующего фильтра* состоит в пропускании белого шума через специальным образом подобранный формирующий фильтр. При пропускании шума $u(t)$ с корреляционной функцией $K_u(\tau)$ и спектральной плотностью $G_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_u(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau$ через фильтр с передаточной функцией $\dot{H}(j\omega)$ процесс $x(t)$ на выходе фильтра имеет спектральную плотность [10]

$$G_x(\omega) = |\dot{H}(j\omega)|^2 G_u(\omega). \quad (5.15)$$

Если процесс $u(t)$ считать «полосовым» белым шумом в полосе пропускания фильтра $\omega \in [-\omega_g, \omega_g]$ с уровнем $G_u(\omega) = G_0$, то тогда $G_x(\omega) = G_0 |\dot{H}(j\omega)|^2$. В результате с точностью до константы форма спектра выходного случайного процесса совпадает с квадратом амплитудно-частотной характеристики фильтра. Таким образом, подобрав соответствующий фильтр, можно сформировать случайный процесс с требуемыми корреляционно-спектральными свойствами.

Метод формирующего фильтра является одним из самых универсальных, пригодных для генерации процессов с любой корреляционной функцией. Он позволяет формировать реализации $x(t)$ произвольной длины. Его основной проблемой является нахождение передаточной функции $H(p)$ и соответствующей ей в цифровой области системной функции $H(z)$, а также уменьшение погрешностей, связанных с цифровым представлением $H(z)$. Так, например, корреляционные функции процессов $x(t)$ и $x[j]$ совпадают в соответствующие моменты времени, а их спектральные

плотности могут отличаться. Здесь и далее используется обозначение $x[j] = x(j\Delta t)$, где Δt – шаг дискретизации процесса $x(t)$, а j – номер отсчета. Кроме того, конечное число коэффициентов цифрового фильтра $H(z)$ также влияет на соответствие статистических характеристик процессов $x(t)$ и $x[j]$.

Известны два способа математического описания аналоговой фильтрации «полосового» белого шума $u(t)$:

1) интегралом Дюамеля

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau, \quad (5.16)$$

где $h(\tau)$ – импульсная характеристика формирующего фильтра.

2) дифференциальным уравнением

$$B_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + \dots + B_1 \frac{dx(t)}{dt} + B_0 x(t) = A_L \frac{d^L u(t)}{dt^L} + \dots + A_1 \frac{du(t)}{dt} + A_0 u(t). \quad (5.17)$$

В дискретном варианте этим способам описания соответствуют:

1) метод скользящего суммирования

$$x[j] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u[j - k], \quad (5.18)$$

2) рекуррентный метод

$$x[j] = \sum_{k=0}^L a_k x[j - k] + \sum_{m=1}^M b_m u[j - m]. \quad (5.19)$$

Корреляционная функция и спектральная плотность процесса $x[j]$ определяются коэффициентами c_k , a_k , b_m . Действительно, согласно (5.18)

$$\begin{aligned} \langle x[j] x[m] \rangle &= R[j - m] = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u[j - k] \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l u[m - l] \right\rangle = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-j+m}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Здесь $R[j - m] = R((j - m)\Delta t)$.

Системная функция $H(z)$ формирующего фильтра равна

$$H(z) = \sum_{k=0}^L a_k z^{-k} / \left(1 - \sum_{m=1}^M b_m z^{-m} \right). \quad (5.21)$$

Делая в (5.21) подстановку $z = \exp(j\omega\Delta t)$, можно записать

$$G_x(\omega) = G_0 |H(\exp(j\omega\Delta t))|^2.$$

Метод ортогональных (канонических) разложений основан на разложении процесса в ряд по некоторой системе функций $\{\varphi_k(t)\}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t), \quad t \in T, \quad (5.22)$$

где коэффициенты α_k – гауссовские случайные числа. Для практических целей систему базисных функций $\{\varphi_k(t)\}$ удобно выбирать ортогональной, а коэффициенты α_k – некоррелированными. Такой способ весьма прост и особенно эффективен при моделировании случайных полей. Также с его помощью можно легко моделировать нестационарные процессы.

При практической реализации в ряде (5.22) используют конечное число членов N , определяемое требуемой погрешностью аппроксимации. Если $T \leq \tau_{кор}$, где $\tau_{кор}$ – время корреляции процесса $x(t)$, то число значащих членов N в (5.22) сравнительно невелико. Однако при $T > \tau_{кор}$ ряд (5.22) оказывается медленно сходящимся, так что число слагаемых в нем оказывается достаточно большим. В этой связи алгоритм (5.22) получил распространение лишь для формирования коротких отрезков (реализаций) случайных процессов. Вариантами этого метода являются разложение Карунена-Лоэва, каноническое разложение Пугачева, разложение в ряд Фурье (в том числе дискретное преобразование Фурье).

Метод коррелированных векторов состоит в преобразовании вектора-столбца некоррелированных случайных чисел $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ в вектор-столбец $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ коррелированных отсчетов посредством матричного преобразования

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{U}. \quad (5.23)$$

Здесь $x_j = x[j]$, $j = \overline{1, N}$, N – число отсчетов, а индекс «Т» обозначает операцию транспонирования. Матрица $\mathbf{A}$ является треугольной

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

и получается с помощью разложения Холецкого корреляционной матрицы $\mathbf{R}$ вектора $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \langle \mathbf{X}^T \mathbf{X} \rangle, \quad (5.24)$$

где $\mathbf{A}^T$ – транспонированная матрица, которая может быть найдена с помощью следующего итерационного алгоритма:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{R_{11}}, \quad a_{k1} = R_{k1}/a_{11}, \quad k = 2, \dots, N, \\ a_{kn} &= \left(R_{kn} - \sum_{j=0}^{n-1} a_{kj} a_{nj} \right) / a_{nn}, \quad n = 2, \dots, k-1, \\ a_{nn} &= \sqrt{R_{nn} - \sum_{j=1}^n a_{nj}^2}. \end{aligned}$$

Моделирование процессов с помощью указанного алгоритма целесообразно для формирования коротких реализаций нестационарных случайных процессов. Обычно

этот алгоритм применяется для формирования начальных точек в рекуррентном методе для ликвидации переходного процесса.

Метод условных распределений по своей идее относится к самым общим методам формирования реализаций случайных процессов. Предположим, что нам необходимо получить вектор отсчетов $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ процесса $x(t)$ с заданной многомерной плотностью вероятности

$$w(x_1, x_2, \dots, x_N) = w(x_1) w(x_2|x_1) w(x_3|x_1, x_2) \dots w(x_N|x_1, x_2, \dots, x_{N-1}).$$

Из этого выражения следует, что сначала формируется случайное число x_1 с распределением $w(x_1)$, затем на основе метода суперпозиции число x_2 с распределением $w(x_2|x_1)$ и так далее. Применение этого метода целесообразно только в случае получения коротких реализаций, у которых распределение вероятностей отсчетов x_j меняется. Например, данный алгоритм может использоваться для формирования произвольных марковских случайных процессов, заданных распределением

$$w(x_1, x_2, \dots, x_N) = w(x_1) w(x_2|x_1) w(x_3|x_2) \dots w(x_N|x_{N-1}).$$

Блок-схема моделирования марковского процесса приведена на рис. 5.3.

Если же класс марковских процессов сужается до процессов гауссовского типа, то более эффективным является метод формирующего фильтра.

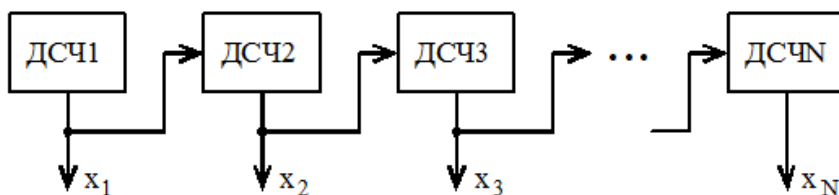


Рис. 5.3

5.4. Метод скользящего суммирования

Формирование реализаций дискретного гауссовского случайного процесса $x[j]$ с нулевым матожиданием и единичной дисперсией по методу скользящего суммирования осуществляется в соответствии с (5.18) согласно алгоритму

$$x[j] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \eta[j-k]. \quad (5.25)$$

Здесь $\eta[\cdot]$ – независимые гауссовские величины с параметрами $\sim N(0,1)$, c_k – весовые коэффициенты. При этом должно выполняться условие

$$\langle x^2[j] \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2 = 1. \quad (5.26)$$

Весовые коэффициенты c_k в (5.25) можно рассчитать по нескольким методикам.

Метод инвариантной импульсной характеристики формирующего фильтра. Обозначим $h(\tau) = h_0 g(\tau)$, где h_0 – некоторая размерная константа в импульсной характеристике аналогового формирующего фильтра (5.16). Если удастся в явном виде получить соответствие между корреляционной функцией $R(\tau)$ формируемого процесса и функцией $g(\tau)$, то коэффициенты c_k могут быть найдены как

$$c_k = b g(k\Delta t), \quad (5.27)$$

Константа b в (5.27) аналитически или численно доопределяется из соотношения

$$b^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g^2(k\Delta t) = 1. \quad (5.28)$$

Отметим, что при нахождении суммы ряда (5.28) может использоваться интегральная оценка (см. пример 5.2).

Пример 5.3. Рассчитать весовые коэффициенты для

моделирования процесса $x(t)$ на выходе интегрирующей цепи.

Решение. Для интегрирующей цепи $h(t) = h_0 \exp(-\alpha t)$, $t \geq 0$. Обозначим: $t = k\Delta t$, $\gamma = \alpha\Delta t$, тогда $c_k = b \exp(-k\gamma)$, $k \geq 0$. Из условия $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = 1$ получаем $b = \sqrt{1 - \exp(-2\gamma)}$, или, при $\gamma \ll 1$, $b \approx \sqrt{2\gamma}$. В результате

$$c_k = \sqrt{2\gamma} \exp(-k\gamma), \quad (5.29)$$

и, соответственно, коэффициент корреляции процесса $x(t)$ определится как $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$.

Корреляционные функции некоторых типовых случайных процессов, соответствующие им спектральные плотности, импульсные характеристики аналогового фильтра и весовые коэффициенты формирующего цифрового фильтра приведены в табл. 5.1. Здесь $\gamma = \alpha\Delta t$, $[\cdot]$ – целая часть числа. Более подробные таблицы коэффициентов c_k для различных случайных процессов можно найти в [11].

Пример 5.4. Рассчитать цифровой формирующий фильтр для моделирования процесса с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2 / 2)$.

Решение. Согласно табл. 5.1 для заданной корреляционной функции $g(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2)$. Тогда

$$c_k = b \exp(-k^2 \alpha^2 \Delta t^2) = b \exp(-k^2 \gamma^2).$$

Из (5.28) для множителя b имеем

$$b^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-2k^2 \gamma^2) = 1. \quad (5.30)$$

Воспользуемся интегральной оценкой суммы ряда (5.30):

$$b^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-2k^2 \gamma^2) \approx b^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\gamma^2 x^2) dx = b^2 \sqrt{\pi/2\gamma^2} = 1.$$

Тогда $b = \sqrt{2\gamma^2/\pi}$, и мы получаем соответствующее выражение для c_k из табл. 5.1.

Таблица 5.1

№	$R(\tau)$	$G(\omega)$	$g(\tau)$	c_k
1	$\exp\left(-\frac{\alpha^2 \tau^2}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}\right)$	$\exp(-\alpha^2 \tau^2)$	$\sqrt[4]{\frac{2\gamma^2}{\pi}} \exp(-k^2 \gamma^2)$
2	$(1 + \alpha \tau)\exp(-\alpha \tau)$	$\frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$	$\tau \exp(-\alpha\tau), \tau \geq 0$	$2\gamma^{3/2} k \exp(-k\gamma)$
3	$\frac{\sin(\omega_g \tau)}{\omega_g \tau}$	$\frac{\pi}{\omega_g}, \omega \leq \omega_g$	$\frac{\sin(\omega_g \tau)}{\omega_g \tau}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\gamma_0}} \frac{\sin(k\gamma_0)}{k},$ $\gamma_0 = \omega_g \Delta t$
4	$\exp(-0,1x^2)(1 - 0,4x^2 + 0,02x^4),$ $x = \alpha\tau$	$10\pi(2\Omega^2 - 1)^2 \times$ $\times \exp(-\Omega^2)/\alpha^2,$ $\Omega = \omega/\alpha\sqrt{0,4}$	$\exp(-x^2/5) \times$ $\times (0,8x^2 - 1)$	$\sqrt[4]{\frac{\gamma^2}{10\pi}} (0,8k^2\gamma^2 - 1) \times$ $\times \exp(-0,2k^2\gamma^2)$
5	$\exp(-\alpha \tau)$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	$\exp(-\alpha\tau), \tau \geq 0$	$\sqrt{2\gamma} \exp(-k\gamma)$
6	$1 - \alpha \tau $	$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\sin(\omega/2\alpha)}{\omega/2\alpha} \right)^2$	$1, \tau \in [0, \alpha^{-1}]$	$1/\sqrt{N}, N = [\gamma^{-1}] + 1$

Особенности метода инвариантных импульсных характеристик:

1) метод является универсальным и позволяет формировать процессы с любыми спектрально-корреляционными характеристиками.;

2) корреляционные функции непрерывного и дискретного процессов совпадают;

3) спектральные плотности непрерывного и дискретного процессов в общем случае отличаются, однако при $\Delta t \rightarrow 0$ эти отличия малы;

4) необходимо знание непрерывного аналога формирующего фильтра.

Метод обратного дискретного преобразования Фурье.

Если импульсная характеристика формирующего фильтра неизвестна, но задан вид спектральной плотности $G_x(\omega)$ (или корреляционной функции) моделируемого процесса $x(t)$, то для расчета весовых коэффициентов может быть использован метод преобразования Фурье.

Как известно [10], пара преобразований Фурье для непрерывного процесса $f(t)$ имеет вид

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega,$$

а дискретизированного -

$$F_g(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) \exp(-j\omega n\Delta t),$$

$$f(n\Delta t) = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} F_g(\omega) \exp(j\omega n\Delta t) d\omega. \quad (5.31)$$

Спектры непрерывного и дискретизированного процессов связаны соотношением

$$F_g(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\omega + \frac{2m\pi}{\Delta t}\right), \quad (5.32)$$

т.е. спектр дискретизированного процесса получается путем периодического продолжения спектра непрерывного сигнала. В связи с этим спектр $G_x(\omega)$ непрерывного процесса $x(t)$ должен быть ограничен полосой частот $|\omega| \leq \omega_g$. При неограниченном по частоте спектре $G_x(\omega)$ для возможности представления $x(t)$ в цифровой форме необходимо выполнить операцию усечения вида

$$\tilde{G}_x(\omega) = \begin{cases} G_x(\omega), & |\omega| \leq \omega_g, \\ 0, & |\omega| > \omega_g, \end{cases} \quad (5.33)$$

где $\omega_g = \pi/\Delta t$. Граничная частота спектра ω_g (шаг дискретизации Δt) в (5.33) выбирается, исходя из допустимых искажений спектра формируемого процесса.

Основываясь на (5.31), (5.32), можно записать спектральную плотность $G_g(\omega)$ дискретного процесса $x[j]$ в полосе частот $|\omega| \leq \omega_g$ как $G_g(\omega) = G_x(\omega)/\Delta t$.

Из (5.15) следует, что передаточная функция $\dot{H}_g(j\omega)$ дискретного формирующего фильтра связана со спектральной

плотностью $G_g(\omega)$ дискретного процесса $x[j]$ соотношением

$$G_g(\omega) = |\dot{H}_g(j\omega)|^2.$$

Тогда, поскольку при цифровом статистическом моделировании отсутствуют проблемы физической реализуемости фильтра, можно считать, что формирующий фильтр имеет действительную передаточную функцию

$$H_g(\omega) = \sqrt{G_g(\omega)} = \sqrt{G_x(\omega)/\Delta t}.$$

В результате согласно (5.31) импульсная характеристика цифрового формирующего фильтра имеет вид

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} H_g(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega = \frac{\Delta t}{\pi} \int_0^{\pi/\Delta t} \sqrt{\frac{1}{\Delta t} G_x(\omega)} \cos(\omega k \Delta t) d\omega = \\ &= \frac{1}{\omega_g} \int_0^{\omega_g} \sqrt{\frac{\omega_g}{\pi} G_x(\omega)} \cos\left(\frac{k\pi\omega}{\omega_g}\right) d\omega = \frac{1}{\omega_g} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\omega_g}{\pi} G_x(\omega)} \cos\left(\frac{k\pi\omega}{\omega_g}\right) d\omega. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Особенностью формулы (5.34) является возможность применения стандартной процедуры обратного быстрого преобразования Фурье при расчете c_k .

Пример 5.5. Определить весовые коэффициенты для формирования случайного процесса с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2 / 2)$.

Решение. Согласно (5.2) спектральная плотность моделируемого процесса

$$G(\omega) = (\sqrt{2\pi}/\alpha) \exp(-\omega^2 / 2\alpha^2).$$

Подставляя это выражение в (5.34) и учитывая, что $\gamma = \alpha \Delta t \ll 1$, получаем

$$c_k = \frac{1}{\omega_g} \int_0^\infty \left[\frac{\omega_g}{\pi} \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right) \right]^{1/2} \cos\left(\frac{k\pi\omega}{\omega_g}\right) d\omega = \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\pi}} \exp(-k^2 \gamma^2). \quad (5.35)$$

Выражение (5.35) совпадает с приведенным в табл. 2.1

значением c_k , полученным другим методом.

Данный метод расчета коэффициентов c_k обеспечивает совпадение спектральных характеристик непрерывного $x(t)$ и дискретного $x[j]$ процессов, но их корреляционные функции в общем случае могут не совпадать. Однако это отличие незначительно при $\Delta t \rightarrow 0$.

Метод, основанный на разложении корреляционной функции процесса. Обозначая $n = j - m$, перепишем выражение для дискретной корреляционной функции процесса $x[j]$ (5.20) в виде

$$R[n] = \sum_{k=0}^{L-|n|} c_k c_{k+m}.$$

Изменяя n от 0 до L , получаем систему уравнений относительно c_k :

$$\begin{aligned} R[0] &= c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_L^2, \\ R[1] &= c_0 c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{L-1} c_L, \dots \\ R[n] &= c_0 c_n + c_1 c_{n+1} + \dots + c_{L-n} c_L, \dots \\ R[L] &= c_0 c_L. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Система уравнений (5.36) может быть решена численными методами. Однако на практике эта задача является весьма сложной, так как должна быть локализована многомерная область в пространстве переменных $(c_0, \dots, c_L)$, содержащая нужное решение, должно быть задано начальное приближение для расчета данных коэффициентов, и определитель матрицы Якоби для системы (5.36) не должен обращаться в нуль. В этой связи для решения (5.36), как правило, применяют рекуррентный алгоритм оценивания:

$$c_0^{(0)} = \sqrt{R[0]},$$

$$c_k^{(l)} = \begin{cases} 0, & \text{если } k > 1, \\ \left\{ R[k] - \sum_{i=1}^{L-k} c_i^{(l-k)} c_{i+k}^{(l)} \right\} / c_0^{(l-k)}, & \text{если } k \leq 1, \end{cases}$$

$$c_0^{(l)} = \sqrt{R[0] - \sum_{i=1}^L [c_i^{(l)}]^2},$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$ – номер итерации.

Пример 5.6. Пусть задана корреляционная функция $R(\tau) = 1 - \alpha|\tau|$. Для наглядности, чтобы число коэффициентов скользящего суммирования было не слишком большим, выберем шаг дискретизации равным $\Delta t = 0,5/\alpha$ (в практических расчетах следует выбирать $\Delta t = (0,01 \div 0,05)/\alpha$). Тогда (5.36) запишется в виде:

$$c_0^2 + c_1^2 = 1, \quad c_0 c_1 = 1/2.$$

Нетрудно видеть, что $c_0 + c_1 = \pm\sqrt{2}$. Отсюда следует множество возможных решений. Для целей моделирования могут быть выбраны следующие два: а) $c_0 = c_1 = \sqrt{2}/2$, б) $c_0 = c_1 = -\sqrt{2}/2$.

Поскольку на практике невозможно реализовать операцию суммирования бесконечно большого числа слагаемых, количество весовых коэффициентов в (5.25) необходимо ограничить. Используя (5.26), это можно сделать, исходя из условия

$$\left| 1 - \sum_{k=-L}^L c_k^2 \right| = \varepsilon_1 \ll 1.$$

В практических приложениях ε_1 берут равным $10^{-3} \div 10^{-4}$. Это соответствует ограничению коэффициентов c_k по уровню $10^{-2} \div 10^{-3}$.

Пример 5.7. При формировании случайного процесса с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-|\tau|)$ коэффициенты c_k

определяются согласно (5.29). Тогда при $\gamma = 0,01$ получаем $L \approx 200$.

Оценка величины L для различных корреляционных функций и шагов дискретизации приведена в табл. 5.2.

Таблица 5.2

№	$R(\tau)$	$\tau_{кор}$	$\gamma = \Delta t / \tau_{кор}$	L	$\gamma = \Delta t / \tau_{кор}$	L
1	$\exp(-\alpha^2 \tau^2 / 2)$	$1/\alpha$	0,1	39	0,2	19
2	$(1 + \alpha \tau)\exp(-\alpha \tau)$	$1/\alpha$	0,1	61	0,2	41
3	$\sin(\omega_\xi \tau) / \omega_\xi \tau$	$\sqrt{3} / \omega_\xi$	0,1	2001	0,2	501
4	$\exp(-0,1x^2)(1 - 0,4x^2 + 0,02x^4), x = \alpha\tau$	$1/\alpha$	0,1	121	0,2	61
5	$\exp(-\alpha \tau)$	$1/\alpha$	0,01	340	0,02	170
6	$1 - \alpha \tau $	$1/\alpha$	0,01	100	0,02	50

Отметим достоинства и недостатки метода скользящего суммирования. Достоинства:

1) он является универсальным, т.е. позволяет сформировать процесс с любой заданной корреляционной функцией, при этом погрешность ε_1 , связанную с ограничением числа коэффициентов, можно сделать сколь угодно малой;

2) не является достаточно критичным к свойству гауссовости исходных случайных чисел, поскольку при суммировании происходит дополнительная нормализация получающегося отсчета случайного процесса.

Недостаток: относительно невысокое быстродействие алгоритма, особенно при моделировании недифференцируемых случайных процессов.

5.5. Контрольные вопросы

1. Каковы особенности формирования на ЭВМ дифференцируемых и недифференцируемых случайных процессов?

2. Из каких соображений выбирается шаг дискретизации при формировании отсчетов моделируемого случайного процесса на ЭВМ?

3. Перечислите методы формирования гауссовских случайных процессов на ЭВМ. Дайте их краткую характеристику. Укажите условия целесообразности их применения.

4. Каким образом формируются отсчеты моделируемого случайного процесса в методе скользящего суммирования?

5. Укажите способы расчета весовых коэффициентов при формировании отсчетов моделируемого случайного процесса в методе скользящего суммирования. Приведите основные соотношения.

6. В каких случаях целесообразно применять тот или иной способ расчета весовых коэффициентов в методе скользящего суммирования?

7. Из каких соображений выбирается число весовых коэффициентов в методе скользящего суммирования?

8. Укажите достоинства и недостатки метода скользящего суммирования.

5.6. Задачи

1. Сформировать гауссовский процесс на выходе фильтра с импульсной характеристикой

$$h(t) = h_0 \exp(-t^2/2)(4t^2 - 2).$$

2. Сформировать гауссовский процесс на выходе фильтра с импульсной характеристикой

$$h(t) = h_0 \exp(-\alpha t) \sin(\omega_0 t), \quad t \geq 0.$$

3. Сформировать процесс с корреляционной функцией

$$R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)(1 + \alpha|\tau|).$$

4. Сформировать процесс с корреляционной функцией

$$R(\tau) = \exp(-\tau^2/\tau_0^2).$$

5. Сформировать процесс с корреляционной функцией $R(\tau) = \sin(\Omega\tau)/\Omega\tau$ (процесс с полосовым спектром).

6. Сформировать винеровский случайный процесс, определяемый как $w(t) = \int_0^t n(t') dt'$, где $n(t)$ – гауссовский белый шум с единичной спектральной плотностью.

7. Сформировать процесс с корреляционной функцией

$$R(\tau) = \sigma^2 / (1 + \omega_0^2 \tau^2).$$

8. Сформировать процесс с корреляционной функцией

$$R(\tau) = 1 - |\tau|/\tau_{кор}, \quad |\tau| \leq \tau_{кор}.$$

9. Сформировать двумерный нормальный случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ с вектором математических ожиданий $(0,0)$ и корреляционной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$.

Оценить $P[\xi_1 < 0, \xi_2 < 0]$ и сравнить оценку с теоретическим значением этой вероятности.

10. Сформировать двумерный нормальный случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ с вектором математических ожиданий $(1,1)$ и корреляционной матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Оценить $P[\xi_1 < 0, \xi_2 < 0]$ и сравнить оценку с теоретическим значением этой вероятности.

6. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ – РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД, МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

6.1. Рекуррентный метод (метод авторегрессии, скользящего среднего)

Метод основывается на процедуре рекурсивной фильтрации (5.19). Если порядок рекурсивного фильтра (5.19) мал ($L, M \leq 2$), то его коэффициенты $\{a_k\}$, $\{b_m\}$ могут быть найдены по коэффициентам $\{A_k\}$, $\{B_m\}$ (5.17) в ходе перехода от непрерывных производных к конечным разностям. В общем случае коэффициенты $\{a_k\}$, $\{b_m\}$ ищутся с помощью z -преобразования согласно следующим этапам.

1. Определяется обобщенная спектральная плотность $G_x(z)$ процесса $x(t)$ на выходе фильтра (5.19) с помощью двустороннего z -преобразования:

$$G_x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R[n] z^{-n} = G_x^+(z) + G_x^+(z^{-1}) - R[0],$$

где $G_x^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} R[n] z^{-n}$ – одностороннее z -преобразование, $R[n] = R(n\Delta t)$ – отсчеты корреляционной функции процесса $x(t)$. При этом из (5.20) следует, что $G_x(z)$ связана с системной функцией $H(z)$ фильтра (5.19) соотношением

$$G_x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k c_{k+n} z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n+k} z^{-k-n} = H(z^{-1}) H(z).$$

2. Выполняется факторизация функции $G_x(z)$, т.е. ее разбиение на сомножители:

$$G_x(z) = H(z^{-1}) H(z) = \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} \cdot \frac{A(z)}{B(z)}. \quad (6.1)$$

3. Из (6.1) выделяется системная функция

формирующего фильтра $H(z) = A(z)/B(z)$ и преобразуется к виду (5.21), из которого получаются весовые коэффициенты $\{a_k\}$, $\{b_m\}$.

Пример 6.1. Сформировать случайный процесс с нормированной корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$.

Решение. $R[n] = R(n\Delta t) = \exp(-\gamma|n|)$, где $\gamma = \alpha\Delta t$.

Вычисляем обобщенную спектральную плотность

$$G_x^+(z) = 1/(1 - \rho z^{-1}),$$

где $\rho = \exp(-\gamma)$. Отсюда $G_x(z) = (1 - \rho^2)/(1 - \rho z)(1 - \rho z^{-1})$.

Факторизуем функцию $G_x(z)$

$$G_x(z) = \left[\sqrt{1 - \rho^2} / (1 - \rho z) \right] \left[\sqrt{1 - \rho^2} / (1 - \rho z^{-1}) \right]$$

и находим

$$H(z) = \sqrt{1 - \rho^2} / (1 - \rho z^{-1}).$$

Из этого выражения следует, что $a_0 = \sqrt{1 - \rho^2}$, $b_1 = -\rho$. Таким образом,

$$x[j] = \sqrt{1 - \rho^2} \eta[j] + \rho x[j-1]. \quad (6.2)$$

Пример 6.2. Построить рекурсивный фильтр для формирования процесса с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \cos(\omega_0 \tau)$.

Решение. Дискретизированная функция равна

$$R[n] = R(n\Delta t) = \exp(-\alpha\Delta t|n|) \cos(\omega_0 \Delta t n) = \rho^{|n|} \cos(\gamma_0 n),$$

где $\rho = \exp(-\alpha\Delta t)$, $\gamma_0 = \omega_0 \Delta t$. Пользуясь таблицами z-преобразования, вычисляем обобщенную спектральную плотность

$$G_x^+(z) = (1 - \rho z^{-1} \cos \gamma_0) / (1 - 2\rho z^{-1} \cos \gamma_0 + \rho^2 z^{-2}).$$

Отсюда

$$G_x(z) = \frac{A_1 + A_0(z + z^{-1})}{(1 + b_1 z + b_2 z^2)(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})},$$

где $A_0 = -\rho(1-\rho^2)\cos\gamma_0$, $A_1 = 1-\rho^4$, $b_1 = -2\rho\cos\gamma_0$, $b_2 = \rho^2$.
Факторизуем функцию

$$G_x(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{1 + b_1 z + b_2 z^2} \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}. \quad (6.3)$$

Коэффициенты a_0 , a_1 в (6.3) могут быть найдены из решения следующей системы уравнений:

$$A_0 = a_0 a_1, \quad A_1 = a_0^2 + a_1^2. \quad (6.4)$$

Разрешая (6.4) относительно a_0 , a_1 в общем виде, находим

$$a_0 = (\pm \sqrt{A_1 + 2A_0} \pm \sqrt{A_1 - 2A_0})/2, \\ a_1 = (\pm \sqrt{A_1 + 2A_0} \mp \sqrt{A_1 - 2A_0})/2.$$

При моделировании для определенности можно выбрать, например,

$$a_0 = (\sqrt{A_1 + 2A_0} + \sqrt{A_1 - 2A_0})/2, \\ a_1 = (\sqrt{A_1 + 2A_0} - \sqrt{A_1 - 2A_0})/2.$$

В результате получаем следующий алгоритм формирования случайного процесса

$$x[j] = a_0 \eta[j] + a_1 \eta[j-1] - b_1 x[j-1] - b_2 x[j-2]. \quad (6.5)$$

Данная модель рекурсивной фильтрации удобная для формирования процессов с отношением $\omega_0/\alpha \leq 50 \div 100$. Если $\omega_0 \gg \alpha$, то целесообразнее использовать квадратурный метод формирования процессов.

Рекурсивный фильтр может быть получен на основе метода факторизации в случае дробно-рациональной спектральной плотности $G_x(\omega)$ процесса $x(t)$:

$$G_x(\omega) = P(\omega)/Q(\omega), \quad (6.6)$$

где $P(\omega)$, $Q(\omega)$ – полиномы четных степеней частоты ω . Для других спектральных плотностей факторизация затруднительна. Некоторые алгоритмы моделирования гауссовских случайных процессов с использованием рекуррентного метода и их параметры приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

№	$R(\tau)$	алгоритм	параметры
1	$\exp(-\alpha \tau)$	$x[j] = a_0\eta[j] + b_1x[j-1]$	$a_0 = \sqrt{1-\rho^2}$, $b_1 = -\rho$, $\rho = \exp(-\gamma)$, $\gamma = \alpha\Delta t$
2	$\exp(-\alpha \tau)\cos(\omega_0\tau)$	$x[j] = a_0\eta[j] + a_1\eta[j-1] +$ $+ b_1x[j-1] + b_2x[j-2]$	$a_0 = \sqrt{0,5(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0})}$, $a_1 = \alpha_0/\alpha_1$, $b_1 = 2\rho\cos\gamma_0$, $b_2 = -\rho^2$, $\alpha_0 = \rho(\rho^2 - 1)\cos\gamma_0$, $\alpha_1 = 1 - \rho^4$, $\gamma_0 = \omega_0\Delta t$, $\rho = \exp(-\gamma)$
3	$\exp(-\alpha \tau)[\cos(\omega_0\tau) +$ $+ (\alpha/\omega_0)\sin(\omega_0 \tau)]$	$x[j] = a_0\eta[j] + a_1\eta[j-1] +$ $+ b_1x[j-1] + b_2x[j-2]$	$a_0 = \sqrt{0,5(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0})}$, $a_1 = \alpha_0/\alpha_1$, $b_1 = 2\rho\cos\gamma_0$, $b_2 = -\rho^2$, $\alpha_0 = \rho(\rho^2 - 1)\cos\gamma_0 +$ $+ \alpha\rho(1 + \rho^2)\sin\gamma_0/\omega_0$, $\alpha_1 = 1 - \rho^4 - 2\alpha\rho^2 \times$ $\times \sin(2\gamma_0)/\omega_0$, $\gamma = \alpha\Delta t$, $\gamma_0 = \omega_0\Delta t$, $\rho = \exp(-\gamma)$
4	$(1 + \alpha \tau)\exp(-\alpha \tau)$	$x[j] = a_0\eta[j] + a_1\eta[j-1] +$ $+ b_1x[j-1] + b_2x[j-2]$	$a_0 = \sqrt{0,5(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0})}$, $a_1 = \alpha_0/\alpha_1$, $b_1 = 2\rho$, $b_2 = -\rho^2$, $\alpha_0 = \rho^3(1 + \gamma) - \rho(1 - \gamma)$, $\alpha_1 = 1 - 4\rho^2\gamma - \rho^4$, $\gamma = \alpha\Delta t$, $\rho = \exp(-\gamma)$
5	$\exp(-\alpha \tau)[\cos(\omega_0\tau) -$ $- (\alpha/\omega_0)\sin(\omega_0 \tau)]$	$x[j] = a_0\eta[j] + a_1\eta[j-1] +$ $+ b_1x[j-1] + b_2x[j-2]$	$a_0 = \sqrt{0,5(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0})}$, $a_1 = \alpha_0/\alpha_1$, $b_1 = 2\rho\cos\gamma_0$, $b_2 = -\rho^2$, $\alpha_0 = \rho(\rho^2 - 1)\cos\gamma_0 -$ $- \alpha\rho(1 + \rho^2)\sin\gamma_0/\omega_0$, $\alpha_1 = 1 - \rho^4 + 2\alpha\rho^2 \times$ $\times \sin(2\gamma_0)/\omega_0$, $\gamma = \alpha\Delta t$, $\gamma_0 = \omega_0\Delta t$, $\rho = \exp(-\gamma)$

Процессы авторегрессии-скользящего среднего типа (6.3), (6.5) имеют переходной начальный участок. Действительно, для получения $x[0]$ в общем случае необходимо задание отсчетов

$$\{x(-1), x(-2), \dots\}, \quad \{\eta(0), \eta(-1), \dots\}. \quad (6.7)$$

Для того чтобы не было переходного процесса в начале реализации $x(t)$ ($x[j]$) случайные величины (6.7) с помощью (5.23), (5.24) формируют как коррелированный вектор $\mathbf{y}$ с заданной корреляционной матрицей $\mathbf{R}$. Для алгоритма 1 и алгоритмов 2-5 из табл. 6.2 эта процедура будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta[0] &= y_1, & x[-1] &= y_2, & \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \eta[0] &= y_1, & \eta[-1] &= y_2, & x[-1] &= y_3, & x[-2] &= y_4, \\ \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & 1 & R[1] \\ 0 & a_0 & R[1] & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, в первом случае вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ вырождается в два независимых стандартных гауссовских числа.

Достоинства метода:

1) высокое быстродействие (действительно, как, например, следует из (6.3), текущий отсчет процесса с экспоненциальной корреляционной функцией получается из предыдущего отсчета с весом ρ и нового отсчета шума с весом $\sqrt{1-\rho^2}$, в то же время для формирования аналогичного отсчета $x[j]$ методом скользящего суммирования требовалось порядка 200 коэффициентов);

2) точность (в отличие от метода скользящего суммирования не требуется искусственно ограничивать число коэффициентов фильтра).

Таблица 6.2

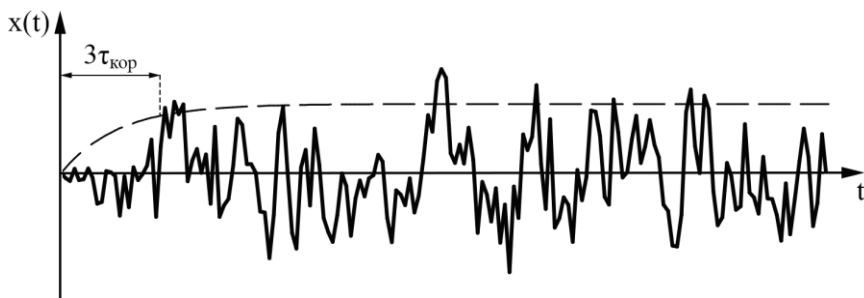
№	$R(\tau)$	алгоритм	параметры
1	$\exp(-\alpha \tau)$	$x[j] = a_0\eta[j] + b_1x[j-1]$	$a_0 = \sqrt{1-\rho^2}$, $b_1 = -\rho$, $\rho = \exp(-\gamma)$, $\gamma = \alpha\Delta t$
2	$\exp(-\alpha \tau)\cos(\omega_0\tau)$	$x[j] = a_0\eta[j] + a_1\eta[j-1] +$ $+ b_1x[j-1] + b_2x[j-2]$	$a_0 = \sqrt{0,5(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0})}$, $a_1 = \alpha_0/\alpha_1$, $b_1 = 2\rho\cos\gamma_0$, $b_2 = -\rho^2$, $\alpha_0 = \rho(\rho^2 - 1)\cos\gamma_0$, $\alpha_1 = 1 - \rho^4$, $\gamma_0 = \omega_0\Delta t$, $\rho = \exp(-\gamma)$
3	$\exp(-\alpha \tau)[\cos(\omega_0\tau) +$ $+ (\alpha/\omega_0)\sin(\omega_0 \tau)]$	$x[j] = a_0\eta[j] + a_1\eta[j-1] +$ $+ b_1x[j-1] + b_2x[j-2]$	$a_0 = \sqrt{0,5(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0})}$, $a_1 = \alpha_0/\alpha_1$, $b_1 = 2\rho\cos\gamma_0$, $b_2 = -\rho^2$, $\alpha_0 = \rho(\rho^2 - 1)\cos\gamma_0 +$ $+ \alpha\rho(1 + \rho^2)\sin\gamma_0/\omega_0$, $\alpha_1 = 1 - \rho^4 - 2\alpha\rho^2 \times$ $\times \sin(2\gamma_0)/\omega_0$, $\gamma = \alpha\Delta t$, $\gamma_0 = \omega_0\Delta t$, $\rho = \exp(-\gamma)$
4	$(1 + \alpha \tau)\exp(-\alpha \tau)$	$x[j] = a_0\eta[j] + a_1\eta[j-1] +$ $+ b_1x[j-1] + b_2x[j-2]$	$a_0 = \sqrt{0,5(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0})}$, $a_1 = \alpha_0/\alpha_1$, $b_1 = 2\rho$, $b_2 = -\rho^2$, $\alpha_0 = \rho^3(1 + \gamma) - \rho(1 - \gamma)$, $\alpha_1 = 1 - 4\rho^2\gamma - \rho^4$, $\gamma = \alpha\Delta t$, $\rho = \exp(-\gamma)$
5	$\exp(-\alpha \tau)[\cos(\omega_0\tau) -$ $- (\alpha/\omega_0)\sin(\omega_0 \tau)]$	$x[j] = a_0\eta[j] + a_1\eta[j-1] +$ $+ b_1x[j-1] + b_2x[j-2]$	$a_0 = \sqrt{0,5(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0})}$, $a_1 = \alpha_0/\alpha_1$, $b_1 = 2\rho\cos\gamma_0$, $b_2 = -\rho^2$, $\alpha_0 = \rho(\rho^2 - 1)\cos\gamma_0 -$ $- \alpha\rho(1 + \rho^2)\sin\gamma_0/\omega_0$, $\alpha_1 = 1 - \rho^4 + 2\alpha\rho^2 \times$ $\times \sin(2\gamma_0)/\omega_0$, $\gamma = \alpha\Delta t$, $\gamma_0 = \omega_0\Delta t$, $\rho = \exp(-\gamma)$

Недостатки метода:

1) применим только для формирования случайных процессов с дробно-рациональным спектром;

2) весьма чувствителен к качеству датчика исходных гауссовских случайных чисел;

3) в силу использования для формирования отсчетов случайного процесса физически реализуемого фильтра при нулевых начальных условиях имеется переходной процесс (см. рисунок) на интервале порядка $2-3\tau_{кор}$. Здесь $\tau_{кор}$ – время корреляции процесса $x(t)$. Частично последний недостаток можно преодолеть, если в (5.19) выбирать не нулевые, а случайные начальные условия.



6.2. Метод ортогональных (канонических) разложений

В данном методе используется разложение случайного процесса в ряд по системе ортогональных функций (5.22), где $\varphi_k(t)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^T \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt = \delta_{kl},$$

δ_{kl} – символ Кронекера. Поскольку среднее значение процесса $x(t)$ принимается равным нулю, то и среднее значение случайных чисел в (5.22) $\langle \alpha_k \rangle = 0$. Выбор системы функций $\{\varphi_k(t)\}$ может обуславливаться различными обстоятельствами.

Рассмотрим наиболее типичные базисы.

Разложение Карунена-Лоэва

Пусть система функций $\{\varphi_k(t)\}$ определяется как решение интегрального уравнения вида

$$\int_0^T R(t-u) \varphi_k(u) du = \lambda_k \varphi_k(t). \quad (6.8)$$

Тогда случайные числа α_k в (5.22) будут не коррелированы между собой, т.е.

$$\langle \alpha_k \alpha_l \rangle = \lambda_k \delta_{kl},$$

причем $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$. Некоррелированность коэффициентов α_k прямо следует из уравнения (6.8).

Ортогональное разложение (5.22), (6.8), называемое в литературе разложением Карунена-Лоэва, является наиболее быстро сходящимся из всех имеющихся. При этом алгоритм формирования случайных процессов на основе (5.22), (6.8) обладает весьма высоким быстродействием, так как функции $\{\varphi_k(t)\}$ могут быть вычислены до моделирования.

Основным недостатком разложения Карунена-Лоэва является необходимость решения интегрального уравнения (6.8). Однако если аналитически явный вид функций $\varphi_k(t)$ получить не удастся, то (6.8) может быть решено численно, а функции $\{\varphi_k(t)\}$ – заданы с помощью массивов.

Пример 6.3. Получить разложение Карунена-Лоэва для процесса с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ на интервале $[-T, T]$.

Решение. Интегральное уравнение

$$\int_{-T}^T \exp(-\alpha|t-u|) \varphi(u) du = \lambda \varphi(t) \quad (6.9)$$

сводится к эквивалентному дифференциальному уравнению вида

$$\varphi''(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0, \quad \omega^2 = \alpha(2 - \alpha\lambda)/\lambda. \quad (6.10)$$

Имеется два фундаментальных решения дифференциального уравнения (6.10):

а) $\varphi_k(t) = C \cos(\omega_k t)$, k – нечетное, где ω_k определяются из решения нелинейного уравнения $\operatorname{tg}(\omega T) = \alpha/\omega$;

б) $\varphi_k(t) = C \sin(\omega_k t)$, k – четное, где ω_k определяются из решения нелинейного уравнения $\operatorname{tg}(\omega T) = -\alpha/\omega$.

В общем случае частоты ω_k некрратны некоторой основной гармонике. Только при $k \gg 1$ можно записать $\omega_k = (k-1)\pi/2T$, k – произвольное целое число. Нормировочная константа C равна $C = 1/\sqrt{T[1 + \sin(2\omega_k T)/2\omega_k T]}$, если k – нечетное, и $C = 1/\sqrt{T[1 - \sin(2\omega_k T)/2\omega_k T]}$, если k – четное. Собственные значения интегрального уравнения (6.9) определяются как

$$\lambda_k = 2\alpha/(\alpha^2 + \omega_k^2).$$

Пример 6.4. Получить разложение Карунена-Лозва для винеровского процесса с корреляционной функцией $R(t, u) = \min(t, u)$ на интервале $[0, T]$.

Решение. Интегральное уравнение (6.9) в данном случае сводится к эквивалентному дифференциальному уравнению

$$\varphi''(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0, \quad \omega^2 = 1/\lambda.$$

Тогда собственные функции и собственные значения имеют вид

$$\varphi_k(t) = \sqrt{2/T} \sin[(k-0,5)\pi/T], \quad \lambda_k = T^2/\pi^2(k-0,5)^2.$$

Приведение интегрального уравнения (6.9) к дифференциальному уравнению несложно для процессов с дробно-рациональной спектральной плотностью (6.6). Далее дифференциальное уравнение высокого (четного) порядка сводится к системе уравнений второго порядка, и ищется набор

собственных функций и собственных значений в векторно-матричной форме. Однако эта технология достаточно громоздка и редко используется. Процессы со спектральной плотностью вида (6.6) достаточно эффективно моделируются рекуррентным алгоритмом. Для других видов спектров и корреляционных функций необходимо иметь или аналитическое или численное решение уравнения Фредгольма (6.8).

Разложение в ряд Фурье

Случайный процесс $x(t)$ длительностью T_M может быть представлен в виде ряда

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos k\Omega t + V_k \sin k\Omega t), \quad (6.11)$$

который в литературе называют рядом Фурье. Здесь $\Omega = 2\pi/T$, $T \geq T_M$, U_k , V_k – независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями $\langle U_k \rangle = \langle V_k \rangle = 0$ и одинаковыми дисперсиями $\langle U_k^2 \rangle = \langle V_k^2 \rangle = \sigma_k^2$. Из (6.11) следует, что реализации $x(t)$ периодически повторяются через интервал времени T .

Определим параметры разложения (6.11) с целью формирования процесса с заданной корреляционной функцией $R(\tau)$. Согласно (6.11)

$$R(t_1, t_2) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 \cos[k\Omega(t_2 - t_1)]. \quad (6.12)$$

Очевидно, $\tau = t_2 - t_1 \in [-T_M, T_M]$. На этом интервале $R(\tau)$ можно разложить в ряд Фурье с основной частотой $2\pi/2T_M$:

$$R(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{2T_M}\right), \quad (6.13)$$

Для совпадения двух представлений $R(\tau)$ (6.12) и (6.13) необходимо, чтобы

$$\Omega = 2\pi/T = 2\pi/2T_M, \text{ т.е. } T = 2T_M. \quad (6.14)$$

Если, кроме того, $T_M > \tau_{кор}$, где $\tau_{кор}$ – время корреляции процесса $x(t)$, то

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2T_M} \int_{-T_M}^{T_M} R(\tau) d\tau \approx \frac{1}{T_M} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = \frac{G(0)}{T_M} = 2\sigma_0^2, \\ a_k &= \frac{2}{2T_M} \int_{-T_M}^{T_M} R(\tau) \cos\left(k \frac{2\pi\tau}{2T_M}\right) d\tau \approx \\ &\approx \frac{1}{T_M} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos\left(k \frac{2\pi\tau}{2T_M}\right) d\tau = \frac{G(k\Omega)}{T_M} = \sigma_k^2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Здесь $G(\omega)$ – спектральная плотность процесса $x(t)$. Таким образом, при выполнении (6.15) для дисперсий случайных величин U_k, V_k (2.47) имеем

$$\sigma_0^2 = G(0)/2T_M, \quad \sigma_k^2 = G(k\Omega)/T_M.$$

При практической реализации число в ряде (6.11) используют конечное число членов N , определяемое требуемой погрешностью аппроксимации. Если $T_M \leq \tau_{кор}$, то число значащих членов N в (6.11) сравнительно невелико. Однако при $T_M > \tau_{кор}$ ряд (6.11) оказывается медленно сходящимся, так что число слагаемых в нем оказывается достаточно большим. В этой связи алгоритм (6.11) получил распространение лишь для формирования коротких отрезков (реализаций) случайных процессов. В общем случае число слагаемых ряда (6.11) можно оценить из соотношений

$$G(k\pi/T_M) \leq \varepsilon_s, \quad \sigma_k^2 \leq \varepsilon_s/T_M \leq 10^{-3} \div 10^{-4}. \quad (6.16)$$

Величина ε_s в (6.16) определяет допустимое искажение спектра исходного процесса $x(t)$.

Пример 6.5. Сформировать полосовой случайный процесс с характеристиками

$$R(\tau) = \sin(\omega_g \tau)/\omega_g \tau; \quad G(\omega) = \pi/\omega_g, \quad |\omega| \leq \omega_g$$

на интервале $T_M = 10$ с при граничной частоте $f_g = 10$ Гц ($\omega_g = 2\pi f_g = 62,832$ рад/с). Из (6.14) находим $\Omega = \pi/T_M = 0,314$. При этом [13] $k \leq 2f_g T_M = 200$. Таким образом, число слагаемых в (6.11) не превышает 200. Если сравнить данный метод с методом скользящего суммирования, в котором число весовых коэффициентов достигает 1000-2000 (см. табл. 2.2) для формирования одного отсчета реализации $x(t)$, то для данного набора параметров алгоритм имитации (6.11) оказывается вполне приемлемым.

Пример 6.6. Сформировать случайный процесс с характеристиками

$$R(\tau) = \exp(-\tau^2/2\tau_{кор}^2), \quad G(\omega) = \tau_{кор} \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2 \tau_{кор}^2/2).$$

Определим граничную частоту в спектре из соотношения $G(\omega_g)/G(0) = \exp(-\omega_g^2 \tau_{кор}^2/2) \leq 10^{-3}$. Тогда $\omega_g = 3,75/\tau_{кор}$ и, следовательно, $k \leq \omega_g T_M/\pi = 3,75 T_M/\pi \tau_{кор}$. Если взять $k_{max} = 20$, то для формирования реализаций длиной $T_M/\tau_{кор} \gtrsim 17$ метод Фурье более эффективен, чем метод скользящего суммирования. Для формирования более длинных реализаций процесса $x(t)$ алгоритм скользящего суммирования является основным способом статистического моделирования.

Цифровым аналогом (2.47) является дискретное преобразование Фурье процесса $x(t)$, определяемое как [9]

$$x[j] = \sum_{k=0}^{N-1} \left(U_k \cos \frac{jk\pi}{N} + V_k \sin \frac{jk\pi}{N} \right), \quad 0 \leq j \leq N-1. \quad (6.17)$$

Здесь $N = T_M/\Delta t$, Δt – шаг дискретизации. Число слагаемых в сумме (6.17) должно быть не меньше, чем число слагаемых k_{max} непрерывного ряда (6.11). Отсюда возникают дополнительные ограничения на шаг дискретизации Δt . Однако, в отличие от (6.11) алгоритм (6.17) может быть реализован при помощи быстрого преобразования Фурье, что повышает его быстродействие по сравнению с (6.11).

При моделировании нормальных случайных процессов распределение коэффициентов U_k , V_k должно быть нормальным. В этих случаях иногда алгоритмы (6.11), (6.17) удобнее представить в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\Omega t - \theta_k), \quad x[j] = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cos\left(\frac{jk\pi}{N} - \theta_k\right), \quad (6.18)$$

где $A_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}$ – амплитуда k -ой гармоники с релеевским распределением, описываемым плотностью вероятности $w(A_k) = (A_k/\sigma_k^2) \exp(-A_k^2/2\sigma_k^2)$, $\theta_k = \arctg(V_k/U_k)$ – случайная фаза с равномерным законом распределения $w(\theta_k) = 1/2\pi$. В ряде задач используют модификацию (6.18) с неслучайными амплитудами гармоник:

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(k\Omega t - \theta_k), \quad x_1[j] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \cos\left(\frac{jk\pi}{N} - \theta_k\right). \quad (6.19)$$

Задание амплитуд C_k в (6.19) производится из соотношения $\langle A_k^2 \rangle = 2\sigma_k^2 = C_k^2$, откуда $C_k = \sqrt{2}\sigma_k$. В этом случае корреляционные функции процессов (6.18), (6.19) будут одинаковыми.

Алгоритмы (6.19) требуют меньшего объема вычислений, чем алгоритмы (6.11), (6.17), (6.18), так как содержат в два раза меньше случайных коэффициентов, реализации которых необходимо формировать на ЭВМ при моделировании. Однако, с помощью (6.19) невозможно, строго говоря, формировать реализации случайных процессов с нормальным распределением, поскольку суммирование даже сколь угодно большого числа членов в (6.19) может не приводить к нормализации распределения процессов $x_1(t)$, $x_1[j]$. Действительно, центральная предельная теорема требует приближенного равенства дисперсий случайных слагаемых, а для процессов с убывающим спектром это условие не выполняется. Исключение составляют процессы с полосовым спектром.

Достоинством метода ортогональных разложений

является возможность формирования процесса $x(t)$ в любой заданной точке и по любой, даже неравномерной сетке отсчетов. Недостатком метода является ограничение на длину реализации.

6.3. Неканонические разложения

Метод неканонических разложений основывается на представлении случайного процесса в виде неслучайной функции со случайными параметрами. Одно из возможных представлений имеет вид

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (6.20)$$

где A , ω , φ – случайные величины с некоторыми законами распределения $w(A)$, $w(\omega)$, $w(\varphi)$. Нетрудно показать, что процесс (6.20) является стационарным, но неэргодическим [10]. Перепишем (6.20) в виде

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\dot{A} \exp(j\omega t)\}. \quad (6.21)$$

Здесь $\dot{A} = A \exp(-j\varphi)$ – комплексная случайная величина (комплексная амплитуда). Если A описывается распределением Релея, φ – равномерно распределенная случайная величина, то $\dot{A}$ будет являться комплексной гауссовской величиной. Корреляционная функция процесса (6.21) имеет вид

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \langle x(t_1)x(t_2) \rangle_{A, \omega, \varphi} = (1/2) \operatorname{Re} \langle \dot{A} \dot{A}^* \exp[j\omega(t_2 - t_1)] \rangle_{A, \omega, \varphi} = \\ &= (1/2) \operatorname{Re} \langle A^2 \rangle_A \langle \exp[j\omega(t_2 - t_1)] \rangle_\omega = (\sigma_A^2/2) \Theta_\omega(t_2 - t_1), \end{aligned} \quad (6.22)$$

Здесь σ_A^2 – дисперсия амплитуды A ,

$$\Theta_\omega(t_2 - t_1) = \int w(\omega) \exp[j\omega(t_2 - t_1)] d\omega$$

– характеристическая функция случайной величины ω .

Процесс (6.21), (6.22) является стационарным в широком смысле. При этом для его выборочной корреляционной функции имеем:

$$K_T(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t_1) x(t_1 + \tau) dt_1 =$$

$$= (1/2) \operatorname{Re} \{ A^2 \exp(j\omega\tau) \}. \quad (6.23)$$

Как видно из (6.23), выборочная корреляционная функция остается функцией случайных величин (A, ω) и никак не сходится к истинной корреляционной функции $R(\tau)$ (6.22).

Иногда предлагают использовать обобщение (6.20) в виде суммы процессов $x(t) = C \sum_{i=1}^N A_i \cos(\omega_i t - \varphi_i)$. Однако условие эргодичности здесь также не выполняется.

6.4. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные этапы формирования отсчетов случайного процесса на ЭВМ рекуррентным методом.

2. Для формирования каких случайных процессов рекуррентный метод является эффективным и практически реализуемым?

3. Каким образом могут быть заданы начальные условия при формировании на ЭВМ случайного процесса рекуррентным методом?

4. Назовите достоинства и недостатки рекуррентного метода моделирования случайных процессов.

5. Какие базисы функций целесообразно использовать при моделировании случайных процессов методом канонических разложений?

6. Как осуществляется представление случайного процесса в базисе Карунена-Лоэва? Каковы преимущества и недостатки этого базиса?

7. Как осуществляется разложение случайного процесса в ряд Фурье? Каким образом выбираются параметры разложения? Укажите особенности использования дискретного преобразования Фурье.

8. Перечислите достоинства и недостатки метода

ортогональных разложений для формирования реализаций случайных процессов.

9. В чем суть метода неканонических разложений для формирования случайного процесса с заданными характеристиками?

6.5. Задачи

1. Сформировать гауссовский процесс со спектральной плотностью $G(\omega) = G_0 / (1 + \omega^2)^2$.

2. Сформировать гауссовский процесс с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)(1 + \alpha|\tau| + \alpha^2\tau^2/3)$.

3. Сформировать гауссовский процесс с корреляционной функцией $R(\tau) = \delta(\tau) - \exp(-|\tau|/\beta)/2\beta$, где $\delta(\tau)$ – дельта-функция.

4. Сформировать случайный процесс с корреляционной функцией $K(\tau) = \sigma_1^2 \exp(-\omega_1|\tau|)\cos\omega_1\tau + \sigma_2^2 \exp(-\omega_2|\tau|)\cos\omega_2\tau$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\omega_1 \neq \omega_2$.

5. Методом ортогональных разложений сформировать стандартный винеровский случайный процесс.

6. Методом ортогональных разложений сформировать случайный процесс со спектральной плотностью фон Кармана

$$G(\omega) = G_0 (\omega_L^2 + \omega^2)^{-11/6} \exp(-\omega^2/\omega_m^2),$$

где $\omega_L = 2\pi L_0$, $\omega_m = 5,92/l_0$, $l_0 = 0,1$, $L_0 = 1000$.

7. Методом разложения в ряд Фурье сформировать случайный процесс с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-|\tau|)$ на интервале $T_M/\tau_{кор} = 30$.

8. Методом разложения в ряд Фурье сформировать процесс с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\tau^2)\cos(2\pi\tau)$.

9. Методом неканонических разложений сформировать случайный процесс с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\tau^2/2)$.

7. МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ И НЕГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

7.1. Моделирование квазигармонических и типовых негауссовских случайных процессов

7.1.1. Моделирование квазигармонических случайных процессов на ЭВМ

Квазигармоническим процессом называется случайный процесс вида

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t - \varphi(t)] \quad (7.1)$$

или

$$x(t) = X(t)\cos(\omega_0 t) + Y(t)\sin(\omega_0 t), \quad (7.2)$$

где $\{A(t), \varphi(t)\}$, $\{X(t), Y(t)\}$ – случайные медленно меняющиеся по сравнению с $\{\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)\}$ функции. Огибающая $A(t)$ и фаза $\varphi(t)$ процесса $x(t)$ связаны с его квадратурами $X(t)$, $Y(t)$ следующим образом:

$$A(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)}, \quad \varphi(t) = \arctg[Y(t)/X(t)], \\ X(t) = A\cos[\varphi(t)], \quad Y(t) = A\sin[\varphi(t)].$$

Корреляционная функция квазигармонического процесса отражает характер его изменения во времени и в общем случае может быть записана как

$$R(\tau) = \rho(\tau)\cos[\omega_0 \tau - \lambda(\tau)] = R_c(\tau)\cos(\omega_0 \tau) + R_s(\tau)\sin(\omega_0 \tau).$$

Здесь $\rho(\tau)$, $\lambda(\tau)$ – некоторые медленно меняющиеся функции (огибающая и фаза),

$$R_c(\tau) = \rho(\tau)\cos[\lambda(\tau)], \quad R_s(\tau) = \rho(\tau)\sin[\lambda(\tau)].$$

При этом из свойства четности корреляционной функции $R(\tau) = R(-\tau)$ следует, что $\rho(\tau) = \rho(-\tau)$, $\lambda(\tau) = -\lambda(-\tau)$.

Для корреляционных функций квадратур $X(t)$, $Y(t)$ имеют место следующие соотношения:

$$\langle X(t) \rangle = \langle Y(t) \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}\langle X(t)X(t+\tau) \rangle &= \langle Y(t)Y(t+\tau) \rangle = R_c(\tau), \\ \langle X(t)Y(t+\tau) \rangle &= -\langle Y(t)X(t+\tau) \rangle = R_s(\tau).\end{aligned}\quad (7.3)$$

Можно показать [10], что при симметричной форме спектральной плотности $G(\omega)$ процесса $x(t)$ относительно центральной частоты ω_0 : $G(|\omega - \omega_0|) = G(\omega - \omega_0)$ справедливо тождество

$$\lambda(\tau) \equiv 0, \quad (7.4)$$

и согласно (7.3) квадратуры $X(t)$, $Y(t)$ являются некоррелированными: $R_s(\tau) = 0$. Если же, кроме того, $X(t)$, $Y(t)$ представляют собой гауссовские случайные процессы, то при выполнении (7.4) они являются статистически независимыми и эквивалентными в статистическом смысле. Это значительно облегчает моделирование квазигармонических процессов.

Существует два подхода для моделирования процесса $x(t)$ (7.1) на ЭВМ.

7.1.2. Прямые методы моделирования квазигармонических процессов

Эти методы применимы для процессов с соотношением ширины спектра $\Delta\omega$ и центральной частоты ω_0 порядка $\Delta\omega/\omega_0 \leq 50 \dots 100$. В таком случае можно использовать рекуррентный метод формирования процессов (5.18). Для квазигармонических процессов с огибающей корреляционной функции вида $\rho(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ получаем разностные уравнения второго порядка, весьма простые для моделирования. Также просто получаются имитационные модели для процессов с корреляционными функциями вида

$$R(\tau) = \sum_{i=1}^N \exp(-\alpha_i \tau) \cos[\omega_i \tau - \lambda_i(\tau)].$$

В этом случае формируется одновременно N квазигармонических процессов с помощью рекурсивных фильтров второго порядка с последующим суммированием отсчетов в одинаковые моменты времени $t = j\Delta t$. В табл. 6.2 приведены соответствующие параметры некоторых имитационных моделей. Более полный набор рекурсивных имитационных моделей приведен в [13].

7.1.3. Метод моделирования с квадратурными компонентами

Если $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, т.е. узкополосные свойства моделируемого процесса ярко выражены, то такой процесс целесообразно формировать на основе (7.2). Согласно этому подходу формируются два независимых (при выполнении условий гауссовости и (7.4)), но с одинаковыми корреляционными функциями случайных процесса $X(t)$, $Y(t)$. Затем они умножаются на квадратурные гармонические процессы $\{\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)\}$.

Дискретный вариант (7.2) на практике реализуется следующим образом. Если гармонические процессы $\{\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)\}$ формируются с шагом Δt^* , то используется рекуррентный способ быстрого вычисления отсчетов:

$$\cos[\omega_0(j+1)\Delta t^*] = C \cos(\omega_0 j\Delta t^*) - S \sin(\omega_0 j\Delta t^*),$$

$$\sin[\omega_0(j+1)\Delta t^*] = C \sin(\omega_0 j\Delta t^*) + S \cos(\omega_0 j\Delta t^*),$$

где $C = \cos(\omega_0 \Delta t^*)$, $S = \sin(\omega_0 \Delta t^*)$. В векторно-матричной форме этот алгоритм выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} c_{j+1} \\ s_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j \\ s_j \end{pmatrix},$$

$c_j = \cos(\omega_0 j\Delta t^*)$, $s_j = \sin(\omega_0 j\Delta t^*)$. Шаг Δt^* выбирается исходя из специфики задачи и требуемой точности представления

гармонических функций. Для типичных задач радиотехники берется 12-24 отсчета на одном периоде колебания. В этом случае $\Delta t^* = 2\pi/(12 \div 24)\omega_0 = 1/(12 \div 24)f_0$, т.е. фазовый угол аргумента гармонического колебания дискретизируется с шагом $(\pi/12 \div \pi/6) = (15^\circ - 30^\circ)$. Однако формирование квадратурных случайных процессов $X(t)$, $Y(t)$ с таким шагом является не только невыгодным с точки зрения вычислительных затрат, но и порождает ряд вычислительных проблем: при $\Delta t^*/\tau_{кор} \rightarrow 0$ коэффициент корреляции квадратур $\rho(\Delta t^*)$ очень мало отличается от 1, что требует представления чисел в формате с большой разрядностью.

В этой связи низкочастотные случайные процессы $X(t)$, $Y(t)$ формируются с шагом $\Delta t \gg \Delta t^*$, определяемым видом огибающей корреляционной функции $\rho(\tau)$, а промежуточные отсчеты с шагом Δt^* вычисляются на основе интерполяционных формул. Обозначим $K = \Delta t/\Delta t^*$ – коэффициент интерполяции выборки. Пусть имеются отсчеты процессов $X(t)$, $Y(t)$ в моменты времени $t_i = i\Delta t$, $i = \overline{0, N}$, $N = T_M/\Delta t$, а узкополосного процесса $x(t)$ – в моменты времени $t_j = j\Delta t^*$, $j = \overline{0, M}$, $M = T_M/\Delta t^*$. Здесь T_M – интервал формирования процесса $x(t)$. Через каждые K отсчетов с шагом Δt^* моменты выборки квадратур $X(t)$, $Y(t)$ и узкополосного процесса $x(t)$ совпадают. Тогда на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ можно использовать следующие интерполяционные формулы для предсказания величины отсчета квадратуры в момент времени $t_i + \tau_k$ ($\tau_k = k\Delta t^*$, $k = \overline{1, K-1}$) [6]:

а) интерполяция нулевого порядка

$$Z(t_i + \tau_k) \approx Z(t_i) = Z_i,$$

б) интерполяция первого порядка

$$Z(t_i + \tau_k) \approx Z(t_i) + \tau_k [Z(t_{i+1}) - Z(t_i)] / \Delta t = Z_i(1 - \xi) + Z_{i+1}\xi,$$

в) интерполяция второго порядка

$$\begin{aligned} Z(t_i + \tau_k) &\approx [Z_{i-1}\tau_k(\tau_k - \Delta t) - 2Z_i(\tau_k^2 - \Delta t^2) + Z_{i+1}\tau_k(\tau_k + \Delta t)] / 2\Delta t^2 = \\ &= [\xi^2(Z_{i-1} - 2Z_i + Z_{i+1}) + \xi(Z_{i+1} - Z_{i-1}) + 2Z_i] / 2, \end{aligned}$$

где $Z(t)$ – один из случайных процессов $X(t)$, $Y(t)$, а $\xi = \tau / \Delta t = k / K$.

Расчет погрешности интерполяционных случайных процессов исследовался различными авторами при различных интерпретациях нормы погрешности. Если в качестве нормы погрешности взять средний квадрат отклонения истинного значения процесса $Z(t_i + \tau)$ от интерполированного значения $Z_{INT}(t_i + \tau)$

$$D = \langle [Z(t_i + \tau) - Z_{INT}(t_i + \tau)]^2 \rangle,$$

то можно получить следующие выражения для погрешностей при разных видах интерполяции:

а) интерполяция нулевого порядка

$$D = 2[1 - \rho(\tau)] \approx -\rho''(0)\tau^2 = \tau^2 / \tau_{кор}^2, \quad \max D = \Delta t^2 / \tau_{кор}^2;$$

б) интерполяция первого порядка

$$\begin{aligned} D = 2(1 - \xi + \xi^2) - 2(1 - \xi)\rho(\tau) - 2\xi\rho(\Delta t - \tau) + 2\xi(1 - \xi)\rho(\Delta t) \approx \\ \approx \rho^{(4)}(0)\Delta t^4 [\xi^4 + \xi^2(1 - 2\xi)]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Как следует из (7.5), при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ норма ошибки $D = 0$. В точке $\xi = 0,5$ (в середине интервала Δt) ошибка максимальна:

$$\max D = \rho^{(4)}(0)(\Delta t / 2)^4. \quad (7.6)$$

Оценим порядок ошибки D при линейной интерполяции.

Для примера положим $\rho(\tau) = \exp(-\tau^2 / \tau_{кор}^2)$.

Тогда $\rho^{(4)}(0) = 3 / \tau_{кор}^4$, и из (7.5), (7.6) получаем

$$D = 3\gamma^4 [\xi^4 + \xi^2(1 - 2\xi)], \quad \max D = 3\gamma^4 / 16.$$

Здесь $\gamma = \Delta t / \tau_{кор}$. При $\gamma = 0,1$ имеем $\max D \approx 2 \cdot 10^{-5}$, а при

$\gamma = 0,2$ – $\max D \approx 3 \cdot 10^{-4}$. Из полученных оценок видно, что при использовании линейной интерполяции величина интерполяционной ошибки оказывается весьма малой. Поэтому квадратичную интерполяцию можно не применять.

7.2. Моделирование негауссовских случайных процессов

7.2.1. Общая схема моделирования

Задача моделирования негауссовского процесса $\xi(t)$ с заданным одномерным распределением $w_\xi(x;t)$, моментными функциями $m_k[\xi]$, ковариационной функцией $B_\xi(t_1, t_2)$ и нормированной корреляционной функцией $R_\xi(t_1, t_2)$ может быть реализована с помощью двухэтапной процедуры (рис. 7.1).

Этап 1: из белого шума $u(t)$ формируется стандартный гауссовский процесс $x(t)$ с заданной нормированной корреляционной функцией $R_x(t_1, t_2)$.

Этап 2: осуществляется нелинейное безынерционное преобразование $\xi = g(x)$ процесса $x(t)$.

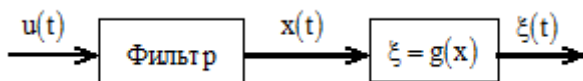


Рис. 7.1

Искомое нелинейное монотонное преобразование $\xi = g(x)$ может быть найдено из решения следующего дифференциального уравнения:

$$w_{\xi}[g(y)] \left| \frac{dg(y)}{dy} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \quad (7.7)$$

Действительно, дифференцируя по переменной y левую и правую части тождества

$$F_x(y) = P[x < y] = P[g^{-1}(\xi) < y] = P[\xi < g(y)] = F_{\xi}[g(y)] \quad (7.8)$$

при монотонно возрастающей

$$F_x(y) = 1 - F_{\xi}[g(y)]$$

либо при монотонно убывающей функции $g(y)$ и учитывая, что $dF_x(y)/dy = \exp(-y^2/2)/\sqrt{2\pi}$, приходим к (7.7). Через $g^{-1}(\cdot)$ в (7.8) обозначена функция, обратная $g(\cdot)$.

Расчет начальных моментов процесса $\xi(t)$ можно выполнить по формулам

$$m_k[\xi] = \langle \xi^k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^k w_{\xi}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g^k(y) w_x(y) dy, \quad k=1,2,\dots \quad (7.9)$$

В частности, математическое ожидание m_{ξ} и дисперсия D_{ξ} процесса $\xi(t)$ определяются как $m_{\xi} = m_1[\xi]$, $D_{\xi} = m_2[\xi] - m_1^2[\xi]$.

Для ковариационной и нормированной корреляционной функций процесса $\xi(t)$ имеем:

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1) g(y_2) w_{x2}(y_1, y_2; t_1, t_2) dy_1 dy_2, \quad (7.10)$$

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = [B_{\xi}(t_1, t_2) - m_{\xi}^2] / D_{\xi}.$$

Здесь $w_{x2}(u_1, u_2; t_1, t_2)$ — двумерная плотность вероятности гауссовского процесса $x(t)$.

Пример 7.1. Сформировать коррелированный случайный процесс с равномерной плотностью вероятности

$$w_{\xi}(y) = 1/2a, \quad |y| \leq a.$$

Решение. Из (7.7) имеем

$$\frac{1}{2a} \frac{dg(y)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \quad (7.11)$$

С учетом того, что $\xi = -a$ при $x = -\infty$ и $\xi = a$ при $x = \infty$ решение (7.11) принимает вид

$$g(y) = a[2\Phi(y) - 1], \quad (7.12)$$

где $\Phi(u)$ – интеграл вероятности (2.22).

Подставляя (7.12) в (7.9), (7.10), для математического ожидания, дисперсии и нормированной корреляционной функции процесса $\xi(t)$ получаем

$$m_\xi = 0, \quad D_\xi = a^2/3, \quad R_\xi(\tau) = (6/\pi) \arcsin[R_x(\tau)/2].$$

Здесь $R_x(\tau)$ – корреляционная функция процесса $x(t)$.

Поскольку $|R_\xi(\tau)| \leq 1$ и $\sin(z) \approx z$ при $|z| \leq \pi/6$, то $R_x(\tau) = 2 \sin[(\pi/6)R_\xi(\tau)] \approx (\pi/3)R_\xi(\tau)$ или $R_\xi(\tau) \approx (3/\pi)R_x(\tau) \approx R_x(\tau)$.

7.2.2. Трехэтапная схема формирования негауссовского процесса

Общая двухэтапная схема формирования негауссовского случайного процесса может быть модифицирована в трехэтапную.

Этап 1: формируется стандартный гауссовский случайный процесс с заданной нормированной $x(t)$ с заданной нормированной корреляционной функцией $R_x(t_1, t_2)$.

Этап 2: осуществляется нелинейное безынерционное преобразование $\alpha = g(x)$ процесса $x(t)$ в процесс $\alpha(t)$ со стандартным равномерным распределением $w_\alpha(y) = 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Этап 3: выполняется монотонное нелинейное преобразование согласно методу обратных функций.

Дифференциальное уравнение (7.7) для преобразования

$\alpha = g(x)$ запишется как $dg(y)/dy = w_x(y)$. Отсюда получаем $g(y) = \Phi(y)$ или $\alpha(t) = \Phi[x(t)]$. По методу обратных функций $f(y) = F_\xi^{-1}(y)$. В результате общее нелинейное преобразование имеет вид

$$\xi(t) = F_\xi^{-1}[\Phi(x(t))]. \quad (7.13)$$

Пример 7.2. Сформировать процесс с логистическим распределением $F_\xi(y) = 1/[1 + \exp(-(y - \mu)/\lambda)]$.

Решение. Решая нелинейное уравнение $\alpha = F_\xi(\xi)$, находим $\xi = -\mu - \lambda \ln[(1 - \alpha)/\alpha]$. Тогда итоговое преобразование стандартного гауссовского процесса $x(t)$ в $\xi(t)$ запишется как

$$\xi = -\mu - \lambda \ln[(1 - \Phi(x(t)))/\Phi(x(t))].$$

Для первых двух моментов процесса $\xi(t)$ находим: $m_\xi = \mu$, $D_\xi = 3,29\lambda^2$. При определении корреляционной функции процесса $\xi(t)$ учтем, что с высокой степенью точности справедлива аппроксимация

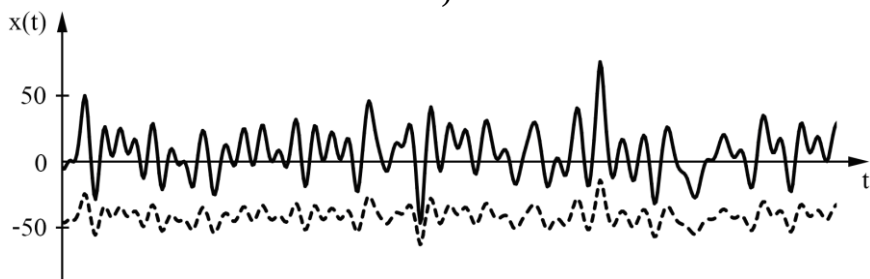
$$\ln[(1 - \Phi(y))/\Phi(y)] \approx -1,72y - (0,37y)^3.$$

Тогда после соответствующих преобразований получаем $R_\xi(\tau) \approx R_x(\tau)$.

Реализации процессов с нормальным и логистическим распределением качественно показаны на рис. 7.2а и 7.2б соответственно. Сплошная кривая на рис. 7.2б построена при $\mu = -10$, $\lambda = 10$, штриховая кривая – при $\mu = 40$, $\lambda = 4$.



а)



б)

Рис. 7.2

7.3. Модифицированный трехэтапный метод формирования случайных процессов

Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — независимые стандартные гауссовские процессы. Тогда согласно (2.31) процесс

$$\alpha(t) = \exp\left[-(x_1^2(t) + x_2^2(t))/2\right]$$

будет иметь стандартное равномерное распределение. В результате процесс $\xi(t)$ с одномерным законом распределения $F_\xi(y)$ может быть сформирован по методу обратных функций аналогично (7.13) как

$$\xi(t) = F_\xi^{-1}[\alpha(t)] = F_\xi^{-1}\left[\exp\left(-(x_1^2(t) + x_2^2(t))/2\right)\right]. \quad (7.14)$$

По сравнению с (7.13) в (7.14) отсутствует функция $\Phi(y)$, не имеющая простого аналитического вида. Таким

образом, алгоритм формирования равномерно распределенного процесса $\alpha(t)$ по формуле (7.14) проще, чем по формуле (7.13), однако в (7.14) требуется формирование двух гауссовских реализаций вместо одной.

Пример 7.3. Сформировать случайный процесс $\xi(t)$ с распределением Вейбулла:

$$w_{\xi}(y) = [cy^{c-1}/b^c] \exp[-(y/b)^c], \quad y \geq 0, \quad b > 0, \quad c > 0. \quad (7.15)$$

Здесь b – параметр масштаба (характерное время жизни), c – параметр формы, причем параметр b обладает следующим свойством: при любом $c > 0$ вероятность $P[\xi < b] = 1 - \exp(-1)$.

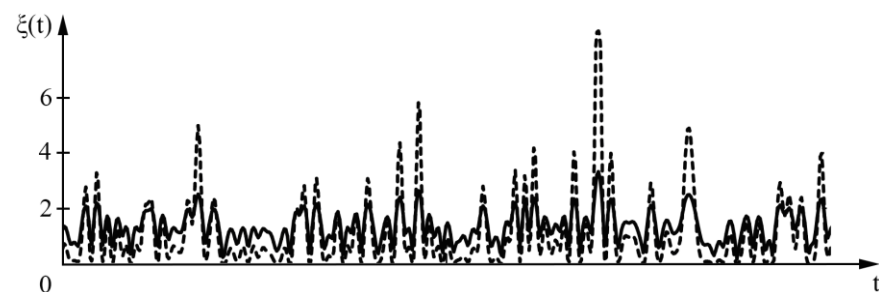
Функция распределения $F_{\xi}(y)$, соответствующая плотности вероятности (7.15), имеет вид

$$F_{\xi}(y) = 1 - \exp[-(y/b)^c].$$

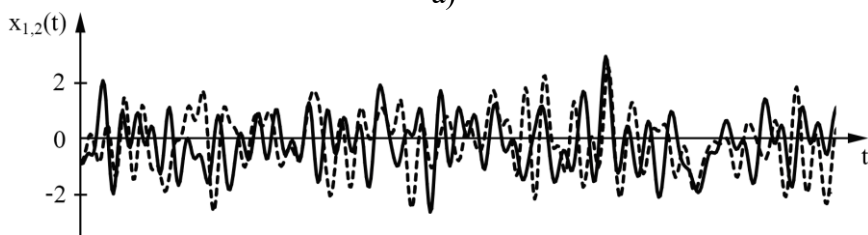
Отсюда $F_{\xi}^{-1}(y) = b \ln^{1/c}(1 - y)$. В результате согласно (7.14) приходим к следующему алгоритму формирования негауссовского процесса с распределением Вейбулла:

$$\xi(t) = b \sqrt[c]{\ln[\exp(-(x_1^2(t) + x_2^2(t))/2)]} = b \sqrt[c]{(x_1^2(t) + x_2^2(t))/2}.$$

Качественный вид реализаций процесса $\xi(t)$ показан на рис. 7.3а. Сплошная кривая построена здесь при $b = 3/2$, $c = 5/2$, штриховая кривая – при $b = 1$, $c = 4/5$. На рис. 7.3б сплошной и штриховой линией изображены реализации гауссовских квадратур $x_1(t)$, $x_2(t)$.



а)



б)

Рис. 7.3

7.4. Моделирование типовых негауссовских случайных процессов

Рассмотрим методы формирования типовых радиотехнических процессов с негауссовской статистикой, основанные на преобразовании гауссовских процессов.

Релеевский процесс

Одномерное распределение релеевского процесса имеет вид (2.5). Алгоритм формирования использует преобразование

$$\xi(t) = \sigma \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)},$$

где $x_i(t)$, $i=1,2$ – независимые стандартные гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями,

единичными дисперсиями и корреляционными функциями $R_x(\tau) = \langle x_i(t)x_i(t+\tau) \rangle$.

Первые моменты и корреляционная функция процесса $\xi(t)$ равны

$$m_\xi = \sigma\sqrt{\pi/2}, \quad m_2[\xi] = 2\sigma^2, \quad D_\xi = \sigma(2 - \pi/2), \quad (7.16)$$

$$R_\xi(\tau) = 0,921R_x^2(\tau) + 0,058R_x^4(\tau) + \dots$$

Для задач, не требующих высокой точности решения, в ряде (7.16) в силу его быстрой сходимости можно ограничиться первым членом разложения:

$$R_\xi(\tau) \approx 0,921R_x^2(\tau) \approx R_x^2(\tau).$$

Таким образом, формирование отсчета релеевского случайного процесса с корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$ сводится к формированию отсчетов двух независимых гауссовских случайных процессов с корреляционными функциями

$$R_x(\tau) = \sqrt{R_\xi(\tau)}. \quad (7.17)$$

Пример 7.4. Пусть для моделирования задан релеевский случайный процесс, корреляционная функция которого может быть представлена в виде $R_\xi(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$. Используя (7.17), для корреляционных функций квадратур $x_{1,2}(t)$ имеем: $R_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|/2)$.

Используя готовый алгоритм (6.2) для моделирования гауссовского случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией, получим следующий алгоритм для моделирования заданного релеевского случайного процесса:

$$\xi[j] = \sqrt{\left(\sqrt{1-\rho^2}\eta_1[j] + \rho x_1[j-1]\right)^2 + \left(\sqrt{1-\rho^2}\eta_2[j] + \rho x_2[j-1]\right)^2},$$

где $\rho = \exp(-\omega_0\Delta t/2)$, $\eta_1[j]$, $\eta_2[j]$ – последовательности независимых гауссовских чисел с параметрами $\sim N(0,1)$.

Процесс Релея-Райса (обобщенный релеевский процесс)

Распределение этого процесса описывается выражением

$$w_{\xi}(y) = \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Ay}{\sigma^2}\right), \quad y \in [0, \infty).$$

Алгоритм моделирования осуществляется через преобразование

$$\xi(t) = \sqrt{[A + \sigma x_1(t)]^2 + [\sigma x_2(t)]^2} = \sigma \sqrt{[z + x_1(t)]^2 + x_2^2(t)},$$

где $z = A/\sigma$, а $x_i(t)$, $i=1,2$ – независимые стандартные гауссовские случайные процессы с корреляционными функциями $R_x(\tau) = \langle x_i(t)x_i(t+\tau) \rangle$.

Первые моменты и корреляционная функция процесса $\xi(t)$ связаны достаточно сложной зависимостью с параметрами процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ [10]. Однако для двух предельных случаев эта связь упрощается:

а) если $z < 1$, то

$$m_{\xi} \approx \sigma \sqrt{\pi/2} (1 + 0,25z^2), \quad D_{\xi} \approx \sigma (2 - \pi/2) (1 + 0,25z^2)^2, \quad R_{\xi}(\tau) \approx R_x^2(\tau);$$

б) если $z > 3$, то

$$m_{\xi} \approx A \sqrt{1 + 1/2z^2}, \quad D_{\xi} \approx \sigma^2, \quad R_{\xi}(\tau) \approx R_x(\tau).$$

Процесс типа χ_n^2

Такой процесс имеет одномерную плотность вероятности вида

$$w(y) = \frac{1}{2^{n/2} \sigma^n \Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} \exp\left[-\frac{y}{2\sigma^2}\right], \quad y \in [0, \infty).$$

Процесс типа χ_n^2 по определению связан с n стандартными

независимыми гауссовскими процессами $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ с одинаковыми корреляционными функциями $R_x(\tau) = \langle x_i(t)x_i(t+\tau) \rangle$ соотношением

$$\xi(t) = \chi_n^2(t) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2(t).$$

При этом $m_\xi = n\sigma^2$, $D_\xi = 2n\sigma^4$, $R_\xi(\tau) = R_x(\tau)$.

Квадратичная сумма величин с распределением Релея-Райса (нецентральное χ_n^2 -распределение)

Рассмотрим случайный процесс вида

$$\xi(t) = (1/2) \sum_{i=1}^N \left[(x_{1i}(t) + z_i)^2 + x_{2i}^2(t) \right], \quad (7.18)$$

где $x_{1i}(t)$, $x_{2i}(t)$, $i = \overline{1, n}$ — независимые стандартные гауссовские процессы с одинаковыми корреляционными функциями $R_x(\tau) = \langle x_{1i}(t)x_{1i}(t+\tau) \rangle = \langle x_{2i}(t)x_{2i}(t+\tau) \rangle$.

Одномерное распределение и первые два момента процесса (7.18) запишутся как

$$w_\xi(y) = (y/Z^2)^{(n-1)/2} \exp(-y - Z^2) I_{n-1}(2Z\sqrt{y}),$$

$$m_\xi = Z^2 + n,$$

$$D_\xi = 2Z^2 + n,$$

где $Z^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2$. Если же, кроме того, $Z > 3 \div 5$, то $R_\xi(\tau) \approx R_x(\tau)$.

7.5. Контрольные вопросы

1. Назовите способы моделирования квазигармонических случайных процессов и условия целесообразности их применения.

2. Из каких соображений выбирается шаг дискретизации несущих гармоник и низкочастотных квадратур при моделировании квазигармонического процесса методом с квадратурными компонентами?

3. Какую интерполяционную формулу целесообразно применять при моделировании отсчетов квадратурных компонент квазигармонического процесса?

4. Как выглядит схема моделирования случайного процесса с произвольным законом распределения на основе гауссовского процесса? Каким образом могут быть найдены моменты и корреляционная функция моделируемого процесса?

5. В чем состоит суть трехэтапной схемы формирования негауссовского случайного процесса с заданным законом распределения?

6. В чем отличие модифицированного трехэтапного метода формирования негауссовского случайного процесса от стандартной трехэтапной схемы?

7. Каким образом может быть сформирован негауссовский случайный процесс с заданной корреляционной функцией?

8. Приведите алгоритмы формирования на ЭВМ типовых негауссовских случайных процессов.

7.6. Задачи

1. Сформировать узкополосный процесс с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)\cos(\omega_0\tau)$, используя представление

$$R(\tau) = [\exp(-\alpha|\tau| + j\omega_0\tau) + \exp(-\alpha|\tau| - j\omega_0\tau)]/2.$$

2. Сформировать узкополосный случайный процесс с

корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2 / 2) \cos(\omega_0 \tau)$.

Примечание: использовать представление узкополосного случайного процесса $x(t)$ в виде

$$x(t) = X(t) \cos(\omega_0 t) + Y(t) \sin(\omega_0 t),$$

где $X(t)$, $Y(t)$ – независимые квадратурные процессы с корреляционными функциями $R_X(\tau) = R_Y(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2 / 2)$.

3. Сформировать узкополосный случайный процесс со спектральной плотностью $G(\omega) = \pi / \Delta \omega$ при $|\omega \pm \omega_0| \leq \Delta \omega / 2$.

4. Сформировать узкополосный случайный процесс со спектральной плотностью

$$G(\omega) = G_0 / [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]$$

5. Сформировать равномерно распределенный процесс с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-|\tau| / \tau_{\text{кор}})$.

6. Сформировать релеевский процесс с корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\tau^2 / \tau_0^2)$.

7. Сформировать обобщенный релеевский процесс (Релея-Райса) с корреляционной функцией квадратур $R(\tau) = \exp(-2|\tau| / \tau_0)$.

8. Сформировать релеевский процесс с корреляционной функцией $R(\tau) = [\sin(\Omega \tau) / \Omega \tau]^2$, $\Omega = 4$.

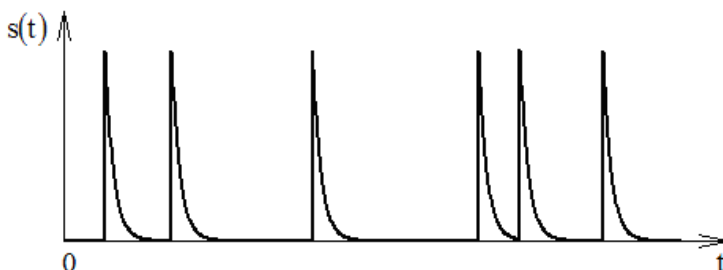
9. Сформировать хи-квадрат процесс с 6 степенями свободы и корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\tau^2 / \tau_0^2)$.

8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПУАССОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ (СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ)

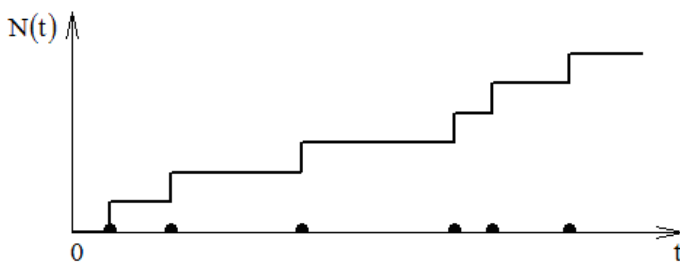
8.1. Моделирование пуассоновских процессов (случайных потоков)

8.1.1. Моделирование однородных пуассоновских случайных процессов

Дискретные (пуассоновские) случайные процессы могут возникать в самых различных приложениях физики, радиотехники, теории массового обслуживания и др. Одним из примеров может служить схема, приведенная на рис. 3.1. Здесь на выходе фотодетектора имеем последовательность импульсов (рис. 8.1а), которая преобразуется счетчиком в дискретный случайный процесс.



а)



б)

Рис. 8.1

Графическая иллюстрация дискретного случайного процесса показана на рис. 8.1б. Здесь точками показаны моменты появления событий (импульсов), а сплошной линией – изменение числа событий с течением времени.

Другой пример (ядерная физика): пусть имеется источник ионизирующего излучения, частицы которого поступают на счетчик Гейгера, соединенного с пересчетным устройством (рис. 8.2). Тогда процесс на выходе пересчетного устройства также можно представить дискретным случайным процессом, аналогичным показанному на рис. 8.1б.

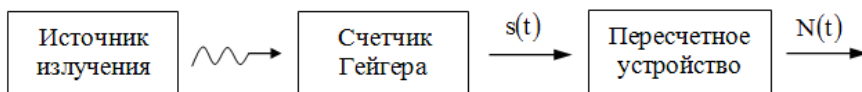


Рис. 8.2

Как видно из рис. 8.1б, дискретный случайный процесс представляет собой число событий из случайного потока, наступивших к моменту времени t , и может быть представлен двумя моделями:

1) последовательностью точек на оси времени (координатной оси, оси частот и т.д.), т.е. моментами времени появления событий из потока;

2) в виде ступенчатой функции $N(t)$ непрерывного времени.

Эти два описания во многом совпадают, *но не во всех случаях являются эквивалентными.*

Дискретный случайный процесс может обладать следующими свойствами.

Ординарность

$$P[N(t + \Delta t) - N(t) > 1] = o(\Delta t), \quad (8.1)$$

т.е. вероятность наступления более одного события на малом интервале Δt имеет более высокий порядок малости, чем Δt ;

Стационарность

Введем неперекрывающиеся интервалы на оси времени: $(a_1, b_1) = T_1$, $(a_2, b_2) = T_2$, ..., $(a_n, b_n) = T_n$ и интервалы со сдвигом $(a_1 + \Delta, b_1 + \Delta) = T'_1$, $(a_2 + \Delta, b_2 + \Delta) = T'_2$, ..., $(a_n + \Delta, b_n + \Delta) = T'_n$. Пуассоновский процесс называется стационарным, если его вероятностные свойства не изменяются при сдвиге во времени, т.е.

$$P_n[k_1, T_1; k_2, T_2; \dots; k_n, T_n] = P_n[k_1, T'_1; k_2, T'_2; \dots; k_n, T'_n]. \quad (8.2)$$

Здесь k_i , $i = \overline{1, n}$ – число точек (скачков) в i -ом интервале.

Для одномерной вероятности свойство стационарности пуассоновского процесса согласно (8.2) означает, что

$$P_1[k, a, b] = P_1[k, b - a].$$

Независимость приращений

$$P_n[k_1, T_1; k_2, T_2; \dots; k_n, T_n] = \prod_{i=1}^n P_i(k_i, T_i), \quad (8.3)$$

т.е. процесс имеет независимые приращения значений на неперекрывающихся интервалах времени (отсутствие последствий).

Дискретный случайный процесс, удовлетворяющий свойствам (8.1)-(8.3), называется *однородным пуассоновским процессом*. Полное описание такого процесса достигается заданием вероятностей $P[k, t] = P_k(t)$ появления k событий на интервале времени $[0, t]$:

$$P_k(t) = (\lambda t)^k \exp(-\lambda t) / k!. \quad (8.4)$$

Здесь λt – среднее число скачков процесса $N(t)$ на интервале $[0, t]$, λ – интенсивность пуассоновского потока (среднее число точек в единицу времени).

Существует однозначное соответствие между значениями реализаций случайного процесса $N(t)$ и моментами наступления событий, образующих пуассоновский процесс. А именно: длительности интервалов τ между

соседними событиями, образующими пуассоновский процесс, есть независимые одинаково распределенные величины с экспоненциальной плотностью вероятности (2.8). При этом параметр λ будет иметь тот же самый смысл, что и в законе Пуассона. Таким образом, формируя случайную величину τ с экспоненциальным законом распределения, можно получить пуассоновский случайный процесс (и наоборот).

Если представляет интерес обрабатывать только каждую m -ую точку, то случайная величина

$$\tau = \sum_{i=1}^m \tau_i ,$$

характеризующая длительность временного интервала между i -ой и $(i + m)$ -ой точками описывается законом распределения Эрланга:

$$w_m(\tau) = \lambda \exp(-\lambda \tau) \frac{(\lambda \tau)^{m-1}}{(m-1)!} . \quad (8.5)$$

При $m = 1$ из (8.5) получаем экспоненциальный закон распределения.

Для пуассоновских процессов имеют место следующие свойства:

1) свойство инвариантности к линейным преобразованиям: сумма пуассоновских потоков $s_i(t)$ с интенсивностями λ_i представляет собой также пуассоновский поток с суммарной интенсивностью $\lambda = \sum_i \lambda_i$;

2) свойство случайного прореживания точек: если текущая точка пуассоновского точечного потока интенсивности λ отбрасывается с вероятностью γ (оставляется в потоке с вероятностью $1 - \gamma$), то получающийся разреженный поток также является пуассоновским с интенсивностью

$$\lambda' = \lambda(1 - \gamma) . \quad (8.6)$$

Имеется два подхода к моделированию пуассоновских процессов: 1) метод типа “ Δt ”; 2) метод дискретных событий (метод моделирования интервалов).

Метод типа “ Δt ”

В этом методе вся ось времени разбивается на одинаковые элементарные интервалы длительностью Δt . В каждом интервале может быть какое-то количество точек пуассоновского потока интенсивности λ , вероятность появления которых определяется формулой (8.4). Будем считать, что интервал Δt настолько мал, что вероятностями появления двух и более точек на нем можно пренебречь. Тогда вероятности не появления точки $P_0(\Delta t)$ или появления только одной точки $P_1(\Delta t)$ допускают аппроксимации:

$$P_0(\Delta t) = \exp(-\lambda \Delta t) \approx 1 - \lambda \Delta t, \quad P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t \exp(-\lambda \Delta t) \approx \lambda \Delta t. \quad (8.7)$$

Из (8.7) следует, что моделирование пуассоновского потока сводится к формированию равномерно распределенного в интервале $[0,1]$ числа α и сравнению его с вероятностью $\lambda \Delta t$. Если $\alpha < \lambda \Delta t$, то на текущем интервале Δt к пуассоновскому потоку добавляем новую точку. В противном случае точка к потоку не добавляется. Таким образом, алгоритм моделирования массива N_i , состоящего из k элементов значений процесса $N(t)$ в моменты $t = t_i$, $i = \overline{1, k}$, включает в себя следующие шаги:

- 1) положить $t_0 = 0$, $N_0 = 0$, $i = 0$;
- 2) вычислить значение $t_{i+1} = t_i + \Delta t$;
- 3) сформировать равномерно распределенное число $\alpha_i \in [0,1]$;
- 4) если $\alpha_i < \lambda \Delta t$, то $N_{i+1} = N_i + 1$, $i = i + 1$;
- 5) если $\alpha_i \geq \lambda \Delta t$, то $i = i + 1$;
- 6) если $i < k$, то вернуться к шагу 1.

Качественный вид реализации пуассоновского процесса, полученного методом “ Δt ”, показан на рис. 8.3.

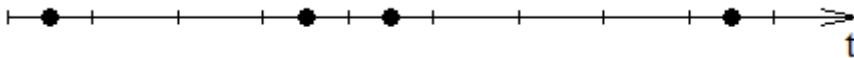


Рис. 8.3

Достоинства метода:

- 1) простота формирования потока;
- 2) поскольку явно не оговаривается, что интенсивность λ должна быть постоянна, то данный метод применим для моделирования нестационарных потоков;
- 3) является наиболее простым при моделировании пуассоновских полей.

Недостатки метода:

- 1) при реализации события $\alpha < \lambda \Delta t$ неясно, в каком месте интервала Δt необходимо добавить новую точку к потоку;
- 2) исключается случай, когда в интервале Δt может быть больше одной точки, хотя на практике такая ситуация возможна;
- 3) если интервал формирования потока $T \gg \Delta t$, то процесс моделирования может существенно замедляться, а расход чисел становится достаточно большим.

Метод дискретных событий (метод моделирования интервалов)

Здесь непосредственно моделируются те моменты времени, когда появляется новая точка в потоке. При этом используется тот факт, что интервалы времени между точками распределены по экспоненциальному закону. Последовательность шагов алгоритма моделирования значений пуассоновского процесса $N_i = N(t_i)$ в моменты времени t_i изменения им своего значения имеет вид:

- 1) положить $t_0 = 0$, $N_0 = 0$, $i = 1$;
- 2) сформировать очередное равномерно распределенное число $\alpha_i \in [0,1]$;
- 3) вычислить значение очередного интервала τ_i между событиями, например, по формуле (2.10);
- 4) сформировать очередные момент времени $t_i = t_{i-1} + \tau_i$ и значение $N_i = N_{i-1} + 1$ пуассоновского процесса;
- 5) если t_i не вышло за предел T , равный длительности реализации процесса, то вернуться к шагу 2.

Достоинства метода:

- 1) высокое быстродействие и экономичность;
- 2) простота моделирования процессов, особенно с постоянной во времени интенсивностью.

8.1.2. Моделирование кусочно-однородных пуассоновских случайных процессов

Пуассоновский случайный процесс называется кусочно-однородным, если его интенсивность $\lambda(t)$ изменяется ступенчатым образом:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1, & 0 \leq t \leq T_1, \\ \lambda_2, & T_1 < t \leq T_2. \end{cases} \quad (8.9)$$

При моделировании кусочно-однородных пуассоновских случайных процессов возможны следующие подходы.

Первый подход. Если средние расстояния $\tau_{cp1} = 1/\lambda_1$, $\tau_{cp2} = 1/\lambda_2$ между точками на интервалах времени $[0, T_1]$ и $(T_1, T_2]$ удовлетворяют условиям $\tau_{cp1} \ll T_1$, $\tau_{cp2} \ll T_2$, то на интервалах времени $[0, T_1]$ и $(T_1, T_2]$ потоки можно считать приближенно статистически независимыми (т.е., можно пренебречь краевыми эффектами в окрестности точки $t = T_1$).

Тогда моделирование кусочно-однородного потока можно свести к моделированию однородного пуассоновского потока с интенсивностью λ_1 на интервале $[0, T_1]$ и однородного пуассоновского потока с интенсивностью λ_2 на интервале $(T_1, T_2]$ одним из рассмотренных выше методов.

Если же $T_i \lambda_i \leq 1$, $i=1,2$, то переходная зона занимает весь интервал, и надо использовать более точные методы моделирования.

Второй подход. Заданный кусочно-однородный процесс $s(t)$ может быть представлен как сумма двух однородных процессов, один из которых $s_1(t)$ имеет интенсивность λ_1 и действует на интервале времени $[0, T_1]$, а второй $s_2(t)$ имеет интенсивность $\lambda_2 - \lambda_1$ и действует на интервале времени $(T_1, T_2]$. Тогда моделирование кусочно-однородного процесса $s(t)$ сводится к моделированию двух однородных случайных процессов $s_1(t)$, $s_2(t)$ и их последующей конкатенации (объединению). Графически данная процедура показана на рис. 8.4.

Третий подход. Кусочно-однородный процесс может рассматриваться, как однородный процесс с интенсивностью λ_2 , каждая точка которого на интервале $[0, T_1]$ может быть исключена из потока с вероятностью γ . Вероятность γ согласно (8.6) может быть найдена из условия $\lambda_1 = \lambda_2(1 - \gamma)$. Отсюда $\gamma = 1 - \lambda_1 / \lambda_2$. Прореживание однородного потока при $t \in [0, T_1]$ осуществляется с помощью генерирования равномерно распределенной случайной величины $\alpha \in [0, 1]$: если $\alpha < \gamma$, то текущая точка исключается; если же $\alpha > \gamma$, то текущая точка остается в потоке.

Более точное непосредственное моделирование кусочно-однородного пуассоновского процесса с учетом переходной зоны в окрестности точки $t = T_1$ может быть осуществлено следующим образом.

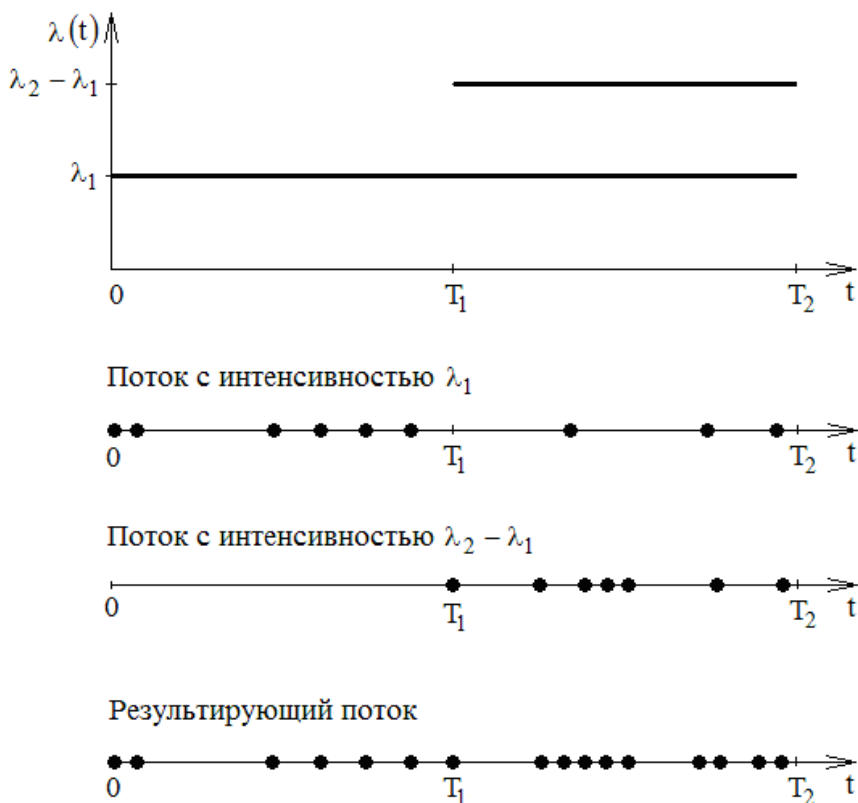


Рис. 8.4

Предположим, что пуассоновский процесс с интенсивностью (8.9) в момент времени t_1 имеет значение j . Вероятность $P_j(t_2)$ того, что это значение сохранится до момента t_2 , определяется дифференциальным уравнением

$$dP_j(t_2)/dt_2 = -\lambda(t_2)P_j(t_2), \quad t_2 \geq t_1. \quad (8.10)$$

Решая уравнение (8.10) с учетом (8.9) при начальном условии $P_j(t_1) = 1$, для случая $t_1 < T_1$ получаем

$$P_j^-(t_2) = \begin{cases} \exp[-\lambda_1(t_2 - t_1)], & t_2 < T_1, \\ \exp[-\lambda_1(T_1 - t_1) - \lambda_2(t_2 - T_1)], & t_2 \geq T_1, t_1 < T_1. \end{cases} \quad (8.11)$$

Если же $t_1 \geq T_1$, то аналогично находим

$$P_j^+(t_2) = \exp[-\lambda_2(t_2 - T_1)]. \quad (8.12)$$

С помощью (8.11), (8.12) легко получить функции распределения положений скачков процесса с интенсивностью (8.9):

$$F(t_2) = \begin{cases} 1 - P_j^-(t_2), & t_1 < T_1, \\ 1 - P_j^+(t_2), & t_1 \geq T_1. \end{cases} \quad (8.13)$$

На основе метода обратных функций из (8.13) получаем рекуррентную формулу для вычисления моментов t_i скачков процесса на основе последовательности независимых равномерно распределенных случайных чисел $\alpha_i \in [0,1]$:

$$t_{i+1} = \begin{cases} t_i - \ln \alpha_i / \lambda_1, & \ln \alpha_i > \lambda_1(t_i - T_1), t_i < T_1, \\ T_1 - [\ln \alpha_i + \lambda_1(T_1 - t_i)] / \lambda_2, & \ln \alpha_i < \lambda_1(t_i - T_1), t_i < T_1, \\ t_i - \ln \alpha_i / \lambda_2, & t_i \geq T_1. \end{cases} \quad (8.14)$$

Используя (8.14), можно предложить следующий алгоритм формирования значений N_i пуассоновского процесса с интенсивностью (8.9) на интервале $[0, T]$ в моменты времени t_i :

- 1) положить $t_0 = 0$, $N_0 = 0$, $i = 1$;
- 2) выработать очередное равномерно распределенное случайное число $\alpha_i \in [0,1]$;
- 3) вычислить очередное значение t_i по формуле (8.13),
 $N_i = N_{i-1} + 1$;
- 4) если $t_i < T_2$, то вернуться к шагу 2.

На рис. 8.5 приведен пример моделирования пуассоновского процесса с кусочно-постоянной интенсивностью.

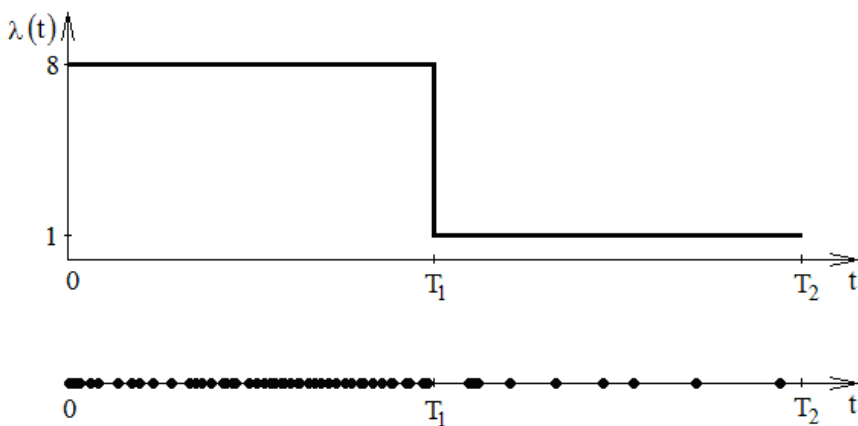


Рис. 8.5

Отметим при этом, что, как следует из (8.14), в общем случае пуассоновский процесс с интенсивностью (8.9) нельзя представить как переключение в момент времени $t = T_1$ генератора пуассоновского процесса с интенсивностью λ_1 на генератор с интенсивностью λ_2 .

8.1.3. Моделирование неоднородных пуассоновских случайных процессов

Пуассоновские процессы с произвольным законом изменения интенсивности называют неоднородными. Функция интенсивности $\lambda(t)$ может быть детерминированной или случайной.

Неоднородный пуассоновский процесс $N(t)$ имеет независимые, но нестационарные приращения. В этом случае

$$P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1] = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P[N(t + \Delta t) - N(t) > 1] = o(\Delta t).$$

Вероятность сохранения своего состояния определяется уравнением (8.10). Решая это уравнение при начальном

условии $P_j(t_1) = 1$, получаем

$$P_j(t_2) = \exp \left[- \int_{t_1}^{t_2} \lambda(\tau) d\tau \right]. \quad (8.15)$$

Вероятность появления k событий на интервале $[0, t]$ для неоднородного пуассоновского процесса определяется выражением

$$P_k(t) = \frac{1}{k!} \left[\int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]^k \exp \left[- \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right], \quad k \geq 1. \quad (8.16)$$

При $\lambda = \text{const}$ из (8.16) получаем (8.4), а (8.15) переходит в соответствующее соотношение для однородного пуассоновского процесса. Неоднородные пуассоновские потоки часто возникают в задачах наблюдения слабого полезного сигнала на фоне шума (рис. 8.6).

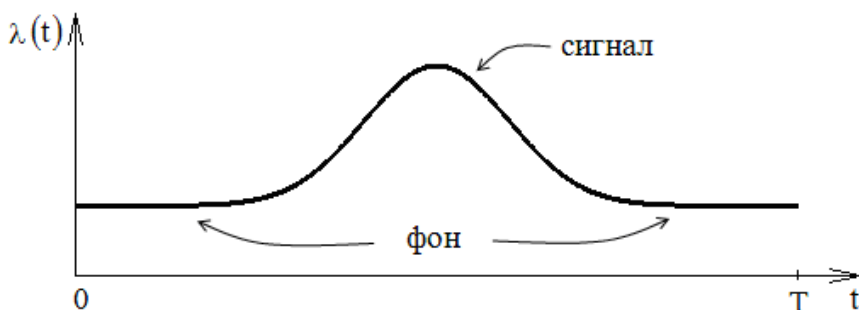


Рис. 8.6

При моделировании неоднородных пуассоновских процессов, как правило, используют один из двух следующих методов.

Метод преобразования шкалы времени

Неоднородный пуассоновский процесс с

интенсивностью $\lambda(t)$ можно получить из однородного с помощью преобразования шкалы времени. С этой целью введем новую шкалу времени u . Эта шкала связана со шкалой t преобразованием

$$u(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau. \quad (8.17)$$

В новой шкале $u \in [0, U]$, где

$$U = \int_0^T \lambda(\tau) d\tau, \quad (8.18)$$

однородный пуассоновский процесс $N(u)$ будет иметь единичную интенсивность.

Обозначим через $f(\cdot)$ функцию, обратную $u(t)$, т.е. $f[u(t)] = t$. Тогда, формируя с помощью преобразования

$$t_i = f(u_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (8.19)$$

вспомогательную последовательность точек u_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ однородного процесса $N(u)$ с единичной интенсивностью, получаем последовательность моментов скачков неоднородного процесса $N(t)$.

Алгоритм формирования последовательности моментов скачков неоднородного процесса $N(t)$ можно реализовать следующим образом:

1) вычислить длину реализации U вспомогательного пуассоновского процесса по формуле (8.18);

2) сформировать последовательность моментов скачков u_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ ($u_i \leq U$) однородного пуассоновского процесса с единичной интенсивностью;

3) с помощью (8.17), (8.19) аналитически или численно сформировать по величинам u_i значения моментов скачков t_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ заданного процесса $N(t)$.

Предложенный алгоритм допускает рекуррентное

представление. Для этого достаточно организовать вычисление очередного момента скачка t_i заданного процесса непосредственно после вычисления момента скачка u_i вспомогательного процесса. При этом необходимо, чтобы обратная функция имела явный вид на всем отрезке моделирования реализации.

Метод деформации шкалы времени оказывается особенно эффективным при моделировании пуассоновских процессов со ступенчатым изменением интенсивности.

Пример 8.1. Сформировать неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t) = a \exp(-bt)$ на интервале $[0, T]$.

Решение. Согласно (8.17), (8.18) находим

$$u(t) = \int_0^t a \exp(-b\tau) d\tau = \frac{a}{b} [1 - \exp(-bt)],$$

$$U = \frac{a}{b} [1 - \exp(-bT)].$$

Далее определяем функцию $f(u)$, обратную функции $u = (a/b)[1 - \exp(-bt)]:$

$$t = -(1/b) \ln(1 - bu/a) = f(u).$$

Формируем моменты появления точек однородного пуассоновского процесса:

$$u_i = u_{i-1} + \Delta_i, \quad \Delta_i = -\ln(\alpha_i), \quad u_0 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Количество точек J здесь определяется соотношением $U - \Delta_{J-1} < u_J \leq U$.

Затем согласно (8.19) формируем моменты появления точек неоднородного процесса

$$t_i = -(1/b) \ln(1 - bu_i/a), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Вид реализации пуассоновского потока и процесса при $a = 50$, $b = 2$ показан на рис. 8.7а и 8.7б соответственно.

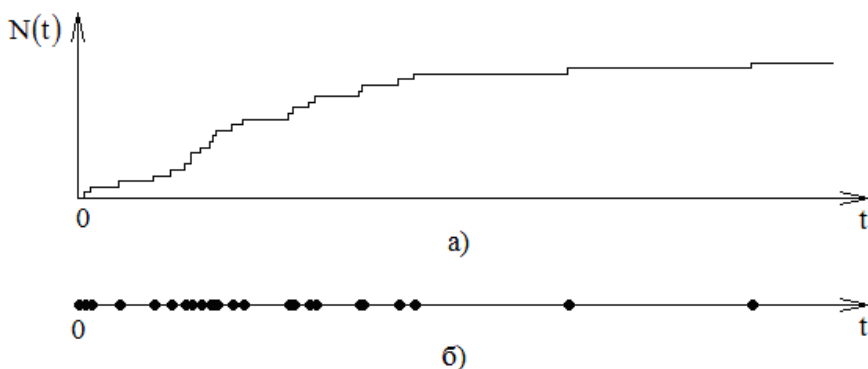


Рис. 8.7

Пошаговый метод формирования неоднородного пуассоновского процесса

Обозначим Δ – временной интервал между скачками пуассоновского процесса. Используя (8.15), запишем выражение для текущей функции распределения, начиная с момента t_j , как

$$F_j(\Delta) = 1 - P_j(t_j + \Delta) = 1 - \exp \left[- \int_{t_j}^{t_j + \Delta} \lambda(\tau) d\tau \right]. \quad (8.20)$$

Обозначим через $\varphi_j(\cdot)$ функцию, обратную $F_j(\Delta)$, т.е.

$$\varphi_j[F_j(\Delta)] = \Delta. \quad (8.21)$$

Тогда, воспользовавшись методом обратных функций, из последовательности независимых равномерно распределенных случайных чисел $\alpha_j \in [0,1]$ для очередного момента скачка неоднородного пуассоновского процесса находим

$$t_{j+1} = t_j + \varphi_{j+1}(\alpha_{j+1}). \quad (8.22)$$

Если функцию (8.21) аналитически получить не удастся, то ее можно попытаться рассчитать либо с использованием различных приближений (обратный интеграл вероятности и

т.д.), либо с помощью методов численного решения нелинейных уравнений. В результате получаем следующий алгоритм непосредственного формирования моментов скачков t_j значений неоднородного пуассоновского процесса $N_j = N(t_j)$ с интенсивностью $\lambda(t)$:

- 1) положить $t_0 = 0$, $N_0 = 0$, $j = 0$;
- 2) положить $j = j + 1$;
- 3) сформировать очередное независимое случайное число α_j , равномерно распределенное в интервале $[0,1]$;
- 4) по формулам (8.21), (8.22) вычислить очередной момент скачка t_j пуассоновского процесса;
- 5) если $t_j > T$, то перейти к шагу 7;
- 6) положить $N_j = N_{j-1} + 1$ и вернуться к шагу 2;
- 7) использовать полученную реализацию случайного процесса.

Для получения новой реализации вернуться к шагу 1.

Пример 8.2. Сформировать неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t) = at + b$ на интервале $[0, T]$.

Решение. Для нахождения обратной функции согласно (8.20), (8.21) необходимо найти решение следующего уравнения

$$\int_{t_j}^{t_j + \Delta_{j+1}} \lambda(\tau) d\tau = -\ln(\alpha_{j+1}). \quad (8.23)$$

Подставляя в (8.23) заданную интенсивность $\lambda(t)$, находим

$$\int_{t_j}^{t_j + \Delta_{j+1}} (a\tau + b) d\tau = \frac{a}{2} \Delta_{j+1}^2 + \Delta_{j+1} (at_j + b) = -\ln(\alpha_{j+1}). \quad (8.24)$$

Явное решение (8.24) относительно Δ_{j+1} имеет вид

$$\Delta_{j+1} = \frac{1}{a} \left[- (at_j + b) + \sqrt{(at_j + b)^2 - 2a \ln(\alpha_{j+1})} \right]. \quad (8.25)$$

Вид реализации пуассоновского потока и процесса, сформированной на основе (8.25) при $a = 0,5$, $b = 2$ показан на рис. 8.8а и 8.8б соответственно.

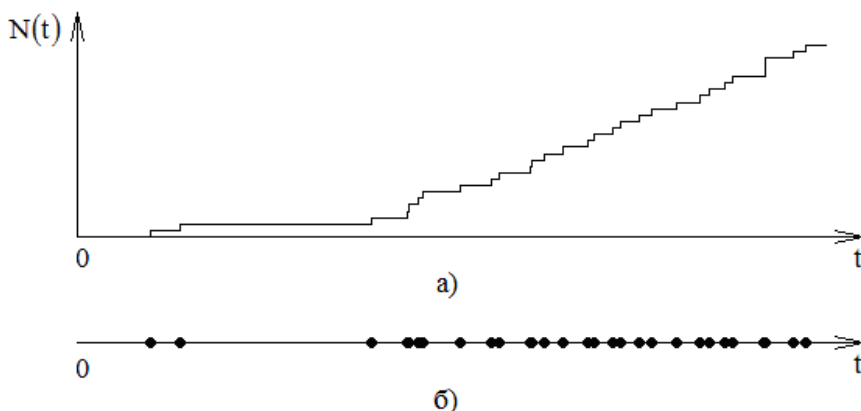


Рис. 8.8

Достоинство пошагового метода формирования неоднородных пуассоновских процессов: высокое быстродействие и точность. Недостаток метода: не всегда в явном виде удастся найти решение уравнения (8.21). Указанный недостаток иногда удается обойти.

Точное моделирование неоднородных пуассоновских процессов в общем случае является весьма сложной задачей. Универсальным здесь является метод “ Δt ”. Выберем шаг Δt таким, что интенсивность потока на этом интервале можно считать постоянной: $\lambda(t) = \lambda_i$ при $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t$. Тогда моделируемый пуассоновский процесс может быть сформирован согласно этапам (8.8) при замене λ на λ_i .

8.1.4. Моделирование пуассоновских случайных полей

Рассмотрим теперь двумерные пуассоновские процессы (пуассоновские потоки на плоскости). Такие процессы могут возникать при работе с фотопластинками (количество зерен почернения часто описывается законом Пуассона), фотодетекторами и т.д. При моделировании двумерного пуассоновского случайного процесса рассмотренные выше представления в виде потока точек и ступенчатой функции (рис. 8.1б) не являются эквивалентными. Действительно, модель типа дискретных событий в этом случае оказывается неработоспособной, в то время как двумерный поток точек может быть адекватно представлен на плоскости (рис. 8.9).

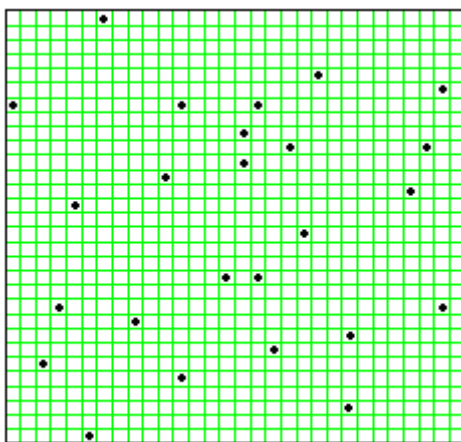


Рис. 8.9

Для формирования двумерных пуассоновских потоков в практических приложениях, как правило, используется метод “ Δt ”. Рабочая поверхность разбивается на элементарные прямоугольники $\Delta s = \Delta x \Delta y$ таким образом, чтобы вероятностью появления более одной точки потока в одном прямоугольнике можно было пренебречь (рис. 8.9). Тогда для вероятности не появления точки $P_0(\Delta s)$ или появления только

одной точки $P_1(\Delta s)$ двумерного потока с интенсивностью λ аналогично (8.7) можно записать:

$$P_0(\Delta s) \approx 1 - \lambda \Delta x \Delta y, \quad P_1(\Delta s) \approx \lambda \Delta x \Delta y.$$

В результате моделирование двумерного пуассоновского поля может быть выполнено путем очевидной модификации алгоритма (8.8).

8.2. Контрольные вопросы

1. Назовите способы описания и основные свойства дискретных случайных процессов.

2. Назовите основные свойства пуассоновских случайных процессов.

3. В каких единицах измеряется интенсивность пуассоновского процесса λ ?

4. Перечислите этапы моделирования реализации однородного пуассоновского процесса методом “ Δt ”. Каковы достоинства и недостатки этого метода?

5. Каким образом осуществляется моделирование реализации однородного пуассоновского процесса с помощью метода дискретных событий. Укажите его достоинства и недостатки.

6. Назовите основные подходы для формирования реализаций кусочно-однородных пуассоновских процессов.

7. Могут ли интенсивности λ_1 , λ_2 кусочно-однородного пуассоновского процесса быть меньше нуля?

8. Перечислите основные этапы моделирования реализации кусочно-однородного пуассоновского процесса.

9. Дайте определение и укажите основные свойства неоднородного пуассоновского процесса.

10. Назовите основные способы моделирования реализаций неоднородного пуассоновского процесса.

11. Перечислите этапы моделирования реализации неоднородного пуассоновского процесса методом преобразования шкалы времени. Каковы его достоинства и

недостатки?

12. Каким образом осуществляется моделирование реализации неоднородного пуассоновского процесса с помощью пошагового метода. Укажите его достоинства и недостатки.

13. Оцените вероятность события $N(t_1) > N(t_2)$, $t_1 < t_2$.

14. Укажите особенности описания и формирования реализаций пуассоновских случайных полей.

8.3. Задачи

1. Определите посредством моделирования среднее значение и дисперсию пуассоновского процесса с интенсивностью $\lambda=10$ в момент времени $t=1$. Объем выборки при испытаниях принять 100 и 500. Сравните результат с теоретическим.

2. Известно, что при больших относительных порогах число выбросов случайного процесса за этот порог распределено по закону Пуассона. Промоделируйте моменты срабатывания порогового устройства с порогом срабатывания, в 3 раза превышающим дисперсию шума на входе. Считать, что среднее число выбросов шума за уровень h определяется формулой $N^+(h, T) = \Delta f T \sqrt{\pi/6} (h/\sigma) \exp(-h^2/2\sigma^2)$, где h – напряжение срабатывания порога, σ^2 – дисперсия полосового шума, $\Delta f = 1$ МГц – ширина спектра шума, $T = 10$ с – интервал наблюдения.

3. Промоделируйте моменты отказа системы, в которой можно пренебречь ненадежностью всех блоков, кроме двух. Среднее время безотказной работы этих блоков составляет 100 и 200 часов соответственно. Время безотказной работы блоков распределено экспоненциально.

4. Поток квантов на фотодетектор представляет собой модулированный по амплитуде пуассоновский процесс. Модулирующая функция – прямоугольник. Сформируйте реализацию процесса на выходе фотодетектора, если кроме

сигнала имеется фоновое излучение.

5. Сформировать неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t) = a + bt$.

6. Экспериментально оцените среднее время достижения пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda(t) = a + bt$ порога $h = 20$ при $a = 1c^{-1}$, $b = 5c^{-2}$.

7. Сформировать неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t) = a \exp(-bt)$.

8. Сформировать неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t) = a/(1 + b^2 t^2)$.

9. Сформировать неоднородное пуассоновское поле с интенсивностью $\lambda(x, y) = 5 \exp[-(x^2 + y^2)/8]$ в области $-3 \leq x \leq 3$, $-4 \leq y \leq 4$.

9. СПОСОБЫ ОРГАНИЗАЦИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

9.1. Способы организации статистического моделирования

9.1.1. Метод зависимых испытаний

При решении многих задач статистического моделирования возникает необходимость в сравнении качества функционирования различных моделей системы или одной модели при различных значениях параметров.

Независимо от того, как организуется сравнение и выбор наилучшего варианта системы: простым сопоставлением результатов моделирования, анализом соответствующих графиков или с помощью автоматизированной процедуры поиска экстремума, необходимым этапом при этом является статистическое усреднение некоторой характеристики, выступающей в качестве критерия эффективности системы. Таким образом, сравнение двух вариантов системы s_1 и s_2 заключается в сравнении статистических показателей $Q_1 = \langle \gamma_1 \rangle$ и $Q_2 = \langle \gamma_2 \rangle$. Здесь $\langle \rangle$ – операция усреднения, γ_i – числовая характеристика i -го варианта системы.

В частности, если γ_i принимает значения 0 или 1, то показатель Q_i есть вероятность (в задачах обнаружения сигнала на фоне помех – это вероятность правильного обнаружения, в теории надежности – вероятность безотказной работы системы и т.д.).

Изменение показателя Q при переходе от одного варианта системы к другому можно характеризовать разностью $\Delta Q = Q_2 - Q_1$. Дисперсия оценки этой разности равна

$$\sigma^2(\Delta \tilde{Q}) = \sigma^2(\tilde{Q}_1) + \sigma^2(\tilde{Q}_2) - 2R(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2)\sigma(\tilde{Q}_1)\sigma(\tilde{Q}_2), \quad (9.1)$$

где $\sigma^2(\tilde{Q}_i)$ – дисперсия оценки $\tilde{Q}_i$, $R(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2)$ – коэффициент

корреляции оценок.

Рассмотрим возможности снижения дисперсии (9.1). При независимом моделировании вариантов систем, т.е. с использованием различных реализаций входных воздействий $R(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2) = 0$, и поэтому

$$\sigma_n^2(\Delta\tilde{Q}) = \sigma^2(\tilde{Q}_1) + \sigma^2(\tilde{Q}_2). \quad (9.2)$$

Если же при моделировании $R(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2) > 0$, то в соответствии с (9.1), (9.2) $\sigma^2(\Delta\tilde{Q}) < \sigma_n^2(\Delta\tilde{Q})$. Условия, при которых такое соотношение имеет место, реализуются, например, при зависимых испытаниях систем. Предположим, что две системы s_1 и s_2 испытывают одинаковое внешнее воздействие, описываемое вектором $\vec{\xi}$, плотность вероятности которого есть $w_{\xi}(\vec{x})$. Тогда

$$\begin{aligned} R(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2) &= \frac{1}{\sigma(\tilde{Q}_1)\sigma(\tilde{Q}_2)} \left[\int \gamma_1(\vec{x})\gamma_2(\vec{x})w_{\xi}(\vec{x})d\vec{x} - \tilde{Q}_1\tilde{Q}_2 \right] = \\ &= \frac{1}{2\sigma(\tilde{Q}_1)\sigma(\tilde{Q}_2)} \iint w_{\xi}(\vec{z})w_{\xi}(\vec{u})[\gamma_1(\vec{z}) - \gamma_1(\vec{u})][\gamma_2(\vec{z}) - \gamma_2(\vec{u})]d\vec{z}d\vec{u}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $w_{\xi}(\vec{x}) \geq 0$ для всех $\vec{x}$, достаточным условием неотрицательности $R(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2)$ является одинаковая упорядоченность $\gamma_1(\vec{x})$ и $\gamma_2(\vec{x})$, т.е.

$$[\gamma_1(\vec{z}) - \gamma_1(\vec{u})][\gamma_2(\vec{z}) - \gamma_2(\vec{u})] \geq 0. \quad (9.3)$$

Одинаково упорядоченными являются, например, монотонно убывающие или монотонно возрастающие функции или функции произвольного вида из одного параметрического семейства.

При сравнении вероятностей событий A_1 и A_2 достаточное условие (9.3) записывается в виде

$$[P(A_1|\vec{z}) - P(A_1|\vec{u})][P(A_2|\vec{z}) - P(A_2|\vec{u})] \geq 0. \quad (9.4)$$

Условие (9.4) выполняется лишь тогда, когда для всех значений $\vec{x}$ исключено одно из состояний $\bar{A}_1 A_2$ или $A_1 \bar{A}_2$. Иначе говоря,

положительная корреляция ($R \geq 0$) и уменьшение дисперсии оценки разности (9.1) гарантируется тогда, когда система s_1 равномерно лучше (хуже) системы s_2 .

Отметим, однако, что (9.3), (9.4) являются достаточными, но не необходимыми условиями неотрицательности корреляции. Поэтому, обнаружив в конкретной задаче моделирования нарушение этих условий при некоторых реализациях входных воздействий $\vec{x}$, не следует отказываться от использования метода зависимых испытаний.

Уменьшение дисперсии оценки разности показателей при использовании зависимых испытаний позволяет или уменьшить число испытаний или увеличить точность моделирования по сравнению с независимыми испытаниями.

На рис. 9.1 показан типичный ход экспериментальных зависимостей, полученных при независимых (крестики) и зависимых (кружочки) испытаниях. Там же приведена теоретическая кривая. Как показывают исследования, при моделировании работы радиотехнических систем (оптимального приемника и т.п.) применение метода зависимых испытаний позволяет сократить затраты машинного времени в несколько раз.

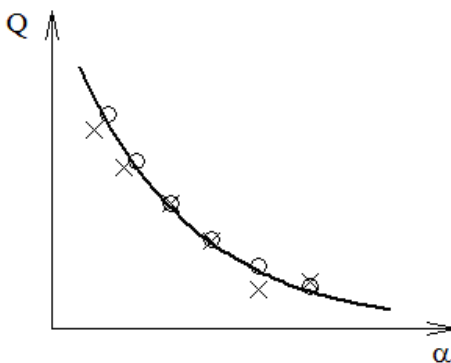


Рис. 9.1

Пример 9.1. На рис. 9.2 представлены конкурирующие системы s_1 и s_2 , составленные из одинаковых блоков B_1, B_2, B_3, B_4 и сравниваемые по критерию надежности с учетом случайных изменений внешней температуры ξ . События A_1 и A_2 означают соответственно факты безотказной работы s_1 и s_2 в течение заданного времени T . Вероятности безотказной работы блоков B_i при заданной температуре $\xi = x$ равны

$$P(B_i|x) = \exp[-\lambda_i(x)T], \quad i = \overline{1,4},$$

где интенсивности отказов $\lambda_i(x)$ представляют собой некоторые возрастающие функции температуры x .

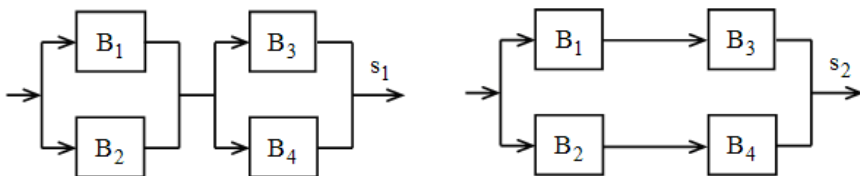


Рис. 9.2

Проверим, являются ли функции $P(A_1|x)$ и $P(A_2|x)$ одинаково упорядоченными. Из рис. 9.2 следует, что

$$\begin{aligned}
 P(A_1|x) &= \{1 - [1 - P(B_1|x)][1 - P(B_2|x)]\} \times \\
 &\quad \times \{1 - [1 - P(B_3|x)][1 - P(B_4|x)]\}, \\
 P(A_2|x) &= \{1 - [1 - P(B_1|x)][1 - P(B_3|x)]\} \times \\
 &\quad \times \{1 - [1 - P(B_2|x)][1 - P(B_4|x)]\}.
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Нетрудно проверить, что соотношения (9.5) удовлетворяют условию одинаковой упорядоченности (9.4). Поэтому, используя при моделировании систем s_1 и s_2 одни и те же реализации x случайной температуры ξ , получим большую

точность сравнения вероятности $P(A_1)$ и $P(A_2)$, чем при раздельном моделировании систем.

9.1.2. Метод пересчета

Приведенные выше способы оценки изменений показателя качества системы универсальны и могут быть использованы во всех моделях, независимо от того, характеризуют ли некоторый изменяемый параметр α детерминированной части моделируемой системы или распределение вероятностей $w(\vec{x}, \alpha)$ случайных возмущений $\vec{\xi}$.

Вместе с тем, в последнем случае можно применить более экономичные методы оценки изменений, не требующие повторения моделирования при различных значениях параметра α . Рассмотрим оценки такого типа в предположении, что вектор $\vec{\xi}$ имеет постоянную, независящую от α размерность. Показатель качества для непрерывных и дискретных величин $\vec{\xi}$ определим в виде [15]

$$Q(\alpha) = \int \gamma(\vec{x}) w_{\xi}(\vec{x}, \alpha) d\vec{x}, \quad Q(\alpha) = \sum_{\vec{x}} \gamma(\vec{x}) P_{\xi}(\vec{x}, \alpha). \quad (9.6)$$

В формулах (9.6) от параметра α зависят только $w_{\xi}(\vec{x}, \alpha)$ и $P_{\xi}(\vec{x}, \alpha)$, в то время как функция $\gamma(\vec{x})$, характеризующая работу системы, не зависит от α и не меняется при исследовании различных вариантов системы. Запишем (9.6) в виде

$$Q(\alpha) = \int \gamma(\vec{x}) \frac{w_{\xi}(\vec{x}, \alpha)}{w_{\xi}(\vec{x}, \alpha_1)} w_{\xi}(\vec{x}, \alpha_1) d\vec{x} \quad (9.7)$$

$$Q(\alpha) = \sum_{\vec{x}} \gamma(\vec{x}) \frac{P_{\xi}(\vec{x}, \alpha)}{P_{\xi}(\vec{x}, \alpha_1)} P_{\xi}(\vec{x}, \alpha_1).$$

При $\alpha = \alpha_2$ формулам (9.7) соответствуют несмещенные оценки

$$\tilde{Q}(\alpha_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma(\bar{x}_i) \frac{w_{\xi}(\bar{x}_i, \alpha_2)}{w_{\xi}(\bar{x}_i, \alpha_1)}, \quad \tilde{Q}(\alpha_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma(\bar{x}_i) \frac{P_{\xi}(\bar{x}_i, \alpha_2)}{P_{\xi}(\bar{x}_i, \alpha_1)}, \quad (9.8)$$

где $\bar{x}$ – независимые реализации вектора ξ . Из (9.8) следуют оценки приращения

$$\Delta \tilde{Q} = \tilde{Q}(\alpha_2) - \tilde{Q}(\alpha_1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma(\bar{x}_i) \left[\frac{w_{\xi}(\bar{x}_i, \alpha_2)}{w_{\xi}(\bar{x}_i, \alpha_1)} - 1 \right], \quad (9.9)$$

$$\Delta \tilde{Q} = \tilde{Q}(\alpha_2) - \tilde{Q}(\alpha_1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma(\bar{x}_i) \left[\frac{P_{\xi}(\bar{x}_i, \alpha_2)}{P_{\xi}(\bar{x}_i, \alpha_1)} - 1 \right]. \quad (9.10)$$

Таким образом, изменение показателя качества работы системы ΔQ может быть получено путем пересчета характеристик по формулам (9.9), (9.10). Поскольку основные затраты времени при моделировании связаны с вычислением значений $\gamma(\bar{x}_i)$, то метод пересчета весьма эффективен с точки зрения затрат машинного времени. Он позволяет вычислять приращения при любом наборе параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$, фактически выполняя моделирование при одном значении α_1 , в то время как другие способы испытаний требуют в этом случае M -кратного моделирования.

Пример 9.1. Необходимо сравнить работу системы, находящейся под случайным воздействием ξ , имеющим плотность вероятности

$$w_{\xi}(x, \alpha) = \exp\left[-(x - \alpha)^2 / 2\right] / \sqrt{2\pi}$$

при значениях $\alpha_1 = 0$ и $0 < \alpha_2 < 1$. Функция $\gamma(x)$, описывающая качество работы системы, имеет вид

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi > 0, \\ 0, & \text{если } \xi \leq 0. \end{cases}$$

Дисперсия оценки приращений по формуле (9.9) равна $\sigma^2 = (\alpha_2^2 / 2N)(1 - 1/\pi)$, а дисперсия оценки по формуле (9.2) – $\sigma_n^2 = \alpha_2^2 / N\sqrt{2\pi}$. Таким образом, для малых приращений α оценка с помощью метода пересчета имеет (помимо

сокращения затрат машинного времени) дисперсию в $1,17/\alpha_2$ раза меньшую.

Соотношения (9.8) лежат в основе еще так называемого форсирования случайных событий.

9.1.3. Форсирование случайных воздействий

Форсирование случайных воздействий применяется при оценке вероятности редкого события, например, ложной тревоги или пропуска цели, срыва автоматического сопровождения, отказа аппаратуры и т.п. Непосредственная оценка ν вероятности p , имеет относительную среднеквадратичную погрешность

$$\sigma(\nu)/p = \sqrt{D(\nu)}/p = \sqrt{(1-p)/np}, \quad (9.11)$$

возрастающую с уменьшением p . Так оценка вероятности $p = 10^{-6}$ с погрешностью 10% требует проведения 10^8 испытаний, что может быть весьма затруднительно.

При форсировании воздействий осуществляется переход от модели с малой вероятностью $p = p(A)$ исследуемого события A к модели с большей вероятностью этого события посредством изменения соответствующих распределений. Оценка вероятности в преобразованной модели имеет меньшую относительную погрешность, чем погрешность исходной малой вероятности.

Обычно осуществляется переход от непрерывного $w(\vec{x}, \alpha_1)$ или дискретного $p(\vec{x}, \alpha_1)$ распределения с параметром α_1 к распределению $w(\vec{x}, \alpha_2)$ ($p(\vec{x}, \alpha_2)$) с параметром α_2 и оценка вероятности путем пересчета

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma(\vec{x}_i) \frac{w(\vec{x}_i, \alpha_1)}{w(\vec{x}_i, \alpha_2)}, \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma(\vec{x}_i) \frac{p(\vec{x}_i, \alpha_1)}{p(\vec{x}_i, \alpha_2)}, \quad (9.12)$$

где $\vec{x}_i$ – выборка, наблюдаемая в i -ом испытании (воздействии) в новых условиях, а функция $\gamma(\vec{x})=1$, если событие A имело место при воздействии, и $\gamma(\vec{x})=0$ в противном случае.

Эффективность оценок (9.12) зависит от выбора $w(\bar{x}, \alpha_2)$ ($p(\bar{x}, \alpha_2)$). Такие трансформации физически интерпретируются как изменение уровня сигнала, интенсивности шумов и т.д.

Пример 9.2. Пусть плотность вероятности процесса ξ_1 на выходе квадратичного детектора имеет вид $w(x, \alpha_1) = \alpha_1 \exp(-\alpha_1 x)$, $x \geq 0$. Необходимо оценить вероятность того, что ξ_1 превысит порог h .

Решение. При $\alpha_1 h \gg 1$ искомая вероятность очень мала. Согласно идее форсирования воздействий сформируем процесс ξ_2 с плотностью вероятности $w(x, \alpha_2) = \alpha_2 \exp(-\alpha_2 x)$, $\alpha_2 \ll \alpha_1$ и оценим вероятность превышения по формуле

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma(x_i) \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \exp[-(\alpha_1 - \alpha_2)x_i], \quad (9.13)$$

где $\gamma(x_i) = 1$ при $\xi_2 \geq h$ и $\gamma(x_i) = 0$ при $\xi_2 < h$.

Дисперсия оценки (9.13) определится как

$$\begin{aligned} D(\tilde{\nu}) &= D\left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma(x_i) \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \exp[-(\alpha_1 - \alpha_2)x_i] \right\} \\ &= \frac{\alpha_1^2}{N\alpha_2^2} D\{\gamma(\xi_2) \exp[-(\alpha_1 - \alpha_2)\xi_2]\} = \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2(2\alpha_1 - \alpha_2)} \exp[-(2\alpha_1 - \alpha_2)h] - \exp(-2\alpha_1 h) \right\}. \end{aligned}$$

Зависимость относительной погрешности $\delta_2(p) = \sqrt{ND(\tilde{\nu})}/p$ от истинного значения вероятности приведена на рис. 9.3. Здесь же построена зависимость $\delta_1(p) = \sqrt{n\sigma^2(\nu)}/p$ с использованием формулы (9.11). Полагалось, что $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 0,1$.

Из рис. 9.3 следует, что оценка вероятности $p = 10^{-6}$ с погрешностью 10% требует около 700 форсированных

испытаний против 10^8 при обычном оценивании.

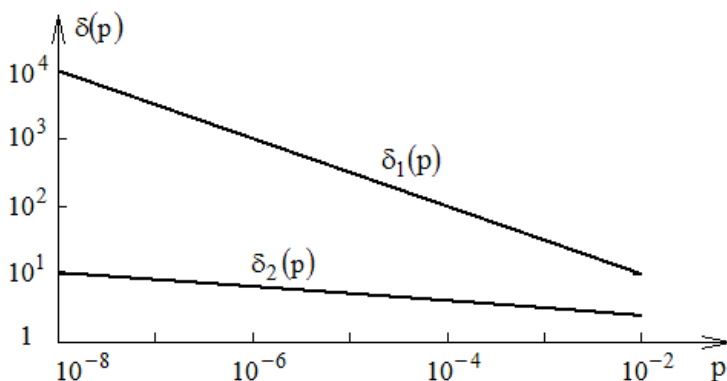


Рис. 9.3

9.2. Контрольные вопросы

1. Какова основная цель использования метода зависимых испытаний при моделировании?

2. Каковы условия применения метода зависимых испытаний при моделировании. Являются ли они необходимыми или достаточными?

3. Приведите примеры применения метода зависимых испытаний при моделировании систем?

4. В чем состоит сущность метода пересчета?

5. Каким образом на основе метода пересчета могут быть найдены экспериментальные характеристики системы при изменении значений ее параметров?

6. Какие показатели эффективности моделирования позволяет повысить применение метода пересчета? Приведите примеры.

7. В каких случаях применяется форсирование случайных воздействий?

8. Какие показатели эффективности моделирования позволяет повысить применение форсирования случайных воздействий? Приведите примеры.

9.3. Задачи

1. Разработать алгоритм экспериментального определения вероятности $P[\xi > 4\sigma]$, где ξ – гауссовская случайная величина с параметрами $\sim N(0, \sigma^2)$, минимизирующий затраты машинного времени.

2. Разработать алгоритм экспериментального определения вероятности $P[\chi_n > h]$, где χ_n – случайная величина, описываемая законом распределения χ_n , при различных значениях n и h , минимизирующий затраты машинного времени.

3. Разработать алгоритм моделирования первого достижения порога h винеровским случайным процессом с различными дисперсиями, минимизирующий затраты машинного времени.

4. Разработать алгоритм моделирования релеевских замираний гармонического радиосигнала при их различной интенсивности, минимизирующий затраты машинного времени.

5. Разработать алгоритм моделирования оптимального измерителя времени прихода (амплитуды, длительности) прямоугольного видеоимпульса на фоне белого шума. Использовать метод зависимых испытаний по всем возможным параметрам.

6. Разработать алгоритм моделирования оптимального измерителя времени прихода (амплитуды, начальной фазы, длительности) прямоугольного радиоимпульса на фоне белого шума. Использовать метод зависимых испытаний по всем возможным параметрам.

7. Разработать алгоритм моделирования оптимального обнаружителя прямоугольного видеоимпульса с неизвестным временем прихода времени прихода (амплитудой, длительностью) на фоне белого шума. Использовать метод зависимых испытаний по всем возможным параметрам.

8. Разработать алгоритм моделирования оптимального

обнаружителя прямоугольного радиоимпульса с неизвестным временем прихода времени прихода (амплитудой, начальной фазой, длительностью) на фоне белого шума. Использовать метод зависимых испытаний по всем возможным параметрам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный материал ориентирован на углубленное изучение методов статистического имитационного моделирования технических систем и протекающих в них случайных процессов в ходе подготовки магистров по направлению 11.04.01 «Радиотехника» в рамках магистерской программы «Радиотехнические средства обработки и защиты информации в каналах связи» по дисциплине «Техническая диагностика и скрытность».

В пособии особое внимание уделено эффективным процедурам формирования случайных чисел с заданными статистическими свойствами. Использование приведенных материалов позволит проектировать статистические имитационные модели технических систем и протекающих в них случайных процессов с минимальными вычислительными затратами при необходимой точности результатов моделирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - М.: Высш. шк., 2000. - 483 с.
2. Гладков Л.Л. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / Л.Л. Гладков, Г.А. Гладкова. Минск, РИПО, 2013. – 238 с.
3. Бочаров П. П. Теория вероятностей. Математическая статистика [Текст] / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 296 с.
4. Каневский З.М. Основы теории скрытности. Учебное пособие [Текст] / З.М. Каневский, В.П. Литвиненко, Г.В. Макаров Г.В., Д.А. Максимов. - Воронеж, Изд-во ВГТУ, 2006. – 202 с.
5. Литвиненко В.П. Энергетическая скрытность сигналов и защищенность радиолиний. Учебное пособие [Текст] / В.П. Литвиненко. - Воронеж, Изд-во ВГТУ, 2009. – 166 с.
6. Бакалов В.П. Цифровое моделирование случайных процессов [Текст] / В.П. Бакалов. -М.: Сайнс-пресс, 2002. -88 с.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 2000. – 630 с.
8. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям [Текст] / Р.Н. Вадзинский. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.
9. Кнут Д. Искусство программирования. Т. 1-3 [Текст] / Д. Кнут. – М.: Вильямс, 2006, 2007, 2007. – 720, 832, 824 с.
10. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн.1 [Текст] / Б.Р. Левин. – М.: Сов. Радио, 1969. – 752 с.
11. Иванов М.А. Теория, применение и оценка качества генераторов псевдослучайных последовательностей. [Текст] / М.А. Иванов И.В. Чугунков. – М.: Кулиц-Образ,, 2003. – 240 с.
12. Прикладная теория случайных процессов и полей [Текст] / К.К. Васильев, Я.П. Драган, В.А. Казаков В.А. и др.;

Под ред. Васильева К.К., Омельченко В.А. – Ульяновск: УлГТУ, 1995. – 256 с.

13. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум [Текст] / С.А. Прохоров. – Уральск: Самар. гос. аэрокосм. ун-т., 2001. – 191 с.

14. Советов Б.Я. Моделирование систем: Учеб. для вузов [Текст] / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Высшая школа, 2009. – 343 с.

15. Трифонов А.П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами [Текст] / А.П. Трифонов, Е.П. Нечаев, В.И. Парфенов. – Воронеж: ВГУ, 1991. – 246 с.

16. Ермаков С.М. Статистическое моделирование. Часть 1. Моделирование распределений. [Текст] / С.М. Ермаков. – СПб.: НИИММ СПбГУ, 2006. – 63 с.

17. Шелухин О.И. Моделирование информационных систем: Учеб. Пособие [Текст] / О.И. Шелухин, А.М. Тенякшев, А.В. Осин. – М.: Радиотехника, 2005. – 368 с.

18. Боровков А.А. Математическая статистика. [Текст] / А.А. Боровков. – СПб.: Лань, 2010. – 704 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.....	4
1.1. Способы получения случайных величин	4
1.2. Генераторы псевдослучайных чисел на ЭВМ	6
1.3. Датчики равновероятных случайных чисел	6
1.3.1. Типы датчиков	6
1.3.2. Ранние алгоритмы формирования случайных чисел	8
1.3.3. Мультипликативный датчик	9
1.4. Масштабирование равномерных случайных величин	13
1.5. Моделирование случайных чисел в типовом программном обеспечении	15
1.6. Контрольные вопросы	16
1.7. Задачи	16
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	18
2.1. Методы формирования случайных величин с произвольным законом распределения вероятностей	18
2.1.1. Исходные случайные числа	18
2.1.2. Метод обратной функции	18
2.1.3. Метод исключения (метод Неймана)	21
2.1.4. Метод кусочной аппроксимации	26
2.1.5. Метод суперпозиции (метод рандомизации)	29
2.2. Моделирование стандартных гауссовских случайных величин	33
2.2.1. Стандартная гауссовская случайная величина	33
2.2.2. Метод центральной предельной теоремы	34
2.2.3. Метод изотропного вектора	36
2.3. Формирование случайных величин на основе гауссовского датчика	39

2.4. Типовые программные датчики случайных чисел	41
2.5. Контрольные вопросы	41
2.6. Задачи	45
3. РАЗЫГРЫВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ, МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	48
3.1. Разыгрывание случайных событий	48
3.2. Моделирование дискретных случайных величин..	50
3.3. Моделирование гауссовского вектора	57
3.4. Контрольные вопросы	60
3.5. Задачи	61
4. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ	63
4.1. Выборочные моменты, расчет погрешностей	63
4.1.1. Общие соотношения	63
4.1.2. Основные параметры и характеристики оценок	63
4.2. Выборочные распределения	66
4.2.1. Общие соотношения	66
4.2.2. Правило построения гистограмм	68
4.2.3. Правило построения полигона накопленных частот	70
4.3. Сравнение теоретического и эмпирического распределений	71
4.3.1. Функциональный масштаб	71
4.3.2. Вероятностная бумага	73
4.3.3. Критерий согласия χ^2 (хи-квадрат) Пирсона	75
4.4. Применение программы MathCAD	78
4.5. Контрольные вопросы	78
4.6. Задачи	80
5. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. МЕТОД СКОЛЬЗЯЩЕГО СУММИРОВАНИЯ	83
5.1. Общие положения	83
5.2. Выбор шага дискретизации случайного процесса	86

5.3. Методы формирования гауссовских случайных процессов на ЭВМ	88
5.4. Метод скользящего суммирования	94
5.5. Контрольные вопросы	102
5.6. Задачи	102
6. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ – РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД, МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ	104
6.1. Рекуррентный метод (метод авторегрессии, скользящего среднего)	104
6.2. Метод ортогональных (канонических) разложений	110
6.3. Неканонические разложения	117
6.4. Контрольные вопросы	118
6.5. Задачи	119
7. МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ И НЕГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	120
7.1. Моделирование квазигармонических и типовых негауссовских случайных процессов	120
7.1.1. Моделирование квазигармонических случайных процессов на ЭВМ	120
7.1.2. Прямые методы моделирования квазигармонических процессов	121
7.1.3. Метод моделирования с квадратурными Компонентами	122
7.2. Моделирование негауссовских случайных Процессов	125
7.2.1. Общая схема моделирования	125
7.2.2. Трехэтапная схема формирования негауссовского процесса	127
7.3. Модифицированный трехэтапный метод формирования случайных процессов	129
7.4. Моделирование типовых негауссовских случайных процессов	131

7.5. Контрольные вопросы	135
7.6. Задачи	135
8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПУАССОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ (СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ)	137
8.1. Моделирование пуассоновских процессов (случайных потоков)	137
8.1.1. Моделирование однородных пуассоновских случайных процессов	137
8.1.2. Моделирование кусочно-однородных пуассоновских случайных процессов	143
8.1.3. Моделирование неоднородных пуассоновских случайных процессов	147
8.1.4. Моделирование пуассоновских случайных полей	154
8.2. Контрольные вопросы	155
8.3. Задачи	156
9. СПОСОБЫ ОРГАНИЗАЦИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ	158
9.1. Способы организации статистического Моделирования	158
9.1.1 Метод зависимых испытаний	158
9.1.2. Метод пересчета	162
9.1.3. Форсирование случайных воздействий	164
9.2. Контрольные вопросы	166
9.3. Задачи	167
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	168
БЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	169

Учебное издание

Литвиненко Владимир Петрович
Чернояров Олег Вячеславович

МОДЕЛИРОВАНИЕ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В авторской редакции

Подписано к изданию 4.03.2017

Формат 60х84/16. Бумага для множительных аппаратов.

Усл. печ. л. 11,2. Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 250 экз.

Зак. №

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14