

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»**

Кафедра прикладной математики и механики

431-2021

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к практическим и самостоятельным работам
для студентов направления подготовки
54.03.01 «Дизайн» (профиль «Промышленный дизайн»)
очной и заочной формы обучения**

Воронеж 2021

УДК 51(07)
ББК 22.1я7

Составители

канд. техн. наук О. А. Соколова,
канд. физ.-мат. наук В. В. Горбунов

Математика: методические указания к практическим и самостоятельным работам для студентов направления подготовки 54.03.01 «Дизайн» (профиль «Промышленный дизайн») очной и заочной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: О. А. Соколова, В. В. Горбунов. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. 27 с.

Приводится последовательность проведения практических занятий и самостоятельной работы по дисциплине «Математика», разбираются опорные задачи, усвоение материала контролируется задачами для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов направления подготовки 54.03.01 «Дизайн» (профиль «Промышленный дизайн») очной и заочной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ_ПР_математика_54.03.01.pdf.

Ил. 4. Библиогр.: 2 назв.

УДК 51(07)
ББК 22.1я7

Рецензент – А. В. Келлер, д-р физ.-мат. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики ВГТУ

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Пример 1. Найти матричный многочлен $AB + 5C - 3E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \\ 0 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B , поэтому можно умножить матрицу A на матрицу B . По формуле перемножения матриц находим:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} = 7 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 2 = 23;$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} = 7 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-8) + 6 \cdot 4 = 36;$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41} = 9 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 7 \cdot 0 + 7 \cdot 2 = 39;$$

$$c_{22} = 9 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 7 \cdot (-8) + 7 \cdot 4 = 21. \text{ Следовательно: } AB = \begin{pmatrix} 23 & 36 \\ 39 & 21 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Матрица } 5C = 5 \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix},$$

$$-3E = -3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Получаем матричный многочлен

$$AB + 5C - 3E = \begin{pmatrix} 23 & 36 \\ 39 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 46 \\ 44 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти матрицу $2A + 5B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}.$

2. Найти матрицу AB , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ответ. $AB = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \text{ используя правило треугольников.}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{33}a_{12}a_{21}) = 4 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1) = 24 + 1 + 3 - (6 + 4 + 3) = 15.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить определители третьего порядка

$$1. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}. \text{ Ответ: } -73.$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}. \text{ Ответ: } 180.$$

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1. \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{array} \right).$$

Умножаем каждый элемент 1-й строки на (-3) и складываем со 2-й строкой. Умножаем каждый элемент 1-й строки на (-2) и складываем

с 3-й строкой. Получаем
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

Умножаем каждый элемент 2-й строки на $\left(\frac{3}{11}\right)$ и складываем с 3-й строкой. Получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right).$$

Тогда $r(A) = r(A/B) = 3$ – система совместна.

Полученной матрице соответствует система
$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -11y = -11 \\ -3z = -3 \end{cases},$$

откуда $z = 1; y = 1; x = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить системы уравнений методом Гаусса

1.
$$\begin{cases} x - 3y + 6z = 10 \\ 2x + y + 2z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases} . \text{ Ответ: } (1; 1; 2).$$

2.
$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -9 \\ 2x - y - z = -1 \\ 4x + y + 3z = 5 \end{cases} . \text{ Ответ: } (1; -2; 1).$$

Пример 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$, $D(-2, 0, -1)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC ;

б) объем пирамиды $ABCD$;

в) угол ABC ;

г) Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ компланарны.

Решение.

а) Площадь треугольника ABC находится как половина модуля векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB} = \{2, 4, -1\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{-1, -1, -2\}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right] \right|$$

Находим векторное произведение векторов в координатном представлении $\left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

Найдем длину векторного произведения

$$\left| \left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right] \right| = \sqrt{(-9)^2 + (5)^2 + (2)^2} = \sqrt{110}.$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right] \right| = \frac{\sqrt{110}}{2}.$$

б) Сначала находим объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \{2, 4, -1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-1, -1, -2\}$ и $\overrightarrow{AD} = \{-4, -3, -5\}$, который равен модулю смешанного произведения этих векторов.

Смешанное произведение находим по формуле

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) &= \left(\left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right], \overrightarrow{AD} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= 10 - 3 + 32 + 4 - 12 - 20 = 11. \end{aligned}$$

V_{ABCD} соответствует шестой части модуля смешанного произведения трех векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $V_{ABCD} = \frac{11}{6}$.

в) Косинус угла ABC находится по формуле

$$\cos(\angle ABC) = \frac{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}.$$

Имеем

$$\cos(\angle ABC) = \frac{-2 \cdot (-3) - 4 \cdot (-5) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (1)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (-1)^2}} = \frac{25}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{35}} \approx 0,92.$$

По таблицам находим угол $\arccos(0,92) = 23^\circ$.

г) Проверим выполнение условия компланарности векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 0.$$

Вычисляем смешанное произведение $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) =$

$$= (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 24 - 5 + 3 - 20 - 4 = 0.$$

Следовательно, векторы компланарны.

Задача для самостоятельного решения. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,5,4)$, $B(5,8,6)$, $C(1,9,9)$, $D(6,4,8)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC ;

б) объем пирамиды $ABCD$;

в) угол ABC ;

г) Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ компланарны.

Пример 5. Вершины пирамиды находятся в точках $A(4,7,8)$, $B(-1,13,0)$, $C(2,4,9)$ и $D(1,8,9)$.

Составить:

а) уравнения ребра AB ;

б) уравнение грани ABC ;

в) уравнения высоты DE ;

г) уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB ;

д) уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB .

Вычислить:

е) длину ребра BC ;

ж) угол между ребром CD и плоскостью ABC ;

Решение.

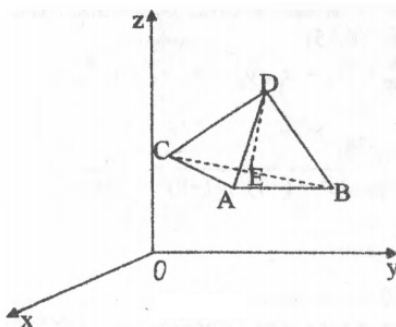


Рис. 1

а) Уравнения ребра AB могут быть получены как уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(4,7,8)$ и $B(-1,13,0)$

$$\frac{x-4}{-1-4} = \frac{y-7}{13-7} = \frac{z-8}{0-8} \quad \text{или} \quad \frac{x-4}{-5} = \frac{y-7}{6} = \frac{z-8}{-8}.$$

б) уравнение грани ABC получается как уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A(4,7,8)$, $B(-1,13,0)$ и $C(2,4,9)$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -1-4 & 13-7 & 0-8 \\ 2-4 & 4-7 & 9-8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим $6x - 7y - 9z + 97 = 0$ – уравнение грани ABC .

в) Для получения уравнений высоты DE воспользуемся координатами точки $D(1,8,9)$. В качестве направляющего вектора для DE используем вектор нормали $\vec{N} = \{6, -7, -9\}$ для плоскости ABC . Уравнения высоты DE запишутся в виде:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9}$$

г) Для получения уравнений прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB воспользуемся направляющим вектором $\vec{q} = \{-5, 6, -8\}$ для прямой AB :

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y-8}{6} = \frac{z-9}{-8}$$

д) Уравнение плоскости, проходящей через точку $D(1,8,9)$ перпендикулярно ребру AB записывается при использовании вектора $\overrightarrow{AB} = \{-5, 6, -8\}$, как вектора нормали

$$-5(x-1) + 6(y-8) - 8(z-9) = 0 \text{ или } -5x + 6y - 8z - 29 = 0.$$

е) Длину ребра BC находим как расстояние между точками $B(-1, 13, 0)$ и $C(2, 4, 9)$:

$$BC = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (4 - 13)^2 + (9 - 0)^2} = \sqrt{171}.$$

ж) Для нахождения угла между ребром CD и плоскостью основания ABC найдем $\sin \varphi$ (φ – угол между вектором $\overrightarrow{CD} = \{-1, 4, 0\}$ и нормалью $\overrightarrow{N} = \{6, -7, -9\}$ к плоскости ABC)

$$\sin \varphi = \frac{|-1 \cdot 6 + 4 \cdot (-7) + 0 \cdot (-9)|}{\sqrt{(6)^2 + (-7)^2 + (-9)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + (0)^2}} = \frac{|-34|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{166}} \approx 0,64.$$

$$\varphi = \arcsin(0,64) = 39^\circ.$$

Задача для самостоятельного решения. Вершины пирамиды находятся в точках $A(6, 1, 1)$, $B(4, 6, 6)$, $C(4, 2, 0)$ и $D(1, 2, 6)$.

Составить:

- а) уравнения ребра AB ;
- б) уравнение грани ABC ;
- в) уравнения высоты DE ;
- г) уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB ;

д) уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB .

Вычислить:

- е) длину ребра BC ;
- ж) угол между ребром CD и плоскостью ABC ;

Пример 6. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить линию, определяемую уравнением

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0.$$

Решение. Выделяя полные квадраты, преобразуем левую часть уравнения. Имеем

$(x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 4 = 0$; $(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 4$;
 $\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{1} = 1$. Вводя новые координаты $X = x - 2, Y = y - 1$,
 получаем $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1$.

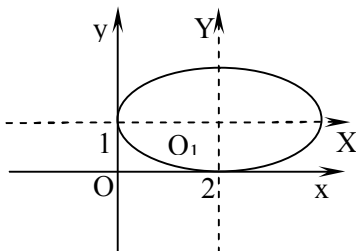


Рис.2

Пример 7. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить линию, определяемую уравнением $x^2 - y^2 - 6x + 8 = 0$.

Решение. Выделяя полные квадраты, преобразуем левую часть уравнения. Имеем $(x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9) - y^2 + 8 = 0$; $(x - 3)^2 - y^2 = 1$.
 Вводя новые координаты $X = x - 3, Y = y$, получаем $X^2 - Y^2 = 1$ -
 уравнение гиперболы, для которой действительной осью является ось OX , а центр расположен в точке $O_1(3; 0)$.

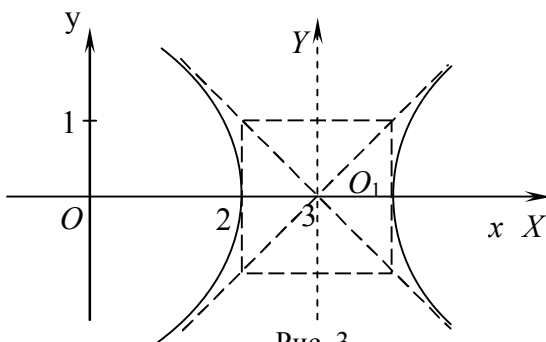


Рис. 3

Задачи для самостоятельного решения

Привести уравнения кривых к каноническому виду и построить линии, определяемые уравнениями:

1) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$. **Ответ.** $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1$, $O_1(1;1)$.

2) $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$. **Ответ.** $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{1} = 1$, $O_1(-3;2)$.

3) $y + 3x^2 - 6x + 5 = 0$. **Ответ.** $Y = -3X^2$, $O_1(1;-2)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Если при вычислении пределов алгебраической суммы, произведения или частного от деления функций сами функции стремятся к некоторым константам, не равным одновременно нулю в случае деления функций, то вычисление пределов не вызывает затруднения.

Пример 2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 3x}{9x^4 - 5}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 3x}{9x^4 - 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (5x^2 + 3x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (9x^4 - 5)} = \frac{5 \lim_{x \rightarrow 1} (x^2) + 3 \lim_{x \rightarrow 1} (x)}{9 \lim_{x \rightarrow 1} (x^4) - \lim_{x \rightarrow 1} (5)} = \frac{8}{4} = 2.$$

Пределы отношения бесконечно малых величин, отношения бесконечно больших величин, произведения бесконечно малой и бесконечно большой величины могут принимать различные значения или даже не существовать. Выражения вида

$\left\{ \frac{0}{0} \right\}, \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}, \{0 \cdot \infty\}, \{\infty - \infty\}, \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ называются *неопределенностями*.

Пример 3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 5x^2 + 2x + 7}{3x^3 + 4x^2 - x - 1}$.

Решение. Предел содержит неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия выносим старшие степени в числителе и знаменателе:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 5x^2 + 2x + 7}{3x^3 + 4x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(6 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right)}{x^3 \left(3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(6 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right)}{\left(3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{6}{3} = 2.\end{aligned}$$

Здесь было использовано, что при $x \rightarrow \infty$ величины $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$ стремятся к нулю.

Пример 4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 5x + 2}$.

Решение. Для выделения бесконечно малых разложим числитель и знаменатель на множители по корням и сократим бесконечно малые множители $(x-2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{2x-1} = \frac{7}{3}.$$

Пример 5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 10x}$.

Решение. Данный предел содержит неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Преобразуем это выражение так, чтобы можно было воспользоваться

1-м замечательным пределом $\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 10x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3 \cdot 10x}{10 \sin 10x} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$. Ответ. 9.
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$. Ответ. $-\frac{2}{5}$.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 5}$. Ответ. $\frac{4}{3}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}$. Ответ. $\frac{1}{2}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$. Ответ. 0.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/3)}{x^2}$. Ответ. $\frac{1}{9}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$. Ответ. $\frac{2}{5}$.

Для дифференцирования функции потребуется напомнить основные формулы и правила дифференцирования.

Формулы производных основных элементарных функций:

1. $y = \operatorname{const}$, $y' = 0$.
2. $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$.
3. $y = x$, $y' = 1$.
4. $y = \sqrt{x}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $y = \frac{1}{x}$, $y' = -\frac{1}{x^2}$.
6. $y = \sin x$, $y' = \cos x$.
7. $y = \cos x$, $y' = -\sin x$.
8. $y = \operatorname{tg} x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$9. y = \operatorname{ctgx}, \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$10. y = \arcsin x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. y = \arccos y, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12. y = \operatorname{arctgx}, \quad y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$13. y = \operatorname{arcctgx}, \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$14. y = a^x, \quad y' = a^x \ln a.$$

$$15. y = e^x, \quad y' = e^x.$$

$$16. y = \log_a x, \quad y' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$17. y = \ln x, \quad y' = \frac{1}{x}.$$

Правила дифференцирования:

$$1. y = Cu(x), \quad y' = Cu'(x).$$

$$2. y = u(x) + v(x), \quad y' = u'(x) + v'(x).$$

$$3. y = u(x)v(x), \quad y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

$$4. y = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

$$5. y = f(u), u = \varphi(x). \quad y' = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x).$$

$$6. \begin{cases} y = f(x) \\ x = \varphi(y) \end{cases}, \quad f'_x(x) = \frac{1}{x'_y}.$$

Рассмотрим производную функции одной переменной.

Пример 6. Найти производную функции $y = \frac{\arcsin x}{x}$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования дроби

$$y' = \frac{x \cdot (\arcsin x)' - \arcsin x \cdot (x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \arcsin x \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 7. Найти производную сложной функции

$$y = (2x^3 + 5)^4.$$

Решение. Обозначим $(2x^3 + 5) = u$. Тогда $y = u^4$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = (u^4)'_u (2x^3 + 5)'_x = 4u^3 (6x^2) = 24x^2 (2x^3 + 5)^3.$$

Пример 8. Найти производную сложной функции

$$y = \sin^2(\sqrt{x+1}).$$

$$\text{Решение. } y' = 2 \sin(\sqrt{x+1}) \cos(\sqrt{x+1}) \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

$$1. y = \ln^2(x^3 - \sin x). \text{ Ответ. } y' = 2 \ln(x^3 - \sin x) \frac{3x^2 - \cos x}{(x^3 - \sin x)}.$$

$$2. y = \sin \frac{x}{2} \sin 2x. \text{ Ответ. } y' = 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \sin 2x.$$

Рассмотрим далее производную функции двух переменных.

Пример 9. Найти частные производные функции

$$z = x^3 + 3x^2y - 16xy^3 - y^4 + x + 16.$$

Решение. Находим частную производную функции по переменной x , рассматривая y как постоянную величину, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy - 16y^3 + 1. \text{ Рассматривая } x \text{ как постоянную величину,}$$

$$\text{получим } \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 48xy^2 - 4y^3$$

Пример 10. Найти частные производные первого порядка функции $z = \operatorname{tg}(x^2 - xy + 5y^2)$.

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)} \left((x^2 - xy + 5y^2)'_x \right) = \frac{(2x - y)}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)} \left((x^2 - xy + 5y^2)'_y \right) = \frac{(-x + 10y)}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)}.$$

Пример 11. Найти производные второго порядка функции $z = x^4 + x^5 y^3 + y^3 + 16$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 5x^4 y^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^5 y^2 + 3y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 20x^3 y^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^5 y + 6y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 15x^4 y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 15x^4 y^2.$$

Задача для самостоятельного решения. Найти частные производные первого порядка функции

$$z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}. \quad \text{Ответ. } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}.$$

Пример 12. Даны: функция $z = 2xu + 3y^2$, точка $A(1, -2)$ и вектор $\vec{l} = \{9, -12\}$. Найти: 1) градиент функции $z = 6xu + 8y^2$ в точке $A(1, -2)$, 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{l} = \{9, -12\}$.

Решение. Вычислим частные производные функции в точке $A(1, -2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=2y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,-2)=-4, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=2x+6y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,-2)=2-12=-10.$$

Градиент функции z имеет вид

$$\overrightarrow{\text{grad } z} = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} = (2y) \vec{i} + (2x+6y) \vec{j},$$

$$\overrightarrow{\text{grad } z(A)} = (-4) \vec{i} + (2+6 \cdot (-2)) \vec{j} = -4 \vec{i} - 10 \vec{j}.$$

Найдем косинусы направляющих углов, перейдя от вектора $\vec{l} = \{9, -12\}$ к соответствующему орту

$$\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \{\cos \alpha, \cos \beta\} = \left\{ \frac{9}{\sqrt{9^2 + (-12)^2}}, \frac{-12}{\sqrt{9^2 + 12^2}} \right\} = \left\{ \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right\}.$$

Производная по направлению вектора $\vec{l}$ в точке M равна

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta = -4 \cdot \frac{3}{5} - 10 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{52}{5}.$$

Задача для самостоятельного решения. Найти величину и направление градиента функции $z = x^2 y$ в точке $M(1,2)$.

Ответ. $\overrightarrow{\text{grad } z(M)} = 4 \vec{i} + \vec{j}$, $|\text{grad } z|_M = \sqrt{17}$.

Пример 13. Найти экстремум функции

$$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27.$$

Решение. Найдем частные производные и приравняем их нулю.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 - 9y \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 3y^2 - 9x \end{aligned} \right\} \begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases}. \text{ Решая систему уравнений, полу-}$$

чим критические точки $x_1=0$; $y_1=0$; $x_2=3$; $y_2=3$; $M_1(0,0)$; $M_2(3,3)$.

Найдем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

В точке M_1 : $A=0$, $B=-9$, $C=0$. $AC - B^2 < 0$. Экстремума нет.

В точке M_1 : $A=18$, $B=-9$, $C=18$. $AC-B^2>0$. Следовательно, в точке M_2 функция имеет минимум, так как $A>0$.

$$z_{\min} = 27 + 27 - 81 + 27 = 0.$$

Задача для самостоятельного решения. Найти экстремум функции $\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + c$. **Ответ.** $z_{\min} = -\frac{8}{27}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Интегрирование – есть операция обратная дифференцированию

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + c.$$

Для вычисления интегралов потребуется знание таблицы основных интегралов и их свойств.

Формулы основных интегралов:

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0).$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0; a \neq 1).$$

$$4. \int e^x dx = e^x + c.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + c.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}.$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctg x + c \\ -\operatorname{arccctg} x + c \end{cases}.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c.$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c.$$

Свойства неопределенного интеграла:

$$1. \int Af(x)dx = A \int f(x)dx.$$

$$2. \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad (\text{верно для любого конечного числа слагаемых}).$$

$$3. \text{ Если } \int f(x)dx = F(x) + c, \text{ то}$$

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + c.$$

$$4. \int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + c.$$

$$5. \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c.$$

Пример 1. Вычислить неопределенные интегралы.

В следующих интегралах применим непосредственное интегрирование с применением свойств интеграла.

$$1. \int \frac{x^3 - x^2 - x\sqrt{x} - 1}{x^2} dx = \int \left(x - 1 - x^{\frac{1}{2}} - x^{-2} \right) dx = \int x dx - \int dx -$$

$$- \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{-2} dx = \frac{x^2}{2} - x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{-1}}{-1} + c. \quad (\text{Использовали свойство 3}).$$

2. $\int \frac{(x^2 - 6)dx}{x} = \int x dx - 6 \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} - 6 \ln|x| + c$. (Использовали свойство 1, 2).

3. $\int \frac{dx}{x+5} = \ln|x+5| + c$. (Использовали свойство 3).

4. $\int \sin(2x-1)dx = -\frac{1}{2} \cos(2x-1) + c$. (Использовали свойство 5).

Пример 2. Решим пример, сделав замену переменной.

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c.$$

Пример 3. Проинтегрировать $\int e^{\sin 3x} \cos 3x dx$.

Решение. Введем новую переменную интегрирования $t = \sin 3x$, и $dt = 3 \cos 3x dx$. Проведем замену переменной интегрирования в неопределенном интеграле

$$\int e^{\sin 3x} \cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin 3x \\ dt = 3 \cos 3x dx \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{e^t}{3} + C = \frac{e^{\sin 3x}}{3} + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, выделив в числителе производную знаменателя. Для этого числитель представим в виде $x+2 = (2x+2)\frac{1}{2} + 1$. Тогда

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} dx + \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $x^2 + 2x + 5 = t$, $2(x+1)dx = dt$. Получим

$$\frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| + C.$$

Для вычисления второго интеграла выделим в знаменателе полный квадрат $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x+1)^2 + 2^2$.

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Окончательно получим

$$\int \frac{x+2}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 5| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти неопределенный интеграл посредством метода замены переменной.

$$1. \int \sin^2 x \cdot \cos x dx. \quad \text{Ответ. } \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

$$2. \int x^2 \sqrt[5]{x^3 - 8} dx. \quad \text{Ответ. } \frac{5}{18} (x^3 - 8)^{6/5} + C.$$

$$3. \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad \text{Ответ. } \frac{3}{4} (\arcsin x)^{4/3} + C.$$

Пример 5. Решим следующие примеры, используя метод интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$.

$$5.1. \int x e^x dx = \left(\begin{array}{ll} u = x; & du = dx \\ dv = e^x dx; & v = e^x \end{array} \right) =$$

$$= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c.$$

$$5.2. \int (5x+2) \cos 7x dx = \left. \begin{array}{ll} u = 5x+2; & du = 5dx \\ dv = \cos 7x dx; & v = \frac{\sin 7x}{7} \end{array} \right| = \frac{(5x+2) \sin 7x}{7} - 5 \int \frac{\sin 7x}{7} dx =$$

$$= \frac{(5x+2) \sin 7x}{7} - 5 \int \frac{\sin 7x}{7} d(3x) = \frac{(5x+2) \sin 7x}{7} + \frac{5 \cos 7x}{49} + C.$$

$$5.3. \int x^5 \underbrace{\ln x}_u dx = \begin{pmatrix} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^5 dx, v = \frac{x^6}{6} \end{pmatrix} = \frac{x^6}{6} \ln x - \int \frac{x^6}{6} dx =$$

$$= \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{x^6}{36} + c.$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти неопределенный интеграл интегрированием по частям

$$1. \int x e^{5x} dx. \quad \text{Ответ. } \frac{e^{5x}}{25} (5x - 1) + C.$$

$$2. \int x \ln(3x + 2) dx. \quad \text{Ответ. } \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{9} \right) \ln(3x + 2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x + 1)(x^2 + 6x + 10)} dx$.

Решение: Учитывая, что знаменатель имеет однократный действительный (простой) корень $x_1 = -1$, а так же множитель $(x^2 + 6x + 10)$ с отрицательным дискриминантом (с двумя комплексно-сопряженными корнями), разлагаем на простейшие дроби

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{(x + 1)(x^2 + 6x + 10)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 6x + 10} = \frac{A(x^2 + 6x + 10) + Bx(x + 1) + C(x + 1)}{(x + 1)(x^2 + 6x + 10)}.$$

Приравняем числители

$$A(x^2 + 6x + 10) + B(x^2 + x) + C(x + 1) = x^2 - 2x + 3.$$

Из тождественности следует равенство коэффициентов при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + B = 1 \\ x^1 & 6A + B + C = -2 \\ x^0 & 10A + C = 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} B = 1 - A, \quad C = 3 - A, \\ A + 1 - A + 3 - A = -2, \end{array} \right.$$

$$A = \frac{6}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad C = -9.$$

Подставим найденные коэффициенты в разложение рациональной функции

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+6x+10)} = \frac{\frac{6}{5}}{x+1} + \frac{-\frac{x}{5}-9}{x^2+6x+10}.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+6x+10)} dx &= \frac{6}{5} \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{x}{5}-9}{x^2+6x+10} dx = \frac{6}{5} \ln|x+1| + \int \frac{(-\frac{x}{5}-9)dx}{x^2+6x+10} = \\ &= \frac{6}{5} \ln|x+1| + \int \frac{\left(-\frac{1}{5}(x+3) + \frac{3}{5} - 9\right)dx}{(x+3)^2+1} = \frac{6}{5} \ln|x+1| + \int \frac{\left(-\frac{x+3}{5}\right)dx}{(x+3)^2+1} + \\ &\int \frac{\left(-\frac{42}{5}\right)dx}{(x+3)^2+1} = \frac{6}{5} \ln|x+1| - \frac{1}{10} \int \frac{d((x+3)^2+1)}{(x+3)^2+1} - \frac{42}{5} \cdot \operatorname{arctg}(x+3) = \\ &\frac{6}{5} \ln|x+1| - \frac{1}{10} \ln(x^2+3x+10) - \frac{42}{5} \operatorname{arctg}(x+3) + C. \end{aligned}$$

Задача для самостоятельного решения. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$. **Ответ.** $-\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C$.

Рассмотрим определенные интегралы, которые вычисляются по формуле Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Пример 7. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Пример 8. Вычислить определённый интеграл $\int_0^2 \frac{\arctg^3\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx$.

Решение. Выполним замену переменной в определённом инте-

$$\text{грале } \int_0^2 \frac{\arctg^3\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx = \left. \begin{array}{l} t = \arctg\left(\frac{x}{2}\right) \\ dt = \frac{2dx}{x^2+4}, \\ x_1=0, \ t_1=0, \\ x_2=2, \ t_2=\frac{\pi}{4}. \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} t^3 dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^4}{2048}.$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти определённый интеграл: 1. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$. **Ответ.** $\frac{1}{4}$.

2. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$. **Ответ.** $\frac{1}{3}$.

Пример 9. Вычислить определённый интеграл $\int_0^1 x \arctg x dx$.

Решение. Выполним интегрирование по частям в определённом интеграле.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \arctg x dx &= \left. \begin{array}{l} u = \arctg x, \quad du = \frac{dx}{x^2+1} \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left(\frac{x^2 \arctg x}{2} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить определенный интеграл.

1. $\int_0^2 (3x^2 - 1)dx$. **Ответ.** 6. 2. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2 + 1)^2}$. **Ответ.** $\frac{1}{4}$.

Пример 10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \frac{x}{x^2 + 1}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

Решение. $S = \int_1^3 \frac{xdx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^3 = \frac{1}{2} (\ln 10 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln 5$.

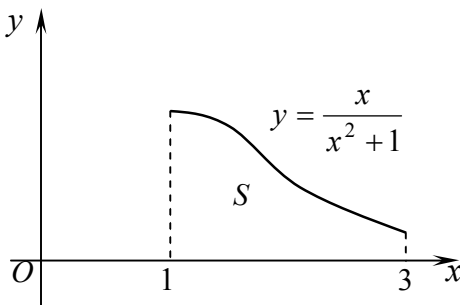


Рис. 4

Пример 11. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$.

Решение. Объем тела вращения равен

$$V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \frac{\pi}{7} (x^7) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{7}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$. **Ответ.** $1/2$.
2. Фигура, ограниченная параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 4$, вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения. **Ответ.** 32π .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высш. шк., 1999. Ч. 1. 415 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1977. Т. 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Практическое занятие № 1	3
2. Практическое занятие № 2	11
3. Практическое занятие № 3.....	18
Библиографический список.....	26

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим и самостоятельным работам
для студентов направления подготовки
54.03.01 «Дизайн» (профиль «Промышленный
дизайн») очной и заочной формы обучения

Составители:
Соколова Ольга Анатольевна
Горбунов Валерий Викторович

В авторской редакции

Компьютерный набор О. А. Соколовой

Подписано к изданию 16.11.2021.
Уч.-изд. л. 1,7.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14