ФГБОУВПО «Воронежский государственный технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра высшей математики и физико-математического моделирования)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям и типовым расчетам по дисциплине «Математика» для студентов специальностей 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.04 «Управление в технических системах» , 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 35.03.06 «Агроинженерия», очной формы обучения

Часть 1

Составители: А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Г.Ф. Федотенко

Pakt- san 1 .docx 1,44 Мбайт 14.03.2015 уч.-изд. 3.8 л.
(название файла) (объем файла) (дата) (объем издания

ФГБОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

(Кафедра «высшей математики и
физико-математического моделирования»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям и типовым расчетам по дисциплине «Математика» к практическим занятиям и типовым расчетам по дисциплине «Математика» для студентов специальностей 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.04 «Управление в технических системах» , 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 35.03.06 «Агроинженерия», очной формы обучения

Часть 1

Воронеж 2015

Составители: канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, ст. преп. Г.Ф. Федотенко

УДК 517

Методические указания к практическим занятиям и типовым расчетам по дисциплине «Математика» для студентов специальностей 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.04 «Управление в технических системах» , 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 35.03.06 «Агроинженерия», очной формы обучения. Ч. 1/ ФГБОУВПО Воронежский государственный технический университет»; сост. А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Г.Ф. Федотенко. Воронеж, 2015. 66 с.

Методические указания для выполнения практических занятий и типовых расчетов содержат теоретический материал, рекомендуемую литературу по выполнению типовых расчетов, примеры решения задач типового расчета. Предназначены для студентов первого курса.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Pakt- san 1 .docx »

Ил. 11. Библиогр.: 12 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. М.В. Юрьева

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

© ФГБОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2015

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых практических задач и задач типового расчета по теме:“Математика”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ ПО БАЗИСУ

Известно, что множество всех векторов образует линейное пространство (для векторов, элементов этого пространства определены операции: сложение и умножение на число. Количество координат вектора определяет размерность пространства. Доказано, что всякий вектор $\overline{x} = (\xi_1, \xi_{2..}, \xi_n)$ n-мерного линейного пространства можно единственным образом представить в виде линейной R^n комбинации векторов, образующих базис,

$\overline{x} = \xi_1 \overline{e_1} + \xi_2 \overline{e_2} + \xi_3 \overline{e_3}$, где $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ – базис (в некоторых задачах иногда не будет ставится знак вектора над базисными векторами, но понимать надо, что они всегда являются векторами).

Базис – это совокупность n линейно независимых векторов n-мерного пространства R^n.

Заметим, что в n-мерном линейном пространстве существует бесконечно много различных базисов из n векторов. В следующих двух заданиях при решении задач надо уметь устанавливать линейную независимость или линейную зависимость векторов, и убедиться, что векторы, по которым требуется разложить данный вектор, образуют базис.

Пример. Написать разложение вектора $\overline{x}$ по векторам $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$.

Дано: $\overline{x}$=(-9,5,5), $\overline{p}$=(4,1,1), $\overline{q}$=(2,0,-3), $\overline{q}$=(-1,2,1). Требуется найти коэффициенты в разложении $\overline{x} = \alpha\overline{p} + \beta\overline{q} + \gamma\overline{r}$

Решение: Убедимся, что векторы $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ образуют базис в пространстве R^3. Если они линейно независимы, тогда $\overline{x} \in R^3$ можно представить в виде линейной комбинации этих векторов.

а) Рассмотрим $\lambda_1\overline{p} + \lambda_2\overline{q} + \lambda_3\overline{r} = \overline{0}$ в координатной форме: $\lambda_1\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Получим

$\begin{cases}4\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + 0\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0\end{cases}$, т.к. определитель этой линейной однородной системы: $\Delta = \begin{vmatrix}4 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix} = 29 \neq 0$.

Однородная система имеет единственное нулевое решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Следовательно, $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ – линейно независимы и образуют базис в R^3.

б) Запишем разложение вектора $\overline{x}$ по этому базису

$\overline{x} = \alpha \overline{p} + \beta \overline{q} + \gamma \overline{r}$ имеем: $\alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Это векторное уравнение равносильно трем скалярным уравнениям:

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta - \gamma = -9 \\ \alpha + 0\beta + 2\gamma = 5 \\ \alpha - 3\beta + \gamma = 5 \end{cases}$$

Эта линейная неоднородная система (ЛНС) уравнений, у которой $\Delta = 29 \neq 0$, имеет единственное решение, которое находится по правилу Крамера:

$\alpha = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $\beta = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $\gamma = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$. Вычисляем дополнительные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -9 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 5 \cdot (-3) \cdot (-1) -$$

$$-5 \cdot 0 \cdot (-1) - (-9) \cdot (-3) \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 1 = 20 + 15 - 54 - 10 = -29$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -9 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 5 - 18 + 5 - 40 + 9 = -29$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -9 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 27 + 10 + 60 - 10 = 87.$$ Следовательно,

$$\alpha=\frac{-29}{29}=-1,\ \beta=\frac{-29}{29}=-1,\ \gamma=\frac{87}{29}=3.$$

Ответ: В базисе $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ имеем разложение $\overline{x}=-\overline{p}-\overline{q}+3\overline{r}$.

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим m линейных неоднородных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (*)$$

Эту ЛНС уравнений можно записать в векторной форме $AX=B$, где заданы матрицы коэффициентов A, B.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ и B матрица-столбец $$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(вектор свободных членов); $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, X- искомый n-мерный вектор неизвестных , которые требуется найти.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется несовместной. Имеет место следующая теорема Кронекера - Капели: Для совместности системы (*) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся рангу её расширенной матрицы: $Rang\ A=Rang\ \overline{A}=r$, где

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & ... & ... & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ – расширенная матрица.

Если $r=n$, то ЛНС(*) имеет единственное решение. Если $r<n$, то ЛНС(*) имеет бесконечное множество решений. Назовём r неизвестных, базисный минор из коэффициентов при которых отличен от нуля, базисными переменными остальные $(n-r)$ неизвестных системы назовем свободными переменными. Придавая свободным переменным произвольные значения, можно найти соответствующие значения базисных переменных. В результате получим общее решение системы, включающее в себя все частные решения.

Пример. Найти общее решение данной неоднородной системы с исследованием её на совместимость. Выделить какое-нибудь частное решение.

Дано: $$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+2x_4=4 \\ 2x_1-5x_2+4x_3+3x_4=7 \\ x_1-2x_2+3x_3+4x_4=3 \end{cases}$$

Решение. Здесь число уравнений $m=3$, число неизвестных $n=4$,

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$ - расширенная матрица, $\overline{B}=\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ -вектор свободных членов, $\overline{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ -искомый вектор. Вычислим

сначала $Rang\ A$ и $Rang\,\overline{A}$ методом окаймляющих миноров:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,\ M_4 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow Rang\,\overline{A} = 3.$$

Т.к. ранги матриц A и $\overline{A}$ равны, то система совместна и имеет бесконечно много решений, ибо ранг $r = 3$ меньше числа неизвестных $n = 4$. Неизвестные x_1, x_2, x_4 соответствуют базисным столбцам минора $M_3 \neq 0$. Примем их за базисные переменные, неизвестная переменная x_3 будет свободной.

Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 4 - x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_4 = 7 - 4x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 3 - 3x_3 \end{cases}$$

Решим эту систему по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 3;\ \Delta_{x1} = \begin{vmatrix} 4 - x_3 & -3 & 2 \\ 7 - 4x_3 & -5 & 3 \\ 3 - 3x_3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 147x_3 + 3;$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 - x_3 & 2 \\ 2 & 7 - 4x_3 & 3 \\ 1 & 3 - 3x_3 & 4 \end{vmatrix} = -6x_3 + 13;\ \Delta_{x3} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 - x_3 \\ 2 & -5 & 7 - 4x_3 \\ 1 & -2 & 3 - 3x_3 \end{vmatrix} = 62x_3$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 49x_3 + 1$; $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = (-6x_3 + 13)/3$;

$x_4 = \dfrac{\Delta_{x_4}}{\Delta} = 62x_3/3$. Обозначим $x_3 = C$, где C- произвольная постоянная , $C \in R$.

Запишем общее решение в векторной форме

$$X_{общее} = \begin{pmatrix} 49C+1 \\ -2C+13/3 \\ C \\ 62C/3 \end{pmatrix}$$

Получая, например, $C=3$, найдем частные ЛНС: $X_1=148$; $X_2=-5/3$; $X_3=3$; $X_4=62$.

Ответ: $X_{общее}=(49C+1,-2C+13/3,C,62C/3)$,
$X_{частное}=(148,-5/3,3,62)$.

3. ПОДПРОСТРАНСТВА, ОБРАЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯМИ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ (ЛОС) УРАВНЕНИЙ. НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛОС

Рассмотрим линейную однородную систему m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов размерности $m \times n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - неизвестный вектор, подлежащий определению.

Совокупность линейно независимых решений

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ ЛОС уравнений называется фундаментальной системой решений (ФСР) , если любое решение этой системы может быть представлено в виде линейной комбинации этих векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$: $X=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\ldots+c_k\varphi_k$, где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ – любые константы. Последнее равенство является общим решением ЛОС уравнений в векторной форме ,т.к. в нём содержатся всевозможные частные решения при конкретных значениях произвольных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Теорема. Если ранг r матрицы A меньше числа n неизвестных, то ЛОС уравнений имеет ненулевое решение. Число n-мерных векторов , определяющих ФСР , находятся по формуле $k=n-r$, где $r=Rang\ A$. Таким образом, если рассматривается линейное пространство R^n ,элементами которого являются n-мерные векторы , то множество всех решений ЛОС является подпространством пространства R^n . Размерность этого подпространства равна k.

Пример. Найти общее решение данной системы и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений ЛОС, указать размерность пространства).

Дано:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение. В данной ЛОС имеем $m=3$- число уравнений, $n=5$- число неизвестных.

Запишем матрицу коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и определим её ранг с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 9 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 23 & -8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 23 & -8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -8 & -8/3 & 4/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$$

Т.к. число линейно независимых столбцов преобразований матрицы равно $r=3$, то $RangA=r=3$. $RangA=3<n=5$. Следовательно, ЛОС имеет ненулевые решения.

ФСР состоит двух ($k=n-r=2$)линейно независимых решений. Неизвестные x_1,x_2,x_3 соответствуют базисным столбцам и являются базисными переменными; неизвестные x_4,x_5 – свободными переменными. Запишем преобразованную систему уравнений, перенеся свободные переменные x_4,x_5 в правую часть системы уравнений: $\begin{cases} x_1 = (1/3)x_4 - (1/6)x_5 \\ x_2 = (-1/3)x_4 - (1/3)x_5 \\ x_3 = -(1/3)x_4 + (1/6)x_5 \end{cases}$

Для первого набора φ_1 свободных переменных $x_4=1,\ x_5=0$ и второго набора φ_2 свободных переменных $x_4=0,\ x_5=1$ имеем решения:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2 = \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/3 \\ 1/6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решения φ_1 и φ_2 образуют ФСР. Общее решение системы в векторной форме:

$$X=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2=c_1\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\-1/3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1/6\\-1/3\\1/6\\0\\1\end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Если положить $c_1=3\cdot\alpha$, $c_2=6\cdot\beta$, где любые числа $\alpha,\beta\in(-\infty,\infty)$, то общее решение данной ЛОС в координатной форме можно записать так: $x_1=\alpha-\beta$, $x_2=-\alpha-2\beta$, $x_3=-\alpha+\beta$, $x_4=3\cdot\alpha$, $x_5=6\cdot\beta$, $\alpha,\beta\in(-\infty,\infty)$.

Таким образом, исходная система имеет бесконечное множество решений; размерность пространства решений $k=2$.

Ответ: $X=(\alpha-\beta,\ \alpha-2\beta,\ -\alpha+\beta,\ 3\cdot\alpha,\ 6\cdot\beta)$.

4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Говорят, в линейном векторном пространстве R задано преобразование A, если каждому элементу (вектору) $\overline{x}\in R$ по некоторому закону (или правилу) ставится в соответствие вектор $A\overline{x}\in R$. Преобразование A называют линейным , если для любых векторов $\overline{x},\overline{y}\in R$ и любого действительного числа λ выполняется равенства $A(\overline{x}+\overline{y})=A\overline{x}+A\overline{y}$ и $A(\lambda\overline{x})=\lambda A\overline{x}$.

Для простоты возьмём линейное пространство R^3 $(n=3)$.

Пусть в этом пространстве R^3 имеются два базиса: $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$ (старый) и $\overline{e_1'},\overline{e_2'},\overline{e_3'}$ (новый), связанные равенствами

$$\begin{cases} \overline{e_1^/} = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + a_{13}\bar{e}_3 \\ \overline{e_2^/} = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + a_{23}\bar{e}_3 \\ \overline{e_3^/} = a_{31}\bar{e}_1 + a_{32}\bar{e}_2 + a_{33}\bar{e}_3 \end{cases} \qquad (**)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрица перехода от старого базиса к новому, столбцы, которой являются координатами в формулах перехода (**).

Если вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задан в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, то его координаты $\overline{x'} = (x_1^/, x_2^/, x_3^/)$ в новом базисе можно найти по формуле $\overline{x'} = A^{-1}\bar{x}$, где матрица линейного преобразования A^{-1} является обратной для матрицы A; т.к. $detA \neq 0$,то - невырожденная матрица. Заметим, что в конечномерном пространстве R линейное преобразование (оператор) называется невырожденным , если определитель матрицы этого линейного преобразования отличен от нуля. Матрицу B' линейного оператора (преобразования) при переходе от одного ортонормированного базиса к другому находится по формуле $B' = A^{-1}BA$, где A-матрица перехода от старого базиса к новому , B матрица оператора в старом базисе

Пример. Найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе ($\overline{e_1^/}, \overline{e_2^/}, \overline{e_3^/}$), если он задан в базисе ($\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$).

Дано: $\bar{x} = (2{,}6{,}-3)$, $\overline{e_1^/} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$, $\overline{e_2^/} = (2/3)\bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\overline{e_3^/} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$

Решение. Имеем по условию разложение вектора $\bar{x} = 2\bar{e}_1 + 6\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$ старом базисе $\overline{e_1^/}, \overline{e_2^/}, \overline{e_3^/}$. Требуется разложить вектор $\bar{x}$ в новом базисе $\overline{e_1^/}, \overline{e_2^/}, \overline{e_3^/}$, т.е. надо найти новые координаты $x_1^/, x_2^/, x_3^/$ вектора $\overline{x} = x_1^/ \overline{e_1^/} + x_2^/ \overline{e_2^/} + x_3^/ \overline{e_3^/}$. Учитывая условие задачи, запишем $\overline{x} = x_1^/ (\overline{e}_1 + \overline{e}_2 - 2\overline{e}_3) + x_2^/$ $((2/3)\overline{e}_1 - \overline{e}_2) + x_3^/ (-\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3)$ или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = x_1^/ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2^/ \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3^/ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторное уравнение равносильно трем скалярным уравнениям :

$$\begin{cases} x_1^/ + (2/3)x_2^/ - x_3^/ = 2 \\ x_1^/ - x_2^/ + x_3^/ = 6 \\ -2x_1^/ + 0 \cdot x_2^/ + x_3^/ = -3 \end{cases}$$

Это линейная неоднородная система(ЛНС), у которой
det *A*=*-1*. Решаем ЛНС уравнений по правилу Крамера:

$$x_1^/ = \frac{\Delta_1}{\det A}, x_2^/ = \frac{\Delta_2}{\det A}, \ x_3^/ = \frac{\Delta_3}{\det A}$$

Находим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2/3 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2/3 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

Получим $x_1^/$=5, $x_2^/$=6, $x_3^/$=7. Таким образом, $\overline{x^/}$ =(5,6,7).

5. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Пусть R^n - заданное *n*-мерное линейное пространство .

Ненулевой вектор $\bar{h} \in R^n$ называется собственным вектором линейного оператора (преобразования) ,заданного матрицей A , если найдется такое число λ, что выполняется равенство $A\bar{h} = \lambda\bar{h}$. Само число λ называют собственным (или характеристическим) числом оператора A, соответствующим собственному вектору $\bar{h}$. Собственные (значения) матрицы A являются корнями характеристического уравнения det (A-λE)=0, являющегося алгебраическим уравнением n-ой степени.

Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & ... & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & ... & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

то характеристическое уравнение в координатной форме имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (***)$$

Для нахождения ненулевого собственного вектора

$$\bar{h}_m = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \neq 0,$$ отвечающему собственному числу λ_m,

$m=1,2,...n$ надо решить линейную однородную систему (ЛОС) уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22}-\lambda)\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\xi_n = 0 \end{cases}$$

Эта ЛОС уравнений имеет бесконечно много решений. Поэтому, собственному значению λ_m соответствует семейство собственных векторов. Выбирают любой из них.
Если характеристическое уравнение (***) имеет *n* различных корней, то соответствующие им собственные векторы $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots \bar{h}_n$ - линейно независимые и образуют базис. Если среди корней характеристического уравнения (*) имеются кратные, т.е. равные корни, например, λ_1 - корень кратности *к*, то хорошо найти *к* линейно независимых собственных векторов $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots \bar{h}_k$, отвечающих собственному значению, кратности *к*; их число *m=n-r* , где *n*-порядок матрицы (А-λ_1 Е), *r=Rang (A-*λ_1 *E);* $m \le k$.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы *A*.

$$\text{Дано: } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое урав-

$$\text{нение } \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$(2-\lambda)^2(4-\lambda)+2+2(2-\lambda)-4+\lambda=0$, $(2-\lambda)^2(4-\lambda)+2+2(2-\lambda)-4+\lambda=0$

или $(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9)=0$, $\lambda_1=2, \lambda_{2,3}=3$.

Откуда $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3$-собственные значения матрицы A.

Для простого корня $\lambda_1 = 2$ находим собственный вектор $\bar{h} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \neq 0$, решая ЛОС уравнений

$\begin{cases} 2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + 0 \cdot \xi_2 - \xi_3 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 + 0 \cdot \xi_3 = 0 \end{cases}$ коэффициенты этой системы равны, элементам определителя *det* (A-λ E)=0, при $\lambda_1 = 2$:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0$. Решим методом Гаусса, исключая неизвестные: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, получим $\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 = 0 \\ \xi_2 - \xi_3 = 0 \end{cases}$

или $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$, где ξ_3 -свободная переменная , полагая $\xi_3 = c_1$, получаем, $\bar{h}1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ -семейство собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_1 = 2$. Например, $\overline{h}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Для кратного корня $\lambda_2=\lambda_3=3$ сначала определим число линейно независимых собственных векторов. Подставляя $\lambda=3$ в левую часть характеристического уравнения, получаем матрицу $\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

Ее порядок *n=3* , ранг *r=1* (наивысший порядок миноров , не равных нулю). Число линейно независимых собственных векторов равно *m=n-r=2* и совпадает с кратностью корня *к=2* .Найдем их.

Имеем $\xi_1-\xi_2-\xi_3=0$ или $\xi_1=\xi_2+\xi_3$.Полагая $\xi_2=c_2,\xi=c_3$, где c_2,c_3-любые константы, одновременно не обращающееся в ноль, получим $\overline{h}=\begin{pmatrix}c_2+c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$- семейство собственных векторов для $\lambda_2=\lambda_3=3$. Пусть $c_2=1,c_3=0$. Тогда $\overline{h}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Пусть $c_2=0,c_3=1$. Тогда $\overline{h}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Два линейно независимых собственных вектора $\overline{h}_2$ и $\overline{h}_3$, соответствующих собственному числу $\lambda_2=\lambda_3=3$.

Ответ: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=3$ – собственные значения матрицы A, $\overline{h}_1=(1,1,1)$, $\overline{h}_2=(1,1,0)$,

6. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Квадратичной формой действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Если число переменных $n=2$. то квадратичная форма : $K(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$. Если $n=3$, то
$K(x_1, x_2, x_3) = \; = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3$.

<u>Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.</u>

Рассмотрим квадратичную форму трех переменных $K(x_1, x_2, x_3)$. Симметрическая матрица

$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, у которой $a_{ij} = a_{ji}$, $(i,j \; =1,2,3$ при $i \neq j)$

называется матрицей квадратичной формы $K(x_1, x_2, x_3)$. Так как S - симметричная матрица, то корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения

$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$ являются действительными числами и

будут собственными значениями матрицы S.

Известно, что собственные векторы симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Следовательно, если матрица симметрическая, то можно говорить об ортогональном базисе векторов, составленном из собственных векторов этой матрицы.

Если среди корней характеристического уравнения есть корень кратности *к*, то можно указать *к* линейно независимых векторов, отвечающих этому собственному значению, согласно следующей теореме.

Теорема. Для того чтобы существовал базис из собственных векторов матрицы оператора *А*, необходимо и достаточно, чтобы каждому собственному значению соответствовало столько линейно независимых собственных векторов, какова его кратность. Число линейно независимых векторов равно

$m=n-r$, где n -размерность матрицы, $r=Rang\,S$.

И так, каждому оператору в разных базисах соответствуют различные матрицы. Наша цель: найти такой базис, в котором матрица оператора имела бы простейший вид, а именно диагональный. В ортонормированном базисе из собственных векторов матрица оператора имеет диагональный вид

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$,где на главной диагонали стоят

собственные значения матрицы S , ибо характеристический многочлен линейного оператора (преобразования) не зависит от базиса. Известно, что квадратичную форму $K(x_1,x_2,x_3)$ можно представить в виде скалярного произведения

$K(x_1,x_2,x_3)=(S\bar{x},\bar{x})$,где

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad S\bar{x}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}.$$

Переходя к новому ортонормированному базису, где матрица перехода $B=T^{-1}ST$, старые и новые переменные (координаты) связаны преобразованием $\overline{x} = T\overline{x^{/}}$, где $\overline{x^{/}} = \begin{pmatrix} x_1^{/} \\ x_2^{/} \\ x_3^{/} \end{pmatrix}$ -вектор $\overline{x}$ в новой системе координат, получим квадратичную форму в новой системе координат, определенной базис из собственных нормированных векторов, в виде

$$K(x_1^{/}, x_2^{/}, x_3^{/}) = (B\overline{x^{/}}, \overline{x^{/}}) = \lambda_1(\overline{x_1^{/}})^2 + \lambda_2(\overline{x_2^{/}})^2 + \lambda_3(\overline{x_3^{/}})^2 ,$$

не содержащем членов с произведением переменных, $x_1^{/}x_2^{1}, x_2^{/}x_3^{/}, x_1^{/}x_3^{/}$, который называется каноническим видом.

Формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному базису имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1^{/} + b_{12}x_2^{/} + b_{13}x_3^{/} \\ x_2 = b_{21}x_1^{/} + b_{22}x_2^{/} + b_{23}x_3^{/} \\ x_3 = b_{31}x_1^{/} + b_{32}x_2^{/} + b_{33}x_3^{/} \end{cases},$$ где нормированные собственные векторы матрицы S: $\overline{u^0} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}, \overline{v^0} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}, \overline{w^0} = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$

принято говорить, что квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$ приведена к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Вывод. Чтобы привести каноническую форму к каноническому виду надо:

1) По коэффициентам квадратичной формы составить симметрическую матрицу S;

2) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы S, причем собственные векторы пронормировать;

3) Записать квадратичную форму в каноническом виде

$$K(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(\overline{x_1})^2 + \lambda_2(\overline{x_2})^2 + \lambda_3(\overline{x_3})^2 .$$

7. ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Вектор – это направленный отрезок, т.е. имеющий длину и направление. Длина вектора называется модулем и обозначается $|\overline{a}|$ или $|\overline{AB}|$. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ - коллинеарны ($\overline{a} \,//\, \overline{b}$), если параллельны одной и той же прямой или лежат на одной прямой. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – компланарны, если они параллельны одной и той же плоскости или лежат в одной и той же плоскости.

Направление вектора определяется углами α, β, γ, образованными вектором с положительным направлением координатных осей OX, OY, OZ соответственно.

Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам: $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\overline{a}|}, \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\overline{a}|}, \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\overline{a}|}$, где

$|\overline{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$, если его координаты $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Заметим, что направляющие косинусы являются координатами любого единичного вектора, т.е.

$\overline{a^0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, если $\left|\overline{a^0}\right| = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$

<u>Основные действия над векторами.</u>

Пусть даны $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Тогда:

1. $\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$
2. $\overline{\lambda a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$, где λ -действительное число.
3. <u>Скалярное произведение</u> $\overline{a} \cdot \overline{b}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ есть число, по определению равное $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$,где φ - угол между двумя векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вычисляется по фор-

муле: $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$.

4. Векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - есть вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1) вектор $\bar{c}$ направлен так, что векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку;
2) вектор $\bar{c}$ ортогонален вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$.
3) модуль $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$, де φ - угол между двумя

векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Геометрически модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, т.е. $S_{параллеграмма}=|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$.

Тогда $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$.

5. Смешанное произведение трех векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ есть число равное по определению: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$.

Геометрически модуль смешанного произведения равен объему параллепипеда, построенного на этих векторах, т.е. $V_{параллепипеда}=|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}|$. Заметим, что объем тетраэдра, построенного на трех векторах $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ равен $V_{тетраэдра}=(1/3)S_{осн.}h$, где $S_{осн.}$ – площадь основания тетраэдра, h –высота тетраэдра, т.к. основание тетраэдра есть треугольник, построенный на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то $S_{осн}=(1/2)$ $S_{параллелограмма}$, следовательно,

$$V_{тетраэдра}=(1/6)S_{параллелограмма}h=(1/6)V_{параллепипеда}.$$

Если заданы векторы в координатах $\bar{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b}=(b_x, b_y, b_z)$ и $\bar{c}=(c_x, c_y, c_z)$, то

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$ смешанное произведение.

1) Условие перпендикулярности векторов ($\bar{a}\perp\bar{b}$): $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ или $a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=0$.

2) Условие коллинеарности векторов ($\bar{a}\,//\,\bar{b}$):

$\bar{a}\times\bar{b}=0$ или $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

3)Условие компланарности векторов $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0$ или

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

Пример. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$(рис.2).

Дано: $A_1(-1;2;-3)$, $A_2(4;-1;0)$, $A_3(2;1;-2)$; $A_4(3;4;5)$.

Требуется найти объем тетраэдра.

Решение. а) Объем тетраэдра равен 1/6 части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$. Объем соответствующего параллелепипеда вычисляется через смешанное произведение векторов, совпадающих с ребрами тетраэдра, сходящимися в вершине A_1(рис.1):

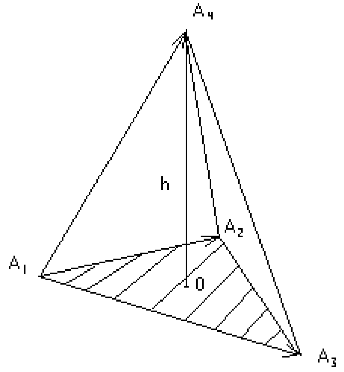


Рис. 1

$$V_{тетраэдра} = (1/6)\left| \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} \right|$$

Найдем координаты векторов и их смешанное произведение: $\overline{A_1A_2} = (5,-3,3)$, $\overline{A_1A_3} = (3,-1,1)$, $\overline{A_1A_4} = (4,2,8)$

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 30$$

Откуда $V_{тетраэдра} = (1/6) \cdot 30 = 5$ (куб. ед.)

б) Искомую высоту h найдем из формулы:
$V_{тетраэдра} = (1/3) S_{основания}\ h$, где $S_{основания}$ равна площади треугольника $A_1 A_2 A_3$.

Площадь треугольника $A_1 A_2 A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$

Поэтому находим векторное произведение

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot i + 4j + 4k$$

Следовательно, S$_{основания}$= $S_\Delta = (1/2)\left|\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\right| =$

$=(1/2)\sqrt{0^2+4^2+4^2}$ $=2\sqrt{2}$ (кв.ед.)

Таким образом $h=3V_{тетраэдра}/S_{основания}=3\cdot 5/(2\sqrt{2})=15\sqrt{2}/4$

Ответ: $V_{тетраэдра}=5$ *(куб. ед.),* $h=15\sqrt{2}/4$ *(ед. длины)*

8. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Плоскость в пространстве.

1) Уравнение плоскости – это уравнение первой степени вида: $Ax+By+Cz+D=0$, если $A^2+B^2+C^2\neq 0$, которое называется общим уравнением.

Коэффициенты A, B, C можно рассматривать, как координаты вектора нормали $\overline{N}=(A,B,C)$, перпендикулярного плоскости.

2) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}$:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, (условие $\overline{N}\perp\overline{MM_0}$, где $\overline{MM_0}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ лежит в плоскости).

3) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

-условие компланарности векторов

$\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}=0$, где $\overline{M_1M}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$,

$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$,

$\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$, где

$M(x,y,z)$- текущая точка данной плоскости.

4) Уравнение плоскости в отрезках имеет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где *a,b,c* – отрезки, отсекаемые плоскостью, на координатных осях соответственно, - абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями *OX, OY*, и *OZ*.

5) Нормальное уравнение плоскости:

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, где $\overline{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - вектор- нормаль к плоскости единичной длины, проведены из начала координат,

p – расстояние от начала координат до плоскости $(p>0)$.

Приведем общее уравнение плоскости к нормальному уравнению плоскости. Для этого умножим обе части общего уравнения плоскости на нормирующей множитель:

$\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ - полученное уравнение и будет нормальным уравнением плоскости. (Знак μ берется противоположным знаку *D*)

Расстояние от данной точки $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где *A,B,C*-коэффициенты в общем уравнении плоскости,

Угол между двумя плоскостями вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

где под углом между двумя плоскостями понимается угол между их нормалями $\overline{N}_1(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{N}_2(A_2,B_2,C_2)$.

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ (если $\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2$).

Условие параллельности двух плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad \text{(если } \overline{N}_1 // \overline{N}_2 \text{)}.$$

Прямая в пространстве

Канонические уравнения прямой имеют вид

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$,где $\overline{S}=(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой, точка $M(x_0,{}_0y.z_0)$ лежит на прямой, т.е. прямая проходит через точку M_0 параллельно вектору $\overline{S}$.

Уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

Прямая может быть задана как линия пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Угол между двумя прямыми вычисляются по формуле

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} ,$$

где угол φ между двумя прямыми- угол между их направляющими векторами данных прямых.

Условие перпендикулярности двух прямых:

$m_1 m_2+n_1 n_2+p_1p_2=0$ (если $\overline{S}_1 \perp \overline{S}_2$).

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad \text{(если } \overline{S}_1 // \overline{S_2} \text{)}.$$

<u>Взаимное расположение прямой и плоскости</u>

Пусть заданы прямая α и плоскость β:

β: $Ax+By+Cz+D = 0,$

$$\alpha: \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

Угол между прямой и плоскостью определяются по формуле

$$\cos\varphi = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

где φ -угол между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad \text{(если } \overline{S} \,//\, \overline{N}\text{).}$$

Условие параллельности двух прямых:

$A\,m+Bn+Cp=0$ (если $\overline{S} \perp \overline{N}$).

Напомним, что $\overline{S} = (m,n,p)$ – направляющий вектор прямой, $\overline{N} = (A,B,C)$ – нормаль к плоскости.

Пример. Найти расстояние d от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1,M_2,M_3.

Дано: $M_1(1;0;2);M_2(1;2;-1);M_3(2;-2;1);M_0(-5;-9;1)$.

Требуется найти: d (см. рис.2)

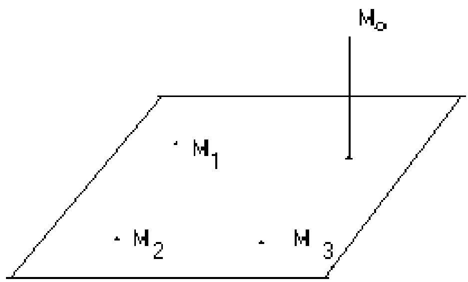


Рис.2

Решение. Находим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2, M_3, по формуле

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 1-1 & 2-0 & -1-2 \\ 2-1 & -2-0 & 1-2 \end{vmatrix} = 0$$

Разложив определитель по первой строке и, приводя подобные члены, имеем уравнение плоскости: $8x+3y+2z-12=0$

Расстояние d от данной точки M_0 (x_0,y_0,z_0) до плоскости, определяемой уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|8x_0 + 3y_0 + 2z_0 - 12|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{|8(-5)+3(-9)+2\cdot 1-12|}{\sqrt{(-8)^2+(-3)^2+2^2}} = \sqrt{77}$$ (ед. длины). Ответ: $\sqrt{77}$.

9. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

1.Окружность – это множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Если R – радиус окружности, точки M_0 (x_0,y_0) - ее центр, то каноническое уравнение окружности имеет вид: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

2. Эллипс – это множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$, причем эта постоянная больше расстояния между фокусами (рис.3).

Пусть $M(x,y)$ – любая точка эллипса, $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ – фокусы. Тогда по определению имеем $|MF_1|+|MF_2|=2a$,

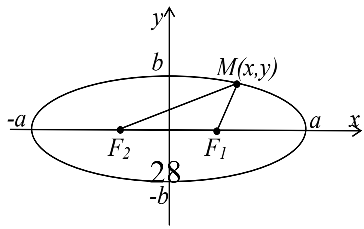


Рис. 3

где $MF_1 = r_1$ и $MF_2 = r_2$ называются фокальными радиусами, и, следовательно, $r_1 + r_2 = 2a$. Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{c}{a}$, (так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$ для эллипса). Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, причем $a^2 = b^2 + c^2$. Здесь a – большая, b – малая полуоси эллипса. В частности, если $a = b$ ($c = 0$, $\varepsilon = 0$, фокусы сливаются в одной точке – центре), то эллипс превращается в окружность $x^2 + y^2 = a^2$. Фокальные радиусы эллипса выражаются через абсциссу точки эллипса по формулам: $r_1 = a - \varepsilon x$ и $r_2 = a + \varepsilon x$.

3. Гипербола – это множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами. Пусть $M(x, y)$ – любая точка гиперболы,

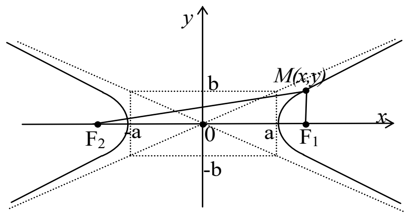


Рис. 4

$F_1(c; 0)$ и $F_2(-c; 0)$ – фокусы. Тогда по определению имеем $\left||F_1M| - |F_2M|\right| = 2a,\ a > 0$, где $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ называются фокальными радиусами, причем для правой ветви гиперболы, $r_1 = \varepsilon x - a$ – правый фокальный радиус; $r_2 = \varepsilon x + a$ – левый фокальный радиус, где число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $a^2 + в^2 = c^2$. Здесь a – действительная полуось, b – мнимая полуось гиперболы; из уравнения видно, что гипербола не пересекает ось OY, т.е. $x \neq 0$.

Для построения гиперболы строят прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, с центром в начале координат. Проводят диагонали в прямоугольнике, которые являются асимптотами $y = \pm\dfrac{b}{a}x$. Вершины гиперболы находятся в точках $(a; 0)$ и $(-a; 0)$.

Замечание. Если каноническое уравнение гиперболы имеет вид : $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, то вершины гиперболы находятся на оси OY в точках $(b; 0)$ и $(-b; 0)$. Гиперболы называются сопряженными (у них действительная ось одной гиперболы служит мнимой осью другой, и наоборот; они имеют общие асимптоты).

Если $a = b$, то уравнение принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$..

Такая гипербола называется равнобочной. Ее асимптоты перпендикулярны друг к другу. Поэтому, если за координатные оси принять асимптоты равнобочной гиперболы, то ее уравнение примет вид $x \cdot y = m,\quad \left(m = \pm\dfrac{1}{2}a^2\right)$ (рис. 4 (а) и рис. 4 (б)), или $y = \dfrac{m}{x}$.

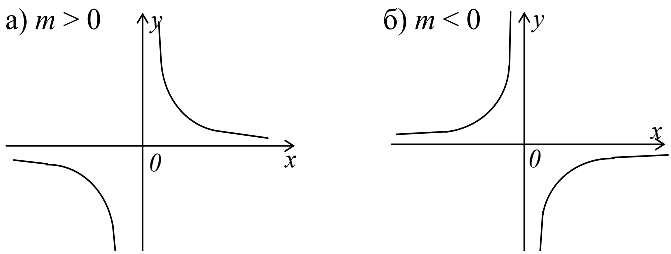


Рис. 4

4. Парабола – это множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой. Пусть прямая l: $x=-p/2$

является директрисой параболы, точка $F(p/2,0)$ – фокус. Тогда каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 2px$,
где p – фокальный параметр.

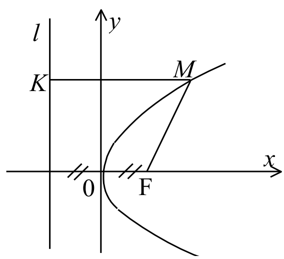
Рис. 5

Эта парабола расположена симметрично относительно оси OX ($p > 0$), $FM = r$ – фокальный радиус параболы, который определяется по формуле $r = x + \frac{p}{2}$, так как $|FM| = |KM|$.

Уравнение $x^2 = 2py$ является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат $OУ$.

При $p > 0$ ветви параболы направлены в положительную сторону соответствующей координатной оси, а при $p < 0$ – в отрицательную сторону.

10. ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ



Если общее уравнение кривой второго порядка вида: $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$, т.е. не содержит члены с произведением xy ($a_{12}=0$), то следует коэффициент выделить полные квадраты по x и по y :

$a_{11}(x^2+2a_1x/a_{11})+a_{22}(y^2+2a_2y/a_{22})+a_0=0,$
$a_{11}(x^2+2a_1x/a_{11})+a_{22}(y^2+2a_2y/a_{22})+a_0=0,$
$a_{11}(x^2+2a_1x/a_{11}+(a_1/a_{11})^2)+a_{22}(y^2+2a_2y/a_{22}+(a_2/a_{22})^2)-$
$-(a_1/a_{11})^2-(a_2/a_{22})^2+a_0=0.$
Или $a_{11}(x+a_1/a_{11})^2+a_{22}(y+a_2/a_{22})^2=(a_2/a_{22})^2)+$
$+(a_1/a_{11})^2-(a_2/a_{22})^2-a_0,$ и сделать замену переменных (параллельный перенос) $x^/ = x+\dfrac{a_1}{a_{11}}, \quad y^/ = y+\dfrac{a_2}{a_{22}}$

В результате получим $a_{11}(x^/)^2 + a_{22}(y^/)^2 = k$,

где $k=(a_2/a_{22})^2)+(a_1/a_{11})^2-(a_2/a_{22})^2-a_0$ или $\dfrac{(x^/)^2}{k/a_{11}}+\dfrac{(y^/)^2}{k/a_{22}}=1$

– канонический вид кривой второго порядка.

11. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ

Пусть общее уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

приведем к каноническому виду

$\dfrac{(x^/)^2}{k/\lambda_1}+\dfrac{(y^/)^2}{k/\lambda_2}=1$, где λ_1, λ_2 -собственные значения матрицы *S*.

Вычисляем $\lambda_1 \cdot \lambda_2$

1. если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 >0$, то кривая эллиптического типа;
2. если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 <0$, то кривая гиперболического типа;
3. если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 =0$, то кривая параболического типа.

Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

Пример. Дано: $K(x,y)= 2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0.$

Решение. Имеем $a_{11}=2, a_{22}=2$, $a_{12}=a_{21}=-1$; $a_1=-1,$

a_2=-1, a_0=1 . Тогда матрица старших членов $S=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Составляем характеристическое уравнение

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$, или $\lambda^2-4\lambda+3=0$

Корни $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=3$ – собственные значения матрицы S. Так как $\lambda_1=1$, и $\lambda_2=3$ то данная кривая эллиптического типа. Находим соответствующие им собственные векторы $\bar{h}_1=(\xi_1,\xi_{2)}$ и $\bar{h}_2=(\eta_1,\eta_{2)}$. Для $\lambda_1=1$:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, или $\begin{cases} \zeta_1-\xi_2=0 \\ -\xi_1+\xi_2=0 \end{cases}$, $\xi_1=\xi_2=c_1$,

$c_1-\forall const$. Пусть c_1=1. Тогда $\bar{h}_1=(1,1)$. Нормируем $\bar{h}_1$ $\overline{h_1^0}=\bar{h}_1/|\bar{h}_1|$, где $|\bar{h}_1|=\sqrt{1^2+1^2}=2$; получаем $\overline{h_1^0}=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$.

Для $\lambda_2=1$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} -\eta_1-\eta_2=0 \\ -\eta_1-\eta_2=0 \end{cases}$,

$\eta_1=-\eta_2=c_2, c_2-\forall const$. Пусть c_2 =1. Тогда $\bar{h}_2=(1,-1)$. Нормируем $\bar{h}_2$, $\overline{h_2^0}=\bar{h}_2/|\bar{h}_2|$, где $|\bar{h}_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=2$; получаем $\overline{h_2^0}=(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$, причем $\overline{h_1^0}\perp\overline{h_2^0}$. Орты собственных векторов $\overline{h_1^0}$ и $\overline{h_2^0}$ образуют базис в новой системе координат x',y'. Имеем матрицу T линейного преобразования координат

$T=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Отсюда получаем формулы преобразования координат $x=(1/\sqrt{2})x'+(1/\sqrt{2})y'$, $y=(1/\sqrt{2})x'-(1/\sqrt{2})y'$ или $x=1/\sqrt{2}(x'+y')$, $y=1/\sqrt{2}(x'-y')$.

Подставляем в уравнения кривой найденные выражения для *x* и *y:* После раскрытия скобок и приведения подобных получаем $(x^/)^2+3(y^/)^2-2\sqrt{2}\,x^/+1=0$, или $(x^/)^2-2\sqrt{2}\,x^/+3(y^/)^2+1=0.$

Выделив, полный квадрат имеем: $(x^/-\sqrt{2}\,)^2+3y^/+1=0.$

Пусть $x^{//}=x^/-\sqrt{2}\,,\ y^{//}=y^/$- параллельный перенос координатных осей. Тогда $(x^{//})^2+3(\,y^{//})^2=1,$ или $(x^{//})^2+(\,y^{//})^2/3=1$- каноническое уравнение эллипса в координатах $x^{//},\ y^{//}$, где $a=1,\ b=1/\sqrt{3}=0{,}577$ – полуоси эллипса (рис.5) .

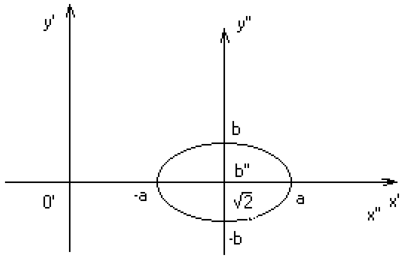


Рис. 5

12. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Часто, однако, приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить тождественные преобразования данного выражения, как говорят, раскрывать неопределенность. Неопределенности бывают нескольких видов: $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, $\{\infty-\infty\}$, $\{0\cdot\infty\}$, $\{1^{\infty}\}$, $\{0^{0}\}$, $\{\infty^{0}\}$, $\{0^{\infty}\}$.

В последующих заданиях рассмотрим основные приемы, которыми обычно пользуются при таких преобразованиях для вычисления заданного предела.

Функция $f(x)$ называется функцией натурального аргумента, если множество значений x, для которых она определена, является множеством всех натуральных чисел: 1,2,3,..n.

Например, $f(n)=1+2+\ldots+n=(n+1)n/2$ - сумма n первых членов арифметической прогрессии.

Числовой последовательностью называется бесконечное множество чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$, следующих одно за другим в определенном порядке и построенных по определенному закону, по которому общий член a_n последовательности задается как функция натурального аргумента, т.е.
$f(n)= a_n$ (индекс n обозначает номер переменной величины a_n , т.е. n –го члена последовательности).

Число A называется пределом последовательности a_n , если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N , зависящий от ε , что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство: $|a_n - A| < \varepsilon$

Пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A.$,или $a_n \to A$ при $n \to \infty$, если

для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$, что при $\forall n > N: \; |a_n - A| < \varepsilon$.

Числовая последовательность не может иметь более одного предела. Последовательность $\{a_n\}$, имеющая предел, называется сходящейся. В противном случае $\{a_n\}$ будет расходящейся. В следующих пяти заданиях типового расчета по теме «Пределы» требуется вычислить пределы числовых последовательностей.
Рассмотрим решение типовых задач с пояснениями на отыскание предела числовой последовательности.

Решение задач на вычисление пределов.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$.

Решение. Выносим за скобки n в набольшей степени, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}.=\left(\frac{\infty-\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{1/n-1/n^2}-\sqrt{1+1/n^2}}{n\sqrt[3]{3+3/n^3}+(n^{1,25})\sqrt[4]{1+1/n^5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{0-0}-\sqrt{1+0}}{n^{0,25}(0\cdot\sqrt[3]{3+0}+\sqrt[4]{1+0}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-`1}{n^{0,25}}=0.$$ Ответ: 0

Число е и его применение.

Числом e называют предел $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$

или $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$, где =2,718. Число e бывает полезным при раскрытии неопределенности вида 1^∞. Приведенную выше форму называют вторым замечательным пределом. Заметим, что при существовании $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ имеет место формула $\lim\limits_{n\to\infty}e^{f(n)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}f(n)}$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$

Решение. Здесь основание степени $\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)\to\infty$ при $n\to\infty$

, а показатель степени $(2n-n)^3\to\infty$. Таким образом, имеет место неопределенность вида $\{1^{-\infty}\}$.

Способ 1**.** Разделив числитель и знаменатель на n^3, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n^3)^{2n}(1+1/n^3)^{-n^3}}{(1-1/n^3)^{2n}(1-1/n^3)^{-n^3}}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n^3)^{\frac{2n^3}{n^2}} (1+1/n^3)^{-n^3}}{(1-1/n^3)^{\frac{-n^3}{-n^2}} (1-1/n^3)^{-n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\lim\limits_{n\to\infty} 2/n^2} e^{-1}}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-2/n^2)} e^{1}} = e^{-2}$$

ибо $(1+1/n^3)^{-n^3} \to e^{-1}, (1-1/n^3)^{-n^3} \to e$. Ответ: e^{-2}.

13. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ (или в точке a), если для любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon > 0$ (хотя бы как угодно малого) существует положительное число $\delta > 0$, вообще говоря, зависящее от ε, т.е. $\delta(\varepsilon)$, такое, что при всех значениях $x \neq a$ и удовлетворяющих условию
$|x-a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$,

такое, что при $\forall x \in D(f) : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $M>0$, зависящее от ε, такое, что при $|x| > M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Правила предельного перехода. Основные теоремы.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$, то

а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$

б) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$

в) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot/(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)/\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$,при $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\neq 0$.

г) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^n$, где n целое число, $n>0$;

д) $\lim\limits_{x\to a}(c\,f(x))=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$,где $c=const$, причем $\lim\limits_{x\to a}c=c$.

е) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

<u>*Предел дробно-рациональной функции.*</u>

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+3}\right)$

Решение. Здесь отыскивается предел отношения двух многочленов дробно-рациональной функции**.** Подстановка в данную функцию неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Следовательно, прежде чем преобразовать, а именно, числитель и знаменатель дроби разделить на *(x-3)*, которые, согласно теореме Безу, делятся без остатка нацело (т.к. обращаются в ноль при *x=3*), т.е. можно представить: $x^3-4x^2-3x+18=(x-3)(x^2-x-6)$ и $x^3-5x^2+3x+9=(x-3)(x^2-2x+9)$. Имеем:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)(x^2-x-6}{(x-3)(x^2-2x-3)}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}\right)=1{,}25$$

Полученные после деления многочлены при $x\to 3$ будут бесконечно малыми. Поэтому снова каждый из них делим на бином *(x-3)* или раскладываем на множители квадратные трехчлены, найдя их корни. Ответ: 5/4

Таким образом, чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ заданную отношением двух многочленов, надо в числителе и знаменателе выделить множитель, равный нулю при предельном значении, и сократить на него. При раскрытии неопределенности вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ надо числитель и знаменатель разделить на x в старшей степени, а затем перейти к пределу.

*<u>Предел иррационального выражения</u>***.**

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

Решение. Имеем также неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Чтобы ее раскрыть, умножаем числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}\cdot=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}\cdot\cdot\frac{(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+13-4x-4}{8\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{x-3}}\cdot=\lim_{x\to 3}\frac{x+13-4x-4}{8\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{x-3}}\cdot=\frac{1}{8\cdot\sqrt[3]{6}}\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{\cdot\sqrt[3]{x-3}}\cdot=0.$$

Ответ: 0.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, в выражении, в котором числитель или знаменатель содержит иррациональность, следует соответствующим образом попытаться избавиться от иррациональности.

14. ПРИМЕНЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции, при $x\to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$, причем a может быть как числом, так и одним из символов ∞, $-\infty$.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка, если предел их отношения $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)/\beta(x)=A$, $A\neq 0$. Если же число *A=0*, то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с $\beta(x)$. Если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)/(\beta(x))^p = A$ и $A \neq 0$, то бесконечно малая функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка p по сравнению с бесконечно малой функцией $\beta(x)$. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными**,** если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)/\beta(x) = 1$. В этом случае пишут: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

<u>*Теорема*</u> *(о замене бесконечно малых функций им эквивалентными). Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменяется, если каждую из них или какую-либо одну заменить им эквивалентными функциями.*

Если при некотором предельном переходе функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая, то

$Sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$, $tg(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

$arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$, $arctg(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

$ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$, $ln(1+k\alpha(x)) \sim k\alpha(x)$,

$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$, $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\, ln\, a$

15. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Во многих случаях используется первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)/x = 1$ (x- длина дуг или угол, выраженный в радиана x) и предполагается известным, что $\lim\limits_{x\to a}\sin(x) = \sin a$. Иногда при отыскании предела полезно сделать замену переменной с тем, чтобы упростить вычисление предела и использовать известные пределы. Если пол знаком предела делается замена переменной, то все величины, находящиеся под знаком, должны быть выражены через эту новую переменную. Из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, надо определить предельное значение новой переменной.

Например, при нахождении предела $\lim\limits_{x\to 0} tg(kx)/x$ обозначаем $t=kx$, где при $x\to 0$ новая переменная $t\to 0$, $x=t/k$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} tg(kx)/x = \left(\frac{0}{0}\right) = k\lim_{t\to 0} tg(t)/t = k\lim_{t\to 0}\sin(t)/(t\cos(t)) = k$$

(т.к.cos *(0)=1).* Полезно помнить, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin(kx)/x = \left(\frac{0}{0}\right) = k$, где k -постоянная величина. Например, при $x\to 0$ функция *sin(x)* и *tg(x)* эквивалентные бесконечно малые, т.е. s*in(x)~tg(x)*; т.к. $\lim\limits_{x\to 0} tg(x)/\sin(x) = \left(\frac{0}{0}\right) =$ $\lim\limits_{x\to 0} 1/\cos(x) = 1$.

***Пример*.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(kx)}{x^2}$

Решение. Применим сначала формулу тригонометрии *1-cos(t)=2sin²(t/2).* У нас *1-cos(kx)=2sin²(kx/2)*, при $x\to 0$; s$in^2(mx/2))\sim(mx/2)^2$.

По теореме "замены эквивалентной" получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(kx)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(kx/2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2(kx/2)^2}{x^2} = \frac{k^2}{2}.$$

Заметим, что можно было воспользоваться первым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(kx)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(kx/2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(k/2)^2\sin^2(kx/2)}{x^2(k/2)^2} = 2k^2/4 = k^2/2.$$ Ответ: $k^2/2$.

Решение типовых задач на вычисление предела функций.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}$

Решение. По формуле тригонометрии
sin(5(x+π))= sin(5x+5π)=- sin(5x).
Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(5x)}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-5x}{3x}=-\frac{5}{3}.$$

Поскольку при $x\to 0$, $sin(5x)\sim 5x$, $e^{3x}-1\sim 3x$. Ответ: $-5/3$.

16. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}=C$

Следует иметь ввиду, что:

1) если существуют конечные пределы
$\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a}v(x)=B$, то $C=A^B$, т.е.

имеет место формула $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}=(\lim\limits_{x\to a}u(x))^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}$

Заметим, что предельное значение a может обозначать и число, и один из символов $\infty,+\infty,-\infty$;

2) если $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A\neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\pm\infty$,

то вопрос о нахождении $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}$ затруднений обычно не вызывает. В том случае полезны иногда формулы:

$$\lim_{x\to+\infty}x^k=\begin{cases}0, \text{если } 0<k<1\\ +\infty, \text{если } k>1\end{cases};\quad \lim_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}\infty, \text{если } 0<k<1\\ 0, \text{если } k>1\end{cases}$$

3) если $\lim\limits_{x\to a}u(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$, т.е. имеем неопределенность вида $\{1^\infty\}$, то полагают $u(x)=1+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$ и, следовательно,

$$C=\lim_{x\to a}\left\{[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)}\right\}^{\alpha(x)\cdot v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\cdot v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(u(x)-1)\cdot v(x)}$$

Проиллюстрируем общий прием вычисления таких пределов на следующем примере (раскрытие неопределенности вида $\{1^{\infty}\}$).

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{5x}$

Решение. Здесь основание степени $u(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\to 1$ при $x\to\infty$,а показатель степени $5x\to\infty$, т.е. имеется неопределенность вида 1^{∞}. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right)^{\left(\frac{x+1}{-2}\right)}\right)^{5x\left(\frac{-2}{x+1}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-10x}{x+1}}=e^{10}.$$ (Получили в качестве $\alpha(x)=\dfrac{-2}{x+1}\to 0$ при $x\to\infty$).

<u>*Замечание 1.*</u> При вычислении пределов выражений вида $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}$,где $u(x)\to 1$, $v(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, удобно иногда пользоваться формулой $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}v(x)\cdot\ln(u(x))}$.

<u>*Замечание 2*</u>**.** При вычислении пределов полезно знать, что

а) если существует и положителен $\lim\limits_{x\to c}f(x)$, то $\lim\limits_{x\to c}(\log_a f(x))=\log_a(\lim\limits_{x\to c}f(x))$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1+x)/x=1$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)/x=\ln a$.

17. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Если x и x_1 – значения аргумента x, а $y=f(x)$ и $y=f(x_1)$ - соответственно значения функции $y=f(x)$, $\Delta x = x_1 - x$ то называется приращением аргумента x на отрезке $[x; x_1]$, а

$\Delta y = y_1 - y$ (или $\Delta y = y_1 - y = f(x + \Delta x) - f(x)$) называется приращением функции на том же отрезке $[x; x_1]$, (см. рисунок), где $\Delta x = MA, \Delta y = AN, dy = TA$).

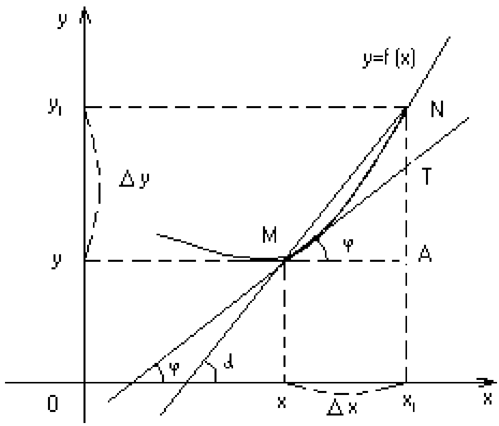


Рис. 6

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$ называется средней скоростью изменения функции $y=f(x)$ на отрезке $[x, x + \Delta x]$.

<u>Производной</u> функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx , когда приращение аргумента стремится к нулю: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, если этот предел существует.

<u>Геометрический смысл производной</u>**:** $y' = tg\varphi$ - угловой коэффициент касательной MT к графику функции $y=f(x)$ в точке x (рис. 6).

Физический смысл производной $y' = f'(x_0)$ - мгновенная скорость, т.е. скорость изменения функции в данный момент x_0. Таким образом, быстрота протекания физических, химических и других процессов выражается с помощью производной.

Функция, имеющая конечную производную, называется дифференцируемой. Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Основные правила дифференцирования.

Если $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ - функции, имеющие производные, c- постоянная величина, то:

1) $(c)' = 0$ (c=const); 2) $(x)' = 1$; 3) $(cu)' = c(u)'$;

4) $(u \pm v)' = (u)' \pm (v)'$; 5) $(u \cdot v)' = (u)'v + (v)'u$;

6) $(u \cdot v)' = (u)'v + (v)'u$; 7) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{(u)' \cdot v - (v)' \cdot u}{v^2}$.

18. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ - дифференцируемые функции своих аргументов, то производная *сложной функции* $y = f[\varphi(x)]$ существует и равна произведению производной данной функции y по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной *x:* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, или $y'_x = f'_u \cdot \varphi'_x$,

или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$. Это правило распространяется на из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Таблица производных основных элементарных функций.

Пусть $y = f[\varphi(u)]$, где $u = u(x)$. Тогда:

1) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ (n - любое число); 2) $(\sqrt{x})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;

3) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \, (a>0, a \neq 1)$; 4) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

5) $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$; 6) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$; 7) $(\sin u)' = (\cos u) \cdot u'$;

8) $(\cos u)' = -(\sin u) \cdot u'$; 9) $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2(u)}$;

10) $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2(u)}$; 11) $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$,($|u| < 1$);

12) $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, ($|u| < 1$); 13) $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

14) $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$; 15) $(shu)' = chu \cdot u'$;

16) $(chu)' = shu \cdot u'$; 17) $(thu)' = \dfrac{u'}{ch^2(u)}$; 18) $(cthu)' = \dfrac{u'}{sh^2(u)}$.

Замечание. Гиперболические функции определены так:

1) $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус

2) $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ -гиперболический косинус

3) $thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$ -гиперболический тангенс

4) $thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$ -гиперболический котангенс

Для гиперболический функций имеют место формулы, аналогичные формулам для тригонометрических функций. Основные формулы:

$ch^2x - sh^2x = 1; ch^2x + sh^2x = ch(2x)$; $sh(2x) = 2 \cdot shx \cdot chx$;

$thx = \dfrac{shx}{chx}$, $cthx = \dfrac{chx}{shx}$; и т.д.

***Пример*.** Найти y', если $y' = sin^3(x/4)$.

Решение. Это сложная функция промежуточным первым аргументом $u = sin(x/4)$ и $t = x/4$. Данную функцию можно представить в виде: $y = u^3$, где $u = sin(t)$; $t = x/4$.
Дифференцируя, получаем:

$$y_x^/ = (u^3)_u^/ \cdot u_t^/ \cdot t_x^/ = 3u^2 \cdot u_t^/ \cdot t_x^/ = 3u^2 \cdot u_t^/ \cdot t_x^/ =$$

$$3(\sin^2(x/4) \cdot (\sin t)_t^/ \cdot (x/4)_x^/ = 3 \cdot \sin^2(x/4) \cdot \cos(x/4) \cdot (1/4).$$

Уравнение касательной и нормали к плоской кривой

Пусть $y = f(x)$ - уравнение плоской кривой, $M_0(x_0, y_0)$ - точка, лежащая на этой кривой, так что $y_0 = f(x_0)$.

Уравнение касательной к данной кривой $y = f(x)$, проходящей через точку касания M_0 кривой, имеет вид:

$$y = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к данной кривой, проходящей через точку M_0. Иначе говоря, где $f'(x_0) = tg\varphi$, φ - угол между касательной к кривой, проведенный через точку M_0, и промежуточным направлением оси абсцисс.

Нормалью к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется перпендикуляр к касательной, проведенный через точку касания. Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 имеет вид: $y = y_0 - (1/f'(x_0)) \cdot (x - x_0)$.

Пример. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. Найдем производную данной функции и ее значение при $x_0=1$, $y'=3x^2+2$, $y'(x_0)=y'(1)=3+2=5$. Угловой коэффициент касательной $k_1 = f'(x_0) = 5$. Вычислим значение функции при $x_0=1$: $y_0 = f(x_0) = 1+2 = 3$. Следовательно, $M_0(1,3)$ - точка касания и уравнение касательной будет $y=3+5(x-1)$, или $5x-y-2=0$; а уравнение нормали
$y=3-(1/5)(x-1)$, или $x+5y-16=0$, где угловой коэффициент нормали $k_2=-1/k_1$, так как условием перпендикулярности двух прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2\ x+b_2$ является соотношение: $k_1\ k_2=-1$. Ответ: $5x-y-2=0,\ x+5y-16=0$.

19. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Дифференциалом (первого порядка) функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения $\Delta x = dx$ независимой переменной x. Дифференциал функции равен произведению ее производной y' на дифференциал независимой переменной $dy = y' \cdot dx$. Отсюда $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то дифференциал dy функции $y = f(x)$ и приращение Δy функции приближенно равны между собой $\Delta y \approx dy$, ибо по определению $\Delta y = y' \cdot dx + \varepsilon\Delta x$ или $\Delta y = dy + \varepsilon\Delta x$, где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Иными словами, разность между приращением Δy и дифференциалом dy функции есть бесконечно малая высшего порядка. Поэтому при $f(x) \neq 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta н}{dy} = 1$, т.е. приращение функции и ее дифференциал – эквивалентные бесконечно малые. Следовательно, $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\cdot\Delta x$, откуда имеем $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$. Последняя формула часто используется в приближенных вычислениях, т.к. позволяет по известному значению функции и ее производной в точке x найти приближенно значение функции в точке $x+\Delta x$.

Например, вычислить приближенно arctg1,02, заменяя приращение функции дифференциалом.

Решение. Формула $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$ применительно к данной функции *f(x)=arctg x* перепишем в виде:

$$arctg(x+\Delta x)\approx arctgx+\frac{1}{1+x^2}\cdot\Delta x,\text{ где } f'(x)=1/(1+x^2).$$

У нас $x+\Delta x=1{,}02$; *x=1*; $\Delta x=0{,}02$. Подставляя эти значения в формулу, получим

$$arctg1{,}02\approx arctg1+\frac{1}{1+1^2}\cdot 0{,}02=\pi/4+0{,}01\approx 0{,}795.$$

Следовательно $arctg1{,}02\approx 0{,}795.$

Пример. Найти дифференциал *dy*.

$$y=x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$$

Решение. Имеем

$$dy=y'(x_0)\cdot dx=\left(x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)'dx.$$

Находим

$$y'=\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Следовательно, $dy=\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}\cdot dx$.. Ответ: $\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

20. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е.

$(\ln y)' = y' / y = f'(x) / f(x)$.

Применение предварительного логарифмирования по основанию e функции иногда упрощает процесс нахождения ее производной. Сначала надо прологарифмировать данную функцию: $\ln y = \ln x$, затем взять производные от обеих частей равенства: $(\ln y)' = (\ln x)'$ и найти y' из полученного уравнения.

Например, Пусть требуется найти производную от степенно-показательной функции $y = u^v$, где $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ - функции аргумента x. Логарифмируя обе части исходного равенства, получим $\ln y = v \ln u$ (по свойству логарифма: $\ln(x^m) = m \ln x$.).

Дифференцируя последнее равенство по x, имеем

$y' / y = v' \cdot \ln u + v \cdot u' / u$.

Умножая обе части равенства на y и заменяя затем y через u^v, окончательно получаем $y' = y(v' \cdot \ln u + v \cdot u' / u)$, или после очевидных преобразований: $y' = u^v v' \cdot \ln u + v \cdot u' u^{v-1}$

***Пример*.** Найти y'. если $y = x^{\cos x}$.

Решение. Логарифмируя, получим: $\ln y = \cos x \ln x$.

Дифференцируем обе части получим равенства по x: $(\ln y)' = (\cos x \ln x)'$, или $y' / y = -\sin x \cdot \ln x + (\cos x) / x$.

Отсюда

$y' = y \cdot (-\sin x \cdot \ln x + (\cos x) / x)$ или

$y' = x^{\cos x} \cdot (-\sin x \cdot \ln x + (\cos x) / x)$.

Замечание. Во многих случаях оказывается выгодным, прежде чем дифференцировать заданную функцию, взять ее логарифм, определить затем производную от этого логарифма и по производной от логарифма отыскать производную от заданной функции. Это так называемый прием *логарифмического дифференцирования.*

К этому приему удобно прибегать при дифференцировании: а) Произведения нескольких функций; б) дроби, числитель и знаменатель которой содержат произведения; в) выражений, содержащих корни из дробей. К нему прибегают всегда при дифференцировании функции вида $y = \varphi(x)^{\psi(x)}$, т.е. когда и основание степени, и показатель степени есть функции от x .

21. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть функция y аргумента x задана при помощи параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

где t параметр, причем каждому значению соответствует только по одному значению x и y . В механике эти уравнения называются уравнениями движения точки, т.е. линия которую описывает на плоскости движущаяся точка.

Например, функция, заданная параметрически

$$\begin{cases} x = 2t - 4t^2 \\ y = t - 2t^2 \end{cases}.$$

Представляет собой на плоскости прямую, ибо исключив параметр t из этих уравнений, получим $y=x/2$. Однако, практически исключение параметра t из уравнений часто задача трудная, порой просто неразрешимая. Если функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$- дифференцируемые и $\psi(t) \neq 0$, то производная функции, заданной параметрически, вычисляется по формуле $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'}$. Или в других обозначениях

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'_{t(t)}}{\varphi'_t(t)}=g(t).$$ Вторую производную от y по x находим, дифференцируя последнее соотношение

$$y''_{xx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(g(t))}{\varphi'_t(t)}=\frac{d(g(t))}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dg}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'_t}{x'_t}$$

Пример . Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\ y=\sqrt{1+t^2}-\ln(1+\sqrt{1+t^2})+\ln t \end{cases}$$

Решение. Находим y'_t и x'_t и полученные выражения подставляем в формулу:

$$x'_t=\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\cdot(1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$y'_t=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{t}{(1+\sqrt{1+t^2})\sqrt{1+t^2}}+\frac{1}{t}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}.$$

Получаем $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{1}{t}$. Ответ: *1/t.*

Пример. Составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t=0$, если $\begin{cases} x=2e^t \\ y=e^{-t} \end{cases}$

Решение. Последовательно находим: $x_0=2e^0=2$; $y_0=e^{-0}=1$,

$$x_t^/ = 2e^t,\ y_t^/ = -e^{-t},\ y_x^/ = \frac{y_t^/}{x_t^/} = \frac{-e^{-t}}{2e^t} = -0{,}5e^{-2t},$$

$$x_t^/(0) = 2e^0 = 2,\ y_t^/(0) = -e^0 = -1,\ y_x^/(t=0) = -0{,}5,\ M_0(2,1).$$

<u>Способ 1.</u> Как известно, если кривая задана в явном виде $y=f(x)$, то уравнения касательной и нормали в точке $M_0(x_0,y_0)$. имеют соответственно вид: $y = y_0 + y'(x_0)\cdot(x - x_0)$, $y = y_0 - (1/y'(x_0))\cdot(x - x_0)$. где $y_0=f(x_0)$, $(y_0)^/=(f(x_0))^/$. Поэтому, напишем уравнения касательной и нормали к исходной кривой в точке касания $M_0(2,1)$ при $t=0$ соответственно: $y=1-0{,}5(x-2)$, или $y=-0{,}5x+2$, или $x+2y-4=0$ - уравнения касательной; $y=1+(1/0{,}5)(x-2)$ или $2x-y-3=0$ - уравнения нормали.

22. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФОРМУЛА ЛЕЙБНИЦА

Производной второго порядка функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной $y_{xx}^{//} = (y_x^/)_x^/$ или $y_{xx}^{//} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Механический смысл второй производной**:** если $f'(x)$ истолковывается как скорость некоторого процесса, то $f''(x)$ характеризует ускорение того же самого процесса.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и других порядков:

$$y_{x^3}^{(3)} = f^{///}(x) = (y_{xx}^{//})_x^/ = \frac{d^3y}{dx^3},\ y_{x^4}^{(4)} = f^{(4)}(x) = (y_{x^3}^{(3)})_x^/ = \frac{d^4y}{dx^4},\ldots$$

Вообще, производной n-го порядка**,** или n-ой производной от функции называется производная от ее $(n-1)$-го порядка.

$y_{x^n}^{(n)} = f^{(n)}(x) = (y_{x^{n-1}}^{(n-1)})_x^/ = \dfrac{d^ny}{dx^n}$. На практике, находя несколько последовательных производных, иногда удается найти закон, т.е. закономерность их образования, и, считая, что эта закономерность выполняется для производной любого порядка, составить общую формулу для n-ой производной (заметим, что нулевая производная означает саму функцию).

23. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на некотором интервале (рис.7), если для любых значений x_1 и $x2$ из этого интервала из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_{1)} < f(x_2)$. Если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_{1)} \le f(x_2)$, то функция называется неубывающей на этом интервале.

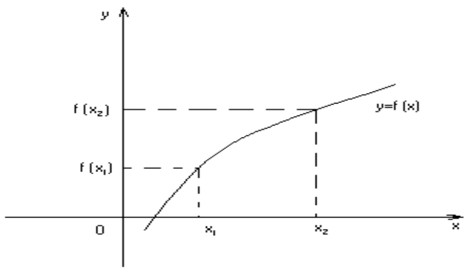


Рис. 7

Функция называется убывающей (рис.8) на некотором интервале, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала и неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_{1)} > f(x_2)$. Если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_{1)} \ge f(x_2)$, то функция называется <u>невозрастающей</u> на этом интервале.

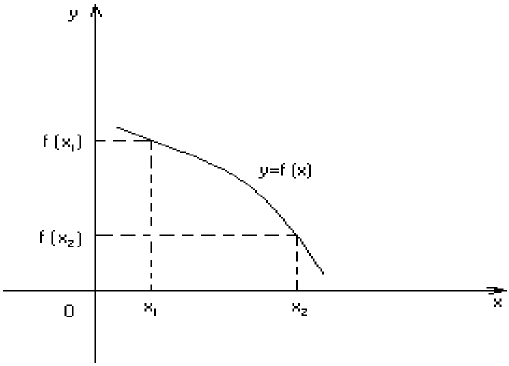


Рис. 8

Все выше названные функции называются <u>монотонными.</u>

<u>Достаточное условие возрастания (убывания) функции:</u>

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке *[a,b]* и ее производная $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при $a < x < b$, то функция $y = f(x)$ <u>возрастает</u> <u>(убывает)</u> на этом отрезке *[a,b]*.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_1 <u>максимум</u> (рис.3), если значение функции $y_1 = f(x_1)$ в этой точке больше всех других ее значений во всех точках *x,* достаточно близких к точке x_1 и отличных от нее, т.е.

$y_{\max} = \max f(x) = f(x_1)$, если $f(x_{1)}) > f(x)$ для всякой точки $x \neq x_1$ из некоторой окрестности точки x_1.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_2 <u>минимум</u> (рис.9), если значение функции $y_2 = f(x_2)$ в этой точке меньше всех других ее значений во всех точках *x,* достаточно близких к точке x_1 и отличных от нее, т.е.

$y_{\min} = \min f(x) = f(x_2)$, если $f(x_{1)}) > f(x)$ для всякой точки $x \neq x_2$ из некоторой окрестности точки x_2.

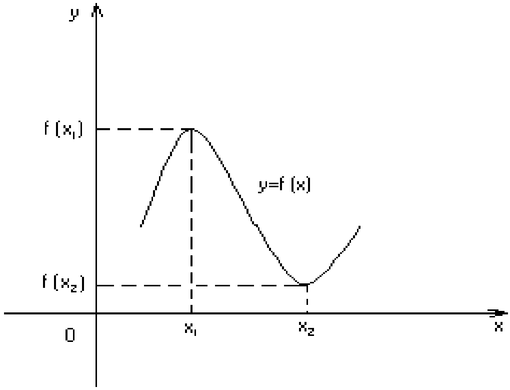


Рис. 9

Максимум или минимум функции называется экстремумом функции. Точки в которых достигается экстремум, называются точками экстремума (максимума или минимума).

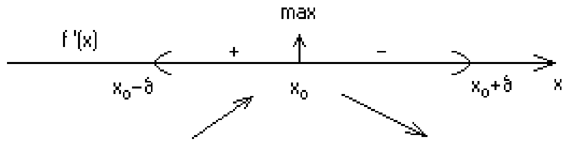
Необходимое условие существования экстремума:

$f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует для $x \in D(f)$, т.е. функция может иметь экстремум только в тех точках области определения, где выполняются эти условия. Такие точки называются критическими точками 1-гго рода, т.е. точки, только подозрительные на экстремум.

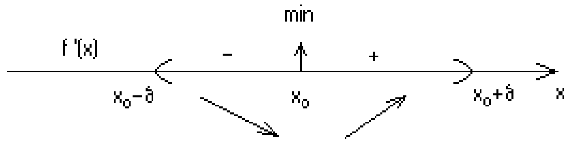
Достаточные условия существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $y = f(x)$*:*

Первое правило. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через критическую точку x_0, то точка x_0 является точкой экстремума, причем:

а) Функция имеет максимум в точке x_0,если для $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$, имеет место



б) Функция имеет <u>минимум</u> в точке x_0 ,если для $\forall x$ из δ-окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеет место



Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знак, то экстремум нет в этой точке:

или

<u>Второе правило</u>. Если в критической точке x_0 первая производная $f'(x_0) = 0$, а вторая производная $f''(x_0) \neq 0$, то точка x_0 будет точкой экстремума, причем:

а) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума;

б) если $f''(x_0) > 0$, то x_0- точка минимума.

Замечание. В более общем случае, когда первая из не равных нулю в точке x_0 производных функции $y = f(x)$ имеет порядок k: Если $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, то если k-четное, то точка x_0 является точкой максимума при $f^{(k)}(x_0) < 0$ и точкой минимума при $f^{(k)}(x_0) > 0$; если же k-нечетное, то точка x_0 является точкой экстремума.

Пример. Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

$y = 3 \cdot \sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8$

Решение. 1) $D(y) = (-\infty, \infty)$, т.е. $\forall x \in R$.

2)Функция общего вида, т. к.

$$y(-x) = 3 \cdot \sqrt[3]{(-x+4)^2} - 2(-x) - 8 \neq \pm y(x).$$

3)Находим точки пересечения графика функции к осям координат.а) с осью OY, $x=0$:

$y = 3 \cdot \sqrt[3]{(0+4)^2} - 2 \cdot 0 - 8 = 3 \cdot \sqrt[3]{16} - 8$.

точка $A(0{,}3 \cdot \sqrt[3]{16} - 8)$, т.е. $y(0) \approx -0{,}5$.

б) с осью OX, $y=0$: $0 = 3 \cdot \sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8$,

$27 \cdot (x+4)^2 = (2x+8)^3$, или $27 \cdot (x+4)^2 - 2^3 \cdot (x+4)^3 = 0$,

откуда $(x+4)^2 (8 \cdot (x+4) - 27) = 0$, $x_1=-4$ или $x_2=-5/8$.

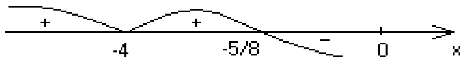
Итак имеем точки $B_1(-4,0)$; $B_2(-5/8;0)$.

4)Находим интервалы знакопостоянства функции.

$y>0$,если $3 \cdot \sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8 > 0$; решаем это неравенство:

$(x+4)^2 (8 \cdot (x+4) - 27) > 0$.

Знак y:



Откуда $\begin{cases} -8x-5>0, x<-5/8. \\ x+4\neq 0 \end{cases}$

Значит, функция *y>0* при $x\in(-\infty,-4)\cup(-4,-5/8)$ и *y<0* при $x\in(-5/8,\infty)$.

5)Находим критические точки, интервала возрастания и убывания функции, экстремум функции.

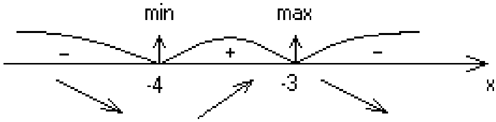
$$y'=2\cdot\sqrt[3]{(x+4)^{-1}}-2=\frac{2(1-\sqrt[3]{x+4})}{\sqrt[3]{x+4}};$$

а) $y'(x)=0$, если $1-\sqrt[3]{x+4}=0$, т.е. *x=-3*.

б) y' не существует при *x=-4*.

Получим *x=-3* , *x=-4* - критические точки 1-го рода.

Знак y':



Имеем $y_{\max}(-3)=1$; $y_{\min}(-4)=0$.

График данной функции представлен на рис.10.а).

Так как при *x=-4* , $y'(0)=\infty$, то минимум имеет характер точки заострения.

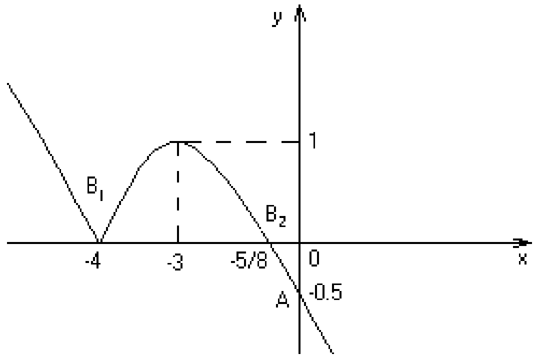


Рис. 10.а

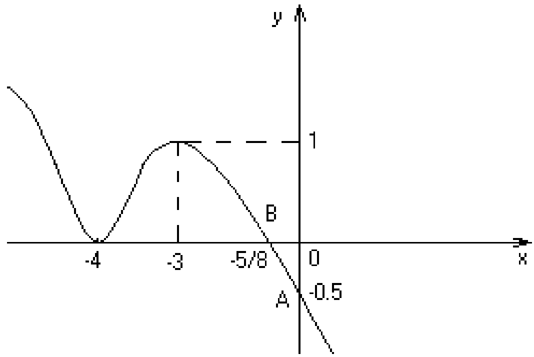


Рис. 10.б

Замечание. На основании проведенного неполного (лишь по первой производной) исследования, можно было представить график рассматриваемой функции и таким, как на рис. 10.б). Уточнение характера графика функции по второй производной позволит точнее изобразить участки убывания и возрастания функции, установить, что график не имеет точек перегиба и всюду обращен выпуклостью вверх. Об этом речь далее, где будут построены графики при полном исследовании свойств функции.

24. АСИМПТОТЫ

Если кривая $y = f(x)$ какой-либо своей частью неограниченно удаляется от начала координат, то эта бесконечная ветвь кривой может иметь асимптоту. Асимптотой кривой называется прямая**,** к которой кривая неограниченно приближается или с одной стороны или все время пересекая ее. При неограниченном удалении точки *(x,y)* кривой от точки *O(0,0)*. Асимптоты бывают вертикальные, горизонтальные и наклонные.

1. Если существует число *a* такое, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$,

то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой**.** Вертикальные асимптоты находят как точки разрыва 2-го рода функции.

2.Если существует конечный предел функции $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то прямая $y=b$ является горизонтальной (правой или левой) асимптотой.

3.Если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1, \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - k_1 x) = b_1 \text{ или}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2, \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k_2 x) = b_2, \text{ то прямая}$$

$y=k_1x+b_1$ есть правая наклонная асимптота кривой, а прямая $y=k_2x+b_2$ есть левая наклонная асимптоты.

Заметим, что частным случаем наклонной асимптоты при $k_{1,2} = 0$ и $b_{1,2} \neq \infty$ является горизонтальная асимптота. График функции $y = f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты (наклонной или горизонтальной).

25. НАПРАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ КРИВОЙ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ обращен выпуклостью вверх (вогнутостью вниз***)*** на интервале (a,b), если соответствующая дуга кривой расположена ниже касательной, проведенной в любой точке $M(x,f(x))$ этой дуги. Говорят, что кривая графика функции обращена выпуклостью вниз (вогнутостью вверх) на интервале (a,b), чем соответствующая дуга кривой расположена выше касательной, проведенной в любой точке $M(x,f(x))$ этой дуги .

Достаточное условие направления выпуклости кривой $y = f(x)$:

а) если $f''(x) < 0$ внутри интервала (a,b), то дуга кривой выпукла вверх (обозначают $\cap$) на этом интервале.

б) если $f''(x) > 0$ при $x \in (a,b)$, то дуга кривой выпукла вниз (обозначают $\cup$)на этом интервале.

Таким образом, для нахождения интервалов выпуклости вверх (вниз) дуги кривой, надо найти $f''(x)$ и решить неравенство: $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$).

Точкой перегиба непрерывной кривой $y = f(x)$ называется точка $M_0(x_0,f(x_0))$, при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости (рис.7,в).

Для абсциссы x_0 точки перегиба графика $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_0)$ равна нулю или не существует.

Точки, которых $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, и при этом сама функция в точке $x=x_0$ определена, называются критическими точками 2-го рода.

Правило: Если вторая производная $f''(x)$ функции при переходе через критическую точку 2-го рода меняет знак, то точка $M_0(x_0,f(x_0))$, есть точка перегиба кривой графика функции. Это есть достаточное условие существования точки перегиба кривой.

26. ОБЩАЯ СХЕМА ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАН- ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

При построении графика функции исследование свойств функции можно проводить по следующей схеме:

1. Нахождение области определения функции; нахождение точек разрыва функции и установление их характера.
2. Установление наличия периодичности и симметрии относительно оси OY или относительно начала координат по четности или нечетности функции.
3. Нахождение точек пересечения кривой с координатными осями: с осью OY, вычисляя $f(0)$, и с осью OX, решая уравнение $f(x)=0$ и вычислив тем самым, нули функции.
4. Определение интервалов знакопостоянства функции.
5. Определение асимптот графика функции и «поведение функции в бесконечности».
6. Определение интервалов возрастания и убывания функции, точек экстремума(максимума и минимума). Вычисление значения экстремумов.
7. Нахождение точек перегиба, устанавливая интервалы направления выпуклости (вверх и вниз) кривой.

Если исследуемая функция четная или нечетная, достаточно исследовать и построить ее график для положительных значений аргумента из области определения. Затем воспользоваться симметрией.

Полезно получаемые данные сразу наносить на чертеж. Заметим, что порядок исследования можно менять, выбирая по целесообразности, исходя из конкретных особенностей функции.

Пример. Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$y(x)=\frac{x^3-4}{x^2}$$

***Решение*.** 1) Функция имеет смысл, если $x \neq 0$; следовательно, $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$. Точка $x=0$- точка разрыва второго рода. 2) Функция не является четной и нечетной, так как

$$y(-x) = \frac{(-x)^3 - 4}{(-x)^2} = \frac{-(x^3+4)}{x^2} \neq \pm y(x) \text{ при } \forall x \in D(y).$$

3) Точек пересечения с осью ординат нет, так как $x = 0 \notin D(y)$. Найдем нули функции : $y=0$ при $\dfrac{x^3-4}{x^2} = 0$, $x^3-4=0$. Значит , $(\sqrt[3]{4},0)$ - точка пересечения с осью OX.

4) Приравнивая знаменатель нулю, получаем вертикальную асимптоту, ибо

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-4}{x^2} = \left(\frac{-4}{0}\right) = -\infty.$$

Ищем наклонные асимптоты. При $x \to \infty$ получаем:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-4}{x^3} = 1, \quad b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-4}{x^2} - x\right) = 0$$

Следовательно, правой асимптотой является прямая $y=x$. Аналогично, при $x \to -\infty$ имеем:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4}{x^3} = 1,$$

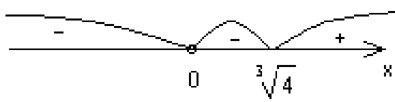
$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3-4}{x^2} - x\right) = 0,$$

т.е. $y=x$ является также левой наклонной асимптотой.

5) Определим интервалы знакопостоянства функции.

Функция *y>0*, если $\frac{x^3-4}{x^2}>0$, или $x>\sqrt[3]{4}$, где $\sqrt[3]{4}\approx 1{,}6$.

Знак *y*:



Следовательно, график функции расположен выше оси *OX* при $x\in(\sqrt[3]{4};+\infty)$ и ниже оси *OX* при $x\in(-\infty;0)\cup(0;\sqrt[3]{4})$.

6) Находим критические точки первого и второго рода , т.е. точки, в которых обращаются в нуль или не существуют производные $y^{/}$ и $y^{//}$ данной функции. Имеем:

$$y'=\frac{3x^2\cdot x-(x^3-4)2x}{x^4}=\frac{x^3+8}{x^3},$$

$y^{/}=0$ при $x=-\sqrt[3]{8}=-2$. Следовательно, *x=-2* - критическая точка первого рода ,т.е. точка , подозрительная на экстремум;

$$y_{\max}=y(-2)=-3$$

$$y''=\left(\frac{x^3+8}{x^3}\right)'=\frac{3x^5-(x^3+8)\cdot 3x^2}{x^6}=-\frac{24}{x^4}\neq 0 \text{ при } \forall x\in D(y).$$

Критических точек второго рода ,т.е. точек, подозрительных на перегиб, нет, производные $y^{/}$ и $y^{//}$ не существуют еще только при *x=0* , где не существует и сама функция *y*.

$y''=-\frac{24}{x^4}<0$ при $\forall x\in D(y)$. Следовательно, кривая графика выпукла вверх всюду. По результатам исследования строим график функции рис.11.

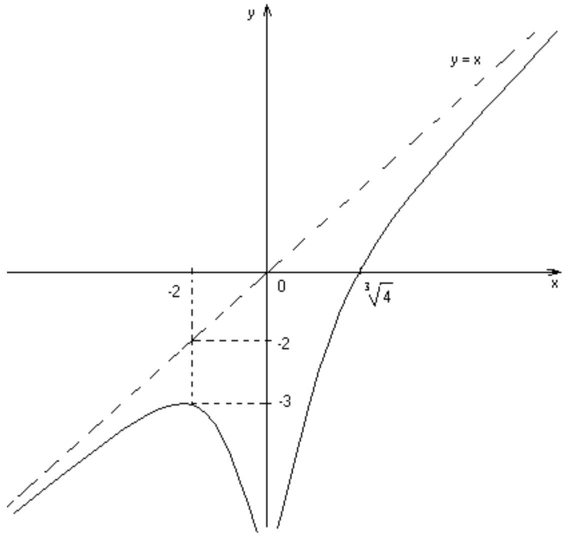


Рис. 11

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам выполнить практические занятия и типовой расчет по вышеуказанным темам курса математики, а также предоставляет студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической и теоретической части курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров Я.С. Элементы алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. М.: Наука, 1980. 176 с.

2. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемешев. М.: Наука, 2005. 320 с.

3. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. М.: Наука, 1979. 390 с.

4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. М.: Наука, 2007. 333 с.

5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов Т.Я. Кожевникова – М.: «Оникс 21 век» «Мир и образование», 2003. Ч. 1.

6. Мантуров О.В. Курс высшей математики. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / О.В. Мантуров, Н.М. Матвеев. М., 2003.

7. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986. 462 с.

8. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)/ Л.А. Кузнецов.М.: Высш. шк., 2007.204 с.

9. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов / В.С. Шипачев. М., 2002.

10. Элементы линейной алгебры: учеб. пособие / Е. Г. Глушко, А. П. Дубровская, Л.Д. Кретова, Н.Б. Ускова. Воронеж, 1998. 120 с.

11. Федотенко Г.Ф. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. пособие. / Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова. Воронеж, 2008. 161с.

12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. М.: Наука, 1972. Т.1. 429 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям и типовым расчетам по дисциплине «Математика» для студентов специальностей 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.04 «Управление в технических системах» , 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 35.03.06 «Агроинженерия», очной формы обучения

Часть 1

Составители: Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Федотенко Галина Федоровна

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.03. 2015.
Уч.-изд. л. 3,8. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14