МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет»

УТВЕРЖДАЮ

И.о. декана строительно-технологического факультета

_______________ Скляров К.А.

« 1 » 09 2017 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины

«Теоретическая механика»

Направление подготовки – **08.03.01 «Строительство»**

Профиль – **«Производство и применение строительных материалов, изделий и конструкций»**

Квалификация (степень) выпускника – **бакалавр**

Нормативный срок обучения – **4 года/5 лет**

Форма обучения – **очная/заочная**

Автор программы:

д. физ.-мат. н., профессор _______________ В.А. Козлов

Программа обсуждена на заседании кафедры теоретической и прикладной механики « 1 » 09 2017 года, протокол № 1

Зав. кафедрой д. физ.-мат. н. _______________ В.А. Козлов

Воронеж – 2017

1.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. **Цели преподавания дисциплины**

Теоретическая механика является одной из фундаментальных общенаучных дисциплин физико-математического цикла. Изучение теоретической механики должно также дать тот минимум фундаментальных знаний в области механического взаимодействия, равновесия и движения материальных тел, на базе которых строится большинство специальных дисциплин инженерно-технического образования. Кроме того, изучение теоретической механики способствует расширению научного кругозора и повышению общей культуры будущего специалиста, развитию его мышления и становлению его мировоззрения.

1.2. **Задачи освоения дисциплины**

- Дать студенту первоначальные представления о постановке инженерных и технических задач, их формализации, выборе модели изучаемого механического явления.
- Привить навыки использования математического аппарата для решения инженерных задач в области механики.
- Освоить методы статического расчета конструкций и их элементов.
- Освоить основы кинематического и динамического исследования элементов строительных конструкций, строительных машин и механизмов.
- Развитие логического мышления и творческого подхода к решению профессиональных задач.

В итоге изучения курса теоретической механики студент должен знать основные понятия и законы механики и вытекающие из этих законов методы изучения равновесия и движения материальной точки, твердого тела и механической системы (в объеме основной части программы).

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Дисциплина «Теоретическая механика» относится к дисциплинам базовой части. Она обеспечивает логическую связь, во-первых, между физикой и математикой, применяя математический аппарат к описанию и изучению физических явлений, во-вторых, между естественнонаучными и общетехническими дисциплинами.

Требования к входным знаниям, умениям и готовностям обучающегося.

Студент должен знать: физические основы механики, элементы векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления; владеть навыками решения задач векторной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления и уметь применять полученные знания математики к решению задач теоретической механики.

Дисциплина «Теоретическая механика» является предшествующей для всех дисциплин профессионального цикла ОПОП. На материале курса теоретической механики базируются такие важные для общего инженерного образования дисциплины, как техническая механика, механика грунтов, основы архитектуры и строительных конструкций, основы расчета строительных конструкций.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

В процессе освоения курса теоретической механики студент формирует и демонстрирует следующие общепрофессиональные компетенции:

- способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОПК-1);
- способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат (ОПК-2).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать основные подходы к формализации и моделированию движения и равновесия материальных тел, постановку и методы решения задач о движении и равновесии механических систем;

уметь решать соответствующие конкретные задачи механики при равновесии и движении твердых тел и механических систем;

владеть навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел и механических систем.

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры	
		2/2	3/3
Аудиторные занятия (всего)	**72/22**	**36/8**	**36/14**
В том числе:			
Лекции	36/10	18/4	18/6
Практические занятия (ПЗ)	36/12	18/4	18/8
Самостоятельная работа (всего)	**72/145**	**54/60**	**18/85**
В том числе:			
Расчетно-графические работы (РГР) (дн. об.) Контрольные работы (заоч. об.)	22 45	12 15	10 30
Задачи самоконтроля	50/100	42/40	8/60
Вид промежуточной аттестации	**36/13**	зач./**4**, зач.	**36/9**, экз.
Общая трудоемкость часы	**180/180**	**90/72**	**90/108**
зачетные единицы	**5**	**2,5/2,0**	**2,5/3,0**

Примечание: здесь и далее числитель – очная/знаменатель – заочная формы обучения.

5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1	**2**	**3**
1.	Основные понятия, определения и теоремы статики.	Предмет механики. Статика, кинематика, динамика – разделы механики. Предмет статики. Основные понятия статики. Аксиомы статики. Виды связей, их реакции. Проекция силы на ось. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Сходящиеся силы, их равнодействующая. Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил, аналитические условия равновесия. Равновесие трех непараллельных сил. Момент силы относительно точки (центра) как вектор. Понятие о паре сил. Момент пары как вектор. Теорема об эквивалентности пар. Свойства пары сил. Теорема о приведении произвольной системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент системы сил. Векторные условия равновесия произвольной системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.
2.	Система сил, расположенных в одной плоскости.	Алгебраическое значение момента силы и пары сил. Распределенная нагрузка. Аналитические условия равновесия параллельной и произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Статически определимые и статически неопределимые системы. Понятие о ферме. Леммы о нулевых стержнях. Определение усилий в стержнях плоской фермы способом вырезания узлов и способом сечений (Риттера). Равновесие при наличии сил трения. Трение скольжения при покое (сцепление) и при движении. Коэффициент трения. Трение качения; коэффициент трения качения.
3.	Произвольная система сил. Центр тяжести твердых тел.	Момент силы относительно оси; зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр. Вычисление главного вектора и главного момента произвольной системы сил. Частные случаи приведения произвольной системы сил; динамический винт. Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил, случай параллельных сил. Приведение системы параллельных сил к равнодействующей. Центр параллельных сил; его радиус-вектор и координаты. Центр тяжести твердого тела; центр тяжести объема, площади, линии. Способы определения положений центров тяжести тел.
4.	Введение в кинематику. Кинематика точки.	Предмет кинематики. Задачи кинематики. Способы задания движения точки. Скорость и ускорение точки. Вычисление кинематических характеристик точки при различных способах задания ее движения. Частные случаи движения точки.

1	2	3
5.	Кинематика твердого тела.	Поступательное движение твердого тела, его свойства. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Передаточные механизмы. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Уравнения движения плоской фигуры. Теорема о сложении скоростей при плоском движении, следствие. Мгновенный центр скоростей, частные случаи определения его положения. Теорема о сложении ускорений при плоском движении тела.
6.	Сложное движение точки.	Абсолютное и относительное движение точки. Переносное движение. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса о сложении ускорений. Определение ускорения Кориолиса.
7.	Введение в динамику. Динамика точки.	Законы динамики. Дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах и в проекциях на оси естественного трехгранника. Две основные задачи динамики для материальной точки, их решения. Дифференциальные уравнения относительного движения. Количество движения материальной точки. Элементарный импульс силы. Импульс силы за конечный промежуток времени. Теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной и в конечной формах. Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси. Теорема об изменении момента количества движения точки. Сохранение момента количества движения точки в случае действия центральной силы. Элементарная работа силы; аналитическое выражение элементарной работы. Работа силы на конечном перемещении точки. Работа силы тяжести, упругости, трения. Мощность. Кинетическая энергия материальной точки. Теорема об изменении кинетической энергии точки.
8.	Общие теоремы динамики механической системы.	Механическая система. Классификация сил, свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс; радиус-вектор и координаты центра масс. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс системы. Закон сохранения движения центра масс. Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной и в конечной формах. Закон сохранения количества движения системы. Момент инерции системы и твердого тела относительно оси. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных осей. Осевые моменты инерции однородного тонкого стержня, тонкого круглого кольца, диска. Главный момент количества движения или кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы.

1	2	3
8.	Динамика твердого тела. Общие теоремы динамики механической системы.	Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, сопротивление при качении. Кинетическая энергия механической системы. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Равенство нулю суммы работ внутренних сил в твердом теле. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.
9.	Принципы механики.	Сила инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Главный вектор и главный момент сил инерции. Возможные перемещения системы. Число степеней свободы системы. Связи, их классификация. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Принцип Даламбера-Лагранжа; общее уравнение динамики.

5.2. Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№№ разделов, необходимых для обеспечиваемых дисциплин								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Техническая механика	+	+	+	-	-	-	-	+	-
2	Механика грунтов	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3	Основы архитектуры и строительных конструкций	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	Основы расчета строительных конструкций	+	+	+	+	+	+	+	+	+

5.3. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекции	ПЗ	СРС	Всего час.
1	Основные понятия, определения и теоремы статики.	4/1	3/1	6/12	13/14
2	Система сил, расположенных в одной плоскости.	2/2	8/2	22/28	32/32
3	Произвольная система сил. Центр тяжести твердых тел.	4/1	1/1	8/20	13/22
4	Введение в кинематику. Кинематика точки.	2/1	2/0,5	4/8	8/9,5

5	Кинематика твердого тела.	4/1	4/1,5	6/12	14/14,5
6	Сложное движение точки.	2/-	- / -	8/10	10/10
7	Введение в динамику. Динамика точки.	6/2	6/2	2/15	14/19
8	Общие теоремы динамики механической системы. Динамика твердого тела.	8/2	6/3	12/25	26/30
9	Принципы механики.	4/-	6/1	4/15	14/16
	Всего	**36/10**	**36/12**	**72/145**	**144/167**

5.4. Практические занятия

№ п.п.	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятия	Кол-во часов
1	1	Аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил.	2,0/1,0
2	1 2	Метод вырезания узлов. Условия равновесия параллельной системы сил.	1,0/ - 1,0/0,5
3	2	Равновесие произвольной плоской системы сил.	2,0/1,0
4	2	Равновесие составных конструкций.	2,0/-
5	2	Расчёт плоских ферм.	2,0/0,5
6	2 3	Равновесие при наличии трения покоя, скольжения. Определение положения центров тяжести тел.	1,0/ - 1,0/ -
7	4	Определение скорости, ускорения точки, радиуса кривизны ее траектории.	2,0/0,5
8	5	Вращательное движение твёрдых тел. Передача вращательного движения.	2,0/1,0
9	5	Определение скоростей точек при плоском движении.	2,0/0,5
10	7	1-я, 2-я задачи динамики.	2,0/1,0
11	7	Теоремы об изменении количества движения точки и момента количества движения точки.	2,0/0,5
12	7	Теорема об изменении кинетической энергии точки.	2,0/0,5
13	8	Теорема о движении центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы.	2,0/1,0
14	8	Теорема об изменении кинетической энергии твердого тела и механической системы.	2,0/1,0
15	8	Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.	1,0/ - 1,0/1,0

16	9	Принцип Даламбера для точки и механической системы.	2,0/1,0
17	9	Принцип возможных перемещений.	2,0/ -
18	9	Общее уравнение динамики.	2,0/ -

6. ТЕМАТИКА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

6.1. Тематика расчетно-графических работ (РГР) для студентов дневной формы обучения

№ п.п.	Наименование	Объём, с.
1	Расчёт плоских ферм: определение опорных реакций, усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов и методом сквозных сечений (Риттера) с проверкой полученных результатов на ЭВМ (2 семестр).	3
2	Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы (3 семестр).	3

6.2. Тематика контрольных работ (КР) для студентов заочной формы обучения

№ п.п.	Наименование	Объём, с.
1	Равновесие произвольной плоской системы сил: определение опорных реакций плоской рамы. Расчёт плоских ферм: определение опорных реакций, усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов и методом сквозных сечений (Риттера). Центр тяжести тел: определение положения центра тяжести плоских фигур (2 семестр).	2 4 1
2	Кинематика точки: определение траектории движения, скорости, ускорения и радиуса кривизны траектории в данный момент времени. Вращательное движение тел, передача вращательного движения: определение скорости и ускорения точки, угловой скорости и углового ускорения в плоских передаточных механизмах (3 семестр).	2 2
3	Динамика точки: дифференциальные уравнения движения точки, теорема об изменении количества движения точки, теорема об изменении кинетической энергии точки, принцип Даламбера для точки. Колебания точки: уравнения свободных и затухающих колебаний точки, частота и период колебаний (3 семестр).	3 3

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО И ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

№ п.п.	Компетенция (общепрофессиональная - ОПК)	Форма контроля	Се-местр
1	Способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОПК-1).	РГР/КР Сам. работа (СР) Тестирование (Т) Зачет Экзамен	2/2 3/3
2	Способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат (ОПК-2).	РГР/КР Сам. работа (СР) Тестирование (Т) Зачет Экзамен	2/2 3/3

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Дескриптор компетенции	Показатель оценивания	Форма контроля				
		РГР/ КР	СР	Т	Зач.	Экз.
Знает	фундаментальные основы теоретической механики, включая статику, кинематику и динамику (ОПК-1, ОПК-2)			+	+	+
Умеет	решать соответствующие конкретные задачи теоретической механики при равновесии и движении твердых тел и механических систем (ОПК-1, ОПК-2)	+	+	+		
Владеет	навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел и механических систем (ОПК-1, ОПК-2)			+	+	+

7.2.1. Этап текущего контроля знаний

Результаты текущего контроля знаний и межсессионной аттестации оцениваются по пятибалльной шкале с оценками:

- «отлично»;
- «хорошо»;
- «удовлетворительно»;
- «неудовлетворительно»;
- «не аттестован».

Дескриптор компетенции	Показатель оценивания	Оценка	Критерий оценивания
Знает	фундаментальные основы теоретической механики, включая статику, кинематику и динамику	отлично	Практически полное посещение лекционных и практических занятий; выполнение самостоятельных работ и РГР на «отл.».
Умеет	решать соответствующие конкретные задачи теоретической механики при равновесии и движении твердых тел и механических систем		
Владеет	навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел и механических систем		
Знает	фундаментальные основы теоретической механики, включая статику, кинематику и динамику	хорошо	Посещено более 75% лекционных и практических занятий; выполнение самостоятельных работ и РГР на «хор.».
Умеет	решать соответствующие конкретные задачи теоретической механики при равновесии и движении твердых тел и механических систем		
Владеет	навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел и механических систем		
Знает	фундаментальные основы теоретической механики, включая статику, кинематику и динамику	удовл.	Посещено не менее половины лекционных и практических занятий; выполнение самостоятельных работ и РГР на «удовл.».
Умеет	решать соответствующие конкретные задачи теоретической механики при равновесии и движении твердых тел и механических систем		
Владеет	навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел и механических систем		
Знает	фундаментальные основы теоретической механики, включая статику, кинематику и динамику	неуд.	Частичное посещение лекционных и практических занятий; неудовлетворительное выполнение самостоятельных работ и РГР.
Умеет	решать соответствующие конкретные задачи теоретической механики при равновесии и движении твердых тел и механических систем		
Владеет	навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел и механических систем		
Знает	фундаментальные основы теоретической механики, включая статику, кинематику и динамику	не аттест.	Непосещение лекционных и практических занятий; не выполненные самостоятельные работы и РГР.
Умеет	решать соответствующие конкретные задачи теоретической механики при равновесии и движении твердых тел и механических систем		
Владеет	навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел и механических систем		

7.2.2. Этап промежуточного контроля знаний

Во втором семестре результаты промежуточного контроля знаний (зачет) оцениваются по двухбалльной шкале с оценками:

- «зачтено»;
- «не зачтено».

Дескриптор компетенции	Показатель оценивания	Оценка	Критерий оценивания
Знает	фундаментальные основы теоретической механики, включая статику и кинематику	зачтено	Выполнены все текущие тестовые задания и РГР/КР.
Умеет	решать соответствующие конкретные задачи теоретической механики при равновесии и движении твердых тел		
Владеет	навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел		
Знает	фундаментальные основы теоретической механики, включая статику и кинематику	не зачтено	Не выполнены или выполнены частично текущие тестовые задания и РГР/КР.
Умеет	решать соответствующие конкретные задачи теоретической механики при равновесии и движении твердых тел		
Владеет	навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел		

7.2.3. Этап итогового контроля знаний

В третьем семестре результаты итогового контроля знаний (экзамен) оцениваются по четыре балльной шкале с оценками:

- «отлично»;
- «хорошо»;
- «удовлетворительно»;
- «не удовлетворительно».

Дескриптор компетенции	Показатель оценивания	Оценка	Критерий оценивания
Знает	фундаментальные основы теоретической механики, включая статику, кинематику и динамику	отлично	Более 90% верно решенных тестовых заданий (18-20 из 20) в экзаменационных билетах.
Умеет	решать соответствующие конкретные задачи теоретической механики при равновесии и движении твердых тел и механических систем		
Владеет	навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел и механических систем		
Знает	фундаментальные основы теоретической механики, включая статику, кинематику и динамику	хорошо	От 75% до 90% верно решенных тестовых заданий (15-17 из 20) в экзаменационных билетах.
Умеет	решать соответствующие конкретные задачи теоретической механики при равновесии и движении твердых тел и механических систем		
Владеет	навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел и		

	механических систем		
Знает	фундаментальные основы теоретической механики, включая статику, кинематику и динамику	удовл.	От 50% до 70% верно решенных тестовых заданий (10-14 из 20) в экзаменационных билетах.
Умеет	решать соответствующие конкретные задачи теоретической механики при равновесии и движении твердых тел и механических систем		
Владеет	навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел и механических систем		
Знает	фундаментальные основы теоретической механики, включая статику, кинематику и динамику	неуд.	Менее 50% верно решенных тестовых заданий (менее10 из 20) в экзаменационных билетах.
Умеет	решать соответствующие конкретные задачи теоретической механики при равновесии и движении твердых тел и механических систем		
Владеет	навыками составления и решения уравнений равновесия и движения твердых тел и механических систем		

7.3. Примерный перечень оценочных средств (типовые тестовые задания, необходимые для оценки знаний обучаемого)

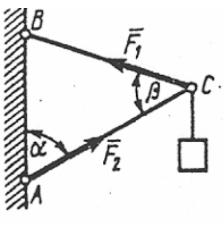
Текущий контроль успеваемости осуществляется на практических занятиях: в виде опроса теоретического материла и умения применять его к решению задач, в виде проверки домашних заданий, в виде тестирования по отдельным темам.

Промежуточный контроль осуществляется проведением тестирования по разделам (статика, кинематика, динамика) дисциплины, изученным студентом в период между аттестациями, выполнением расчетно-графических работ. Тестирование проводится на практических занятиях в рамках самостоятельной работы под контролем преподавателя. Варианты расчетно-графических работ выдаются каждому студенту индивидуально.

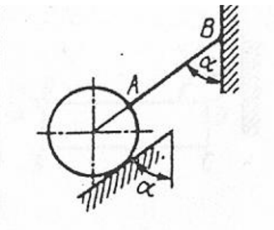
7.3.1. Примерная тематика и содержание тестовых заданий

2-ой семестр

1. Равновесие системы сходящихся сил

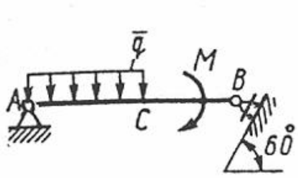


Шарнирный трехзвенник ABC удерживает в равновесии груз, подвешенный к шарнирному болту C. Под действием груза стержень AC сжат силой $F_2 = 25$ Н. Заданы углы $\alpha = 60°$ и $\beta = 45°$. Считая стержни AC и BC невесомыми, определить усилие в стержне BC.

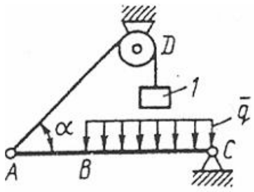


Однородный шар весом 12 Н удерживается в равновесии на гладкой наклонной плоскости с помощью веревки AB. Определить давление шара на плоскость, если угол $\alpha = 60^\circ$.

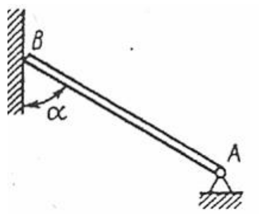
2. Равновесие произвольной плоской системы сил



Определить момент M пары сил, при котором реакция опоры B равна 250 Н, если интенсивность распределенной нагрузки q = = 150 Н/м, размеры $AC = CB = 2$ м.

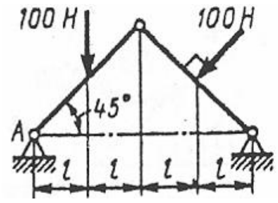


Балка AC закреплена в шарнире C и поддерживается в горизонтальном положении веревкой AD, перекинутой через блок. Определить интенсивность распределенной нагрузки q, если длины $BC = 5$ м, $AC = 8$ м, угол $\alpha = 45^\circ$, а вес груза 1 равен 20 Н.

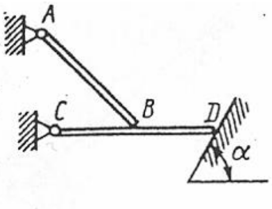


Конец B однородного бруса весом 100 кН, закрепленного в шарнире A, опирается на гладкую стену. Определить в кН давление бруса на стену, если угол $\alpha = 60^\circ$.

3. Равновесие составных конструкций

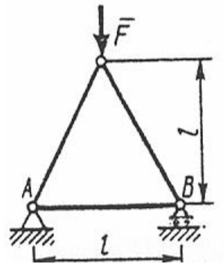


Определить вертикальную составляющую реакции в шарнире A.



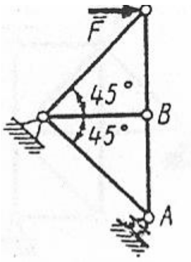
Однородная балка AB, вес которой 200 Н, свободно опирается в точке B на горизонтальную балку CD. Определить, с какой силой балка CD действует на опорную плоскость в точке D, если расстояние $CB = BD$, угол $\alpha = 60^\circ$. Весом балки CD пренебречь.

4. Расчет плоских ферм (метод вырезания узлов)



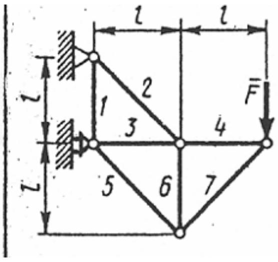
4.2.10

Определить усилие в стержне AB. Сила F = = 400 Н.

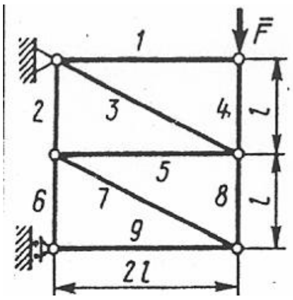


Определить усилие в стержне AB. Сила $F =$ $= 400$ Н.

5. Расчет плоских ферм (метод сквозных сечений)



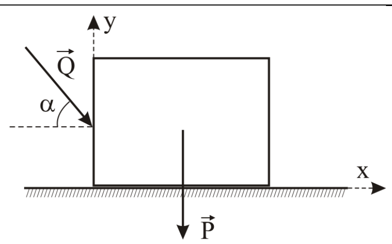
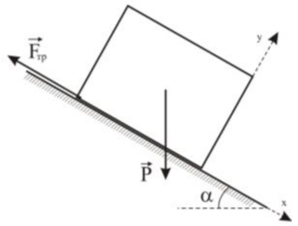
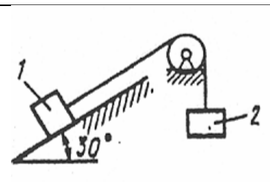
Определить усилие в стержне *3*. Сила $F =$ $= 460$ Н.



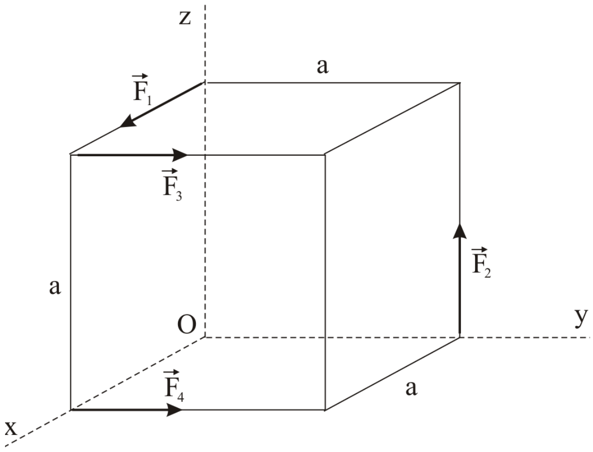
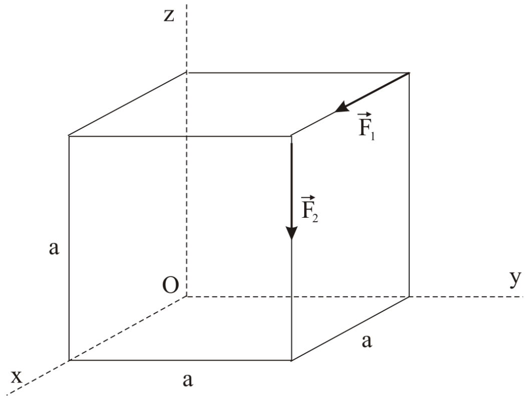
4.3.10

Определить усилие в стержне *8*. Сила $F =$ $= 260$ Н.

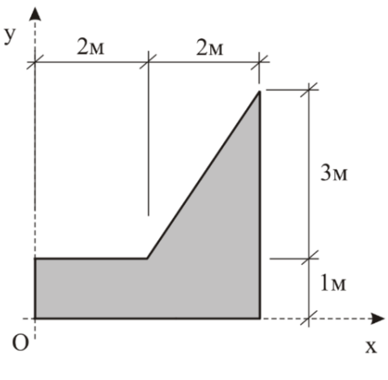
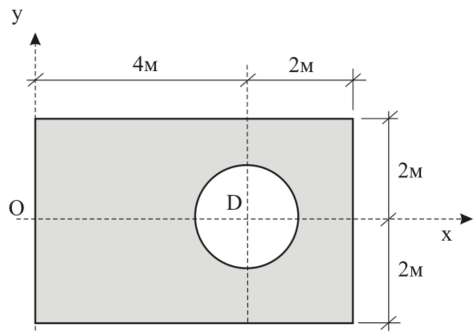
6. Трение скольжения

Дано: $P = 10$ кН; $Q = 2$ кН; $\alpha = 30^o$; коэффициент трения $f = 0.2$. Будет ли тело находиться в равновесии? Сила трения равна…	
Дано: $P = 10$ кН; $\alpha = 30^o$; коэффициент трения $f = 0.4$. Будет ли тело находиться в равновесии? Сила трения равна…	
Каким должен быть наибольший вес груза *2*, для того, чтобы груз *1* весом 100 Н оставался в покое на наклонной плоскости, если коэффициент трения скольжения *f* = 0,3.	

7. Приведение системы сил к центру

К кубу с ребром a приложена система четырёх одинаковых по модулю сил $\lvert\vec{F}_1\rvert = \lvert\vec{F}_2\rvert = \lvert\vec{F}_3\rvert = \lvert\vec{F}_4\rvert = P$. Определить проекции на оси главного вектора и его модуль.	
К кубу с ребром а приложена система двух одинаковых по модулю сил $\lvert\vec{F}_1\rvert = \lvert\vec{F}_2\rvert = P$. Определить проекции на оси координат главного момента относительно начала координат O и его модуль.	

8. Центр тяжести плоских фигур

 Координата y_c центра тяжести однородной пластины равна…	 Радиус круглого выреза равен $r = 1$м. Координата x_c центра тяжести однородной пластины равна…

9. Координатный способ задания движения точки

Задан закон движения точки в координатной форме: $x = 2\sqrt{3}\sin\frac{\pi t}{6}$ (м); $y = \frac{2\pi}{3}t$ (м).

Определить модуль скорости точки в момент времени $t_1 = 1$с.

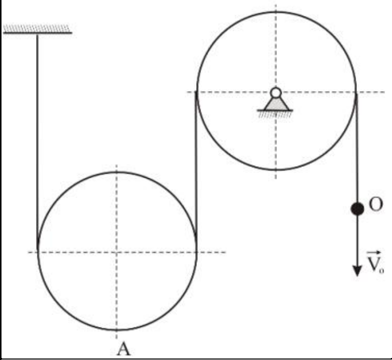
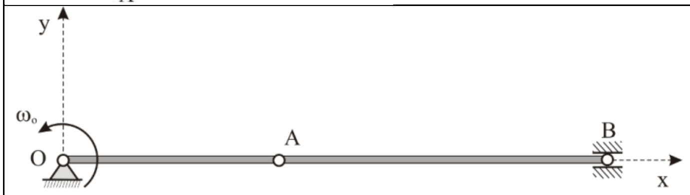
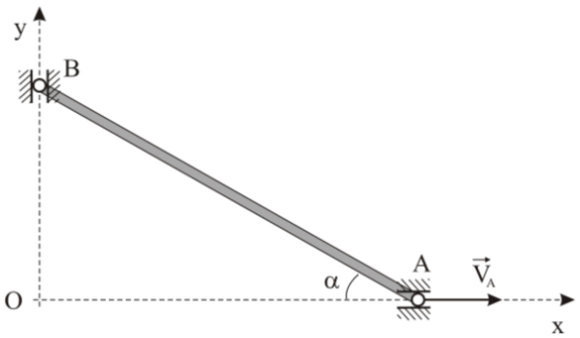
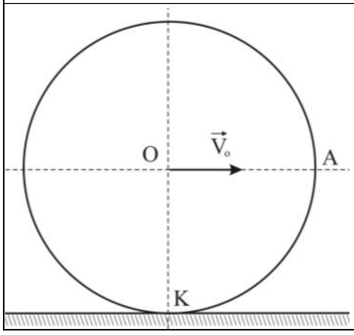
10. Естественный способ задания движения точки

Точка движется по окружности радиуса R м, дуговая координата изменяется по закону *s(t)* м. Определить касательное ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$с. $R = 6$ м; $s = 4t^3$ (м).

11. Вращательное движение твердого тела

	Дано: $OA = 1$ м. Угловая скорость кривошипа изменяется по закону $\omega = 2\sin\frac{\pi t}{3}$ (рад/с). Определить касательное ускорение точки A в момент времени $t_1 = 1$ с.
	Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 5t^2 - 3t$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t_1 = 1$ с.

12. Плоское движение твердого тела

	Подвижный блок радиуса $R = 2$ м катится по тросу без скольжения. Скорость конца троса $V_o = 4$ м/с. Определить скорость точки *A*.
	Кривошип длины $OA = 2$ м имеет в данный момент времени угловую скорость $\omega_o = 4$ рад/с, $AB = 6$ м. Определить скорость ползуна *B*.
	Ползун A в данный момент времени имеет скорость $V_A = 4$ м/с; $\alpha = 60^o$. Определить скорость ползуна B.
	Колесо радиуса $R = 2$ м катится без скольжения. Скорость центра $V_o = 4$ м/с. Определить скорость точки *A*.

3-й семестр

1. Первая задача динамики (криволинейное движение)

Материальная точка массой m = 14 кг движется по окружности радиуса r = 7 м с постоянным касательным ускорением a_τ = 0,5 м/с^2. Определить модуль равнодействующих сил, действующих на точку, в момент времени t = 4 с, если при t_0 = 0 скорость v_0 = 0.

Внутри гладкой трубки, изогнутой по окружности радиуса r = 2 м, в горизонтальной плоскости из состояния покоя движется материальная точка массой m = 42 кг под действием силы F = 21 Н. Определить горизонтальную составляющую реакции трубки в момент времени t = 7 с, если направление силы совпадает с вектором скорости.

Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы $\boldsymbol{F} = 15\boldsymbol{\tau} + 0{,}3t\mathbf{n}$. Определить массу точки, если в момент времени t = 20 с её ускорение a = 0,6 м/с^2.

2. Вторая задача динамики (прямолинейное движение)

Тело массой m = 200 кг из состояния покоя движется вверх по гладкой наклонной плоскости, образующей угол в 30^0 с горизонтальной поверхностью, под действием силы F = 1 кН. Определить время, за которое тело переместится на расстояние 8 м.

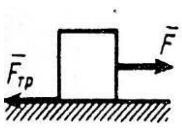
Материальная точка массой m = 900 кг движется по горизонтальной прямой под действием силы F = 270t Н, которая направлена по той же прямой. Определить скорость точки в момент времени t = 10 с, если при t_0 = 0 скорость v_0 = 10 м/с.

3. Теорема об изменении количества движения точки

Поезд движется по горизонтальному прямому участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная 0,2 веса поезда. Через какое время поезд остановится, если его начальная скорость 20 м/с.

Телу сообщили вверх по гладкой наклонной плоскости, образующей угол 30^0 с горизонтом, начальную скорость v_0 = 4 м/с. Определить, через какое время тело достигнет максимальной высоты подъема.

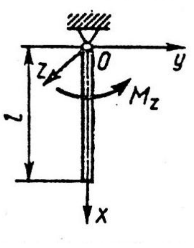
4. Теорема об изменении кинетической энергии точки



Тело массой m = 100 кг начинает движение из состояния покоя по горизонтальной шероховатой плоскости под действием постоянной силы $\boldsymbol{F}$. Пройдя путь, равный 5 м, скорость точки становится равной 5 м/с. Определить модуль силы F, если модуль силы трения равен 20 Н.

Тело толкнули вверх по гладкой наклонной плоскости, образующей угол α = 30^0 с горизонтом, с начальной скоростью $v_0 = 4\sqrt{g}$ м/с. Определить расстояние, пройденное телом до остановки.

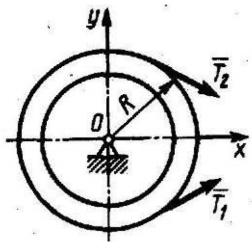
5. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела



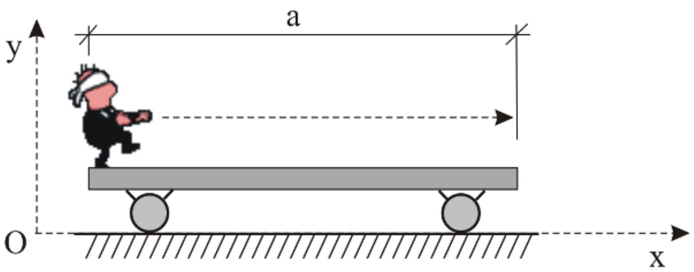
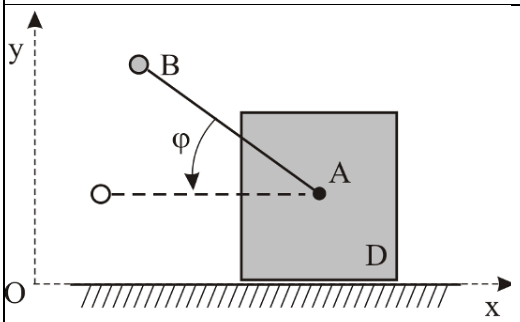
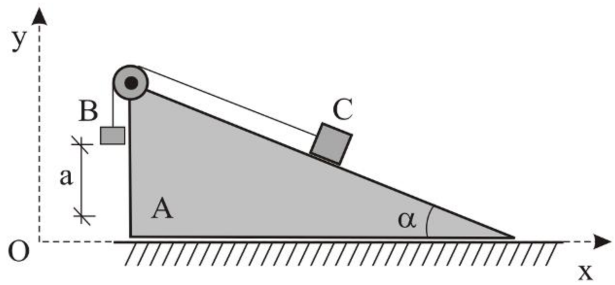
Однородный стержень, масса которого m = 8 кг и длина l = 1,5 м, вращается вокруг оси Oz под действием пары сил с моментом M_z = 12·sin(3πt/4) Н·м. Определить угловое ускорение стержня в момент времени t = 2/3 с.

Маховик в момент включения тормоза имеет угловую скорость ω = 6 рад/с. Тормозящий момент постоянный и равен $M_{тр}$ = 10 Н·м. Момент инерции маховика относительно оси вращения равен I_z = 35 кг·м^2. Определить время до остановки маховика.

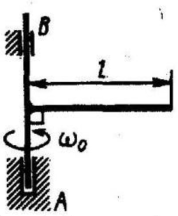
Определить радиус инерции шкива массой m = 5 кг и радиуса r = 0,4 м, если под действием сил натяжения ремня $T_1 = 2T_2$ = 10 Н он вращается с угловой скоростью $\omega = 10t$.



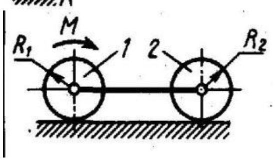
6. Теорема о движении центра масс

	Человек, масса которого m_2 = 60 кг, переходит с одного края платформы на другой. Масса платформы m_1 = 240 кг; длина a = 5 м. В начальный момент времени система покоилась. Сопротивление движению платформы не учитывается. Чему равна проекция перемещения платформы на ось *Ox*.
	Стержень l = 1 м, несущий на конце шарик *B* массой m_B = 10 кг может вращаться вокруг оси *A*. Брус *D* массой m_D = 90 кг находится на гладкой горизонтальной плоскости. Массой стержня пренебречь. В начальный момент система покоилась. Чему равна проекция перемещения бруса на ось *Ox*, если стержень из начального положения $\varphi = 60^0$ перейдёт в горизонтальное.
	Брус *C* скользит по боковой поверхности призмы *A*, поднимая при мощи троса груз *B*. В начале система находилась в покое, трение не учитывается. Дано: m_A = 170 кг, m_B = 10 кг, m_C = 20 кг; $\alpha = 60^0$. Чему равна проекция перемещения призмы *A* на ось *Ox* после того, как груз *B* поднимется на высоту a = 2 м.

7. Теорема об изменении кинетической энергии системы (тела)

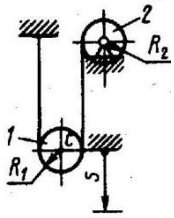


К валу *AB* жестко прикреплен горизонтальный однородный стержень длиной l = 2 м и массой m = 12 кг. Валу сообщена угловая скорость ω_0 = 2 рад/с. Предоставленный самому себе, он остановился, сделав 20 оборотов. Определить момент трения в подшипниках, считая его постоянным.



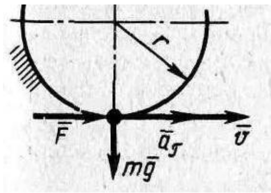
Однородные цилиндрические катки *1* и *2* массой 20 кг каждый приводятся в движение из состояния покоя постоянным вращающим моментом пары сил M = 2 Н·м. Определить скорость осей катков при их перемещении на расстояние 3 м, если радиусы $r_2 = r_1$ = 0,2 м.

Одинаковые блоки *1* и *2*

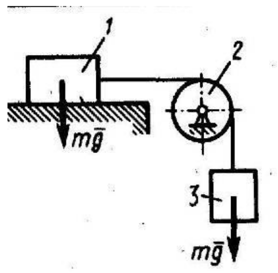


массой $m_1 = m_2$ и радиусами $r_1 = r_2$, представляющие собой однородные диски, начинают движение из состояния покоя под действием силы тяжести. Определить скорость центра *C* блока *1* после того, как он опустился вниз на расстояние $s = 3$ м.

8. Принцип Даламбера для точки и системы



Материальная точка массой $m = 0{,}1$ кг скользит по негладкой, вертикально расположенной направляющей радиуса $r = 0{,}4$ м. В самом нижнем положении скорость точки $v = 4$ м/с, а касательное ускорение $a_\tau = 7$ м/с^2. Определить мгновенное значение силы F, если коэффициент трения $f = 0{,}1$.



Тело *1* скользит по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы тяжести тела *3*. Определить натяжение нити, если тела *1* и *3* имеют массу $m = 3$ кг каждый. Массой блока *2* пренебречь.

Материальная точка массой $m = 10$ кг движется по окружности радиуса $r = 3$ м согласно закону движения $s = 4t^3$. Определить модуль силы инерции материальной точки в момент времени $t = 1$ с.

7.3.2. Вопросы для подготовки к зачету во 2-м семестре

1. Аксиомы статики.
2. Связи и их реакции. Принцип освобождаемости от связей.
3. Проекция силы на ось. Сложение сил.
4. Равновесие системы сходящихся сил. Теорема о трёх силах.
5. Плоская система сил. Алгебраические моменты силы и пары. Распределённая нагрузка.
6. Уравнения равновесия плоской системы сил (3 формы).
7. Трение скольжения, трение качения.
8. Равновесие составных конструкций.
9. Плоские фермы. Леммы о нулевых стержнях. Расчёт плоских ферм (метод вырезания узлов и метод сечений).
10. Момент силы относительно центра (как вектор) и относительно оси.
11. Момент пары (как вектор). Теорема о сложении пар. Теорема об эквивалентности пар, вытекающие свойства пары.
12. Теорема Пуансо о параллельном переносе силы. Теорема о приведении системы сил к центру.
13. Условия равновесия системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно центра и оси.
14. Аналитические формулы для момента силы относительно осей.
15. Вычисление главного вектора и главного момента пространственной системы сил.
16. Уравнения равновесия пространственной системы сил. Случай параллельных сил.
17. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду.
18. Центр тяжести твёрдого тела. Координаты центра тяжести для объёмных тел.
19. Координаты центра тяжести линии. Центр тяжести дуги окружности.
20. Координаты центра тяжести плоской фигуры. Центр тяжести треугольника, сектора круга.
21. Методы нахождения центра тяжести твёрдых тел. Статический момент площади плоской фигуры.

22. Способы задания движения точки.
23. Скорость и ускорение точки при векторном и координатном способах задания её движения.
24. Скорость и ускорение точки при естественном способе задания её движения.
25. Частные случаи движения точки.
26. Поступательное движение твёрдого тела, его свойства.
27. Вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Частные случаи вращения твёрдого тела.
28. Скорости и ускорения точек вращающегося твёрдого тела.
29. Передаточные механизмы.
30. Плоскопараллельное движение твёрдого тела.
31. Теорема о сложении скоростей при плоском движении твёрдого тела. Следствие (теорема о проекции скоростей двух точек твёрдого тела).
32. Мгновенный центр скоростей, его существование и единственность. Частные случаи определения мцс.
33. Теорема о сложении ускорений при плоском движении твёрдого тела.
34. Сложное движение точки. Правило Жуковского определения направления ускорения Кориолиса.
35. Теорема о сложении скоростей при сложном движении точки.
36. Теорема о сложении ускорений при сложном движении точки (теорема Кориолиса).

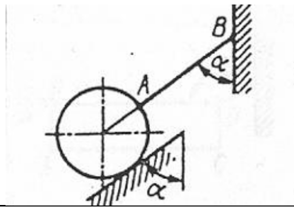
7.3.3. Вопросы для подготовки к экзамену в 3-м семестре

1. Законы динамики. Системы единиц.
2. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки.
3. Две задачи динамики.
4. Относительное движение точки.
5. Количество движения точки. Импульс силы. Теорема об изменении количества движения точки.
6. Момент количества движения точки. Теорема об изменении момента количества движения точки. Следствия.
7. Работа силы. Мощность.
8. Работа силы тяжести, трения, упругости.
9. Кинетическая энергия точки. Теорема об изменении кинетической энергии точки.
10. Система материальных точек (определение, классификация сил, масса, центр масс).
11. Дифференциальные уравнения движения механической системы.
12. Теорема о движении центра масс. Следствия.
13. Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения механической системы. Следствия.
14. Моменты инерции твёрдого тела. Примеры.
15. Теорема о моменте инерции твёрдого тела относительно параллельных осей.
16. Кинетический момент системы. Теорема об изменении кинетического момента. Следствия.
17. Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.
18. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела.
19. Работа вращающего момента. Сопротивление при вращении.
20. Кинетическая энергия механической системы. Кинетическая энергия тела при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях тела. Теорема об изменении кинетической энергии системы.
21. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.
22. Принцип Даламбера для точки.
23. Принцип Даламбера для механической системы.
24. Главный вектор и главный момент сил инерции.

25. Принцип возможных перемещений.
26. Общее уравнение динамики.

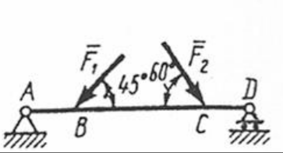
7.3.4. Примерный вариант экзаменационного тестового билета

№1



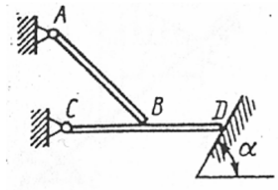
Однородный шар весом 12 Н удерживается в равновесии на гладкой наклонной плоскости с помощью веревки AB. Определить давление шара на плоскость, если угол $\alpha = 60°$.

№2



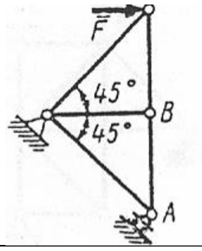
Определить реакцию опоры D, если силы $F_1 = 84{,}6$ Н, $F_2 = 208$ Н, размеры $AB = 1$ м, $BC = 3$ м, $CD = 2$ м.

№3



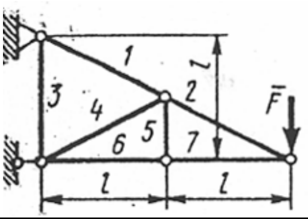
Однородная балка AB, вес которой 200 Н, свободно опирается в точке B на горизонтальную балку CD. Определить, с какой силой балка CD действует на опорную плоскость в точке D, если расстояние $CB = BD$, угол $\alpha = 60°$. Весом балки CD пренебречь.

№4



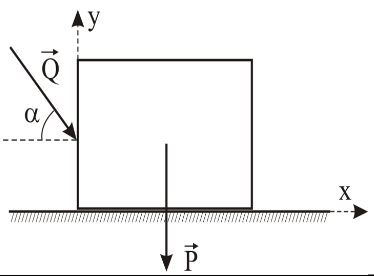
Определить усилие в стержне AB. Сила $F = 400$ Н.

№5

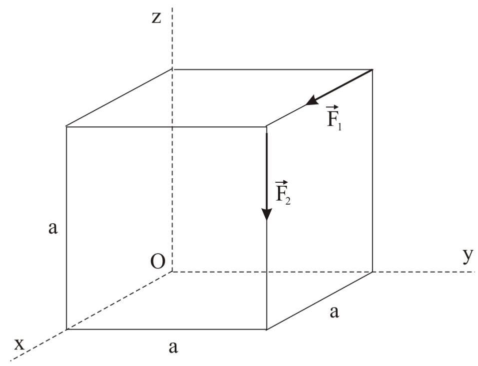


Определить усилие в стержне 6. Сила $F = 360$ Н.

№6

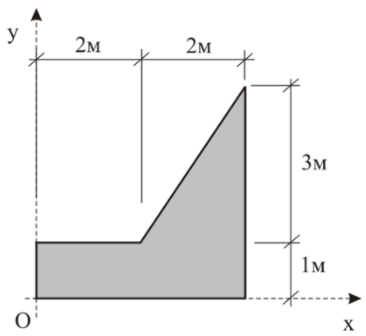


Дано: $P = 10$ кН; $Q = 2$ кН; $\alpha = 30^o$; коэффициент трения $f = 0.2$.
Будет ли тело находиться в равновесии? Сила трения равна…



№7

К кубу с ребром a приложена система двух одинаковых по модулю сил $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = P$.
Определить проекции на оси координат главного момента относительно начала координат O и его модуль.



№8

Координата y_c центра тяжести однородной пластины равна…

№9

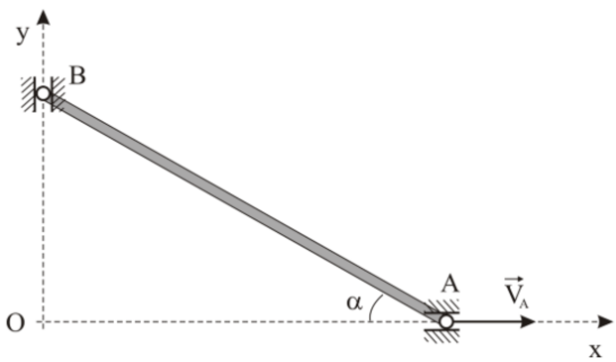
$x = 2\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi t}{6}$ (м); $y = \dfrac{2\pi}{3}t$ (м). Определить модуль скорости точки в момент времени $t_1 = 1$с.

№10

Точка движется по окружности радиуса R м, дуговая координата изменяется по закону $s(t)$ м.
Определить касательное ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$с. $R = 6$ м; $s = 4t^3$ (м).

№11

Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi(t)$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t_1 = 1$с. $\varphi = 2\sin\dfrac{\pi t}{6}$.



№12

Ползун A в данный момент времени имеет скорость $V_A = 4$ м/с; $\alpha = 60^o$. Определить скорость ползуна B.

№13

Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы $\boldsymbol{F} = 15\boldsymbol{\tau} + 0{,}3t\mathbf{n}$.
Определить массу точки, если в момент времени $t = 20$ с её ускорение $a = 0{,}6$ м/с^2.

№14

Материальная точка массой $m = 900$ кг движется по горизонтальной прямой под действием силы $F = 270t$ Н, которая направлена по той же прямой. Определить скорость точки в момент времени $t = 10$ с, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 10$ м/с.

№15

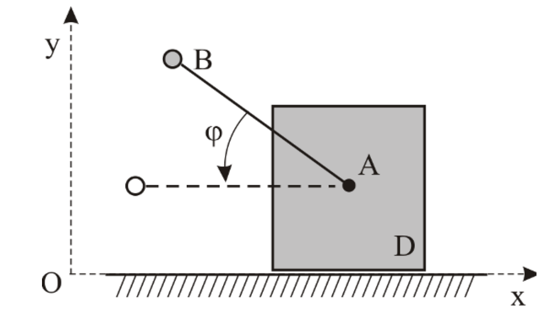
Поезд движется по горизонтальному прямому участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная 0,2 веса поезда. Через какое время поезд остановится, если его начальная скорость 20 м/с.

№16

Тело толкнули вверх по гладкой наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом, с начальной скоростью $v_0 = 4\sqrt{g}$ м/с. Определить расстояние, пройденное телом до остановки.

№17

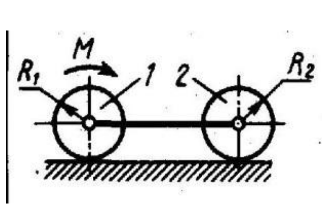
Определить радиус инерции шкива массой $m = 5$ кг и радиуса $r = 0{,}4$ м, если под действием сил натяжения ремня $T_1 = 2T_2 = 10$ Н он вращается с угловой скоростью $\omega = 10t$.



№18

Стержень $l = 1$ м, несущий на конце шарик B массой $m_B = 10$ кг может вращаться вокруг оси A. Брус D массой $m_D = 90$ кг находится на гладкой горизонтальной плоскости. Массой стержня пренебречь. В начальный момент система покоилась. Чему равна проекция перемещения бруса на ось Ox, если стержень из начального положения $\varphi = 60^0$ перейдёт в горизонтальное.

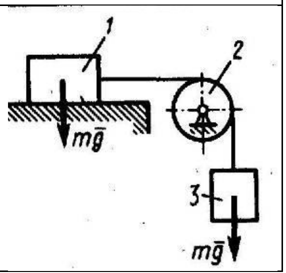
№19



Однородные цилиндрические катки *1* и *2* массой 20 кг каждый приводятся в движение из состояния покоя постоянным вращающим моментом пары сил $M = 2$ Н·м. Определить скорость осей катков при их перемещении на расстояние 3 м, если радиусы $r_2 = r_1 = 0{,}2$ м.

№20

Тело *1* скользит по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы тяжести тела *3*. Определить натяжение нити, если тела *1* и *3* имеют массу $m = 3$ кг каждый. Массой блока *2* пренебречь.



7.4. Порядок процедуры оценивания знаний на этапе промежуточного контроля

Зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости, выполнения тестовых заданий и сдачи РГР и (или) путем организации специального опроса, проводимого в устной и (или) письменной форме.

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется 90 минут на выполнение заданий в экзаменационном тестовом билете. Критерии оценки: менее 50% верно выполненных тестовых заданий (менее 10 из 20) – «неуд.»; от 50% до 70% верно выполненных заданий (10-14 из 20) – «удовл.»; от 75% до 85% верно выполненных заданий (15-17 из 20) – «хор.»; от 90% и более верно выполненных заданий (18-20 из 20) – «отл.». Во время проведения зачета и экзамена обучающиеся могут пользоваться инженерными микрокалькуляторами.

8. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

№ п/п	Наименование издания	Вид издания (учебник, учебное пособие, методические указания, компьютерная программа)	Автор (авторы)	Год и место издания	Место хранения и количе-ство
1	Произвольная плоская система сил: задания и метод. указания по теоретической механике для самостоятельной работы студ. 1 курса строит. спец.	Методические указания № 870	Черных А.В. Биджиев Р.Х. Алирзаев И.Ш.	2007 Воронеж. ГАСУ	Библ. 150 экз.
2	Статический расчёт плоских ферм: метод. указания и контрол. задания для студ. дневной формы обучения инженерно-строит. спец.	Методические указания № 408	Черных А.В. Черных В.В.	2010 Воронеж. ГАСУ	Библ. 300 экз.
3	Кинематика: метод. указания для самостоятельной работы студ. 1 курса строит. спец.	Методические указания № 498	Коробкин В.Д. Горячев В.Н.	2007 Воронеж. ГАСУ	Библ. 350 экз.
4	Статика: метод. указания и контр. задания по теоретической механике для студ. з/о инженерно-строит. спец.	Методические указания № 152	Козлов В.А. Коробкин В.Д.	2005 Воронеж. ГАСУ	Библ. 1000 экз.
5	Кинематика: метод. указания и контр. задания по курсу теоретической механики	Методические указания № 713	Козлов В.А. Коробкин В.Д. Ордян М.Г.	2012 Воронеж. ГАСУ	Библ. 800 экз.
6	Динамика: метод. указания и контр. задания по теоретической механике для студ. з/о инженерно-строит. спец.	Методические указания № 647	Козлов В.А. Коробкин В.Д. Горячев В.Н.	2010 Воронеж. ГАСУ	Библ. 800 экз.
7	Применение теоремы об изменении кинетической энергии и общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы: задания и метод. указания по теоретической механике для студентов 2 курса строит. спец.	Методические указания № 591	Коробкин В.Д. Черных А.В. Горячев В.Н.	2004 Воронеж. ГАСУ	Библ. 300 экз.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Вид учебных занятий	Деятельность студента
Лекция	Написание конспекта лекций: кратко, схематично, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения; помечать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Проверка терминов, понятий с помощью энциклопедий, словарей, справочников с

	выписыванием толкований в тетрадь. Обозначение вопросов, терминов, материала, которые вызывают трудности, поиск ответов в рекомендуемой литературе.
Практические занятия	Работа с конспектом лекций, просмотр рекомендуемой литературы. Решение задач по рассматриваемой теме из рекомендуемого задачника, решение задач из тестовых заданий. Выполнение примерного варианта расчетно-графических заданий.
Расчетно-графическая / контрольная работа	Знакомство с основной и дополнительной литературой, включая справочные издания, зарубежные источники, конспект основных положений, терминов, сведений, являющихся основополагающими в этой теме. Выполнения РГР/КР аналогично разобранным на практических занятиях примерам, решение задач из домашнего задания. Если самостоятельно не удается разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на консультации, на практическом занятии.
Самостоятельная работа	Преследует цель закрепить, углубить и расширить знания, полученные студентами в ходе аудиторных занятий, а также сформировать навыки работы с научной, учебной и учебно-методической литературой, развивать творческое, продуктивное мышление обучаемых, их креативные качества, формирование профессиональных и общекультурных компетенций.
Подготовка к экзамену (зачету)	При подготовке к экзамену (зачету) необходимо ориентироваться на конспекты лекций, рекомендуемую литературу и решение задач на практических занятиях.

10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

10.1. Основная литература

№ п/п	Автор, название, место издания, год издания учебной литературы, вид и характеристика иных информационных ресурсов	Кол-во экз.
1	Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Статика. Кинематика. Динамика: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: Кнорус, 2011. – 603 с.	51
2	Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие для вузов: рек. УМО / И.В. Мещерский; под ред. В.В. Пальмова, Д.Д. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: издательство «Лань», 2010. – 448 с.	667
3	Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для втузов: доп. МО СССР / под общ. ред. А.А. Яблонского. – 18-е изд., стер. – М.: Кнорус, 2011. – 386 с.	690
4	Сборник коротких задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов: рек. УМО / под ред. О.Э. Кепе. – 3-е изд., стер. – СПб.: издательство «Лань», 2009. – 368 с.	44

10.2. Дополнительная литература

№ п/п	Автор, название, место издания, год издания учебной литературы, вид и характеристика иных информационных ресурсов	Кол-во экз.
1	Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб.: рек. МО РФ / С.М. Тарг. – 17-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2007. – 415 с.	224
2	Бабанов В.В. Теоретическая механика для архитекторов: учебник в 2 т.: доп. МО РФ. Т. 1 / В.В. Бабанов. – М.: Академия, 2008. – 247 с.	121
3	Бабанов В.В. Теоретическая механика для архитекторов: учебник в 2 т.: доп. МО РФ. Т. 2 / В.В. Бабанов. – М.: Академия, 2008. – 269 с.	120

4	Бать М.И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика: учеб. пособие / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – 11-е изд., стер. – СПб.: издательство «Лань», 2010. – 667 с.	83
5	Бать М.И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2. Динамика: учеб. пособие. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – 9-е изд., стер. – СПб.: издательство «Лань», 2010. – 638 с.	11

10.3. Учебно-методическое обеспечение в электронном виде и Интернет-ресурсы

№ п/п	Автор, название, место издания, год издания учебной литературы, вид и характеристика иных информационных ресурсов
1	Козинцева С.В. Теоретическая механика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / С.В. Козинцева, М.Н. Сусин. – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2012. – 152 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/728. – ЭБС «IPRbooks».
2	Щербакова Ю.В. Теоретическая механика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Ю.В. Щербакова. – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Научная книга, 2012. – 159 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/6345. – ЭБС «IPRbooks».
3	Статика. Кинематика. Динамика: экспресс-курс лекций по основным разделам теоретической механики (для студ. инженерно-строит. спец.) [Электронный ресурс] / В.А. Козлов. – Электрон. текстовые данные. – Воронеж: Воронежский ГАСУ, 2011. – библ. Воронежского ГАСУ.

Для работы в сети рекомендуется использовать сайты (базы данных, информационно-справочные и поисковые системы):

1) http://elibrary.ru
2) http://www.knigafund.ru
3) http://www.fepo.ru
4) http://encycl.yandex.ru (энциклопедии и словари).

Для работы с электронными учебниками требуется наличие таких программных средств, как Adobe Reader для Windows и DjVuBrowserPlugin.

11. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для проведения ряда лекционных занятий по дисциплине необходимы аудитории, оснащенные презентационным оборудованием (компьютер с ОС Windows и программой PowerPoint или Adobe Reader, мультимедийный проектор и экран).

Для обеспечения практических занятий требуется компьютерный класс с комплектом лицензионного программного обеспечения (при использовании электронных изданий – компьютерный класс с выходом в Интернет).

12. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В качестве основной используется традиционная технология изучения материала, предполагающая живое общение преподавателя и студента. Все виды деятельности студента должны быть обеспечены доступом к учебно-методическим материалам (учебникам, учебным пособиям, методическими указаниями к выполнению расчетно-графических работ). Учебные материала должны быть доступны в печатном виде и, кроме того, могут быть представлены в электронном варианте и представляться на CD и (или) размещаться на сайте учебного заведения.

Курс разделен на три традиционных раздела – статика, кинематика и динамика, каждый из которых, в свою очередь, разделяется на модули, соответствующие основным разделам дисциплины. По каждому модулю в аудитории проводится самостоятельная работа по индивидуальным вариантам тестовых заданий. Изучение статики и динамики сопровождается выполнением соответствующей расчетно-графической работы (РГР). При защите выполненной РГР студент должен продемонстрировать как знание теоретических вопросов данного блока, так и навыки решения соответствующих задач. Выполнение самостоятельных работ и защита РГР являются формой промежуточного контроля знаний по данному разделу.

В процессе самостоятельной работы студент закрепляет полученные знания и навыки, выполняя домашние задания по каждой теме модуля. В качестве итогового контроля предусмотрен экзамен в третьем семестре по тестам, содержащим задания по всем трем разделам курса теоретической механики.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ПрООП ВО по направлению подготовки 08.03.01 – «Строительство», профиль «Производство и применение строительных материалов, изделий и конструкций».

Руководитель основной
образовательной программы ______________ Шмитько Е.И.

Рабочая программа одобрена учебно-методической комиссией строительно-технологического факультета

"1" 09 2017 г., протокол № 1

Председатель ______________ Баранов Е.В.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАНИЙ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

Расчетно-графическая работа «Статический расчет плоских ферм с применением ПЭВМ (равновесие произвольной плоской системы сил)»

Введение

Расчёт плоской фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в её стержнях. Опорные реакции можно найти обычными методами статики из 3-х уравнений равновесия, рассматривая ферму в целом как твёрдое тело.

При определении усилий в стержнях методом вырезания узлов мысленно вырезают узлы фермы, прикладывают к ним соответствующие внешние силы, реакции самих стержней и составляют уравнения равновесия сил, приложенных к каждому узлу: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$. Условно предполагают, что все стержни растянуты, т.е. реакции стержней направлены от узлов. Если в результате вычислений получен ответ со знаком минус, то это значит, что соответствующий стержень сжат. Последовательность рассмотрения узлов обычно определяется условием: число неизвестных сил, приложенных к узлу, не должно превышать числа уравнений равновесия, т.е. двух.

Методом Риттера удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности, для проверочных расчётов. Для определения усилия в каком-нибудь стержне ферму рассекают на две части сечением, проходящем через три стержня, в том числе и через тот, в котором определяется усилие. Одну из частей вместе с приложенными к ней силами мысленно отбрасывают, а её действие заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней в сторону отброшенной части. Затем составляют уравнения моментов сил, действующих на рассматриваемую часть фермы, относительно точки пересечения двух рассечённых стержней, усилия в которых на данном этапе не определяются. Эта точка пересечения называется точкой Риттера. Если точка Риттера находится в бесконечности, т.е. стержни параллельны, то составляют уравнение суммы проекций сил, приложенных к рассматриваемой части фермы, на ось, перпендикулярную этим параллельным стержням.

Решение типового варианта

Дано: Схема фермы, все действующие нагрузки и размеры показаны на рис. 1п.
P=10 кН, F=30 кН.
Определить опорные реакции и усилия в стержнях 1 – 4 методом вырезания узлов, 5 – 7 – методом сквозных сечений.

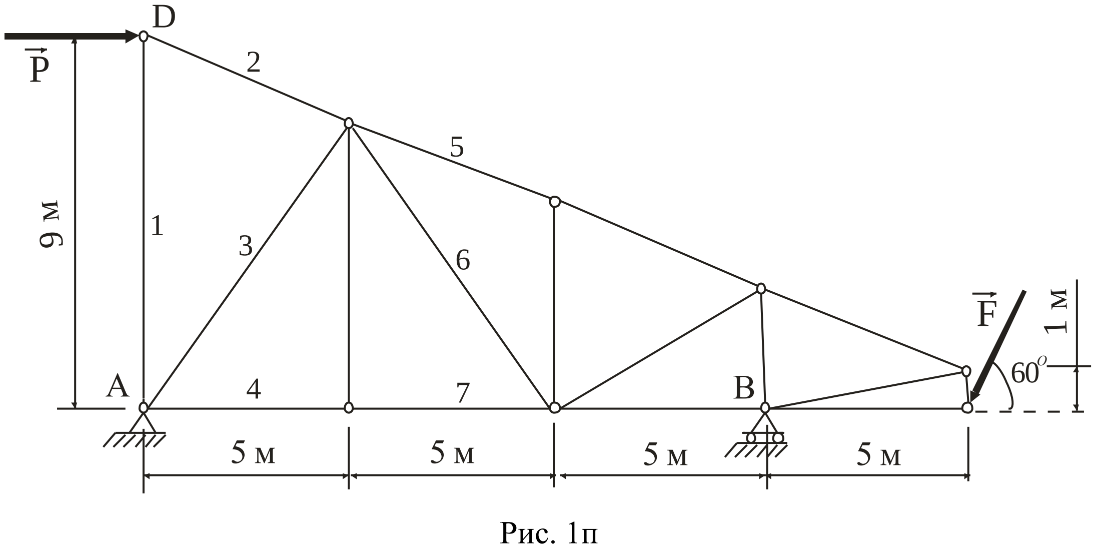


Рис. 1п

Решение. При определении опорных реакций ферма рассматривается как твёрдое тело. Опоры в узлах *A* и *B* мысленно отбрасываются и заменяются соответствующими реакциями: составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ в узле *A*, $\vec{R}_B$ в узле *B* (рис. 2п).

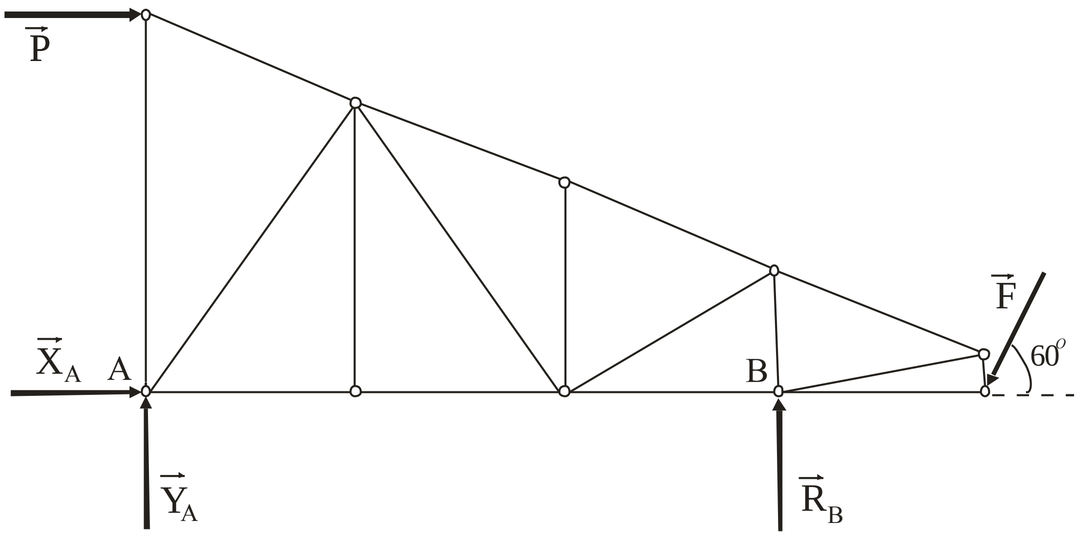


Рис. 2п

Составляются три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0: \quad X_A + P - F\cos 60^0 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad Y_A + R_B - F\sin 60^0 = 0;$$

$$\sum m_{kA} = 0: \quad -P \cdot 9 + R_B \cdot 15 - F\sin 60^0 \cdot 20 = 0.$$

Из первого уравнения X_A=5 кН, из третьего $R_B = 6 + 20\sqrt{3} \approx 40{,}64$ кН, из второго $Y_A = -(6 + 5\sqrt{3}) \approx -14{,}66$ кН; знак «–» показывает, что истинное направление $\vec{Y}_A$ противоположно изображённому на рис. С2.2.

Проверка:

$$\sum m_{kB} = -Y_A \cdot 15 - P \cdot 9 - F \cdot \sin 60^0 \cdot 5 = (6 + 5\sqrt{3}) \cdot 15 - 90 - 75\sqrt{3} = 0.$$

При определении усилий в стержнях 1 – 4 методом вырезания узлов сначала мысленно вырезается узел *D* (в нём сходятся два стержня, усилия в которых неизвестны), и изображаются все приложенные к нему силы и реакции (рис. 3п).

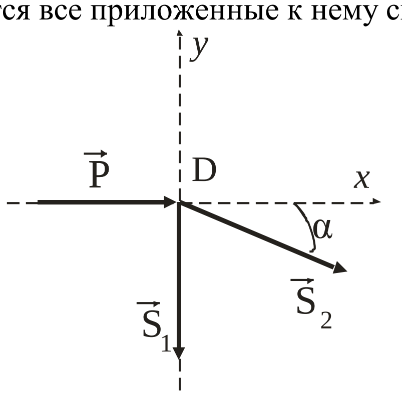


Рис. 3п

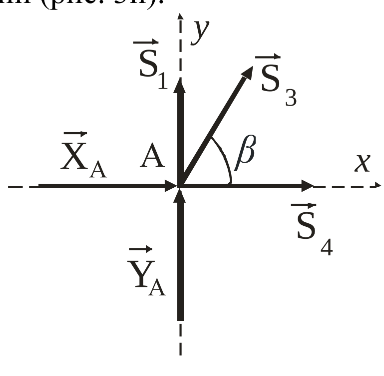


Рис. 4п

По геометрическим размерам фермы (рис. 5п) $tg\alpha = 9/22{,}5 = 0{,}4$, следовательно, $\sin\alpha = 0{,}3714$, $\cos\alpha = 0{,}9285$. Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = 0: \quad P + S_2\cos\alpha = 0; \quad S_2 = -10{,}77 \text{ кН}.$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad -S_2\sin\alpha - S_1 = 0; \quad S_1 = 4 \text{ кН}.$$

Затем вырезается узел *A* (рис. 4п), здесь неизвестны усилия $\vec{S}_3, \vec{S}_4$; $tg\beta = 7/5 = 1{,}4$; $\sin\beta = 0{,}8137; \quad \cos\beta = 0{,}5812.$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad Y_A + S_1 + S_3\sin\beta = 0; \quad S_3 = 13{,}1 \text{ кН}.$$

$$\sum F_{kx} = 0: \quad X_A + S_3\cos\beta + S_4 = 0; \quad S_4 = -12{,}61 \text{ кН}.$$

При определении усилий в стержнях 5 – 7 методом Риттера ферма рассекается по этим трём стержням на две части. Одна из частей вместе с приложенными к ней нагрузками мысленно отбрасывается, а её действие на оставшуюся часть заменяется усилиями $\vec{S}_5, \vec{S}_6, \vec{S}_7$, которые направлены вдоль соответствующих стержней в сторону отброшенной части (рис. 5п). Для определения $\vec{S}_5$ составляется уравнение моментов от сил, приложенных к оставшейся части фермы, относительно точки пересечения двух остальных разрезанных стержней (точка *L*).

$$\sum m_{kL} = 0: \quad -Y_A\cdot 10 - P\cdot 9 - S_5\cos\alpha\cdot 7 + S_5\sin\alpha\cdot 5 = 0; \quad S_5 = 12{,}19 \text{ кН}.$$

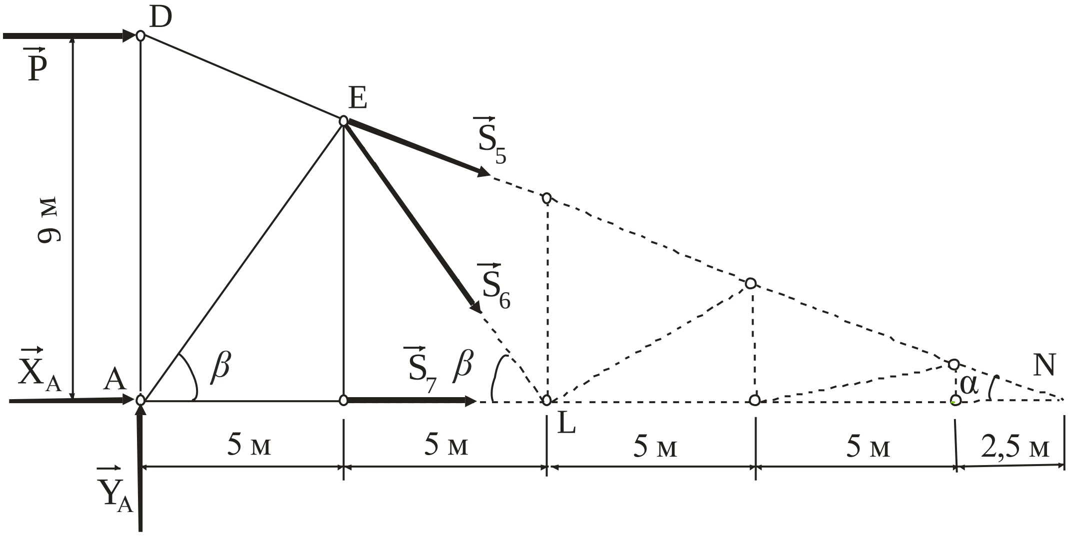


Рис. 5п

Для определения $\vec{S}_6$ составляется уравнение моментов относительно точки *N*.

$$\sum m_{kN} = 0: -Y_A\cdot 22{,}5 - P\cdot 9 - S_6\cos\beta\cdot 7 + S_6\sin\beta\cdot 17{,}5 = 0; \quad S_6 = -23{,}58 \text{ кН}.$$

При определении $\vec{S}_7$ составляется уравнение моментов относительно точки *E*.

$$\sum m_{kE} = 0: \quad -Y_A\cdot 5 + X_A\cdot 7 - P\cdot 2 + S_7\cdot 7 = 0; \quad S_7 = -12{,}61 \text{ кН}.$$

Результат $S_4 = S_7$ согласуется с леммой 2 о нулевых стержнях, что является дополнительной проверкой результатов счёта.

Ответ: $X_A = 5$ кН; $Y_A = -14{,}66$ кН; $R_B = 40{,}64$ кН; S_1 = 4 кН; S_2 = –10,77 кН; S_3 = 13,1 кН; S_4 = –12,61 кН; S_5 = 12,19 кН; S_6 = –23,58 кН; S_7 = –12,61 кН. Знаки указывают, что сила $\vec{Y}_A$ направлена противоположно показанному на рис. С2.2, стержни 2,4,6,7 – сжаты, 1,3,5 – растянуты.

Варианты типовых расчетов

К заданию даётся 10 рисунков и таблица, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по последней цифре номера своей зачётной книжки, а номер условия в таблице – по предпоследней. Например, если номер зачётной книжки оканчивается числом 57, то берутся рис.7 и условие №5 из таблицы для каждой из задач. Рисунки даны без соблюдения масштаба, на них все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными.

Задание выполняется на листах формата А4. Вначале выполняется чертёж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). Чертёж выполняется с учётом условий решаемого варианта задачи и должен быть аккуратным и наглядным; на нём все углы, действующие силы и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.

Плоская ферма, расположенная в вертикальной плоскости, закреплена в точках *A* и *B*, причём в одной из них шарнирно-неподвижно, а в другой опирается на подвижный шарнир (рис. 0 – 9). К ферме приложена наклонная сила $\vec{F}$, для которой модуль и угол α указаны в таблице, горизонтальная сила $\vec{Q}$ и вертикальная $\vec{P}$; в расчётах принять Q = 5 кН, P = 20 кН, a=3 м. Определить опорные реакции в точках *A* и *B*, усилия в стержнях 1, 2, 3, 4 методом вырезания узлов, а в стержнях 5, 6, 7 – методом сквозных сечений (Риттера).

Таблица

Предпоследняя цифра шифра зачётной книжки

Номер условия	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F, кН	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
α^0	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30

Рис. 8

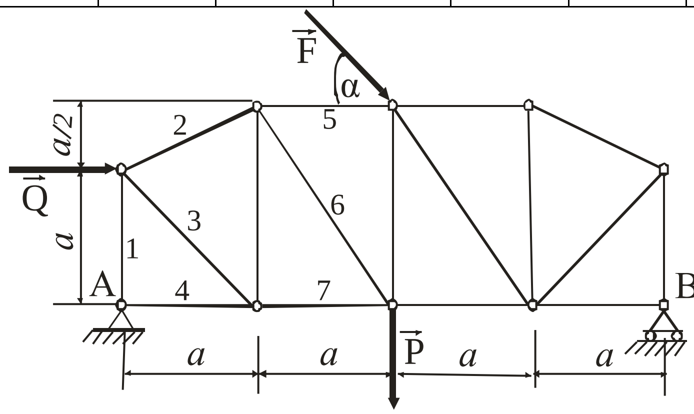
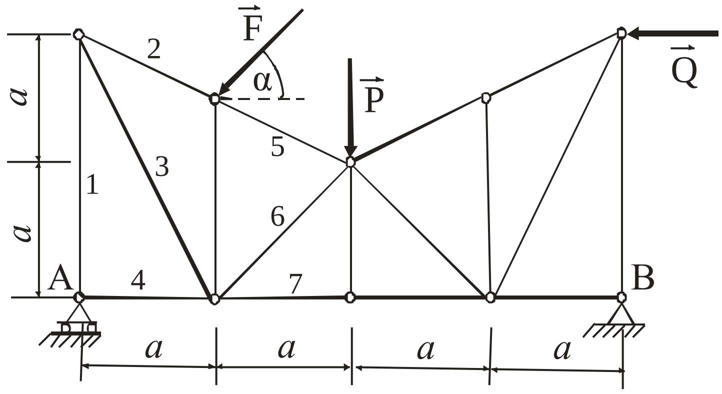


Рис. 9



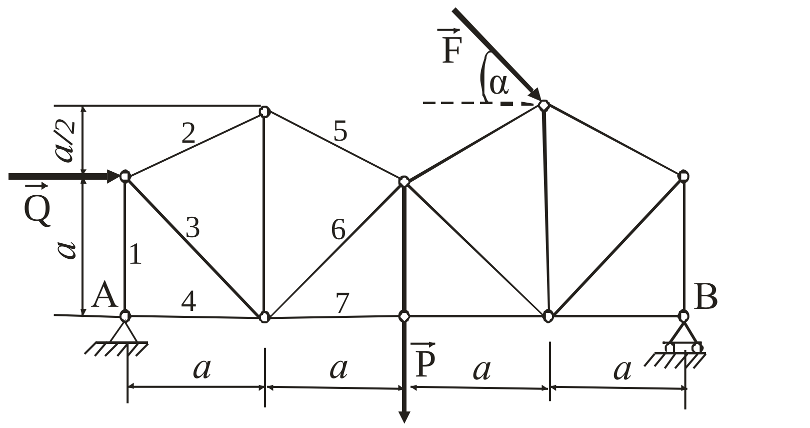


Рис. 0

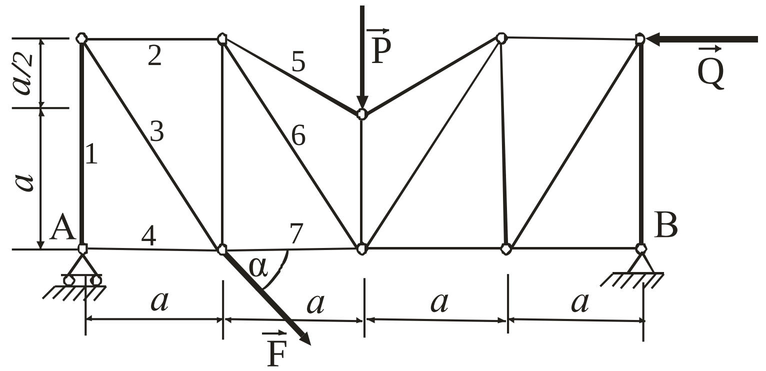


Рис. 1

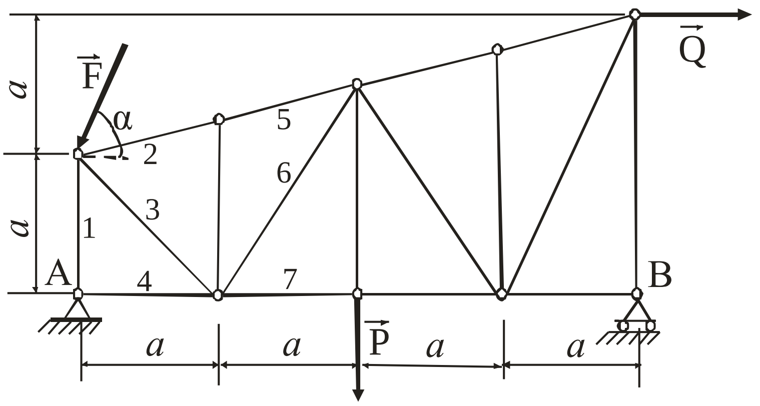


Рис. 2

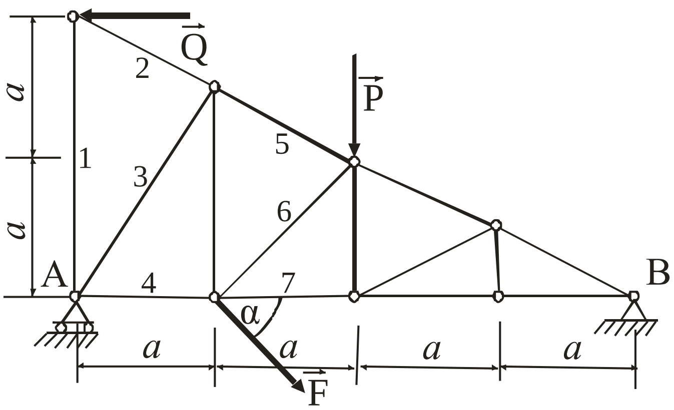


Рис. 3

Рис. 4

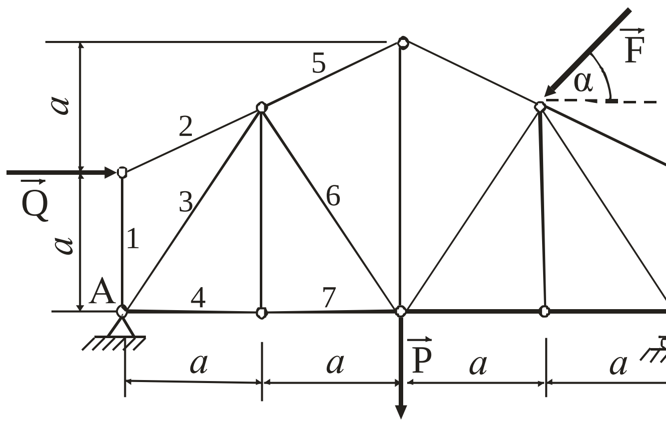


Рис. 5

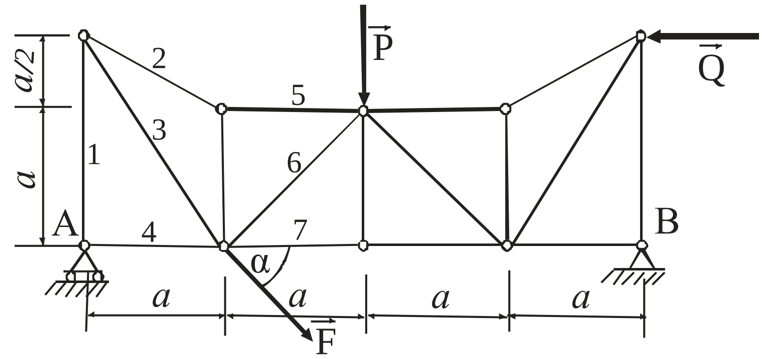


Рис. 6

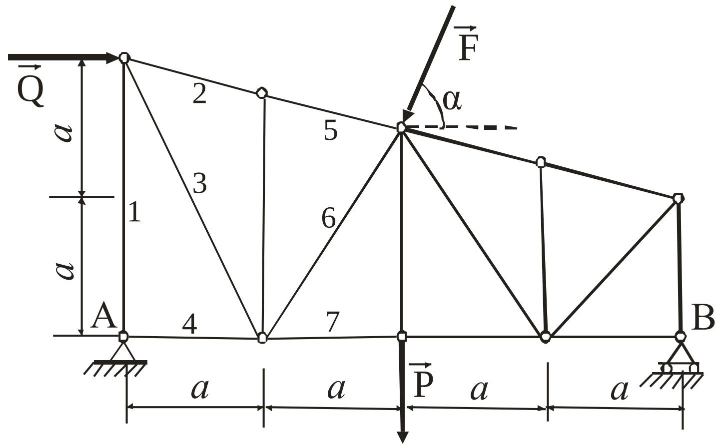
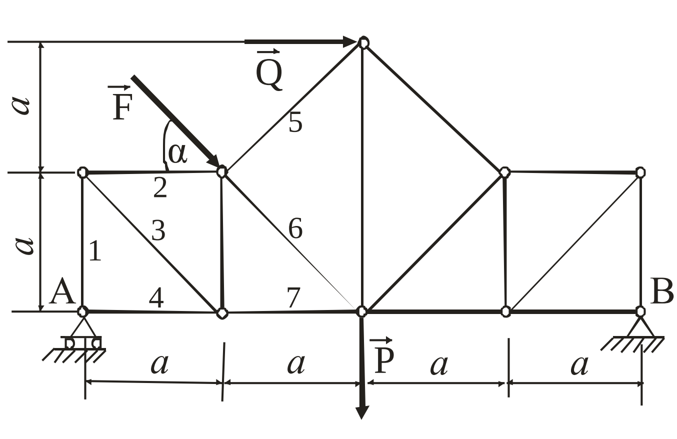


Рис. 7



№ рисунка по последней цифре шифра зачётной книжки

Инструкция к пользованию программой для расчета фермы на ПЭВМ

1. В папке «РАСЧЕТ НА ПЭВМ» дважды щелкнуть на «ferm06».
2. В выпавшем окошке с рисунком фермы из 10 панелей ввести данные по своему варианту (для визуального контроля после каждого ввода (или после последнего) щелкнуть мышкой на рисунке):
   число панелей (N) – для данных ферм равно 4;
   длина панелей (a) – задаётся одинаковая длина для каждой из панелей фермы;
   ввод высот узлов нижнего пояса ($h1$) – все значения «0»;
   ввод высот стоек ($h2$) – задать пять значений высот вертикальных стержней слева направо;
   раскосы – задать направления наклона раскосов, нажимая на них на рисунке;
   опоры – задать номер узла, закреплённого шарнирно-неподвижно (A) и шарнирно-подвижно (B) (нумерация узлов фермы по нижнему поясу слева направо от 1 до 5, по верхнему поясу слева направо от 6 до 10);
   число нагрузок (Np) – 3;
   угол B – в данных вариантах 90^0 (реакция опорного стержня направлена вертикально);
   нагрузки – указать номер узла (n), к которому приложена сила, величину силы (P), и угол с положительным направлением оси *x* (откладывать против часовой стрелки; если брать значение со знаком «-», угол будет отложен по часовой стрелке).

Получить ответ, нажимая на «**Solve**».

3. В файле «FERMA (текстовый документ)» находятся исходные данные для рассчитываемой фермы и результаты счета. Эти данные распечатать и приложить к РГР.
4. В файле «Truss (JPEG – рисунок)» сохраняется рисунок рассчитываемой фермы.

Примечание: программу для проверки полученных результатов можно скачать на сайте http://vuz.exponenta.ru/ **(Download $\longrightarrow$ Образование $\longrightarrow$ Расчет плоской статически определимой балочной фермы),** нажав на «exe, Delphi».

Скачанный файл «ferm06» перебросить в память компьютера. При запуске при появлении окошка information «Нет файла tm.kod!» нажать «Ok».

Далее ввод данных аналогично изложенному выше.

Расчетно-графическая работа «Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы»

Введение

В расчетно-графической работе рассматривается динамика механической системы. В задании при определении скорости груза и его ускорения используется теорема об изменении кинетической энергии системы.

При чтении текста задания учесть следующее. Во всех вариантах рассматриваются твердые недеформируемые тела с учетом сил тяжести этих тел. Рисунки условий задач выполнены схематично, без соблюдения масштаба длин и углов, на них все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными. Нити невесомые и нерастяжимые, качение блоков и колес происходит без проскальзывания, трения в шарнирах нет, сопротивление воздуха не учитывается.

Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью, поэтому в ряде случаев промежуточные расчёты опускаются. Но при выполнении расчетно-графической работы все преобразования и числовые расчёты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

Решение типового варианта

Дано: механизм, состоящий из груза A, блока B (больший радиус R, меньший r, радиус инерции i) и цилиндра C, установлен на призме D, находящейся на горизонтальной плоскости. Блок B (рис. 0, 1, 3, 4, 5, 7) или цилиндр C (рис. 2, 6, 8, 9) прикреплён к призме на оси. Призма закреплена на плоскости. Механизм из состояния покоя под действием сил тяжести пришёл в движение. Груз A движется по шероховатой поверхности с коэффициентом трения f (кроме рис. 0 – 2), качение цилиндра (блока) происходит без проскальзывания, коэффициент трения качения равен k.

Какую скорость и ускорение приобретёт груз A, пройдя расстояние s?

m_A = 50 кг, m_B = 80 кг, m_C = 120 кг, m_D = 210 кг, R/r = 3, i/r = 1.5, k/r = 0.2, f = 0.1, α = 75°, s = 1.2 м (рис. 6п).

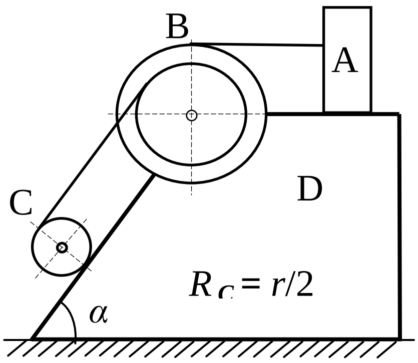


Рис. 6п. Условие задачи

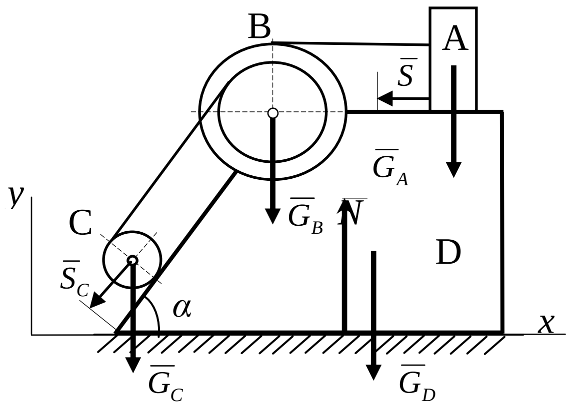


Рис. 7п. Внешние силы системы тел A, B, C и D

Решение. Для нахождения скорости груза A применим теорему об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Для рассматриваемой системы, состоящей из твёрдых тел, соединённых нерастяжимыми нитями, работа внутренних сил равна нулю: $\sum A_k^i = 0$. Так как в начальном положении всё находилось в покое, то начальная кинетическая энергия системы T_0 = 0. Конечная кинетическая энергия T, которую получила система после того, как груз A переместился на расстояние s, состоит из трёх слагаемых

$$T = T_A + T_B + T_C.$$

Груз A совершает поступательное движение, следовательно, его кинетическая энергия равна ($v = v_A$ – искомая скорость)

$$T_A = \frac{m_A}{2} v^2.$$

Блок B вращается относительно неподвижной оси. В этом случае кинетическая энергия

$$T_B = \frac{J_B \omega_B^2}{2},$$

где осевой момент инерции блока вычисляется через радиус инерции $J_B = i^2 m_B$.

Линейная скорость внешнего обода блока совпадает со скоростью груза v, так как обод связан нерастяжимой нитью с грузом. При этом угловая скорость блока определяется формулой кинематики $\omega_B = v / R$. Тогда

$$T_B = \frac{m_B}{2}\frac{i^2}{R^2}v^2.$$

Цилиндр C совершает плоское движение, его кинетическая энергия

$$T_C = \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2},$$

где v_C – скорость центра цилиндра, J_C – момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через его центр

$$J_C = \frac{m_C R_C^2}{2} = \frac{m_C (r/2)^2}{2} = \frac{m_C r^2}{8}.$$

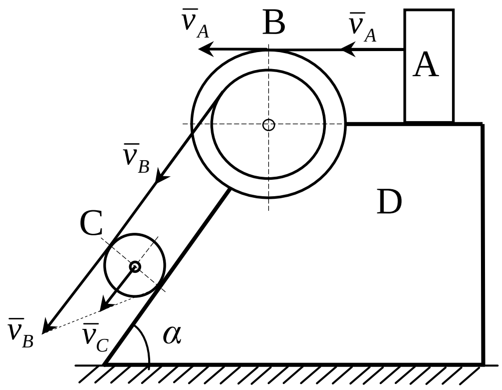


Рис. 8п. К определению кинематических соотношений

Выразим v_C и ω_C через v (рис. 8п). Точки внутреннего обода блока имеют линейную скорость $\omega_B r = (r/R)v$. Цилиндр катится без проскальзывания, поэтому точка его соприкосновения с наклонной плоскостью является мгновенным центром скоростей тела, через неё проходит мгновенная ось вращения цилиндра C. Тогда его угловая скорость вращения

$$\omega_C = \frac{(r/R)v}{2R_C} = \frac{(r/R)v}{2(r/2)} = \frac{v}{R}.$$

Соответственно скорость центра цилиндра C

$$v_C = \omega_C R_C = \frac{v}{R}\frac{r}{2} = \frac{r}{2R}v.$$

В результате кинетическую энергию цилиндра C можно выразить через скорость груза A

$$T_C = \frac{m_C}{2}\frac{r^2}{4R^2}v^2 + \frac{m_C r^2}{2\cdot 8}\frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{16}m_C\frac{r^2}{R^2}v^2.$$

Кинетическая энергия системы трёх тел примет вид

$$T = T_A + T_B + T_C = \frac{v^2}{2}\left(m_A + m_B\frac{i^2}{R^2} + \frac{3}{8}m_C\frac{r^2}{R^2}\right).$$

Определим сумму работ всех внешних сил системы (рис. 9п). Реакции опор $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_C$ работы не совершают, так как они направлены перпендикулярно направлению смещения точек, к которым эти реакции приложены. Работа силы тяжести $\vec{G}_A$ равна нулю, так как отсутствует смещение груза A по вертикали. Реакции оси $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$ и вес $\vec{G}_B$ приложены к неподвижной точке крепления блока B, поэтому их работа также равна нулю. Сила сцепления $\vec{F}_{сц}$ цилиндра С приложена к мгновенному центру скоростей (по определению – неподвижная точка в данный момент времени), следовательно, её работа равна нулю. Итак,

$$\sum A_k^e = A(\vec{F}_{тр}) + A(\vec{G}_C) + A(M_{тр}).$$

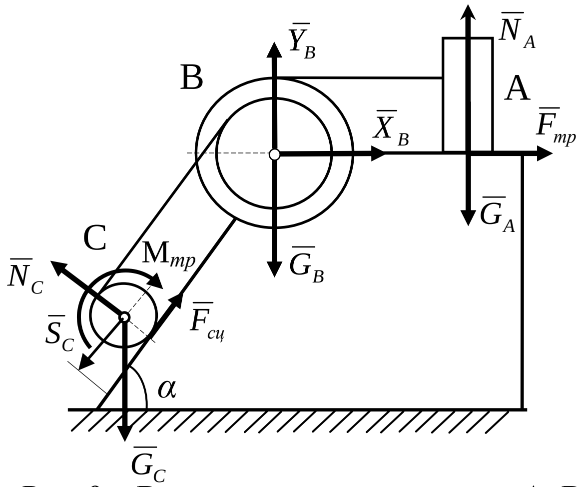


Рис. 9п. Внешние силы системы тел А, В и С

В общем случае $F_{тр}= fN$, $M_{тр}= kN$, где N – соответствующая нормальная реакция (если тело находится на горизонтальной плоскости, то N равно весу этого тела, а если на наклонной, то N равно весу, умноженному на косинус угла наклонной плоскости с горизонталью). Следовательно,

$$F_{тр} = fG_A = f \cdot m_A g, \quad M_{тр} = k \cdot m_C g \cos\alpha.$$

Так как $v_C = \dot{s}_C$, $v = \dot{s}_A = \dot{s}$, $\omega_C = \dot{\varphi}_C$, то интегрируя кинематические соотношения $\omega_C = v/R$, $v_C = (r/2R)v$ при нулевых начальных условиях, получим

$$\varphi_C = \frac{s}{R}, \quad s_C = \frac{r}{2R}s.$$

В результате сумма работ внешних сил выражается через s

$$\sum A_k^e = -F_{тр}s + G_C s_C \sin\alpha - M_{тр}\varphi_C =$$

$$= g\left(-m_A f + m_C \frac{r}{2R}\sin\alpha - m_C \frac{k}{R}\cos\alpha\right)\cdot s.$$

Приравняем кинетическую энергию T сумме работ внешних сил

$$\frac{v^2}{2}\left(m_A + m_B \frac{i^2}{R^2} + \frac{3}{8}m_C \frac{r^2}{R^2}\right) = g\left(-m_A f + m_C \frac{r}{2R}\sin\alpha - m_C \frac{k}{R}\cos\alpha\right)\cdot s.$$

Подставим числовые значения

$$\frac{v^2}{2}\cdot 75 = g\cdot 12.25\cdot s, \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{9.81\cdot 12.25\cdot 1.2}{37.5} = 3.84, \quad v = 1.96 \text{ (м/с)}.$$

Определим ускорение a груза А. Дифференцируя по времени равенство $(v^2/2)\cdot 75 = g\cdot 12.25\cdot s$, с учётом $\dot{s} = v$, $\dot{v} = a$, получим

$$\frac{1}{2}\cdot 2v\cdot a\cdot 75 = g\cdot 12.25\cdot v, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{9.81\cdot 12.25}{75} = 1.6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Варианты типовых расчетов

К заданию даётся 10 рисунков и таблица, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по последней цифре номера своей зачётной книжки, а номер условия в таблице – по предпоследней. Например, если номер зачётной книжки оканчивается числом 57, то берутся рис.7 и условие №5 из таблицы для каждой из задач. Рисунки даны без соблюдения масштаба, на них все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными.

Задание выполняется на листах формата А4. Вначале выполняется чертёж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). Чертёж выполняется с учётом условий решаемого варианта задачи и должен быть аккуратным и наглядным; на нём все углы, действующие силы и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.

Таблица

Предпоследняя цифра шифра зачётной книжки

Пред-посл. цифра шифра	m_A кг	m_B кг	m_C кг	m_D кг	$\frac{R}{r}$	$\frac{i}{r}$	$\frac{k}{r}$	f	$\bar{s}$ град	s м
0	46	54	90	200	2.0	1.0	0.05	0.1	15	1.1
1	47	53	10	190	2.1	1.1	0.06	0.05	30	0.2
2	44	56	20	180	2.2	1.2	0.07	0.06	45	0.3
3	42	58	30	170	2.3	1.3	0.09	0.08	60	0.4
4	48	52	40	160	2.4	1.4	0.08	0.09	75	0.5
5	41	59	50	150	1.5	1.5	0.06	0.05	15	0.6
6	49	51	40	140	2.6	1.6	0.04	0.09	30	0.7
7	43	57	70	130	2.7	1.7	0.03	0.04	45	0.8
8	40	60	30	120	2.8	1.8	0.02	0.07	60	0.9
9	45	55	90	110	2.9	1.9	0.01	0.08	75	1.0

Варианты рисунков (последняя цифра шифра)

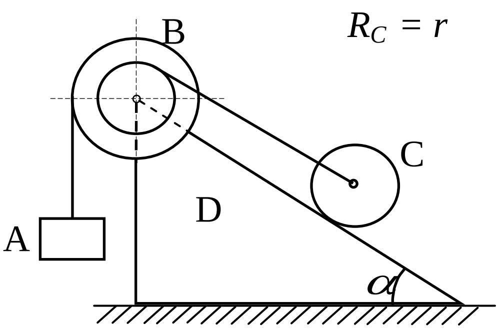


Рис. 0

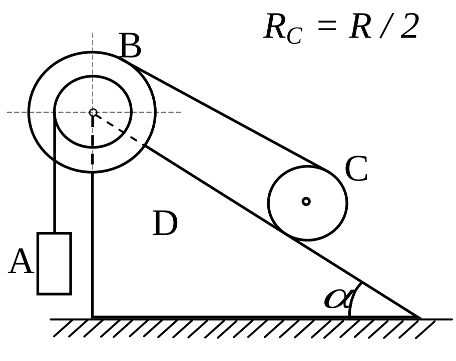


Рис. 1

$R_C = R + r$

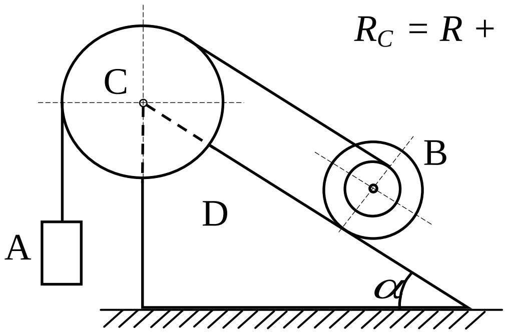


Рис. 2

$R_C = r$

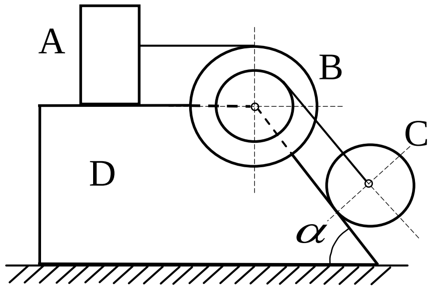


Рис. 3

$R_C = R/2$

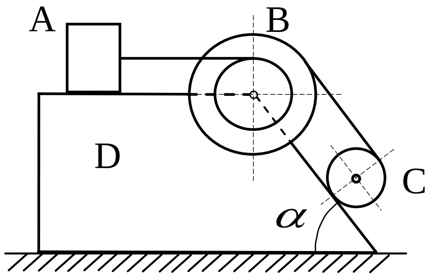


Рис. 4

$R_C = r$

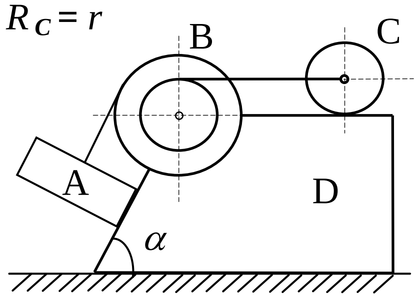


Рис. 5

$R_C = R + r$

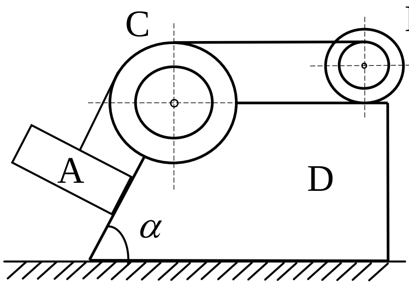


Рис. 6

$R_C = R/2$

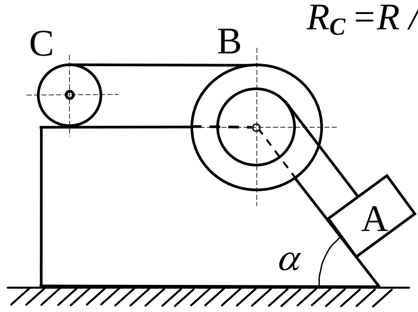


Рис. 7

$R_C = R - r$

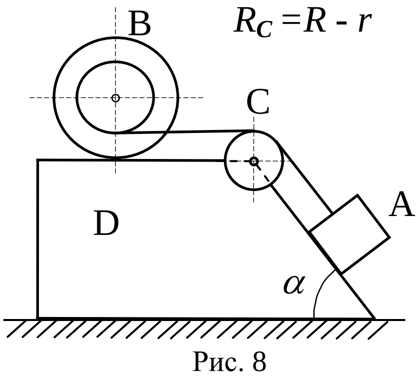


Рис. 8

$\mathbf{R_C = R + r}$

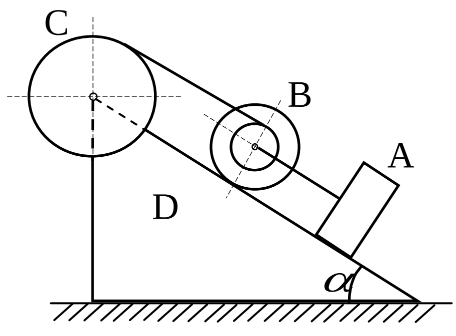


Рис. 9

Статика

Предмет механики.

Механика – это наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел. Круг проблем, рассматриваемых в механике, очень велик и с развитием этой науки в ней появился целый ряд самостоятельных областей, связанных с изучением механики твердых тел, жидкостей и газов. К этим областям относятся теория упругости, теория пластичности, гидромеханика, аэромеханика, газовая динамика и ряд разделов так называемой прикладной механики, в частности: сопротивление материалов, статика сооружений, теория механизмов и машин, гидравлика, а также многие специальные инженерные дисциплины. Однако во всех этих областях используют многие понятия и методы, общие для всех областей механики. Рассмотрение этих общих понятий, законов и методов и составляет ***предмет теоретической механики***.

Статика, кинематика, динамика – разделы механики.

Теоретическая механика делится на три части: статику, кинематику и динамику.

Статика - это раздел теоретической механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Кинематика – это раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с силами, определяющими это движение.

Динамика – раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве в зависимости от действующих на них сил.

Предмет статики

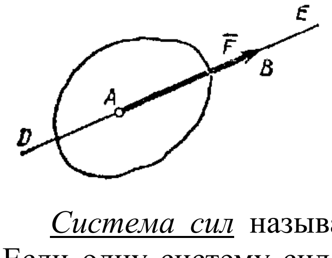
Статика - это раздел теоретической механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил, т.е. это раздел теоретической механики, в котором рассматриваются задачи на равновесие систем сил. Под *равновесием* понимается состояния покоя по отношению к другим телам, например к земле.

Материальное тело, размеры которого в рассматриваемых конкретных условиях можно не учитывать, называют *материальной точкой.*

Системой материальных точек (или механической системой) называется такая совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависят от положения и движения других точек этой системы.

Абсолютное твердое тело называется тело, расстояния между каждыми двумя точками которого остаются неизменными.

Сила – мера механического взаимодействия тел. Сила векторная величина, характеризуется тремя элементами: числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения. Ед. измерения – ньютон, $1H = 1\frac{кг \cdot м}{c^2}$, 1кН (килоньютон)= 10^3 Н.



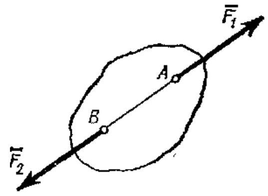
Силу, как и все другие векторные величины, будем обозначать буквой с чертой над нею (например, $\overline{F}$), а модуль силы — символом $|\overline{F}| = F$, точка А является точкой приложения силы. Прямая DE, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы.

Система сил называется совокупность нескольких сил, действующих на данное тело. Если одну систему сил, действующих на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются *эквивалентными.* Сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется *равнодействующей* данной системы сил. Сила, равная равнодействующей по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется <u>*уравновешивающей*</u> силой.

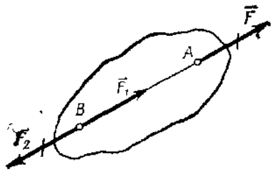
Силы, действующие на данное тело (или систему тел), можно разделить на внешние и внутренние. <u>*Внешними*</u> называются силы, которые действуют на это тело (или на тела системы) со стороны других тел, а <u>*внутренними*</u> — силы, с которыми части данного тела действуют друг на друга.

1. Аксиомы (законы) статики

1) *Аксиома инерции*. Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.

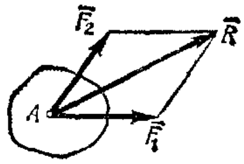


2) *Аксиома равновесия двух сил*. Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, будут уравновешены тогда и только тогда, когда они равны по модулю ($F_1 = F_2$), действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны ($\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$).



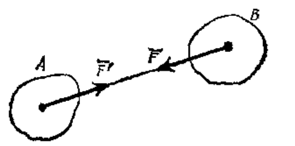
3) *Аксиома присоединения и исключения уравновешивающихся сил*. Действие системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или отнять уравновешенную систему сил.

Следствие. Действие силы на абсолютно твёрдое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия. Т.е. сила, приложенная к абсолютно твёрдому телу – скользящий вектор.



4) *Аксиома параллелограмма сил*. Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах. $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$;

$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$, ($\alpha$ – угол между векторами сил).



5) А*ксиома равенства действия и противодействия (3-й закон Ньютона)*. Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

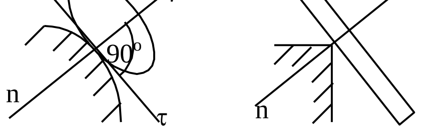
$F = F'$, $\overline{F} = -\overline{F'}$

6) П*ринцип отвердевания*. Равновесие сил, приложенных к деформирующемуся телу, сохраняется при его затвердевании (условия равновесия являются здесь необходимыми, но не достаточными).

2. Связи и их реакции. Принцип освобождаемости от связей

Тело называется <u>*свободным*</u>, если его перемещения ничем не ограничены. Тело, перемещение которого ограничено другими телами, называется <u>*несвободным*</u>. Тела, ограничивающие перемещения данного тела, называются <u>*связями*</u>. Силы, с которыми связи действуют на данное тело, называются <u>*реакциями связей*</u>.

<u>*Принцип освобождаемости*</u>: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить их реакциями, приложенными к телу.

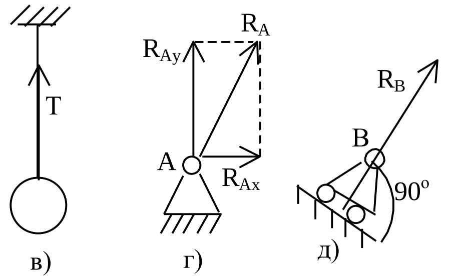


а) б)

<u>*Основные типы связей*</u>:

а) опора на идеально гладкую поверхность – реакция поверхности направлена по нормали к ней, т.е. перпендикулярно касательной – нормальная реакция;

б) одна из соприкасающихся



в) г) д)

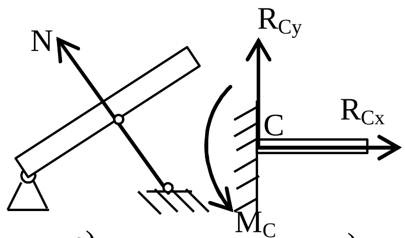
поверхностей является точкой (угол), реакция направлена по нормали к другой поверхности;

в) нить – реакция направлена вдоль нити к точке подвеса;

г) цилиндрический шарнир (шарнирно-неподвижная опора) – реакция может иметь любое направление в плоскости, при решении задач заменяется двумя взаимно перпендикулярными составляющими;

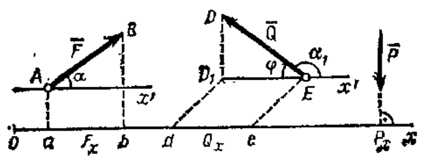
д) цилиндрическая шарнирно-подвижная опора (шарнир на катках) – реакция направлена перпендикулярно опорной плоскости;

е) невесомый стержень (обязательно невесомый) – реакция направлена вдоль стержня;



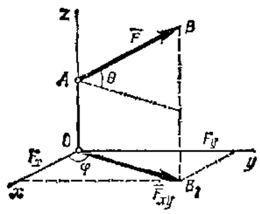
ж) жёсткая заделка (заделанная в стену балка) – возникает произвольно направленная реакция – сила и реактивный момент, также неизвестный по направлению. Реакция раскладывается на две составляющие.

3. Проекция силы на ось и плоскость



Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый, проекция положительна, если тупой — отрицательна, а если сила перпендикулярна оси, ее проекция на ось равна нулю.

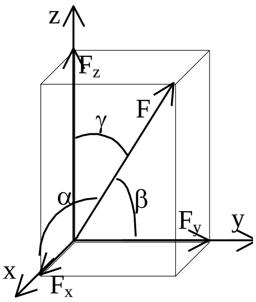
$$F_x = F\cos\alpha,\ Q_x = Q\cos\alpha_1 = -Q\cos\varphi,\ P_x = 0.$$



Проекцией силы $\overline{F}$ на плоскость Oxy называется вектор $\overline{F}_{xy}$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\overline{F}$ на эту плоскость. $F_{xy} = F\cos\theta$.

$$F_x = F_{xy}\cos\varphi = F\cos\theta\cos\varphi,\ F_y = F_{xy}\sin\varphi = F\cos\theta\sin\varphi,$$

Силы можно задавать не только при помощи векторов, но и аналитический, с помощью проекций силы на координатные оси. Пользуемся правой системой координат, т.е. такой, в которой кратчайшее совмещение оси *Ox* с *Oy* происходит, если смотреть с положительного конца оси *Oz*, против хода часовой стрелки.



Для пространственной системы: $\vec{F} = F_x\cdot\vec{i} + F_y\cdot\vec{j} + F_z\cdot\vec{k}$,

$F_x = F\cos\alpha;\ F_y = F\cos\beta;\ F_z = F\cos\gamma;$

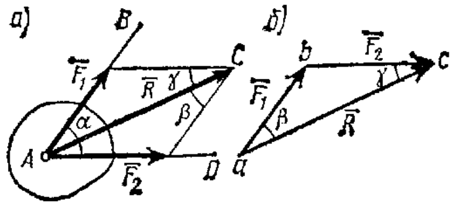
$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}};$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{F_x}{F};\ \cos\beta = \frac{F_y}{F};\ \cos\gamma = \frac{F_z}{F}}.$$

4. Сложение сил

Геометрический способ сложения сил

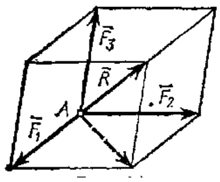
1. ***Сложение двух сил.***



Геометрическая сумма $\overline{R}$ двух сил F_1 и F_2 находится по правилу параллелограмма или построением силового треугольника изображающего одну из половин этого параллелограмма.

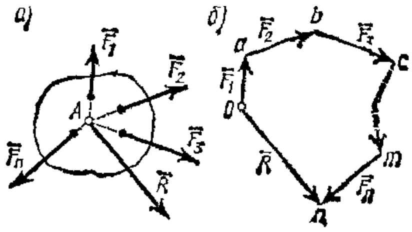
$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$, $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$

2. Сложение трех сил, не лежащих в одной плоскости.



Геометрическая сумма $\overline{R}$ трех сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, не лежащих в одной плоскости, изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (правило параллелепипеда). В справедливости этого убеждаемся, применяя последовательно правило параллелограмма.

3. *Сложение системы сил.*



Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, …, $\overline{F_n}$, откладываем от произвольной точки O вектор $\overline{Oa}$, изображающий в выбранном масштабе силу F_1, от точки a — вектор $\overline{ab}$ изображающий силу $\overline{F_2}$, от точки b — вектор $\overline{bc}$, изображающий силу $\overline{F_3}$, и т. д.; от конца m предпоследнего вектора откладываем вектор $\overline{mn}$, изображающий $\overline{F_n}$. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\overline{On} = \overline{R}$ изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил: $\overline{R} = \sum \overline{F}_k$.

Аналитический способ сложения сил.

Силы можно складывать и аналитически с помощью проекций этих сил на координатные оси. При этом проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых на ту же ось. $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ -> $R_x=\sum F_{ix}$; $R_y=\sum F_{iy}$; $R_z=\sum F_{iz}$; $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$.

Если силы расположены в одной плоскости, то $R_x=\sum F_{ix}$; $R_y=\sum F_{iy}$; $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$.

5. Равновесие системы сходящихся сил

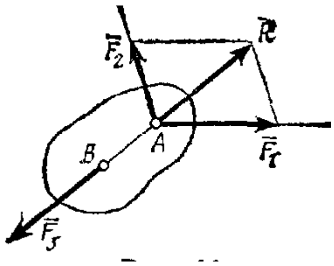
Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке. *Равнодействующая* сходящихся сил равна геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложена в точке их пересечения $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$. Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил были равны нулю

1. *Геометрическое условие равновесия*. Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым.

2. *Аналитические условия равновесия*. $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0 \Leftrightarrow R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$.

Следовательно, для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю. $\sum F_{ix}=0$; $\sum F_{iy}=0$; $\sum F_{iz}=0$. Для плоской системы только первые 2 уравнения.

<u>3. Теорема о трех силах</u>: Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.



Для доказательства теоремы рассмотрим сначала какие-нибудь две из действующих на тело сил, например $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$. Так как по условиям теоремы эти силы лежат в одной плоскости и не параллельны, то их линии действия пересекаются в некоторой точке А. Приложим силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ в этой точке и заменим их равнодействующей R. Тогда на тело будут действовать две силы: сила R и сила $\overline{F_3}$, приложенная в какой-то точке В тела. Если тело при этом находится в равновесии, то силы R и сила $\overline{F_3}$, должны быть направлены по одной прямой, т.е. вдоль АВ. Следовательно, линия действия силы $\overline{F_3}$ тоже проходит через точку А, что и требовалось доказать.

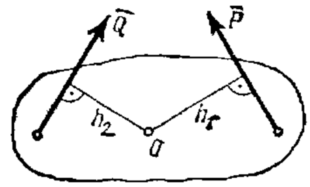
Обратное утверждение места не имеет, т. е. если линии действия трех сил пересекаются в одной точке, то тело под действием этих сил может и не находиться в равновесии; следовательно, теорема выражает только необходимое условие равновесия тела под действием трех сил.

6. Плоская система сил. Алгебраические моменты силы и пары

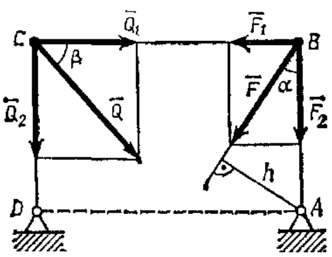
Плоская система сил – это система сила, расположенных как угодно в одной плоскости.

<u>Определение.</u> Алгебраический момент силы $\overline{F}$ относительно центра О равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо, т. е.

$$m_O(\overline{F}) = \pm Fh,$$



где плечо h – это длина перпендикуляра, опущенного из центра O на линию действия данной силы. При этом в правой системе координат, принятой в механике, момент считается положительным, когда сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и отрицательным — когда по ходу часовой стрелки. Так, для сил, изображенных на рис.: $m_O(\overline{P}) = Ph_1$, $m_O(\overline{Q}) = -Qh_2$.



Пример. Найти моменты сил $\overline{F}$ и $\overline{Q}$ относительно точки А, если $AB=a$, $AD=b$ и углы α, β известны.

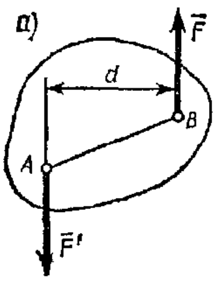
Решение. Опустив из точки А перпендикуляр на линию действия силы $\overline{F}$, найдем плечо $h = a\sin\alpha$; тогда с учетом знака $m_A(\overline{F}) = Fa\sin\alpha.$

Для силы $\overline{Q}$ проще не находить плечо, а разложить $\overline{Q}$ на составляющие $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ для которых плечи будут соответственно равны $AB=a$ и $AD=b$. Тогда с учетом знаков: $m_A(\overline{Q}) = m_A(\overline{Q}_1) + m_A(\overline{Q}_2) = -Q_1a + Q_2b$. Но $Q_1 = Q\cos\beta$, $Q_2 = Q\sin\beta$ окончательно

$$m_A(\overline{Q}) = Q(b\sin\beta - a\cos\beta)$$

Выражение в скобках и является плечом силы $\overline{Q}$, что не сразу видно.

Заметим, что $m_A(\overline{F})$ можно тоже найти, разложив силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$. Тогда $m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F_1}) = (F\sin\alpha)a$, так как $m_A(\overline{F_2}) = 0$.

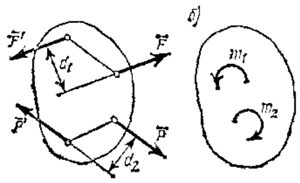


<u>Парой сил</u> называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело. Пара сил не имеет равнодействующей, однако силы пары не уравновешиваются, т.к. они не направлены по одной прямой. Пара сил стремится произвести вращение твердого тела, к которому применена.

Плоскость, проходящая через линии действия пары сил, называется плоскостью действия пары. Расстояние *d* между линиями действия сил пары называется плечом пары.

<u>Алгебраический момент пары</u> равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на её плечо:

$$m = \pm Fd$$



Правило знаков здесь такое же, как для момента силы. Так, для изображенной на рис. пары $\overline{F}$, $\overline{F'}$ момент $m_1 = Fd_1$, а для пары $\overline{P}$, $\overline{P'}$ момент $m_2 = -Pd_2$ Поскольку пара сил характеризуется только ее моментом, то на рисунках пару изображают часто просто дуговой стрелкой, показывающей направление поворота пары (как на рис. б)

7. Уравнения равновесия плоской системы сил

Для плоской системы сил три формы аналитических условий равновесия:

1. **Основная форма условий равновесия**.

$\overline{R} = 0$ => $R_x = 0,\ R_y = 0;\ \overline{M_O} = 0$

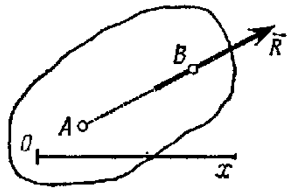
Но $R_x = \sum F_{kx} = 0,\ R_y = \sum F_{ky} = 0,\ \overline{M_O} = \sum m_O(\overline{F_k}) = 0.$

Следовательно, для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

2. Вторая форма условий равновесия: *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров А и В и сумма их проекций на ось Ох, не перпендикулярную прямой АВ, были равны нулю*:

$$\sum m_A(\overline{F_k}) = 0,\ \sum m_B(\overline{F_k}) = 0,\ \sum F_{kx} = 0.$$

Необходимость этих условий очевидна, так как если любое из них не выполняется, то или $\overline{R} \neq 0$, или $M_A \neq 0\,(M_B \neq 0)$ и равновесия не будет. Докажем их достаточность. Если для данной системы сил выполняются только первые два из условий то для нее $M_A = 0$ и $M_B = 0$. Такая система сил иметь равнодействующую $\overline{R}$, одновременно проходящую через точки А и В (рис.). Но по третьему условию должно быть $R_x = \sum F_{kx} = 0$. Так как ось Ох проведена не перпендикулярно к АВ, то последнее условие может быть выполнено, только когда R=0, т. е. когда имеет место равновесие.



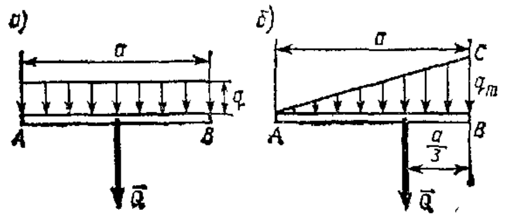
3. **Третья форма условий равновесия (уравнения трех моментов):** *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров А, В и С, не лежащих на одной прямой, были равны нулю:*

$$\sum m_A(\overline{F_k}) = 0,\ \sum m_B(\overline{F_k}) = 0,\ \sum m_C(\overline{F_k}) = 0.$$

Необходимость этих условий, как и в предыдущем случае, очевидна. Достаточность условий следует из того, что если при одновременном выполнении этих условий данная система сил не находилась бы в равновесии, то она должна была бы приводиться к равнодействующей, одновременно проходящей через точки А, В и С, что невозможно, так как эти точки не лежат на одной прямой. Следовательно, при выполнении этих условий имеет место равновесие.

8. Распределенная нагрузка

В инженерных расчетах часто приходится встречаться с нагрузками, распределенными вдоль данной поверхности по тому или иному закону. Рассмотрим некоторые простейшие примеры распределенных сил, лежащих в одной плоскости.



Плоская система распределенных сил характеризуется ее интенсивностью *q*, т. е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. Измеряется интенсивность в ньютонах, деленных на метры (Н/м).

1) *Силы, равномерно распределенные вдоль отрезка прямой* (рис а). Для такой системы сил интенсивность q имеет постоянное значение. При статических расчетах эту систему сил можно заменить равнодействующей $\overline{Q}$. По модулю $Q = aq$. Приложена сила *Q* в середине отрезка *АВ*.

2) *Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по линейному закону (рис. б).*

Примером такой нагрузки могут служить силы давления воды на плотину, имеющие наибольшее значение у дна и падающие до нуля у поверхности воды. Для этих сил интенсивность q является величиной переменной, растущей от нуля до максимального значения q_m. Равнодействующая $\overline{Q}$ таких сил определяется аналогично равнодействующей сил тяжести, действующих на однородную треугольную пластину *АВС*. Так как вес однородной пластины пропорционален ее площади, то, по модулю,

$$Q = 0{,}5aq_m$$

Приложена сила *Q* на расстоянии *a/3* от стороны *ВС* треугольника *АВС*.

9. Трение скольжения

При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает *сила трения* $F_{тр}$ (или сила сцепления), которая может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, называемого *предельной силой трения*.

Приложенная к телу сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

Предельная сила трения численно равна произведению статического коэффициента трения на нормальную реакцию:

$$F_{пр} = f_0 N$$

Статический коэффициент трения f_0 — величина безразмерная; он определяется опытным путем. Значение предельной силы трения не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

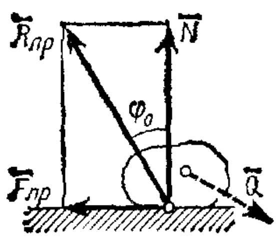
При равновесии $F_{тр} \le F_{пр}$ или $F_{тр} \le f_0 N$

Равновесие, имеющее место, когда $F_{тр} = F_{пр}$, будем называть *предельным равновесием.*

При движении сила трения направлена в сторону, противоположную движению, и равна произведению динамического коэффициента трения на нормальное давление:

$$F_{тр} = f\,N$$

Динамический коэффициент трения скольжения f также является величиной безразмерной и определяется опытным путем.



Реакция реальной (шероховатой) связи слагается из двух составляющих: из нормальной реакции $\overline{N}$ и перпендикулярной ей силы трения $\overline{F_{тр}}$. Следовательно, полная реакция $\overline{R}$ будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до $\overline{F_{пр}}$ сила $\overline{R}$ изменяется от $\overline{N}$ до $\overline{R_{пр}}$, а ее угол с нормалью растет от нуля до некоторого предельного значения φ_0.(рис.). Наибольший угол φ_0 называется *углом трения*. Из чертежа видно, что

$$tg\varphi_0 = F_{пр} / N$$

Так как $F_{пр} = f_0 N$, то отсюда находим следующую связь между углом трения и коэффициентом трения: $tg\varphi_0 = f_0$.

При аналитическом решении задач с учетом силы трения реакцию шероховатой связи изображают двумя ее составляющими $\overline{N}$ и $\overline{F_{пр}}$. Затем составляют обычные уравнения равновесия и присоединяют к ним равенство $F_{пр} = f_0 N$ (при движении тела $F_{тр} = f\,N$) из этой системы и определяют искомые величины.

10. Трение нити о цилиндрическую поверхность

Рассмотрим нить, переброшенную через цилиндрическую поверхность и касающуюся этой поверхности по дуге *АВ*, которой соответствует угол *α*. Если к одному концу нити приложена сила $\overline{P}$, то уравновешивающая её сила $\overline{Q}$, приложенная к другому концу нити определяется формулой Эйлера

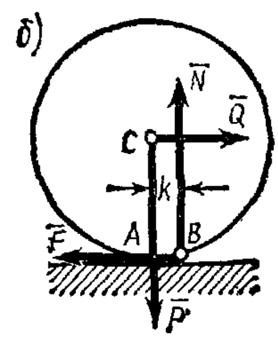
$$Q = Pe^{-f_0\alpha},$$

где f_0 - коэффициент трения нити о цилиндрическую поверхность. При отсутствии трения $f_0 = 0$ и $Q = P$.

Из формулы видно, что увеличивая угол *α*, т.е. навивая нить, можно значительно уменьшить силу $\overline{Q}$, необходимую для уравновешивания силы $\overline{P}$. Эта же формула определяет отношение натяжений *P* ведущей и *Q* ведомой частей ремня, равномерно вращающего шкив, если проскальзывание ремня по шкиву отсутствует.

11. Трения качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.



Фактически вследствие деформаций тел касание их происходит вдоль некоторой площадки *АВ* (рис. б). При действии силы $\overline{Q}$ интенсивность давления у края *А* убывает, а у края *В* возрастает. В результате реакция $\overline{N}$ оказывается смещенной в сторону действия силы $\overline{Q}$. С увеличением $\overline{Q}$ это смещение растет до некоторой предельной величины k. Таким образом в предельном положении на каток будут действовать пара $\overline{Q_{np}}$, $\overline{F}$ с моментом $Q_{np}R$ и уравновешивающая ее пара $\overline{N}$, $\overline{P}$ с моментом Nk. Из равенства моментов находим

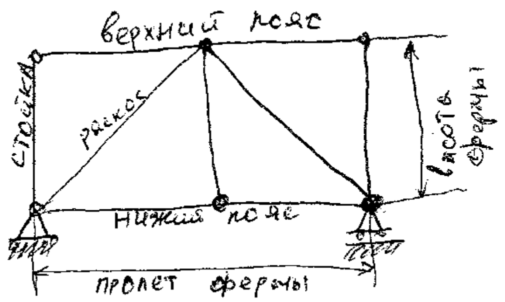
$$Q_{np} = (k/R)N.$$

Величина k называется коэффициентом трения качения. Измеряют величину k обычно в сантиметрах. Отношение k/R для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0. Этим объясняется то, что в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т. п.).

12. Плоские фермы. Леммы о нулевых стержнях

Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферму называют *плоской*. Места соединения стержней фермы называют *узлами*.

Стержни плоской фермы, расположенные по верхнему контуру, образуют *верхний пояс*, а расположенные по нижнему контуру – *нижний пояс фермы*. Вертикальные стержни называют



стойками, а наклонные – *раскосами*. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней (по сравнению с внешними нагрузками) пренебрегают или распределяют веса стержней по узлам. Тогда на каждый из стержней фермы будут действовать две силы, приложенные к его концам, которые при равновесии могут быть направлены только вдоль стержня. Следовательно, можно считать, что стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие.

В жестких плоских фермах число стержней k и число узлов n связаны соотношением

$$k = 2n - 3$$

При меньшем числе стержней ферма не будет жесткой, а при большем числе она будет статически неопределимой.

Леммы о нулевых стержнях

Усилия в отдельных стержнях загруженной фермы могут оказаться равными нулю. Такие стержни принято называть *нулевыми*.

Лемма 1. Если в ненагруженном узле плоской фермы сходятся два стержня, то усилия в этих стержнях равны нулю.

Лемма 2. Если в ненагруженном узле плоской фермы сходятся три стержня, из которых два расположены на одной прямой, то усилия в третьем стержне равно нулю. Усилия в первых двух стержнях равны между собой.

Лемма 3. Если в узле плоской фермы сходятся два стержня и к узлу приложена внешняя сила, линия действия которой совпадает с осью одного из стержней, то усилия в этом стержне равно по модулю приложенной силе, а усилия в другом стержне равно нулю.

13. Расчет плоских ферм.

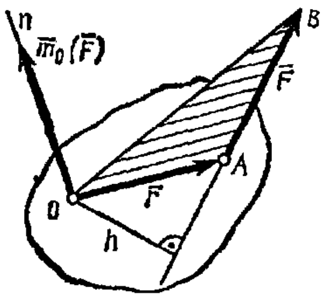
Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях. Причем опорные реакции можно найти обычными методами статики, рассматривая ферму как твердое тело. Усилия в стержнях определяются с помощью метода вырезания узлов или метода Риттера (сечений).

1. Метод вырезания узлов. При этом методе мысленно вырезают узлы фермы и прикладывают к ним соответствующие внешние силы и реакции стержней и составляют

уравнения равновесия сходящихся сил, приложенных к каждому узлу ($\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$). Условно предполагают, что все стержни растянуты, т.е реакция стержней направлены от узлов. Если в результате вычислений получат ответ со знаком минус, то это значит, что соответствующий стержень сжат. Последовательность рассмотрения узлов определяется обычно условием, что число неизвестных сил, приложенных к узлу, не должно превышать числа уравнений равновесия, т.е. двух. Если вычисления правильные, то многоугольники сил, приложенных к узлам, должны быть замкнутыми.

2. <u>Метод Риттера (сечений).</u> Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности для проверочных расчетов. Идея метода состоит в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящим через три стержня, в которых (или в одном из которых) требуется определить усилия, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов. Затем составляют уравнения моментов сил, действующих на рассматриваемую часть фермы, относительно точки пересечения двух рассеченных стержней, усилия в которых на данном этапе не определяются. Это точка пересечения называется точкой Риттера. Если точка Риттера находится в бесконечности, т.е. стержни параллельны, то составляют уравнение проекций сил, приложенных к рассматриваемой части фермы, на ось перпендикулярную этим параллельным стержням.

14. Момент силы относительно центра (как вектор)



Рассмотрим силу $\overline{F}$, приложенную к телу в точке *A*. Из некоторого центра *O* опустим перпендикуляр на линию действия силы $\overline{F}$, длину h этого перпендикуляра называют плечом силы $\overline{F}$ относительно центра *O;* $\overline{r}$ это радиус–вектор точки *A*, проведенный из точки *O*.

<u>Определение.</u> Моментом силы $\overline{F}$ относительно центра O называется приложенный в центре O вектор $\overline{m}_0(\overline{F})$, модуль которого равен произведению модуля F силы на ее плечо h и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и силу, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки.

Момент силы характеризует вращательный эффект силы. Согласно этому определению $\left|\overline{m}_0(\overline{F})\right| = Fh = 2S_{OAB}$, т.к. $S_{OAB} = AB\dfrac{h}{2} = \dfrac{Fh}{2}$. Измеряется момент силы в ньютон·метрах (Н·м).

Найдем формулу, выражающую вектор $\overline{m}_0(\overline{F})$. Для этого рассмотрим векторное произведение $\overline{OA}\times\overline{F}$ векторов $\overline{OA}$ и $\overline{F}$.

$$\left|\overline{OA}\times\overline{F}\right| = 2S_{OAB} = \left|\overline{m}_0(\overline{F})\right|.$$

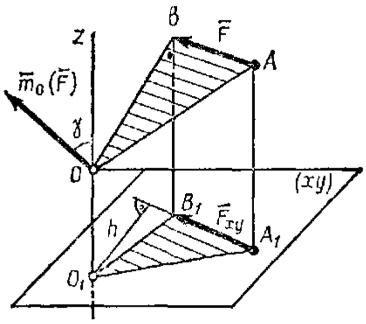
Направлен вектор $\overline{OA}\times\overline{F}$ перпендикулярно плоскости OAB в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\overline{OA}$ с $\overline{F}$ (если их отложить от одной точки) видно происходящим против хода часовой стрелки, т. е. так же, как вектор $\overline{m}_0(\overline{F})$. Следовательно, векторы $\overline{OA}\times\overline{F}$ и $\overline{m}_0(\overline{F})$ совпадают и по модулю, и по направлению, и, как легко видеть, по размерности, т. е. выражают одну и ту же величину. Отсюда

$$\overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{OA}\times\overline{F} \text{ или } \overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{r}\times\overline{F}.$$

Таким образом, момент силы $\overline{F}$ относительно центра O равен векторному произведению радиуса-вектора $\overline{r} = \overline{OA}$, проведенного из центра O в точку A, где приложена сила, на саму силу.

Свойства момента силы: 1) момент силы относительно центра не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия; 2) момент силы относительно центра O равен нулю или когда сила равна нулю, или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).

15. Момент силы относительно оси



Проекция вектора $\overline{m}_O(\overline{F})$, т. е. момента силы $\overline{F}$ относительно центра O, на какую-нибудь ось z, проходящую через этот центр, называется моментом силы $\overline{F}$ относительно оси z, т. е.

$$m_z(\overline{F}) = \left|\overline{m_O}(\overline{F})\right| \cos\gamma$$

где $m_z(\overline{F})$ — момент силы $\overline{F}$ относительно оси z; γ — угол между вектором $\overline{m}_O(\overline{F})$ и осью z. Из определения следует, что $m_z(\overline{F})$ является величиной алгебраической.

Проведем через произвольную точку O_1 оси z (рис.) плоскость *xy*, перпендикулярную этой оси, и спроектируем ΔOAB на эту плоскость. Так как вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$ перпендикулярен плоскости *OAB,* а ось z перпендикулярна плоскости $O_1A_1B_1$ то угол γ, как угол между нормалями к названным плоскостям, является углом между этими плоскостями. Т.е. $S_{O_1A_1B_1} = S_{OAB}\cos\gamma$ и

$$2S_{O_1A_1B_1} = 2S_{OAB}\cos\gamma = \left|\overline{m}_O(\overline{F})\right|\cos\gamma = m_z(\overline{F})$$

С другой стороны, $2S_{O_1A_1B_1} = F_{xy}h = \left|m_{O_1}(\overline{F_{xy}})\right|$ следовательно

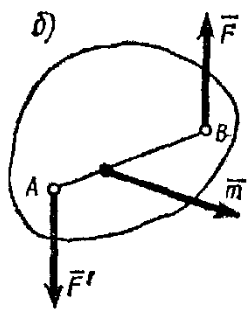
$$m_z(\overline{F}) = \pm F_{xy}h$$

Таким образом, *момент силы $\overline{F}$ относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z, взятому относительно точки O_1 пересечения оси с этой плоскостью.*

Момент силы относительно оси будет иметь знак плюс, когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила $\overline{F_{xy}}$, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак минус — когда по ходу часовой стрелки.

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости (либо сила параллельна оси, либо линия действия силы пересекает ось).

16. Момент пары. Теорема о сложении пар



<u>*Определение.*</u> *Моментом пары сил называется вектор $\overline{m}$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки.* $m = Fd$.

Отсюда, следует, что момент пары равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой силы:

$$\overline{m} = \overline{AB} \times \overline{F} = \overline{m}_A(\overline{F}) \text{ или } \overline{m} = \overline{m}_B(\overline{F'})$$

<u>Теорема о сложении пар.</u> Система пар, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна одной паре с моментом, равным геометрической сумме моментов слагаемых пар.

Доказательство теоремы очевидно, так как по определению момент пары сил – это вектор, а векторы можно складывать:

$$\overline{M} = \overline{m_1} + \overline{m_2} + \ldots + \overline{m_n} = \sum \overline{m_k}.$$

Из полученного результата легко найти условие равновесия системы пар, действующих на твердое тело: при равновесии должно быть $\overline{M} = 0$ или $\sum \overline{m_k} = 0$.

17. Теорема об эквивалентности пар, вытекающие свойства пары

<u>Теорема.</u> Две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны друг другу.

Из теоремы следует свойства пары сил:

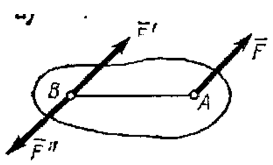
1) *пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно переносить куда угодно в плоскости действия пары,* поворачивать ее плечо на любой угол;

2) *у данной пары, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно произвольно менять модули сил или длину плеча, сохраняя неизменным ее момент.*

3) *пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно перенести из данной плоскости в любую другую плоскость, параллельную данной.*

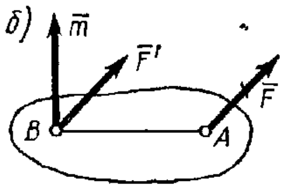
Таким образом, вектор момента пары сил является свободным вектором.

18. Теорема Пуансо о параллельном переносе силы.



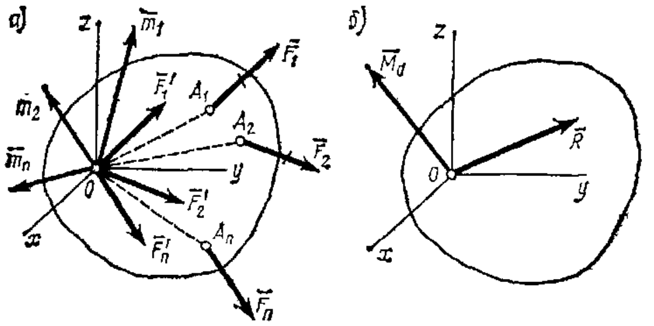
<u>Теорема.</u> Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого ею действия, переносить из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки куда сила переносится.

<u>Доказательство:</u>



Пусть на твердое тело действует сила $\overline{F}$, приложенная в точке *A*. Действие этой силы не изменяется, если в любой точке *B* тела приложить две уравновешенные силы $\overline{F'}$ **и** $\overline{F''}$, такие, что $\overline{F'} = \overline{F}$, $\overline{F''} = -\overline{F}$. Полученная система трех сил и представляет собой силу $\overline{F'}$, равную $\overline{F}$, но приложенную в точке В, и пару $\overline{F}$, $\overline{F''}$ с моментом $\overline{m} = \overline{m}_B(\overline{F})$.

19. Теорема о приведении системы сил к данному центру



<u>Теорема.</u> Любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру O заменяется одной силой $\overline{R}$, равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения O, и одной парой с моментом $\overline{M}_0$, равным главному моменту системы сил относительно центра O.(рис.б)

Доказательство: Пусть на твердое тело действует произвольная система сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, … $\overline{F_n}$ (рис. а). Выберем какую-нибудь точку *O* за центр приведения и, пользуясь теоремой Пуансо, перенесем все силы в центр *O*, присоединяя при этом соответствующие пары. Тогда на тело будет действовать система сил

$$\overline{F_1'} = \overline{F_1},\ \overline{F_2'} = \overline{F_2},\ \ldots\ \overline{F_n'} = \overline{F_n}, \tag{1}$$

приложенных в центре О, и система пар, моменты которых равны:

$$\overline{m_1} = \overline{m_o}(\overline{F_1}),\ \overline{m_2} = \overline{m_o}(\overline{F_2}),\ \ldots,\ \overline{m_n} = \overline{m_o}(\overline{F_n}). \tag{2}$$

Сходящиеся силы, приложенные в точке *O,* заменяются одной силой $\overline{R}$, приложенной в точке *O*. При этом $\overline{R} = \sum \overline{F'_k}$ или, согласно равенствам (1), $\overline{R} = \sum \overline{F_k}$.

Чтобы сложить все полученные пары, надо сложить векторы моментов этих пар. В результате система пар заменится одной парой, момент которой $\overline{M_O} = \sum \overline{m_k}$ или, согласно равенствам (2), $\overline{M_O} = \sum \overline{m_O}(\overline{F_k})$.

Величина $\overline{R}$, равная геометрической сумме всех сил, называется *главным вектором системы сил*; величина $\overline{M_0}$, равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра О, называется *главным моментом системы сил* относительно этого центра. Теорема доказана.

Заметим, что сила $\overline{R}$ не является здесь равнодействующей данной системы сил, так как заменяет систему сил не одна, а вместе с парой.

Следствие. Две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра, эквивалентны (условия эквивалентности систем сил).

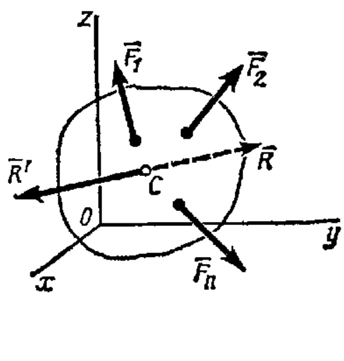
Отметим еще, что значение $\overline{R}$ от выбора центра *O*, очевидно, не зависит. Значение же $\overline{M_0}$ при изменении положения центра *O* может в общем случае изменяться вследствие изменения значений моментов отдельных сил.

20. Условия равновесия системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно центра и оси

Условия равновесия: для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю, т. е. чтобы выполнялись условия $\overline{R} = 0, \overline{M_0} = 0$.

Эти условия являются необходимыми, так как если какое-нибудь из них не выполняется, то система действующих на тело сил приводится или к равнодействующей (когда $\overline{R} \neq 0$), или к паре сил (когда $\overline{M_0} \neq 0$) и, следовательно, не является уравновешенной. Одновременно эти же условия являются и достаточными, потому что при $\overline{R} = 0$ система сил может приводиться только к паре с моментом $\overline{M_0}$, а так как $\overline{M_0} = 0$, то имеет место равновесие.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра O (оси z) равен сумме моментов сил системы относительно того же центра (оси z).



Пусть система сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, … $\overline{F_n}$ приводится к равнодействующей $\overline{R}$, линия действия которой проходит через некоторую точку С. Приложим в этой точке силу $\overline{R'} = -\overline{R}$. Тогда система сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, … $\overline{F_n}$, $\overline{R'}$ будет находиться в равновесии и для нее должно выполняться условие $\overline{M_0} = 0$, т. е. для данных сил (включая силу $\overline{R'}$) должно быть $\sum \overline{m_O}(\overline{F_k}) + \overline{m_O}(\overline{R'}) = 0$. Но так как $\overline{R'} = -\overline{R}$ и обе силы направлены вдоль одной и той же прямой, то $\overline{m_O}(\overline{R'}) = -\overline{m_O}(\overline{R})$. Подставляя это значение $\overline{m_O}(\overline{R'})$ в предыдущее равенство, найдем из него, что

$$\overline{m_O}(\overline{R}) = \sum \overline{m_O}(\overline{F_k}).$$

Проецируя полученное равенство на ось z, проходящую через центр *O*, получим

$$m_z(\overline{F}) = \sum m_z(\overline{F_k})$$

Тем самым теорема доказана. Ею часто бывает удобно пользоваться при вычислении моментов сил.

21. Вычисление главного вектора и главного момента пространственной системы сил

По теореме о приведении системы сил получили $\overline{R} = \sum \overline{F_k}$, $\overline{M_O} = \sum \overline{m_O}(\overline{F_k})$. По теореме Вариньона проекция $\overline{M_O}$ на координатную ось *Ox* $M_x = \sum m_x(\overline{F_k})$. Аналогично находятся M_y и M_Z. Окончательно для определения проекций главного вектора $\overline{R}$ и главного момента $\overline{M_O}$ получим формулы:

$R_x = \sum F_{kx}$, $R_y = \sum F_{ky}$, $R_z = \sum F_{kz}$;

$M_x = \sum m_x(\overline{F_k})$, $M_y = \sum m_y(\overline{F_k})$, $M_z = \sum m_z(\overline{F_k})$.

При этом

$$|\overline{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad |\overline{M_0}| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$\cos(\overline{R}, \overline{i}) = R_x / R \qquad \cos(\overline{M_O}, \overline{i}) = M_x / M_O$$

$$\cos(\overline{R}, \overline{j}) = R_y / R \qquad \cos(\overline{M_O}, \overline{j}) = M_y / M_O$$

$$\cos(\overline{R}, \overline{k}) = R_z / R \qquad \cos(\overline{M_O}, \overline{k}) = M_z / M_O$$

Здесь $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ - единичные векторы (орты), направленные вдоль координатных осей *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно.

22. Уравнения равновесия пространственной системы сил. Случай параллельных сил

Необходимыми и достаточными условиями равновесия любой системы сил являются равенства

$$\overline{R} = 0, \ \overline{M_O} = 0$$

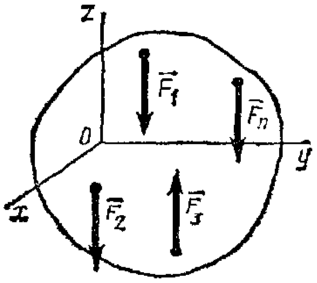
$$|\overline{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0 \Leftrightarrow R_x = 0, \ R_y = 0, \ R_z = 0.$$

$$|\overline{M_O}| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0 \Leftrightarrow M_x = 0, \ M_y = 0, \ M_z = 0.$$

Таким образом, для *равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю, т.е.*

1) $\sum F_{kx} = 0$, 2) $\sum F_{ky} = 0$, 3) $\sum F_{kz} = 0$;

4) $\sum m_x(\overline{F_k})=0$, 5) $\sum m_y(\overline{F_k})=0$, 6) $\sum m_z(\overline{F_k})=0$.



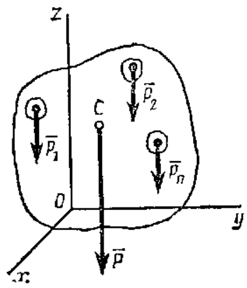
<u>*Случай параллельных сил*</u>. В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, можно выбрать координатные оси так, что ось z будет параллельна силам (рис.). В этом случае $\sum F_{ky}\equiv 0$, $\sum F_{kx}\equiv 0$, $\sum m_z(\overline{F_k})\equiv 0$.

Поэтому, *для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную силам, и суммы их моментов относительно двух других координатных осей были равны нулю.*

$$\sum F_{kz}=0,\ \sum m_x(\overline{F_k})=0,\ \sum m_y(\overline{F_k})=0.$$

23. Центр тяжести твердого тела. Координаты центра тяжести для объёмных тел

На каждую частицу тела, находящегося вблизи земной поверхности, действует направленная вертикально вниз сила, которую называют силой тяжести. Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с земным радиусом, силы тяжести, действующие на частицы тела, можно считать параллельными друг другу и сохраняющими для каждой частицы постоянное значение при любых поворотах тела.



Равнодействующую сил тяжести $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$, …, $\overline{p_n}$, действующих на частицы данного тела, обозначим $\overline{P}$ (рис.). Модуль этой силы называется весом тела и определяется равенством

$$P=\sum p_k .$$

Центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, действующих на частицы данного тела, при любом положении тела в пространстве.

Координаты центра тяжести определяются формулами:

$$x_C=\frac{1}{P}\sum p_k x_k,\ y_C=\frac{1}{P}\sum p_k y_k,\ z_C=\frac{1}{P}\sum p_k z_k,$$

где x_k, y_k, z_k — координаты точек приложения сил тяжести $\overline{p_k}$, действующих на частицы тела.

Отметим в заключение, что согласно определению центр тяжести — это точка геометрическая, она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

<u>Центр тяжести объема</u>. Для однородного тела вес p_k любой его части пропорционален объему v_k этой части: $p_k=\gamma v_k$, а весь P всего тела пропорционален объему V этого тела, т. е. $P=\gamma V$, где γ — вес единицы объема.

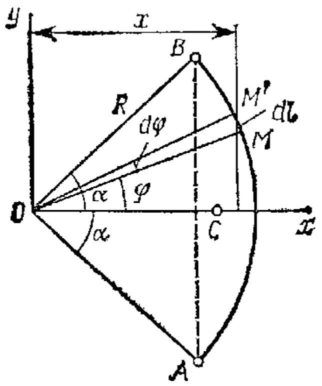
Подставив эти значения P и p_k в формулы для координат цента тяжести, получим

$$x_C=\frac{1}{V}\sum v_k x_k,\ y_C=\frac{1}{V}\sum v_k y_k,\ z_C=\frac{1}{V}\sum v_k z_k \qquad (1)$$

Как видно, положение центра тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы, а от величины γ не зависит. По этой причине точку С, координаты которой определяются формулами (3), называют *центром тяжести объема* V.

24. Координаты центра тяжести линии. Центр тяжести дуги окружности

Формулы для координат *центра тяжести линии* имеют вид:



$$x_C = \frac{1}{L}\sum l_k x_k \text{ , } y_C = \frac{1}{L}\sum l_k x_k \text{ , } z_C = \frac{1}{L}\sum l_k z_k \text{ ,}$$

где L - длина всей линии; l_k - длины ее частей.

Центр тяжести дуги окружности. Рассмотрим дугу AB радиуса R с центральным углом $AOB = 2\alpha$. В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси *Ox*. Найдем координату x_C. Для этого выделим на дуге АВ элемент ММ' длиной $dl = Rd\varphi$, положение которого определяется углом φ. Координата х элемента ММ' будет $x = R\cos\varphi$. Подставляя эти значения х и $d\varphi$ в первую из формул:

$$x_C = \frac{1}{L}\int_A^B x dl = \frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi = 2\frac{R^2}{L}\sin\alpha \text{ ,}$$

где L — длина дуги *АВ*, равная $R2\alpha$. Отсюда окончательно находим, что центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии на расстоянии от центра О, равном

$$x_C = (R\sin\alpha)/\alpha \text{ ,}$$

где угол α измеряется в радианах.

25. Координаты центра тяжести плоской фигуры. Центр тяжести треугольника, сектора круга

Путем аналогичных рассуждений легко найти, что если тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину, то для нее

$$x_C = \frac{1}{S}\sum s_k x_k \text{ , } y_C = \frac{1}{S}\sum s_k y_k \text{ ,} \qquad (2)$$

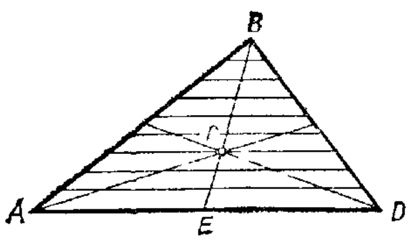
где S - площадь всей пластины; s_k -площади ее частей. Точку, координаты которой определяются формулами (2), называют *центром тяжести площади* S .

<u>Статический моментом площади плоской фигуры относительно оси</u> называется сумма произведений элементарных площадей, входящих в состав плоской фигуры, на алгебраические значения их расстояний до данной оси.

$\sum s_k x_k = S_y$ - статический момент относительно оси *Оу*. $S_y = Sx_C$.

$\sum s_k y_k = S_x$ - статический момент относительно оси *Ох*. $S_x = Sy_C$.

Измеряется статический момент площади плоской фигуры относительно оси в см³.

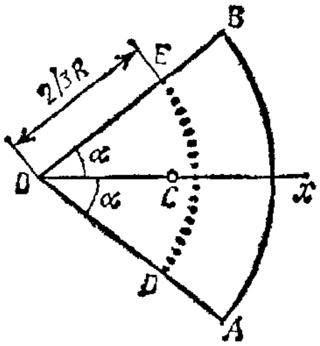


1. *Центр тяжести площади треугольника.*

Разобьем площадь треугольника *ABD* прямыми, параллельными стороне *AD*, на n узких полосок; центры тяжести этих полосок будут лежать на медиане *BE* треугольника. Следовательно, и центр тяжести всего треугольника лежит на этой медиане. Аналогичный результат получается для двух других медиан. Отсюда заключаем, что *центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан.*

$$CE = BE/3.$$

Для прямоугольного треугольника центр тяжести лежит на пересечении отрезков, откладываемых от прямого угла на расстояние 1/3 длины соответствующего катета.

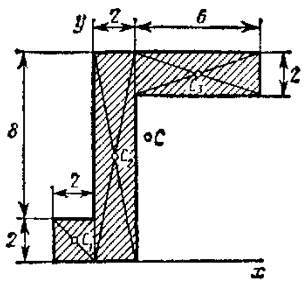


2. *Центр тяжести площади кругового сектора.* Рассмотрим круговой сектор *OAB* радиуса *R* с центральным углом 2α. Разобьем мысленно площадь сектора OAB радиусами, проведенными из центра O, на n секторов. В пределе, при неограниченном увеличении числа n, эти секторы можно рассматривать как плоские треугольники, центры тяжести которых лежат на дуге *DE* радиуса $2R/3$. Следовательно, центр тяжести сектора OAB совпадает с центром тяжести дуги *DE*, т.е. *центр тяжести площади кругового сектора лежит на его оси симметрии на расстоянии от центра O, равном*

$$x_C = \frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}.$$

26. Методы нахождения центра тяжести твёрдых тел.

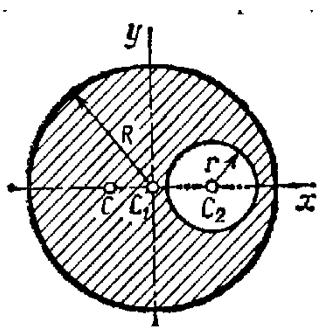
1. <u>*Симметрия.*</u> Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.



2. <u>*Разбиение.*</u> Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно вычислить по формулам:

$$x_C = \frac{x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3}{S},\ y_C = \frac{y_1S_1 + y_2S_2 + y_3S_3}{S},$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$



<u>*3. Дополнение.*</u> Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известные.

$$x_C = \frac{x_1S_1 - x_2S_2}{S},\ y_C = \frac{y_1S_1 - y_2S_2}{S}.$$

$$S = S_1 - S_2$$

Существуют также различные экспериментальные методы определения центра тяжести тел.

<u>Кинематика</u>

1. **Способы задания движения точки** [1, §§36, 37], [2, §§62-65].

1) Векторный: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (задаётся закон изменения радиус-вектора движущейся точки в зависимости от времени *t*).

2) Координатный: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ (задаются законы изменения координат точки в зависимости от времени *t*).

3) Естественный: при этом способе необходимо знать траекторию движения точки, начальное положение на этой траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчёта координаты *s*, закон движения по траектории в виде $s = s(t)$.

2. **Скорость и ускорение точки при векторном способе задания её движения** [1, §§38, 39], [2, §§66, 70].

Скорость точки вычисляется как первая производная по времени от радиус-вектора: $\vec{v} = d\vec{r}/dt$; ускорение вычисляется как первая производная по времени от скорости или вторая производная о времени от радиус-вектора: $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$.

3. **Скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения** [1, §40], [2, §§68, 71].

Модуль вектора скорости точки: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$,

где $v_x = dx/dt = \dot{x}, v_y = dy/dt = \dot{y}, v_z = dz/dt = \dot{z}$.

Направление вектора скорости определяется по направляющим косинусам: $\cos\alpha = v_x/v; \cos\beta = v_y/v; \cos\gamma = v_z/v$ где α, β, γ – углы, которые вектор скорости $\vec{v}$ образует с осями *x, y* и *z* соответственно.

Модуль вектора ускорения точки: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$,

где $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$.

Направление вектора ускорения определяется по направляющим косинусам: $\cos\alpha = a_x/a; \cos\beta = a_y/a; \cos\gamma = a_z/a$ где α, β, γ – углы, которые вектор ускорения $\vec{a}$ образует с осями *x, y* и *z* соответственно.

4. **Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения** [1, §§42, 43], [2, §§67, 72, 73].

Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения точки в сторону её движения, по модулю $v = ds/dt = \dot{s}$.

Вектор ускорения раскладывают на касательную и нормальную составляющие:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Вектор касательного ускорения направлен по касательной к траектории движения точки и по модулю равен $a_\tau = dv/dt = \dot{v}$.

Вектор нормального ускорения точки направлен по главной нормали к траектории движения точки перпендикулярно касательной в сторону вогнутости траектории движения и по модулю равен $a_n = v^2/\rho$, где ρ – радиус кривизны траектории (для окружности радиус кривизны совпадает с радиусом окружности).

5. **Частные случаи движения точки** [1, §44], [2, §74].

1) Равномерное прямолинейное ($v = const, \rho = \infty$). Составляющие ускорения $a_\tau = \dot{v} = 0, a_n = v^2/\infty = 0$. Закон движения $x = x_0 + vt$, где x_0 – начальное положение точки.

2) Равнопеременное прямолинейное ($a_\tau = const, \rho = \infty$). $a_n = v^2/\infty = 0$; $a = a_\tau$. Закон изменения скорости $v = v_0 + at$, закон движения $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$, где v_0 – начальная скорость точки. Так как скорость изменяется только численно (направление остаётся постоянным), то касательное ускорение характеризует изменение скорости по модулю.

3) Равномерное криволинейное движение ($v = const, \rho \neq \infty$). $a_\tau = \dot{v} = 0$; $a_n \neq 0$. Закон движения $s = s_0 + vt$, где s_0 – начальное положение точки на траектории. Так как

скорость изменяется только по направлению, то нормальное ускорение точки характеризует изменение направления вектора скорости.

4) Равнопеременное криволинейное ($a_\tau = const, \rho \neq \infty$). Закон изменения скорости $v = v_0 + a_\tau t$. Закон движения $s = s_0 + v_0 t + a_\tau t^2/2$.

6. **Поступательное движение твёрдого тела, его свойства** [1, §48], [2, §78].

Поступательным называется такое движение твёрдого тела, при котором любая прямая, проведённая в этом теле, движется, оставаясь параллельной своему первоначальному положению. В отличие от прямолинейного траектории точек тела при поступательном движении могут быть любыми кривыми.

Свойства поступательного движения твёрдого тела: при поступательном движении твёрдого тела все его точки описывают одинаковые, при наложении совпадающие траектории, и имеют в один и тот же момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

7. **Вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси** [1, §49], [2, §79].

Вращательным называется такое движение твёрдого тела, при котором две его точки всё время остаются неподвижными. Через эти точки проходит ось вращения тела. Положение тела в пространстве при вращательном движении однозначно определяется углом поворота $\varphi = \varphi(t)$, отсчитываемого от некоторого нулевого начального положения.

Численно угловой скоростью вращения тела в данный момент времени называется скалярная величина ω, равная первой производной по времени от закона изменения угла поворота тела: $\omega = \dot{\varphi}$ (*1/c* или *рад/с*). Угловую скорость вращения тела можно изобразить и вектором $\vec{\omega}$, который по модулю равен ω и направлен по оси вращения в ту сторону, откуда это вращение видно происходящим против хода часовой стрелки.

Численно угловым ускорением тела в данный момент времени называется скалярная величина ε, равная первой производной по времени от угловой скорости или второй производной по времени от закона изменения угла поворота: $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ (*1/с*^{2} или *рад/с*^{2}). При этом вектор углового $\vec{\varepsilon}$ ускорения направлен по оси вращения в сторону $\vec{\omega}$, если вращение ускоренное, и в противоположную сторону, если замедленное.

8. **Частные случаи вращения** [1, §50], [2, §79].

1) Равномерное ($\omega = const$). Закон изменения угла поворота задаётся равенством $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, где φ_0 – начальный угол поворота (обычно $\varphi_0 = 0$).

В технике равномерное вращение часто характеризуют числом *n* оборотов в минуту. Связь между ω и *n* задаётся равенством $\omega = \pi n/30$.

2) Равнопеременное ($\varepsilon = const$). Закон изменения угловой скорости задаётся равенством $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, где ω_0 – начальная угловая скорость вращения. Закон изменения угла поворота $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$.

9. **Скорости и ускорения точек вращающегося твёрдого тела** [1, §51], [2, §80].

При вращательном движении твёрдого тела все его точки движутся по окружностям. При этом вектор скорости направлен по касательной к описываемой движущейся точкой окружности в сторону движения, а вектор ускорения раскладывают на касательную и нормальную составляющие. Численные выражения для этих величин:

$$v = h\omega; \quad a_\tau = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,.$$

Здесь *h* – расстояние от точки до центра окружности.

10. **Передаточные механизмы** [2, §83].

Передаточные механизмы предназначены для передачи вращательного движения от одного тела, называемого ведущим, к другому – ведомому. Вращение передаётся либо непосредственным зацеплением колёс (валов, шестерёнок и т. д.), либо с помощью ремённой передачи. При передаче вращения от тела 1 к телу 2 выполняется следующее отношение

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1},$$

где r_1, r_2 – радиусы соответствующих колёс, z_1, z_2 - число зубьев на соответствующей шестерёнке в случае зубчатого зацепления. При равномерном вращении ведущего вала, ведомый также вращается равномерно.

11. **Плоскопараллельное движение твёрдого тела** [1, §52], [2, §§85-86].

Плоскопараллельным (плоским) движением твёрдого тела называется такое, при котором все точки этого тела движутся, оставаясь в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости. Уравнения плоского движения имеют вид: $x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), \varphi = f_3(t)$. Здесь точка *A* движется в плоскости *xy* и называется полюсом, а угол φ определяет вращательное движение относительно этого полюса.

Плоское движение тела в общем случае можно рассматривать как сумму поступательного, при котором все точки движутся так же, как выбранный полюс, и вращательного движения относительно этого полюса. Скорость и ускорение поступательной части движения зависят от выбора полюса, а угловая скорость и угловое ускорение вращательной части движения от выбора полюса не зависят.

12. **Теорема о сложении скоростей при плоском движении тела** [1, §54], [2, §87].

Теорема: при плоском движении тела скорость любой её точки *M* равна геометрической сумме скорости точки *A*, принятой за полюс, и скорости, которую получает точка при вращательном движении относительно полюса:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}.$$

При этом вектор $\vec{v}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку *AM* в сторону угловой скорости вращения ω и по модулю равен $v_{MA} = AM \cdot \omega$.

13. **Теорема проекции скоростей двух точек твёрдого тела** [1, §55], [2, §87].

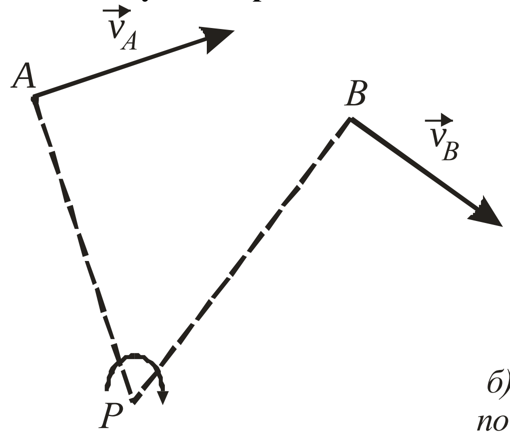
Теорема: при плоском движении твёрдого тела проекции скоростей двух его точек на прямую, соединяющую эти точки, равны друг другу: $v_A \cdot \cos\alpha = v_B \cdot \cos\beta$, где α, β – углы, которые векторы скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ образуют с прямой *AB*.

14. **Мгновенный центр скоростей, его существование и единственность** [1, §56], [2, §90].

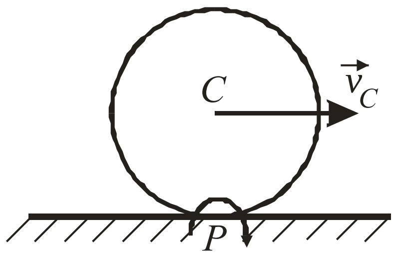
Мгновенный центр скоростей (МЦС) – то точка *P* плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. В общем случае МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек к направлениям скоростей в этих точках. Так как две не параллельные прямые пересекаются в одной точке, то МЦС является единственным. Если при плоском движении тела МЦС выбрать за полюс, то скорость точки *A* по теореме о сложении скоростей $\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AP}$, аналогично для другой точки *B* $\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{BP} = \vec{v}_{BP}$. То есть при плоском движении скорости точек распределяются так, как при вращательном движении относительно оси, проходящей через МЦС. При этом по модулю $v_A = v_{AP} = AP \cdot \omega,\quad v_B = v_{BP} = BP \cdot \omega$; откуда

$v_A / AP = v_B / BP$, то есть в этом случае скорости точек пропорциональны их расстояниям до МЦС.

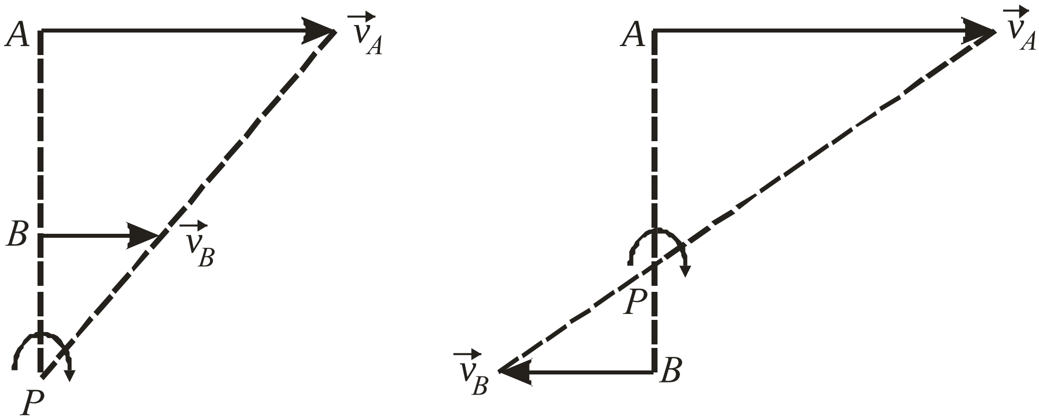
15. **Частные случаи определения положения мцс** [1, §56], [2, §90].



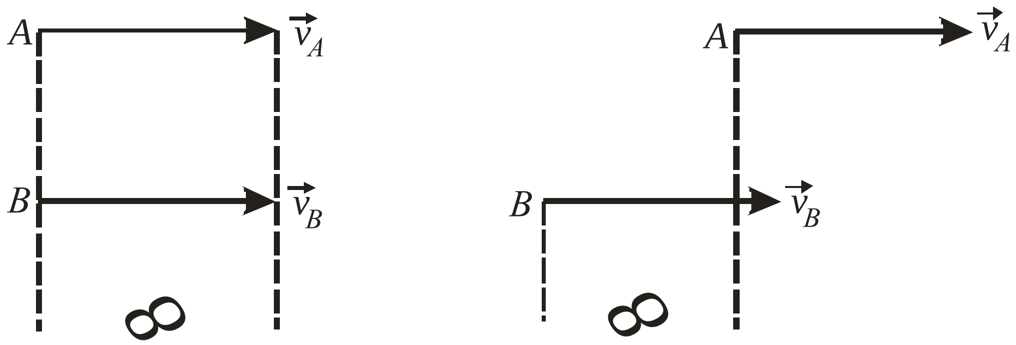
а) Общий случай



б) Колесо, которое катится по поверхности (МЦС в точке соприкосновения колеса с поверхностью)



в) Случай параллельно направленных векторов скоростей точек



г) Случай параллельно направленных скоростей при одинаковых модулях (МЦС находится в бесконечности, тело совершает мгновенно-поступательное движение)

16. **Теорема о сложении ускорений при плоском движении тела** [1, §58], [2, §96].

<u>Теорема</u>: при плоском движении твёрдого тела ускорение любой точки *M* равно геометрической сумме вектора ускорения точки *A*, принятой за полюс, и вектора ускорения, которое получает точка *M* при вращательном движении относительно полюса *A*: $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}$.

При этом вектор $\bar{a}_{MA}$ раскладывают на касательную и нормальную составляющие $\bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^{n}$. Вектор $\bar{a}_{MA}^{\tau}$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону углового ускорения ε, вектор $\bar{a}_{MA}^{n}$ всегда направлен от точки M к полюсу A; по модулю $a_{MA}^{\tau} = AM \cdot \varepsilon, a_{MA}^{n} = AM \cdot \omega^2$. Если полюс движется не прямолинейно, то его ускорение раскладывают на касательную и нормальную составляющие. Окончательно $\bar{a}_M = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^{n}$.

Динамика

1. **Законы динамики** [1, §74], [3, §2].

1) Закон инерции. Изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят изменить её это состояние.

2) Основной закон динамики. Ускорение материальной точки прямо пропорционально приложенной силе и имеет одинаковое с ней направление: $m\vec{a} = \vec{F}$, по модулю $ma=F$.

3) Закон равенства действия и противодействия. Всякому действию соответствует равное противоположное противодействие.

4) Закон независимости действия сил. Несколько действующих на материальную точку сообщают ей такое ускорение, какое сообщила одна сила, равная геометрической сумме приложенных $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$.

2. **Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки** [1, §77], [3, §3].

1) В проекции на оси прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}.$$

2) В проекции на оси естественного трёхгранника $M\tau nb$:

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}, \quad m\frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb}.$$

3. **Две задачи динамики** [1, §§78, 79], [3, §5].

Первая (прямая) задача: зная массу точки m, уравнения её движения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, определить модуль и направление равнодействующей приложенных к точке сил. Ход решения:

модуль: $F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}; \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

направление: $\cos(\vec{F}, Ox) = \dfrac{F_x}{F}, \cos(\vec{F}, Oy) = \dfrac{F_y}{F}, \cos(\vec{F}, Oz) = \dfrac{F_z}{F}$.

Вторая (обратная) задача: зная массу точки m, силы, действующие на точку, её начальное положение и начальную скорость, определить закон движения. Эта задача сводится к двукратному интегрированию дифференциальных уравнений движения точки

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}.$$

Шесть постоянных интегрирования определяют по начальным условиям задачи при t=0: $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0; \dot{x}(0) = v_{0x}, \dot{y}(0) = v_{0y}, \dot{z}(0) = v_{0z}$.

4. **Количество движения точки. Импульс силы. Теорема об изменении количества движения точки** [1, §§83, 84], [3, §§46, 48].

Количеством движения точки называется векторная величина $\vec{q} = m\vec{v}$, размерность [q]=кг·м/с=Н·с. Вектор количества движения направлен по касательной к траектории движения точки так же, как и вектор скорости.

Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\vec{S}$, равная произведению вектора силы на элементарный промежуток времени её действия: $d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt$. Импульс силы за конечный промежуток времени вычисляется как предел интегральной суммы соответствующих элементарных импульсов: $\vec{S} = \int_0^t \vec{F}dt$. Если вектор силы постоянный по модулю и направлению, её импульс равен произведению вектора силы на промежуток времени её действия: $\vec{S} = \vec{F} \cdot t$, $S_x = F_x \cdot t$. Импульс силы характеризует передачу механического движения телу со стороны действующей силы за данный промежуток времени её действия. Размерность [S]=Н·с.

Теорема

а) в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения точки равна геометрической сумме всех действующих на точку сил: $d\vec{q}/dt = \sum \vec{F}_k^e$, в проекции на ось x: $dq_x / dt = \sum F_{kx}^e$.

б) в конечном виде: изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов действующих на точку сил за тот же промежуток времени: $m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \sum \vec{S}_k$, в проекции на ось Ox (на направление движения точки) $mv_x - mv_{0x} = \sum S_{kx}$.

5. **Момент количества движения точки. Теорема об изменении момента количества движения точки** [1, §85], [3, §§53, 54].

Моментом количества движения точки относительно некоторого неподвижного центра O называется векторная величина: $\vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор движущейся точки относительно начала координат точки O. Момент количества движения точки относительно оси: $m_z(m\vec{v}) = h \cdot mv$, где h – кратчайшее расстояние от вектора $m\vec{v}$ до оси Oz (плечо).

Теорема: производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно некоторого неподвижного центра O, равна моменту действующей на точку силы относительно данного центра: $\frac{d}{dt}\left[\vec{M}_O(m\vec{v})\right] = \vec{M}_O(\vec{F})$, если на точку действуют несколько сил, то $\vec{F}$ является их равнодействующей $\vec{F} = \sum \vec{F}_k$. Аналогично относительно некоторой неподвижной оси Oz: $\frac{d}{dt}\left[m_z(m\vec{v})\right] = m_z(\vec{F})$.

6. **Работа силы. Мощность** [1, §87], [3, §§59, 60].

Элементарной работой силы называется скалярная величина, равная произведению проекции силы на касательную к траектории движения на модуль элементарного перемещения точки: $dA = F_\tau ds$ (1). Так как $F_\tau = F \cdot \cos\alpha$, где α - угол, который вектор силы образует с положительным направлением оси касательной, то $dA = F \cdot \cos\alpha ds$ (2).

Так как $F=\left|\vec{F}\right|$, $ds=\left|d\vec{r}\right|$, то $dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}$ (3). Раскладывая вектор силы и вектор элементарного перемещения на составляющие по осям декартовой системы координат:

$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$, $d\vec{r}=dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}+dz\cdot\vec{k}$, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – орты системы *Oxyz*,

можно получить $dA=F_x dx+F_y dy+F_z dz$ (4).

Работа силы на конечном перемещении *s* точки вычисляется через криволинейный интеграл от соответствующей элементарной работы. В соответствии с равенствами (1) – (4):

$$A=\int_0^s F_\tau ds \ (1'),\quad A=\int_0^s F\cdot\cos\alpha ds \ (2'),\quad A=\int_0^s \vec{F}\cdot d\vec{r} \ (3'),$$

$$A=\int_0^s\left(F_x dx+F_y dy+F_z dz\right) \ (4').$$

Если вектор силы постоянный по модулю и направлению, то работа силы на перемещении *s* тела равна $A=F_\tau\cdot s=F\cdot\cos\alpha\cdot s$. Размерность [*A*]=Н·м=Дж, 1 кВт·ч=3,6 ·10^6 Дж.

Мощностью называется работа, совершенная в единицу времени:

$$N=dA/dt=F_\tau\cdot ds/dt=F_\tau\cdot v=F\cdot\cos\alpha\cdot v=\vec{F}\cdot\vec{v}.$$

Размерность [*N*]=Дж/с=Вт; 1л.с.=736 Вт.

7. **Работа силы тяжести, трения, упругости** [1, §88], [3, §61].

1) Работа силы тяжести: $A_G=\pm Gh$, где *h* – вертикальное перемещение тела, знак «+», если тело опускается, знак «–», если тело поднимается.

2) Работа силы трения. При постоянном модуле силы трения её работа на конечном перемещении *s* тела равна $A_{тр}=-F_{тр}s$, где $F_{тр}=fN$ (*f* – коэффициент трения, *N* – нормальная реакция связи).

3) Работа силы упругости: $A_{упр}=\frac{c}{2}\left(\lambda_0^2-\lambda_1^2\right)$, где [*c*]=Н/м – коэффициент жёсткости пружины (балки), λ_0,λ_1 – начальное и конечное удлинения (сжатия) пружины или соответствующие прогибы балки.

8. **Кинетическая энергия точки. Теорема об изменении кинетической энергии точки** [1, §89], [3, §62].

Кинетической энергией точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат её скорости: $mv^2/2$.

Теорема: изменение кинетической энергии при некотором её перемещении равно сумме работ приложенных к точке сил на том же смещении:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A_k.$$

9. **Принцип Даламбера для точки** [1, §133], [3, §106].

Принцип: если в любой момент времени к действующим на точку активным силам и реакциям связей присоединить даламберову силу инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{\Phi}=0$, где $\vec{F}$ – равнодействующая приложенных к точке активных сил, $\vec{N}$ – равнодействующая реакций связей, $\vec{\Phi}=-m\vec{a}$ – даламберова сила инерции.

10. **Относительное движение точки** [1, §91], [3, §26].

Основной закон динамики и вытекающие из него уравнения справедливы в неподвижной (инерциальной системе координат). При движении точки в подвижной системе *Oxyz*, движущейся относительно неподвижной $O_1x_1y_1z_1$, основное уравнение относительного движения точки имеет вид:

$$m\vec{a}_{от} = \sum \vec{F}_k + \Phi_{пер} + \Phi_{кор},$$

где $\vec{a}_{от}$ (или $\vec{a}_r$) – относительное ускорение точки (ускорение точки в подвижной системе координат *Oxyz*); $\vec{\Phi}_{пер} = -m\vec{a}_{пер}, \vec{\Phi}_{кор} = -m\vec{a}_{кор}$ (или $\vec{\Phi}_e, \vec{\Phi}_C$) – переносная и кориолисова силы инерции соответственно, $\vec{a}_{пер}$ и $\vec{a}_{кор}$ (или $\vec{a}_e$ и $\vec{a}_C$) – переносное и кориолисово ускорения соответственно.

11. **Система материальных точек (определение, внешние и внутренние силы, масса системы, центр масс)** [1, §§100, 101], [3, §§31, 32].

Системой материальных точек (механической системой) называется совокупность тел, связанных между собой силами механического взаимодействия.

Силы $\vec{F}_k^e$, действующие на точки системы со стороны тел, не входящих в состав данной системы, называются внешними. Силы $\vec{F}_k^i$ взаимодействия между точками данной механической называются внутренними. Так как каждой внутренней силе соответствует равная и противоположно направленная, то:

1) Геометрическая сумма (главный вектор) внутренних сил, а также суммы их проекций на координатные оси, равны нулю:

$$\vec{R}^i = \sum \vec{F}_k^i = 0; \quad \sum F_{kx}^i = 0, \ \sum F_{ky}^i = 0, \ \sum F_{kz}^i = 0.$$

2) Сумма моментов всех внутренних сил системы (главный момент) относительно некоторого неподвижного центра *O*, а также суммы их моментов относительно координатных осей, равны нулю:

$$\vec{M}_O^i = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^i) = 0; \quad \sum m_{kx}^i = 0, \ \sum m_{ky}^i = 0, \ \sum m_{kz}^i = 0.$$

Массой механической системы называется арифметическая сумма масс точек, входящих в состав данной системы: $M = \sum m_k$.

Радиусом-вектором механической системы называется геометрическая точка *C*, радиус-вектор которой определяется равенством: $\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum m_k \vec{r}_k$.

В проекции на оси координат:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum m_k x_k, \ y_C = \frac{1}{M}\sum m_k y_k, \ z_C = \frac{1}{M}\sum m_k z_k.$$

12. **Дифференциальные уравнения движения механической системы** [1, §106], [3, §42].

Составляя по основному закону динамики дифференциальные уравнения движения для каждой из точек, входящих в состав данной системы, получим систему *n* дифференциальных уравнений движения механической системы в векторной форме:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \quad m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \ \ldots, \quad m_n\vec{a}_n = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i.$$

Здесь $\vec{F}_k^e, \vec{F}_k^i$ – равнодействующие приложенных к точке с номером *k* внешних и внутренних сил соответственно. В проекции на координатные оси получим систему 3*n* скалярных уравнений.

13. **Теорема о движении центра масс. Следствия** [1, §107], [3, §43].

Теорема: произведение массы системы на ускорение её центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил: $M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$, в проекции на ось *Ox*: $M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e$.

Следствие 1. Если геометрическая сумма всех действующих на систему внешних сил равна нулю, то центр масс этой системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно:

$$\sum \vec{F}_k^e = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_C = d\vec{v}_C / dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_C = const.$$

Следствие 2. Если сумма проекций всех внешних сил системы на какую-нибудь ось *x* равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось есть величина постоянная:

$$\sum F_{kx}^e = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_C = dv_{Cx} / dt = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{Cx} = const.$$

14. **Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения системы. Следствия** [1, §§110-112], [3, §50].

Количеством движения механической системы называется векторная величина $\vec{Q}$, равная сумме количеств движения точек данной механической системы: $\vec{Q} = \sum m_k \vec{v}_k$, в проекции на ось *x*: $Q_x = \sum m_k \dot{x}_k$. Количество движения механической системы можно также представить в виде $\vec{Q} = M \cdot \vec{v}_C$, в проекции на ось *x* $Q_x = M \cdot \dot{x}_C$.

Теорема

а) в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения механической системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил: $d\vec{Q} / dt = \sum \vec{F}_k^e$, в проекции на ось *x*: $dQ_x / dt = \sum F_{kx}^e$.

б) в конечном виде: изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точки системы внешних сил за тот же промежуток времени: $\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e$, в проекции на ось *Ox*: $Q_x - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e$.

Следствие 1. Если геометрическая сумма всех внешних сил системы равна нулю, то вектор количества движения этой системы будет постоянным по модулю и направлению:

$$\sum \vec{F}_k^e = 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{Q} / dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{Q} = const.$$

Следствие 2. Если сумма проекций всех внешних сил системы на какую-либо ось *x* равна нулю, то проекция вектора количества движения этой системы на эту ось есть величина постоянная:

$$\sum F_{kx}^e = 0 \quad \Rightarrow \quad dQ_x / dt = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_x = const.$$

Теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения механической системы представляют собой две различные формы одной и той же теоремы.

15. **Моменты инерции твёрдого тела. Примеры (стержень, кольцо, диск, пластина)** [1, §102], [3, §§34, 36].

Моментом инерции тела относительно некоторой неподвижной оси (осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс точек тела (системы) на квадрат расстояний от точек до данной оси: $I_z = \sum m_k h_k^2 = \sum m_k (x_k + y_k)^2$, где $h^2 = (x_k + y_k)^2$ – квадрат расстояния до оси *z*.

Радиусом инерции тела называется скалярная величина i_z, определяемая равенством $I_z=mi_z^2$. Размерность $[i_z]$=м, $[I_z]$=кг·м^2.

Осевые моменты некоторых тел:

1) Тонкий однородный стержень массой m и длиной l (ось Oz проходит через центр масс стержня, ось Oz_1 проходит через край стержня): $I_{z_1}=ml^2/3$, $I_z=ml^2/12$.

2) Сплошной однородный диск массой m и радиусом r (оси Ox и Oy расположены в плоскости диска, O — центр диска, ось Oz проходит через центр диска перпендикулярно его плоскости): $I_z=mr^2/2$, $I_x=I_y=mr^2/4$.

3) Тонкое однородное кольцо массой m и радиусом r (ось Oz проходит через центр кольца перпендикулярно его плоскости) или точечная масса m на расстоянии r от оси Oz: $I_z=mr^2$.

4) Тонкая однородная прямоугольная пластина массой m и размером a (вдоль оси Ox) на b (вдоль оси Oy): $I_x=mb^2/3$, $I_y=ma^2/3$.

Центробежными моментами тела называются скалярные величины, определяемые равенствами: $I_{xy}=\sum m_k x_k y_k$, $I_{yz}=\sum m_k y_k z_k$, $I_{xz}=\sum m_k x_k z_k$, где x_k, y_k, z_k – координаты точки с номером k, m_k – её масса.

16. **Теорема о моменте инерции тела относительно параллельных осей (Штейнера-Гюйгенса)** [1, §103], [3, §35].

Теорема: момент инерции тела относительно любой оси z_1 равен сумме осевого момента относительно оси, параллельной z_1, но проходящей через центр масс C тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния d между осями: $I_{z_1}=I_{Cz}+md^2$.

17. **Кинетический момент системы. Теорема об изменении кинетического момента. Следствия** [1, §§115-117], [3, §§55, 56].

Кинетическим моментом системы относительно некоторого центра O называется векторная величина $\vec{L}_O$, равная сумме моментов количеств движения точек системы относительно того же центра: $\vec{L}_O=\sum \vec{M}_O(m_k\vec{v}_k)$.

Кинетический момент системы относительно оси z равен сумме моментов количеств движения точек системы относительно этой оси: $L_z=\sum m_z(m_k\vec{v}_k)$. Кинетический момент системы относительно оси можно представить в виде $L_z=I_z\omega$, где ω – угловая скорость вращения тела.

Теорема: производная по времени от кинетического момента механической системы, взятого относительно некоторого неподвижного центра O, равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра:

$$d\vec{L}_O/dt=\sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e).$$

Проецируя данное равенство на ось Oz, получим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси: $dL_z/dt=\sum m_z(\vec{F}_k^e)$.

Следствие 1. Если сумма моментов всех внешних сил системы относительно некоторого неподвижного центра O равна нулю, то вектор кинетического момента системы относительно этого центра будет постоянным:

$$\sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e)=0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{L}_O/dt=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O=const.$$

Следствие 2. Если сумма моментов всех внешних сил системы относительно некоторой неподвижной оси z равна нулю, то кинетический момент относительно этой оси есть величина постоянная:

$$\sum m_z(\vec{F}_k^e)=0 \quad \Rightarrow \quad dL_z/dt=0 \quad \Rightarrow \quad L_z=const.$$

18. **Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси** [1, §128], [3, §79].

Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси имеет вид: $I_z\varepsilon = M_z^e$, где I_z – осевой момент инерции, $\varepsilon=\dot{\omega}=\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение вращательного движения, $M_z^e=\sum m_z(\vec{F}_k^e)$ – вращающий момент внешних сил, действующих на тело, относительно оси вращения z.

19. **Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела** [1, §130], [3, §86].

1) В проекции на ортогональные оси декартовой системы координат $Oxyz$ (тело движется в плоскости Oxy):

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2}=\sum F_{kx}^e, \quad M\frac{d^2y_C}{dt^2}=\sum F_{ky}^e, \quad I_z\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\sum m_z(\vec{F}_k^e).$$

2) В проекциях на оси естественного трёхгранника $C\tau nb$:

$$M\frac{dv_C}{dt}=\sum F_{k\tau}^e, \quad M\frac{v_C^2}{\rho}=\sum F_{kn}^e, \quad I_{Cz}\varepsilon=\sum m_{Cz}(\vec{F}_k^e).$$

20. **Работа вращающего момента. Сопротивление при качении** [1, §122], [3, §§65, 66].

При постоянном вращающем моменте $M_z=const$ работа этого момента при повороте тела относительно оси z на конечный угол φ определяется равенством $A_{M_z}=\pm M_z\cdot\varphi$. Работа вращающего момента положительна, если момент способствует повороту тела в данном направлении, и отрицательна в противном случае.

Работа момента трения $M_{тр}$ сопротивления качению при постоянном модуле нормальной реакции N равна: $A_{кач}=-M_{тр}\cdot\varphi=-\frac{k}{r}N\cdot s_C$,

где $M_{тр}=-kN$ – момент трения при качении, k – коэффициент трения качения, r – радиус катка, s_C – путь, пройденный центром катка.

21. **Кинетическая энергия механической системы. Кинетическая энергия тела при поступательном, вращательном, плоском движениях. Теорема об изменении кинетической энергии системы** [1, §§121, 123], [3, §§67-69].

Кинетической энергией механической системы называется скалярная величина T, равная сумме кинетических энергий точек данной механической системы: $T=\sum m_k v_k^2/2$.

Кинетическая энергия тела при различных случаях его движения.

1) Поступательное: $T_{пост}=Mv^2/2$.

2) Вращательное: $T_{вр}=I_z\omega^2/2$.

3) Плоскопараллельное: $T_{плоск}=Mv_C^2/2+I_{Cz}\omega^2/2$.

<u>Теорема</u>: изменение кинетической энергии системы при некотором перемещении её точек равно алгебраической сумме работ на том же перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил:

$$T-T_0=\sum A_k^e+\sum A_k^i.$$

Для неизменяемых систем (твёрдые тела, нерастяжимые нити) $\sum A_k^i = 0$, и теорема принимает вид $T - T_0 = \sum A_k^e$.

22. **Принцип Даламбера для механической системы. Главный вектор и главный момент сил инерции** [1, §§133, 134], [3, §§108, 109].

Принцип: если в любой момент времени к действующим на точки системы внешним и внутренним силам (как активным, так и реакциям связей) присоединить соответствующие даламберовы силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно применять все уравнения статики.

Из статики геометрическая сумма уравновешенной системы сил и суммы их моментов относительно любого центра *O* равны нулю. Так как по свойству внутренних сил системы их геометрическая сумма и сумма их моментов относительно любого центра *O* равны нулю, то уравнения в векторной форме принимают вид:

$$1)\ \sum \vec{F}_k^e + \vec{\Phi} = 0, \quad 2) \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^\Phi = 0.$$

Здесь $\vec{\Phi}$ – главный вектор сил инерции; если центр масс тела (системы) движется не прямолинейно, то его ускорение раскладывают на касательную и нормальную составляющие, соответственно $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_\tau + \vec{\Phi}_n$, $\vec{\Phi}_\tau = -M\vec{a}_{C\tau}$, $\vec{\Phi}_n = -M\vec{a}_{Cn}$.

$\vec{M}_O^\Phi = -d\vec{L}_O / dt$ – главный момент сил инерции относительно данного центра *O*. Аналогично главный момент сил инерции относительно оси *z* $m_z^\Phi = -dL_z / dt$; так как $L_z = I_z\omega$, то $m_z^\Phi = -I_z\varepsilon$.

23. **Принцип возможных перемещений** [1, §§137-139], [3, §§112-114].

Возможным перемещением точек данной механической системы называется совокупность элементарных (бесконечно малых) перемещений этих точек из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями. Возможные перемещения обозначаются $\delta\vec{r}$. При этом $\delta s = |\delta\vec{r}|$, а $\delta x, \delta y, \delta z$ – проекции вектора $\delta\vec{r}$ на координатные оси (они равны возможным приращениям координат при возможном смещении и формально вычисляются как производные).

Возможной работой называется элементарная работа, которую приложенная сила может совершить на возможном перемещении. Возможная работа активной силы $\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$; возможная работа реакции связи $\delta A^r = \vec{N} \cdot \delta\vec{r}$.

Идеальными называются такие связи, для которых сумма их реакций на любом возможном перемещении точек этой системы равна нулю: $\sum \delta A_k^r = 0$.

Принцип: для равновесия механической системы с идеальными связями, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к системе активных сил на любом возможном перемещении точек этой системы была равна нулю: $\sum \delta A_k = 0$.

В аналитической форме принцип имеет вид: $\sum \left(F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k\right) = 0$.

24. **Общее уравнение динамики** [1, §141], [3, §117].

Общее уравнение динамики представляет собой одновременное применение принципа Даламбера и принципа возможных перемещений для сил, приложенных к механической системе с идеальными связями, и имеет вид:

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^{\Phi} = 0.$$

Это равенство выражает собой принцип Даламбера-Лагранжа: при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении точек этой системы равна нулю.

В аналитической форме общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \left\{ (F_{kx} + \Phi_{kx})\delta x_k + (F_{ky} + \Phi_{ky})\delta y_k + (F_{kz} + \Phi_{kz})\delta z_k \right\} = 0.$$

Библиографический список

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб.: рек. МО РФ / С.М. Тарг. – 17-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2007. – 415 с.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч.1. – М.: Высшая школа, 2001. – 343 с.
3. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики. Ч.2 / А.А. Яблонский. – М.: Высшая школа, 2001. – 423 с.

ОРИГИНАЛЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Итоговая аттестация студентов выполняется с помощью набора тестовых экзаменационных вопросов и заданий по всем трем разделам курса теоретической механики: статика, кинематика, динамика. Пример тестового экзаменационного билета представлен в рабочей программе.