ФГБОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям и типовым расчетам по дисциплине «Математика» для студентов специальностей 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.04 «Управление в технических системах» , 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 35.03.06 «Агроинженерия», очной формы обучения

Часть 2

Составители: А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Г.Ф. Федотенко

Pakt- san 2 .docx 1,67 Мбайт 14.03.2015 уч.-изд. 3.8 л.
(название файла) (объем файла) (дата) (объем издания)

ФГБОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

(Кафедра «высшей математики и
физико-математического моделирования»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям и типовым расчетам по дисциплине «Математика» для студентов специальностей 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.04 «Управление в технических системах» , 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 35.03.06 «Агроинженерия», очной формы обучения

Часть 2

Воронеж 2015

Составители: канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, ст. преп. Г.Ф. Федотенко

УДК 517

Методические указания к практическим занятиям и типовым расчетам по дисциплине «Математика» для студентов специальностей 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.04 «Управление в технических системах» , 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 35.03.06 «Агроинженерия», очной формы обучения. Ч. 2/ ФГБОУВПО Воронежский государственный технический университет»; сост. А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Г.Ф. Федотенко. Воронеж, 2015. 67 с.

Методические указания для выполнения практических занятий и типовых расчетов содержат теоретический материал, рекомендуемую литературу по выполнению типовых расчетов, примеры решения задач типового расчета. Предназначены для студентов первого курса.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Pakt- san 2 .docx »

Ил. 6. Библиогр.: 7 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. М.В. Юрьева

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых практических задач и задач типового расчета по теме:“Математика”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Понятие неопределенного интеграла.

Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке

x, то есть $F'(x)=f(x)$ (или $dF(x) = f(x)dx$) для $\forall x \in X$.

Определение. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке x и обозначается

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где C- произвольная постоянная.

Основные правила интегрирования.

а) $(\int f(x)dx)' = f(x)$, $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;

б) $\int dF(x) = F(x) + C$;

в) $\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx$, где a – постоянная;

г) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$;

д) если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то

$\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица простейших неопределенных интегралов.

1) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$ $(a \neq -1)$, 2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

3) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C_1$ $(a \neq 0)$,

4) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C (a \neq 0)$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \quad (a \neq 0)$,

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C = -arccos\frac{x}{a} + C, (a > 0)$,

7) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{lna} + C \ (a > 0)$, $\int e^x dx = e^x + C$,

8) $\int \cos xdx = sin\ x + C$, 9) $\int \sin xdx = cos\ x + C$,

10 $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -ctg\, x$, $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = tg\, x$,

11) $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\ x + C$, 12) $\int chxdx = sh\ x + C$,

13) $\int shxdx = ch\ x + C$, 14) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$;

15) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -\ cthx + C$.

Метод подстановки. Замена переменой в неопределенном интеграле.

Интегрирование путем введения новой переменной t основано на формуле

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt$, где $x = \varphi(t)$,

где $x = \varphi(t)$ монотонная непрерывно-дифференцируемая функция переменной t. Функцию φ выбирают таким образом , чтобы правая часть формулы приобрела более удобный вид. Иногда применяется подстановка вида $u = \psi(x)$, где u – новая переменная. Допустим, что подынтегральное выражение удалось преобразовать к виду $f(x)\, dx = g(u)\, du$, где $u = \psi(u)$ тогда , если известен $\int g(u)du = F(u) + C$, то

$$\int f(x)dx = F[\psi(x)] + C.$$

Тригонометрические подстановки.

а) если интеграл содержит радикал вида $\sqrt{a^2 - x^2}$, то полагают $x = a\ sin\ t$ (или $x = a\ cos\ t$), откуда получается

$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos t$ (или $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \sin t$)

б) если интеграл содержит радикал вида $\sqrt{x^2 - a^2}$,

то полагают $x = \frac{a}{\sin t}$ (или $x = \frac{a}{\cos t}$),

откуда $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot tgt$ (и $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot ctgt$).

в) если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 + a^2}$, то полагают $x = a \cdot tgt$ (или $x = a \cdot ctgt$), откуда $\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos t}$ (или $x = \frac{a}{\sin t}$).

Замечание. Иногда вместо тригонометрических подстановок удобнее пользоваться гиперболическими подстановками: $x = a \cdot tht$, $x = a \cdot ctht$, $x = a \cdot sht$.

Метод интегрирования по частям.

Если $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x, то

$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$

Интегрирование рациональных дробей с помощью разложений на простейшие.

Рассмотрим рациональную функцию (или рациональную дробь) $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ или $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно относительно переменной x.

Если $n \geq m$, то есть дробь неправильная, то ее можно представить в виде

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)}$, (где $k< m$), то есть выделить из нее целую часть $P_{n-m}(x)$. Пусть знаменатель

$Q_m(x) = (x-a)^r \ldots (x^2 + px + q^2)^s \ldots$

разлагается на линейные квадратичные множители. Тогда правильная рациональная дробь $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ разлагаются на суммы простейших дробей с вещественными коэффициентами следующего вида:

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^r}$, где $r \geq 1$ – целое число;

3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $\frac{p^2}{4}$ - q < 0, то есть квадратный трехчлен,

и x^2+px+q не имеет действительных корней;

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}$, где $s \geq 1$ целое число, $\frac{p^2}{4}$ - $q < 0$.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочленов $P_{n-m}(x)$ степени *(n-m)* и от простейших дробей, каждая из которых интегрируется в элементарных функциях:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$,

2) $\int \frac{Adx}{(x-a)^r} = -\frac{A}{(r-1)\cdot(x-a)^{r-1}} + C$,

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx =$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C;$$

4) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}dx =$

$$= \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^s}dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^s}.$$

Первый интеграл в правой части легко находится с помощью Подстановки $x^2+px+q = z$, а второй преобразуем так $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^s} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^s}$, где $x+\frac{p}{2} = t$; q-$\frac{p^2}{4} = a^2$.

Для интеграла

$I_s = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^s}$ (s – целое положительное число).

Имеет место следующая рекуррентная формула

$I_s = \frac{1}{2a^2(S-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+a^2)^{S-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2S-3}{2S-2} \cdot I_{S-1}$.

Эта формула после (s-1) – кратного применения позволяет свести данный интеграл I_s к табличному интегралу $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

Интегрирование некоторых иррациональных функций.

а) ***Интегралы вида*** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена приводятся к табличным интегралам 5 и 6

б) ***интегралы вида*** $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ путем выделения в числителе производной квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня разлагается на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}dx = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}dx +$$

$$+(B-\frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}$$

Первый из полученных интегралов путем замены ax^2+bx+c сводится к табличному виду 1 , а второй рассмотрен в п. 1.

в) интегралы вида $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ с помощью подстановки $\frac{1}{mx+n}=t$ приводятся к виду, рассмотренному в п. 2.

г) интегралы вида $\int R\left(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$

где R- рациональная функция; $m_1, \dots, m_k$, ,$n_1, \dots, n_k$. - целые числа. С помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$,

где s – наименьшее общее кратное чисел $n_1, \dots, n_k$..

д) интегралы от дифференциальных биномов

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

где m,n,p – рациональные числа выражаются через конечную комбинацию элементарных функций лишь в следующих трех случаях:

1) если p – целое число, подстановкой $x = t^s$, s – знаменатель дроби p;

2) если $\frac{m+1}{n}$ - целое, подстановкой $\frac{a+bx^n}{n} = t^s$,

где s – знаменатель дроби p.

3) $\frac{m+1}{n}$ + p – целое, подстановкой

$\frac{a+bx^n}{n} = t^s$, s – знаменатель p.

Интегрирование тригонометрических функций.

а) интегралы вида

$\int \sin(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)dx$, $\int \sin(\alpha x)\cdot\sin(\beta x)dx$, $\int \cos(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)dx$

находятся с использованием тригонометрических формул

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(m\alpha+\beta)).$$

б) интегралы вида

$$I_{m,n} = \int \sin^n x\cdot\cos^m x dx,$$

где n и m – четные числа, находятся с помощью формул

$\sin^2 x=(1-\cos(2x))/2$; $\cos^2 x=(1+\cos(2x))/2$,

$\sin(x)\cos(x)=0{,}5\sin(2x)$.

Если хотя бы одно из чисел m или n – четное, то интеграл находится, отделяя от нечетной степени один множитель и вводя новую переменную. В частности, если $m=2k+1$, то

$$I_{n,m} = \int \sin^n(x)\cdot\cos^{2k+1} x dx = \int \sin^n(x)\cdot\cos^{2k} x\cdot\cos x dx =$$

$$= \int \sin^n(x)\cdot(1-\sin^2 x)^k d(\sin x)$$

Полагая $t=\sin x$, получим интеграл вида $\int t^k\,(1-t^2)^k dt$.

в) интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ приводятся к интегралу от рациональной функции новой переменной с помощью, так называемой универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$ при этом $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Если *R(sin x, cos x)= R(sin x, cos x),* то целесообразно применить подстановку $tg\, x = t$, при этом

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ x = arctg\, t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Определенный как предел интегральной суммы.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ называется предел ее интегральной суммы, когда число n элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них ($max\, x_i$) стремится к 0, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x, \text{ где } \Delta(x_i) = x_{i+1} - x_i,\ x_i \le \xi_i \le x_{i+1}.$$

Если $f(x)$ непрерывна, то она интегрируема на $[a, b]$ и предел этот не зависит от способа разбиения промежутка $[a, b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_i на этих промежутках.

Вычисление определенного интеграла.

Формула Ньютона – Лейбница.

Если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замена переменной в определенном интеграле.

Если 1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$; 2) функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$, где $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$; 3) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Формула интегрирования по частям.

Если $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a, b]$, то

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Свойства определенного интеграла.

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0,$ 2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx,$

3) если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируем на $[a, b]$, C_1 и C_2 - любые вещественные числа, то функция $C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int\limits_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x))dx = C_1\int\limits_a^b f_1(x)dx + C_2\int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

4) если $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, d]$, то она интегрируема также и на $[a, b]$, причём

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

При этом точка c может быть произвольно расположена относительно a и b.

5) если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причем $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx (a < b)$.

6) если $f(x) \ge 0$, то $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ $(a \ge b)$

7) если $f(x) \ge g(x)$ для каждого $x\epsilon(a, b)$, то $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$ $(a < b)$.

8) если M – наибольшее значение функции $f(x)$ на

отрезке $[a, b]$, а m – наименьшее и a$\le$b, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

*9) е*сли $f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$, то

существует $\xi\epsilon[a, b]$ такое, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

Число $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода).

Пусть $f(x)$ непрерывна при $a \le x < +\infty$. Тогда по определению полагают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае интеграл называется расходящимся. Аналогично определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода.

Теорема. Пусть для всех $x \ge a$ выполнено неравенство $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, тогда:

1) если $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится,

причём $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$;

2) если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ - расходится, то расходится и

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx = .\lim_{x\to\infty}\left\{f(x)\cdot x^m\right\} = A \ne \infty, A \ne 0$$

Следствие. Если $f(x) \ge 0$ и, то есть $f(x) \sim \frac{A}{x^m}$

при $x \to \infty$, то а) при m>1 $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;

б) при $m \leq 1$- расходится.

Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода).

Пусть функция *f(x)* определена и непрерывна при $a \leq x < b$, а при $x = b$ либо неопределенна, либо терпит разрыв. Тогда по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел, стоящий в правой части, существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае расходящимся. Аналогично определяются несобственные интегралы; если функция имеет разрыв при $x = a$, либо при $x = c$, где $c \in [a, b]$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx; \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx$$

Признаки сходимости для несобственных интегралов второго рода.

Теорема. Пусть при $x \in [a, b]$ выполнены неравенства $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и функции *f(x)* и $\varphi(x)$ либо не определены, либо имеют разрыв при $x = b$. Тогда:

1) если $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$;

2) если $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

Следствие. Если $f(x) \geq 0$ и $\lim\limits_{x \to b} \left\{ f(x) \cdot |x - b|^m \right\} = A \neq \infty, A \neq 0$, то есть

$$f(x) \sim \frac{A}{|b-x|^m}$$ при $x \to b$; то

1) при $m<1$ интеграл (1) сходится; 2) при $m \ge 1$ - расходится.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Площади плоских фигур.

1) площадь в прямоугольных координатах.

Если площадь S ограничена двумя непрерывными Кривыми $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$, где $f_1(x) \le f_2(x)$ при $a \le x \le b$,

то $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

2) площадь, ограниченная кривой, заданной в параметрическом виде.

Если кривая в параметрическом виде $x=x(t)$, $y=y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями, соответствующими $x=a$, $x=b$ и отрезком оси OX, выражается интегралом

$$S = \int_a^b y(t) \cdot x'(t)dt$$, где t_1, t_2

определяются из уравнений $a = x(t_1), b = x(t_2)$

($y(t) \ge 0$ на $[t_1, t_2]$).

3) площадь в полярных координатах.

Площадь, ограниченная непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

Длина дуги кривой.

1) длина дуги в прямоугольных координатах

Длина дуги гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой $y=f(x)$, содержащейся между точками с абсциссой

$x=a$ и $x=b$, равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

2) длина дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x=x(t), y=y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемые функции, то длина дуги равна

$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt,$ где t_1, t_2 - значения параметра, соответствующие концам дуги;

3) длина дуги в полярных координатах

Если $r = r(\varphi) \quad (\alpha \le \varphi \le \beta)$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\,d\varphi$$

Объёмы тела.

1) объём тела вращения

Объёмы тел, образованных вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью OX и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$, вокруг осей OX и OY, выражаются соответственно формулами

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx; V_y = 2\pi\int_a^b xydx\ .$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной $x=g(y)$, осью OY и двумя параллелями $y=c$ и $y=d$ определяется по формуле

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy$$

Объём тела, полученного при вращении сектора, ограниченного дугой кривой $r = r(\varphi)$ и полярными радиусами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ вокруг полярной оси ρ

равен $V_\rho = \dfrac{2}{3}\int\limits_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi$

2) Вычисление объёмов тел по известным поперечным сечениям

Если $S(x)$ – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси OX в точке абсциссой x, то объём этого тела равен $V = \int\limits_{x_1}^{x_2} S(x)dx$, где x_1, x_2 – абсциссы крайних точек сечения тела.

Примеры решения задач.

1. Найти $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+\lambda^{2x}}}$.

Решение.

Так как $\dfrac{dx}{\sqrt{1+\lambda^{2x}}} = \dfrac{dx}{\lambda^x\sqrt{\lambda^{-2x}+1}} = \dfrac{\lambda^{-x}dx}{\sqrt{1+(\lambda^{-x})^2}}$

$-\int \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln(t+\sqrt{1+t^2})+C.$

Здесь замена переменной $t = \lambda^{-x}$ приводит к табличному интегралу.

2. Найти $\int \dfrac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение. Подынтегральная функция является функцией от $\sin x$ и $\cos x$. Применим подстановку $tg\dfrac{x}{2} = t$. При этом $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Тогда

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} arctg\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}} + C.$$

Преобразование, произведённое в знаменателе, называется выделением полного квадрата:

$$t^2+t+2=t^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}.$$

3. Найти $\int x^2\arccos x dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям $\int UdV=UV-\int VdU$, где $U=\arccos x, dV=x^2dx$. Находим

$$V=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}, dU=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$ Получим

$$\int x^2\arccos x dx=\frac{x^3}{3}\arccos x+\frac{1}{3}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{1}{3}\int x^2 d(\sqrt{1-x^2})=$$

$$=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3}+C, |x|\le 1.$$

4.Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. Перепишем интеграл в виде

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int(1+x^4)^{\frac{1}{4}}dx$$

, откуда следует, что это интеграл от дифференциального бинома при *m=0, n=4, p=-1/4.* Так как $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$, то имеем третий случай интегрируемости. Подстановка $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^s$, где s - знаменатель р в данном случае примет вид $x^{-4}+1=t^4$, откуда

$$x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}, dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt, \sqrt[4]{1+x^4}=t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}.$$

Следовательно

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\int\frac{t^2dt}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}.$$

Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью. Разложим её на простейшие дроби

$$-\frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}+\frac{Ct+D}{t^2+1},$$ откуда

$$A(t-1)(t^2+1)+B(t+1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2-1)=-t^2.$$

Полагая последовательно $t=1$ *и* $t=-1$, получим

B(1+1)(1+1)=-1, 4B=-1, B=-1/4;

A(-1-1)((-1)(-1)+1)=-(-1)(-1), -4A=-1, A=1/4.

Неопределённые коэффициенты C и D можно найти, приравнивая коэффициенты при t^1, t^0 в тождестве слева и справа, получим

A+B-C=0, C=0, -A+B-D=0, D=-1/2.

Следовательно

$$-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{1}{t+1}dt-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}arctgt+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}arctg\,\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$$

5. Найти $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$.

Решение. Применим гиперболическую подстановку $x=a\,sht$, $dx=a\,cht\,dt$, получим

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2(1+sh^2t)}=a\ cht\ .$$

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=a^2\int ch^2tdt=\frac{a^2}{2}\int(ch2t+1)dt=$$

$$=\frac{a^2\cdot sh2t}{4}+\frac{a^2\cdot t}{2}+C.$$ Можно получить

$$sh2t = 2sht\sqrt{1+sh^2t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}.$$

Из равенства $sht = \frac{\lambda^t - \lambda^{-t}}{2} = \frac{x}{a}$ находим, что

$\lambda^t = \frac{x \pm \sqrt{a^2+x^2}}{a}$. Поскольку $\lambda^t > 0 \Rightarrow t = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| - \ln a$.

Поэтому окончательно получаем

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C_1,$$

где $C_1 = C - \frac{a}{2}\ln^2 a$ - новая произвольная постоянная.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом *x=a cost, y=b sint*.

Решение. Эллипс задан в параметрическом виде.

В силу симметрии эллипса достаточно найти площадь S_1 одной его четверти ($x \geq 0, y \geq 0$). Если x изменяется в пределах от 0 до a, то параметр t изменяется в пределах от $\pi/2$ до 0, которые находятся из уравнений $a\cos t=0$, $t_1 = \pi/2$; $a\cos t=a$, $\cos t=1$, $t_2=0$. По формуле для вычисления площади кривой, получим $S = 4S_1 = 4\int\limits_{\pi/2}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)dt = \pi ab$

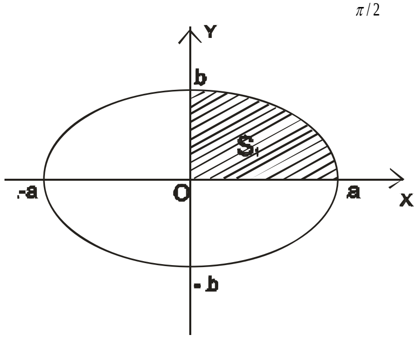

Рис.1

7. Найти длину дуги кардиоиды $r=a(1-\cos\varphi)$.

Решение. Кривая задана в полярных координатах. В силу её симметрии относительно полярной оси достаточно вычислить длину L, её половины, при этом полярный угол φ изменяется от π до 0. По формуле для вычисления дуги кривой в полярных координатах имеем

$$L = 2L_1 = 2\int_{\pi}^{0} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + a^2 (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi} = |_{\pi}^{0} = 8a.$$

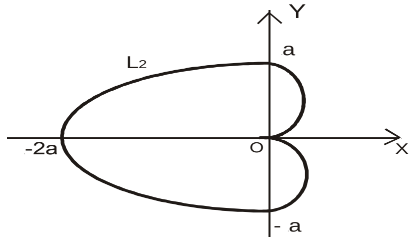

Рис. 2

8. Найти объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \pm b$ и $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси OY (см. рис.3).

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления объёма тела вращения . $V = \int_{-b}^{b} x^2 dy = \pi\ a^2 \int_{-b}^{b} (1 + \dfrac{y^2}{b^2}) dy = \dfrac{8}{3}\pi\ a^2 b.$

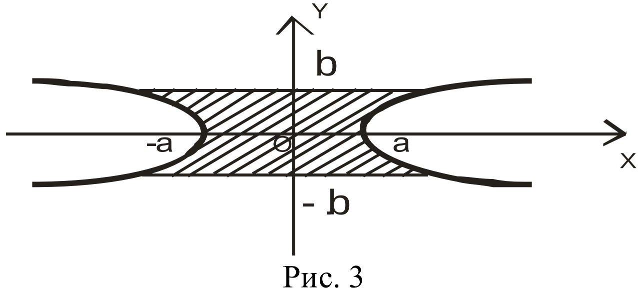

Рис. 3

9. Найти объём эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$(рис.4)

Решение. В общем случае, когда $a\neq b\neq c$ эллипсоид нельзя считать телом вращения. Поэтому его объём надо вычислять по известным площадям поперечных сечений. Поперечные сечения эллипсоида плоскостями, параллельными оси OX, являются эллипсами, уравнения которых имеют вид $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ или $\frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[\sqrt{1-\frac{x}{a^2}}\right]^2}=1$,

Поэтому полуоси эллипса равны соответственно

$b(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},c(x)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Известно, что площадь эллипса с полуосями b и c вычисляется по формуле $S=\pi bc$. Следовательно, площадь поперечного сечения $S(x)=\pi b(x)c(x)$. Теперь получим

$$V=\pi\int_{-\alpha}^{\alpha}b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\bullet c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx=\pi bc\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности при $a=b=c=R$ получаем объем шара $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

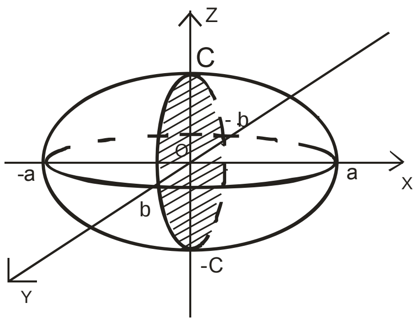

Рис. 4

10. Вычислить $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$.

Решение. Это несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом. Так как подынтегральная дробь разлагается на простейшие дроби вида

$$\frac{1}{x^2+x+2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right),\text{то}$$

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-x+2}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x^2-x+2}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\int_2^{b}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Bigg|_2^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}|\ln\frac{b-1}{b+2}-\ln\frac{1}{4}|=\frac{2}{3}\ln 2.$$

11.Исследовать сходимость интеграла $\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Решение. Воспользуемся признаком сходимости для несобственных интегралов 1-го рода в виде неравенства. Очевидно, что $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}>\frac{1}{x}$, при $x>2$. Вычислим

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_2^{\infty}=\infty$$ - расходится.

12. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$. Решение при $x\to\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}:\ \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Так как $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ сходится, то сходится и исходный интеграл.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}$

Решение. Здесь подынтегральная функция имеет разрыв при $x=1$.Это несобственный интеграл от неограниченной функции (2-го рода). По определению

$$\int\limits_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-1)^2}+\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{1+\delta}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{\varepsilon}-1)+\lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{\delta}-1)=\infty.$$

Значит данный интеграл расходится.

14. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. В данном случае подынтегральная функция имеет разрыв при *x=1.* воспользуемся признаком сходимости несобственных интегралов 2-го рода.

Для сравнения возьмем функцию $\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$.

Очевидно, что $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}\le\frac{1}{\sqrt{1-x}}$,

при $x\in[0,1]$. Найдем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx=-2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right)=2.$$

Так как $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится, то сходится и $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$.;

1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Область определения

Переменные x,y,z, …,t называются независимыми между собой, если каждая из них принимает любые значения в своей области изменения, независимо от того, какие значения принимают при этом остальные переменные.

Переменная величина u называется однозначной функцией независимых переменных (аргументов) x,y,z,…,t, если каждой совокупности их значений (x,y,z …,t) из области D соответствует единственное определенное значение $u\in U$.

Функциональная зависимость обозначается так: u=f(x,y,z, …,t), или f: D→U, где U – множество значений функции f.

Областью определения (существования) D функции u=f (x,y,z,…,t) называется совокупность значений x,y,z,…,t, при которых функция определена, то есть принимает определенные действительные значения. Так, для функции двух переменных z=f (x, y) областью определения является совокупность точек (x,y) координатной плоскости XOY, в которых функция определена (существует). Эта область определения представляет собой конечную или бесконечную часть плоскости XOY, ограниченную одной или несколькими кривыми (границей области D). Аналогично, для функции трех переменных u=f(x,y,z) областью определения служит некоторое тело в пространстве OXYZ. Рассмотрим примеры нахождения областей определения функций.

Пример. $z = \arcsin\frac{x}{3} + \sqrt{x \cdot y}$

Решение. Первое слагаемое функции определено при $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$, или $-3 \leq x \leq 3$. Второе слагаемое имеет действительные значения, если $x \cdot y \geq 0$, то есть при $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ или при $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$. Значит, область определения всей функции есть множество точек (x,y) двух полос плоскости XOY: При $y \geq 0$ между прямыми x = 0, x = 3, y = 0 и при $y \leq 0$ между прямыми x = -3, x = 0, y = 0, включая сами эти прямые (рис. 5).

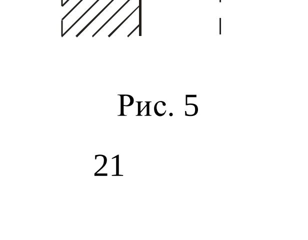

Рис. 5

Предел. Непрерывность.

Число A называется предел**ом** функции $z = f(x, y)$ при стремлении точки M(x,y) к точке M_0(a,b), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, $\delta(\varepsilon)$,что при $0 < \rho < \delta$, где $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ – расстояние между точками M и M_0, имеет место неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{M \to M_0} f(x, y) = A$, или $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A$. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке M_0(a,b), если предел функции $f(x, y)$ при стремлении точки M(x,y) к точке M_0(a,b) равен значению функции $f(a, b)$ в точке Mo, то есть:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b)$$

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Нарушение условий непрерывности для функции $f(x, y)$ может быть как в отдельных точках (изолированная точка разрыва), так и в точках, образующих одну или несколько линий (линии разрыва).

Пример. Найти предел следующих функций: $\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y}$;

Решение: $\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy \cdot x}{y \cdot x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \lim_{x \to 2} x = 1 \cdot 2 = 2$,

где $\alpha = xy$.

Линии и поверхности уровня функции.

Линией уровня функции двух аргументов $z = f(x, y)$ называется такая линия $f(x, y) = C$ на плоскости XOY, в точках которой функция принимает одно и то же значение $z = C$, где C – const.

Поверхностью уровня функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ называется такая поверхность $f(x, y, z) = C$, в точках которой функция принимает постоянное значение $u = C$.

Пример. Выяснить характер поверхностей, изображаемых следующими функциями и построить их линии уровня: а) $z = x + y$; б) $z = x^2 + y^2$; в) $z = x^2 - y^2$.

Решение: а) плоскость; линии уровня – семейство прямых $x + y = C$, параллельных прямой $y = -x$, (при $\forall C \in R$).
б) параболоид вращения; линии уровня $x^2 + y^2 = C$ – семейство концентрических окружностей с центром в начале координат ($\forall C > 0$).
в) гиперболический параболоид; линии уровня $x^2 - y^2 = C$ - семейство равносторонних гипербол $\left(\forall C \in R\right)$.

Дополнительные сведения.

Часть пространства, в котором происходит физическое явление, называется физическим полем. Существуют скалярное и векторное поля.

Физическое поле называется скалярным, если физическое явление, его образующее, характеризуется функцией $f = f(x, y, z)$, зависящей только от координат точек пространства, в котором это явление происходит. Скалярное поле полностью определено заданием одной функцией $f(x_1; y_1; z_1)$ трех независимых переменных. Если физическое явление образовало скалярное поле, то каждой точке $P(x, y, z)$ пространства R^3, в котором происходит это явление, ставится в соответствие определенное число, характеризующее это явление в рассматриваемой точке. Это число есть частное значение функции $f(x, y, z)$, вычисленное в точке $P(x_1; y_1; z_1)$.

Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня. Во всех точках поверхности уровня физическое явление протекает одинаково. Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $P(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид $f(x;y;z)= f(x_1;y_1;z_1)$.

Частные производные первого порядка. Полный дифференциал функции и его применение к приближенным вычислениям

<u>*Частные производные первого порядка*</u>

Если $u = f(x, y, z)$ и одна из переменных, например x, получила приращение Δx (при постоянных других переменных y и z), то разность $\Delta_x u = f(x+\Delta x, y, z)- f(x, y, z)$ называется частным приращением по x функции $f(x, y, z)$.

Соответственно, имеем частные приращения функции по y и z по $\Delta_y u = f(x, y+\Delta y, z)- f(x, y, z)$, $\Delta_x u = f(x, y, z+\Delta z)- f(x, y, z)$

<u>Частной производной</u> от функции $u = f(x, y, z)$ <u>по независимой переменной</u> x называется производная

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$$, или в более подробной записи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y, z)- f(x, y, z)}{\Delta x} = f_x{}'(x, y, z),$$

вычисленная при постоянных y, z. Обозначается одним из символов $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, u'_x, f'_x. Аналогично, предел отношения $\frac{\Delta_y \mathrm{u}}{\Delta y}$ при стремлении Δy к нулю называется частной производной функции по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y, z)- f(x, y, z)}{\Delta y} = f'_y(x, y, z).$$

Частная производная по z есть производная u'_z, равная пределу

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z}, \text{ то есть } \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} = f'_z(x, y, z).$$

Очевидно, что для нахождения частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования; только следует иметь в виду, что при нахождении частной производной надо считать постоянными все независимые переменные, кроме той, по которой берется частная производная.

Пример . Найти частные производные функции

$$u = x^2 y^3 z - 4xy + 3yz + z - 5x + 1.$$

Решение. Рассматривая переменные y, z как постоянные величины, получим $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3 z - 4y - 5$. читая x, z постоянными, дифференцируем функцию по y: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 y^2 z - 4x + 3z$. Аналогично, дифференцируем функцию по z,считая x, y постоянными: $\dfrac{\partial u}{\partial z} = x^2 y^3 + 3y + 1$.

Полный дифференциал функции.

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных в точке М(х,у) называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

где Δx и Δy – произвольные приращения аргументов.

Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (х,у), если в этой точке полное приращение Δz можно представить в виде $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$, где слагаемое

$o(\rho)$ есть бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть ее полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy, то есть

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y .$$

Дифференциалы dx, dy независимых переменных x и y совпадают с их приращениями, то есть $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – это числа, равные между собой. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \text{, где } A = \frac{\partial z}{dx}\text{, } B = \frac{\partial z}{dy}$$

Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Заметим, что в выражениях $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ скобки можно опустить, так как Δx, Δy рассматриваются как единый символ. Функция заведомо имеет полный дифференциал в случае непрерывности ее частных производных. Значит, если функция имеет полный дифференциал, то она дифференцируема.

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение: Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Следовательно, по формуле

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Применения полного дифференциала к приближенным вычислениям.

Имеем связь между полным дифференциалом функции и ее полным приращением: $\Delta z = dz + o(\rho)$

Вычисление Δz (приращения функции) представляет собой задачу, более трудоемкую, чем вычисление ее дифференциала dz, а потому в практических вычислениях с достаточной точностью при малых приращениях аргументов заменяют вычисление приращения функции вычислением ее дифференциала. При достаточно малых $|\Delta x|, |\Delta y|$, а значит, при достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x,y)$ имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz \text{ или } \Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Итак, на основании формулы получаем $f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx df$ или

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y,$$

где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Это приближенное равенство тем более точно, чем меньше величины $\Delta x, \Delta y$.

Пример. Вычислить приближенно величину $(1{,}02)^{3{,}01}$

Решение: Рассмотрим функцию $z = x^y$. Воспользуемся формулой (6). Имеем $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y_0 = 3$, $\Delta y = 0{,}01$

Значение функции z в точке (x_0, y_0): $z(1{,}3) = 1^3 = 1$. Вычисляем $dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$, где $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$; откуда

$dz\big|_{(1,3)} = 3 \cdot 1^2 \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}06$. Значит, $(1{,}02)^{3{,}01}{,}01 \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06$.

6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Случай одной независимой переменной.

Если $z = f(x, y)$ есть дифференцируемая функция двух аргументов x и y в некоторой области D плоскости XOY, которые в свою очередь являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t, то есть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то сложная функция $z = f(\varphi(t), \psi(t)) = \Phi(t)$ - есть функция одной переменной t и имеет место равенство

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

В частности, если t совпадает с одним из аргументов, например, t=x, то справедлива формула $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$, и $\frac{dz}{dt}$ называется полной производной функции z по x.

Пример. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^5 + 2xy - y^3$, где $x = \cos 2t$, $y = arctgt$.

Решение. Воспользуемся формулой (1). Предварительно находим $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2$, $\frac{dx}{dt} = -2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$. Тогда $\frac{dz}{dt} = -2(5x^4 + 2y)\sin 2t + (2x - 3y^2) \cdot \frac{1}{1+t^2}$

Пример. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z=\ln\left(x^2-y^2\right)$, где $y=e^x$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2-y^2}$. Находим

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{2ye^x}{x^2-y^2}=\frac{2\left(x-ye^x\right)}{x^2-y^2}$$

Случай нескольких независимых переменных.

Если z есть сложная функция нескольких переменных, например $z=f(x,y)$, где аргументы x, y, так называемые промежуточные переменные, являются функциями независимых переменных u, v: $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, то сложная функция $z=f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)=\Phi(u,v)$ фактически является функцией двух «конечных» переменных u, v. Если функции f,φ,ψ — дифференцируемые функции, то частные производные по u,v выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},\text{ или } z'_u=z'_x\cdot x'_u+z'_y\cdot y'_u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v},\text{ или } z'_v=z'_x\cdot x'_v+z'_y\cdot y'_v$$

Структура этих формул сохраняется и при большем числе переменных.

Пример. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=3^{x^2}\cdot arctgy$, $x=\frac{u}{v}$, $y=uv$

Решение: Находим $\frac{\partial z}{\partial x}=3^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 3\cdot arctgy$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=3^{x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}$; $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{v}$; $\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}$; $\frac{\partial y}{\partial u}=v$; $\frac{\partial y}{\partial v}=u$;

Подставляя полученные выражения в формулы (3), имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x'_u+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y'_u=3^{x^2}\cdot\frac{1}{v}\left(2x\ln 3\cdot arctgy\right)+3^{x^2}\frac{v}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x'_v+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y'_v=-3^{x^2}\cdot\frac{u}{v^2}\left(2x\ln 3\cdot arctgy\right)+3^{x^2}\frac{u}{1+y^2}.$$

Ответ можно оставить в такой форме или выразить через u и v. В результате получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=3^{\frac{u^2}{v^2}}\cdot\left(\frac{2u\ln 3arctg(uv)}{v^2}+\frac{v}{1+u^2v^2}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial v}=3^{\frac{u^2}{v^2}}\cdot\left(-\frac{2u^2\ln 3arctg(uv)}{v^2}+\frac{u}{1+u^2v^2}\right).$$

Инвариантность формы полного дифференциала.

Отметим важное свойство инвариантности формы полного дифференциала. Во всех рассматриваемых выше случаях справедлива формула:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{*}$$

Действительно, дифференциал сложной функции $z=f(x,y)$, где переменные $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ есть функции от новых независимых переменных u и v, можно получить, если в формуле (*) дифференциалы dx и dy заменить (по определению): $dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv$; $dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv$.

В результате подстановки и перегруппировки членов при du и dv получим:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

где $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$,

полученная формула $dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$ показывает, что форма первого дифференциала не зависит от того, являются ли x и y независимыми переменными или функциями других независимых переменных. Это свойство называется инвариантностью (неизменяемостью) формы первого дифференциала.

7. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ И ЕГО СВОЙСТВО

1. Производной от функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ по данному направлению вектора $\bar{l} = \overline{MM_1}$ называется $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{M_1M \to 0}\frac{f(M_1) - f(M)}{M_1M} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $f(M)$ и $f(M_1)$- значения функции в точках M и M_1. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема, то производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ (по направлению $\bar{l}$) вычисляется по формуле: $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$,

где α- угол, образованный вектором $\bar{l}$ с осью OX. В случае функции трёх переменных $U = f(x, y, z)$ производная по направлению $\bar{l}$ определяется аналогично и вычисляется по формуле $\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$, где

$\alpha = \angle(\bar{l}, x)$, $\beta = \angle(\overline{l, y})$, $\gamma = \angle(\overline{l, z})$, т.е. α,β, γ -углы между направлением $\bar{l}$ и соответствующими координатными осями, а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\bar{l}$, причём $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Производная от функции в данном направлении характеризует скорость изменения функции в этом направлении. Производная $\dfrac{\partial U}{\partial l}$ равна нулю по любому направлению, касательному к поверхности уровня. Производная $\dfrac{\partial U}{\partial l}$ достигает своего наибольшего значения по направлению нормали (см. п. 6) к поверхности уровня.

Пример. Найти производную функции $z = 2x^2 - 3y^2$ в точке М(1;0) по направлению, составляющему с ОХ угол в 120^0.

Решение. Найдём частные производные и их значения в данной точке М: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x$; $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 4$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -6y$; $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 0$.

Далее определяем $\cos\alpha = \cos(90^0 + 30^0) = -0{,}5$, $\sin\alpha = \sin 120^0 = \sin(90^0 + 30^0) = \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Применяя формулу (1), получим искомую производную $\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_M = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 0 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -2$. Знак минус показывает, что функция в данной точке по данному направлению убывает. Известно, что направляющие косинусы вектора $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_Z\bar{\kappa} = \{a_x, a_y, a_Z\}$ находятся по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}, \text{ где } \quad |\bar{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_Z)^2}$$

2. Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор, выходящий из точки M и имеющей своими координатами частные производные функции, т.е. $gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j} = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right\}$. На основании этого определения проекции вектора $gradz$ на координатной оси записывается так: $Пр_{OX}(gradz) = \frac{\partial z}{\partial x}$, $Пр_{OY}(gradz) = \frac{\partial z}{\partial y}$. Предполагается при этом, что функция $z = f(x, y)$-однозначная непрерывная, имеющая непрерывные частные производные, т.е. дифференцируемая. Значит, производная данной функции в направлении $\bar{l}$ связана с градиентом функции следующей формулой: $\frac{\partial z}{\partial l} = Пр_l(gradz)$, т.е. производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования. Градиент функции двух переменных в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции . Значит направление вектора $gradz$ в каждой точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке, т.е. при $\bar{l} = gradz$ производная $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)$ принимает наибольшее значение, равное модулю вектора $gradz$, т.е. $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{Наиб.} = |gradz| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$, при $\bar{l} = gradz$. В этом состоит основное свойство градиента: градиент указывает направление наибольшего роста функции в данной точке.

Он равен $gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$. Градиент функции трёх переменных в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

8. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частные производные высших порядков.

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y);\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и выше третьего порядков; например:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y);\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y) \text{ и т.п.}$$

Символ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ обозначает частную производную третьего порядка функции $z = f(x, y)$, вычисленную три раза по x; символ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ обозначает, что от функции z взята частная производная третьего порядка, причём она вычисляется два раза по x и от полученной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ вычислена один раз производная по y. Имеет место такая важная теорема: <u>если частные производные непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования.</u> Таким образом, так называемые <u>смешанные производные</u>, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования , равны между собой, если они непрерывные функции, например: $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Пример. Найти частные производные второго порядка от следующих функций: $z=ln(x^2+y^2)$;

Решение. Находим сначала частные производные первого порядка. Затем их дифференцируем вторично:

Находим $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$; далее

находим $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(z'_x\right)'=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{x^2+y^2}=\frac{2\left(y^2-x^2\right)}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{-2x\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{2(x^2+y^2)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Дифференциалы высших порядков.

Дифференциалом второго порядка от функции $z=f(x,y)$ называется дифференциал от её полного дифференциала (первого порядка), т.е. $d^2z=d(dz)$.

Аналогично определяются дифференциалы функции z порядка выше второго , например: $d^3z=d(d^2z)$, т.е. дифференциалом третьего порядка от функции z есть дифференциал от её дифференциала второго порядка. Вообще, $d^nz=d(d^{n-1}z)$, $\forall n\in N$. Если $z=f(x,y)$, где аргументы x и y –независимые переменные и функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам: $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Вообще, при наличии соответствующих производных справедлива символическая формула для дифференциала порядка n: $d^n z=\left(dx\cdot\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$, которая формально раскрывается по биноминальному закону. Если $z=f(x,y)$, где аргументы x и y являются функциями одного или нескольких независимых переменных, то $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y$

Если x и y – независимые переменные, то dx и dy - величины постоянные, поэтому $d^2x=d(dx)=0$, $d^2y=d(dy)=0$. Заметим, что следующая запись означает $dx^2=(dx)^2=dx\cdot dx$, выражение $\frac{\partial^3}{\partial x^2}dx^2\frac{\partial}{\partial y}dy\cdot z$ следует понимать, как выражение $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy$ и т.д.

Пример. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z=2x^2-3xy-y^2$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=4x-3y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-3x-2y$ поэтому $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(4x-3y)dx-(3x+2y)dy$. Далее находим

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(4x-3y)'_x=4$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(4x-3y)'_y=-3$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-(3x+2y)'_y=-2$. Имеем: $d^2z=4dx^2-6dxdy-2dy^2$.

9. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ.

Случай одной независимой переменной.

Пусть $y=y(x)$-неявная функция , т.е. она определяется из уравнения $F(x,y)=0$, не разрешённого относительно y. Это значит, что при каждом значении x_0, при котором неявная функция определена, она принимает единственное значение y_0 так, что $F(x_0, y_0) = 0$. Если $F(x, y)$ - дифференцируемая функция переменных x и y, то производная неявной функции $y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y) = 0$, может быть найдена по формуле $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$, при условии, что $F'_y(x, y) \neq 0$.

Пример . Найти y'_x, если функция $y(x)$ задана неявно уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, где a -величина постоянная.

Решение. Обозначим левую часть данного уравнения $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$. Найдём её частные производные

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay,\; F'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax.$$

Применим формулу $y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = -\dfrac{x^2 - ay}{y^2 - ax}$.

Случай нескольких независимых переменных.

Если функция z от двух независимых переменных x и y задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, не разрешённым относительно z, то говорят, что z(x,y) есть неявная функция переменных x и y. Если $F(x, y, z)$ -дифференцируемая функция переменных x , y и z и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частные производные этой неявно заданной функции могут быть найдены по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

10. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Касательной плоскостью к поверхности в точке М(точка касания) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к различным кривым, проведённым на поверхности через эту точку М. Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания М.

А. Если уравнение поверхности в декартовой системе координат задано в <u>явной форме</u> $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ - дифференцируемая функция, то <u>уравнение касательной плоскости</u> в точке $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M \cdot (y - y_0), \quad \text{где} \quad z_0 = f(x_0, y_0),$$

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = f_x'(x_0, y_0)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = f_y'(x_0, y_0)$, а x, y, z-текущие координаты касательной плоскости, x_0,y_0,z_0 – координаты точки касания M_0.

<u>Уравнения нормали к поверхности</u> имеют вид

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Б. В случае, когда уравнение гладкой поверхности <u>задано в неявной форме</u>, т.е. в виде уравнения $F(x, y, \mathrm{z}) = 0$ и $F(x_0, y_0, \mathrm{z}_0) = 0$, то <u>уравнение касательной плоскости</u> в точке $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$ плоскости имеет вид:

$$F_x'(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F_z'(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0,$$

<u>Уравнение нормали</u> к поверхности записывается в виде

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M},$$ где $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M$ - значения частных производных функции $F(x, y, \mathrm{z})$ в точке М (x_0, y_0, z_0), x, y, z - координаты касательной плоскости.

<u>Пример .</u> Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 3y^2$ в точке, для которой x=1,y=1.

Решение. Прежде всего найдём аппликату точки касания $z_0 = z(x_0, y_0) = z(1,1) = 4$.

Итак, точка касания есть M(1,1,4). Находим частные производные данной поверхности, заданной в явной форме: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 6y$ и вычислим их значения в точке M с координатами $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 4: \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 6$. Имеем $z - 4 = 2(x-1) + 6(y-1)$, или $2x + 6y - z - 4 = 0$ -уравнение касательной плоскости, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-4}{-1}$ -уравнение нормали.

8. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными всех порядков до (n+1)-го порядка включительно в окрестности точки (a,b). Тогда в рассматриваемой окрестности справедлива формула Тейлора:

$$f(x, y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}[f'_x(a,b)\cdot(x-a) + f'_y(a,b)\cdot(y-b)] +$$

$$+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b) +$$

$$+ f''_{xy}(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b) + f''_{yy}(a,b)\cdot(y-b)^2] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \cdot f(a,b) + R_n(x, y),$$

где $R_n(x, y)$ -остаточный член.

Формулу Тейлора можно представить в других обозначениях, если обозначить приращение функции в виде $\Delta f(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x, y)$, где h и k-соответствующие приращения аргументов x и y. Тогда

$$\Delta f(x,y)=df(x,y)+\frac{1}{2!}d^2 f(x,y)+\frac{1}{3!}d^3 f(x,y)+...+\frac{1}{n!}d^n f(x,y)+R_n,$$

Где $R_n=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x+\theta h, y+\theta k)$, $0<\theta<1$. Частный случай формулы Тейлора при a=b=0 называется формулой Маклорена.

12. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные теоретические сведения.

Говорят, что функция $u=f(x,y,z,\ldots,t)$ при некоторой системе значений $x_0, y_0, z_0,\ldots,t_0$ независимых переменных имеет максимум (минимум), если приращение функции

$$\Delta u=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z,..., t_0+\Delta t)-f(x_0, y_0, z_0,..., t_0)$$

отрицательно (положительно) при всевозможных, достаточно малых по абсолютной величине $\Delta x, \Delta y, \Delta z,\ldots,\Delta t$.

Максимум или минимум функции называется экстремумом. Экстремум здесь понимается в локальном смысле. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума. Для функции двух переменных $f(x,y)$ удобно определение локального экстремума следующее:

Определение. Функция $f(x,y)$ имеет максимум (минимум) в точке $M_0(x_0,y_0)$, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке $M(x,y)$ в достаточно малой окрестности точки M_0, то есть, $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ (или соответственно $f(x_0,y_0)<f(x,y)$) для всех точек $M(x,y)$, удовлетворяющих условию $|M_0M|<\sigma$, где σ – достаточно малое положительное число.

Необходимые условия экстремума.

Если дифференцируемая функция $u=f(x,y,z,\ldots,t)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0,y_0,z_0,\ldots,t_0)$, то или ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)}{\partial y} = 0$;

$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)}{\partial z} = 0; \ldots;$ $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)}{\partial t} = 0$

или частные производные при этих значениях не существуют. Система равенств эквивалентна одному уравнению:

$$df(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0) = 0,$$

Итак, в точке экстремума первый дифференциал функции равен нулю или не существует. Количество уравнений в системе равно числу независимых переменных.

Точки, в которых вычисляются решение, называются стационарными (или критическими) точками. Эти точки являются только подозрительными на экстремум, так как не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Достаточные условия экстремума.

Для того, чтобы решить вопрос, какие стационарные точки, получаемые из решения системы уравнений:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \ldots;$ $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, доставляют функции максимум или минимум, или ни то, ни другое, обращаются к исследованию дифференциала второго порядка этой функции.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$ - стационарная точка функции $f(x, y, z, \ldots, t)$, тогда если дифференциал второго порядка сохраняет постоянный знак при всевозможных достаточно малых по модулю приращениях аргументов, то функция в точке M_0 имеет экстремум, причем максимум будет в том случае, когда $d^2 f(M_0) < 0$, а минимум – когда $d^2 f(M_0) > 0$.

Если дифференциал второго порядка $d^2 f(M_0)$ не сохраняет постоянного знака, то функция в точке M_0 не имеет ни максимума, ни минимума. Если же $d^2 f(M_0)$ обратится в нуль, то решение вопроса об экстремуме требует исследования дифференциалов порядка выше, чем второй.

Правило определения экстремума функции
двух независимых переменных.

Чтобы исследовать на экстремумы функцию $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x, y, следует:

1) Определить стационарные точки, в которых функциямо- жет достигать экстремума. Для этого надо решить систему уравнений $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (необх. условия экстремума)

2) Найти частные производные второго порядка

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и вычислить значения вторых частных производных в каждой стационарной точке. Достаточные условия экстремума выражаются с помощью определителя второго порядка. Например, пусть $M_0(x_0, y_0)$ - найденная стационарная точка данной функции. Принято обозначать числа следующими буквами

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2};\ B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y};\ C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

3) Составить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ для каждой стационарной точки. При этом, а) если $\Delta = AC - B^2 > 0$ то экстремум в стационарной точке есть: при A>0 (или C>0) будет минимум, а при A<0 (или C<0) будет максимум; б) если $\Delta = AC - B^2 < 0$, то экстремума в рассматриваемой стационарной точке нет; в) если $\Delta = AC - B^2 = 0$, то вопрос о

наличии или отсутствии экстремума функции в стационарной точке остается открытым.

Пример . Исследовать на экстремум функцию
$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$

Решение: 1) Найдем частные производные первого порядка $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x$

Воспользуемся необходимым условием экстремума:
$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$; составляем систему уравнений $\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$.

После сокращения на 6 имеем $\begin{cases} x^2 - 6y = 0 \\ y^2 - 6x = 0 \end{cases}$. Решаем систему.

Из первого уравнения находим $y = \dfrac{x^2}{6}$, подставляя его во второе уравнение, получим $x^4 - 216x = 0$, или $x(x^3 - 6^3) = 0$, или $x(x-6)(x^2 + 6x + 36) = 0$.Откуда имеем $x_1 = 0$; $x_2 = 6$ (остальные два корня уравнения $x^2 + 6x + 36$ будут комплексными, нас они не интересуют); далее из уравнения $y = \dfrac{x^2}{6}$ находим $y_1 = 0$ при $x_1 = 0$ и $y_2 = 6$ при $x_2 = 6$. Итак, получим две стационарные точки $M_1(0,0)$, $M_2(6,6)$

2) Для исследования достаточных условий экстремума нашли частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y$ и составляем определитель

$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ для каждой стационарной точки а) $M_1(0{,}0)$:

$A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 0$; $B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = -36$; $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 0$

Получим число $\Delta = AC - B^2 = -(-36)^2 = -36 < 0$. Следовательно, в точке $M_1(0{,}0)$ нет экстремума (ни максимума, ни минимума);

б) $M_2(6{,}6)$: $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x_2=6 \\ y_2=6}} = 72 > 0$;

$B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x_2=6 \\ y_2=6}} = -36$; $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x_2=6 \\ y_2=6}} = 72$. Получим число $\Delta = AC - B^2 = 72 \cdot 72 - 36^2 = 3888 > 0$.

Следовательно, экстремум есть в точке $M_2(6{,}6)$, причем минимум, так как A>0. Минимум этот равен значению функции при x=6, y=6: $z_{\min} = z(6{,}6) = -2$.

13. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Условный экстремум.

Во многих задачах на отыскание экстремума функции ее переменные оказываются не независимыми переменными, а связанными друг с другом некоторыми добавочными условиями (так называемыми уравнениями связи). Здесь мы имеем дело с задачами на условный экстремум.

Условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ двух переменных называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что аргументы x, y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$ (уравнение связи). Для отыскания условного экстремума функции $f(x, y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ применяют метод Лагранжа:

Составляют функцию Лагранжа. Обозначается Ф или L.

$L(x, y, \alpha) = f(x, y) + \alpha \cdot \varphi(x, y)$ где α - неопределенный постоянный множитель, и ищут обычный экстремум этой вспомогательной функции $L(x, y, \alpha)$.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \alpha \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \alpha \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \alpha} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Из этой системы трех уравнений можно найти неизвестные x, y и α.

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа

$d^2L = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 + 2\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dxdy$, для найденных значений x, y и α, полученных из системы уравнений , при условии, что dx и dy связаны уравнением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \quad \left(dx^2 + dy^2 \neq 0\right).$$

А именно, функция $f(x, y)$ имеет условный максимум, если $d^2L < 0$ и условный минимум, если $d^2L > 0$.

В частности, если дискриминант $\Delta > 0$ для функции Лагранжа (3) в стационарной точке, то в этой точке имеется условный экстремум данной функции $f(x,y)$, причем условный максимум $f(x,y)$, если A<0 (или C<0), и условный минимум $f(x,y)$, если A>0 (C >0), где $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix}$.

Аналогично находится условный экстремум функции трех и большего числа переменных при наличии одного или нескольких уравнений связи (число которых, однако, должно быть меньше числа переменных). Здесь приходится вводить в функцию Лагранжа столько неопределённых множителей, сколько имеется уравнений связи.

Пример . Определить условный экстремум функции

$z = 6 - 4x - 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Геометрически данная задача сводиться к нахождению наибольшего и наименьшего значений аппликаты z плоскости $z = 6 - 4x - 3y$ для точек пересечения её с прямым круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 1$. Составим функцию Лагранжа $L(x,y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, где λ - неопределённый множитель; $x^2 + y^2 - 1 = 0$ -уравнение связи.

Находим $\frac{\partial L}{\partial x} = -4 + 2\lambda x$, $\frac{\partial L}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$.

Необходимые условия экстремума для функции L получаем из следующей системы уравнений $\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Решая эту систем, получаем два решения $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = \frac{3}{5}$ и $\lambda_2 = -\frac{5}{2}, x_2 = -\frac{4}{5}, y_2 = -\frac{3}{5}$. Далее, находим $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$. Значит, $d^2 L = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$.

При $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = \frac{3}{5}$ имеем $d^2 L > 0$ и, следовательно, в этой точке функция имеет условный минимум: $z_{\min} = z\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right) = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1$.

При $\lambda_2 = -\frac{5}{2}, x_2 = -\frac{4}{5}, y_2 = -\frac{3}{5}$ имеем $d^2 L < 0$ и, следовательно, в этой точке функция имеет условный максимум: $z_{\max} = z\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right) = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11$.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области.

Функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает в ней своего наибольшего и наименьшего значений или во внутренних точках этой области, являющимися стационарными точками или в точках, лежащих на границе области.

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, надо:

1) Найти стационарные точки, расположенные внутри данной области, и вычислить значения функции в этих точках;
2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;
3) Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание 1. В данном случае нет необходимости исследовать функцию на экстремум с помощью частных производных второго порядка. Требуется найти лишь стационарные точки и значения функции в них.

Замечание 2. Для функции $z = f(x, y)$ линии границы области являются функцией одной переменной: либо $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, либо $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$,

поэтому на соответствующих участках границы данная функция является функцией одной переменной.

Пример . Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(2 - x - y)$ внутри замкнутого треугольника $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$ (рис.6).

Решение.1) Находим стационарные точки внутри ΔAOB. Имеем : частные производные $z'_x = 4xy - 3x^2 y - 2xy^2 = xy(4 - 3x - 2y)$;

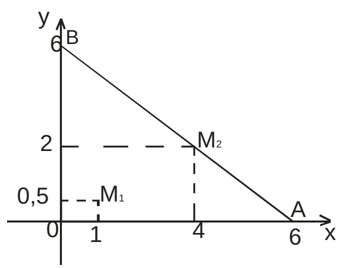

Рис. 6.

Приравнивая эти производные к нулю, получим систему уравнений: $\begin{cases} xy(4 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2(2 - x - 2y) = 0 \end{cases}$

Так как $x > 0$, $y > 0$ для нахождения стационарных точек внутри ΔAOB, имеем систему $\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0 \end{cases}$, откуда

$x_1 = 1$; $y_1 = 0{,}5$, из которой находим единственную стационарную точку $M_1(1;0{,}5)$, где значение функции $z(1;0{,}5) = \frac{1}{4}$.

2) Переходим к исследованию функции $z(x;y)$ на границах области, которая состоит из отрезков ОА оси ОХ, ОВ оси ОУ и отрезка АВ прямой.

а) На оси ОХ отрезок ОА: $y=0$, и заданная функция $z\big|_{y=0} = z(x,0) = 0$, $0 \le x \le 6$; аналогично, на оси ОУ отрезок ОВ: $y=0$, где также заданная функция $z\big|_{x=0} = z(0,y) = 0$, $0 \le y \le 6$

б) Исследуем функцию на отрезке АВ: где прямая АВ задана уравнением $x+y=6$, $0 \le x \le 6$. Поэтому функция на этой прямой будет зависеть от одной переменной x, где $y = 6 - x$:

$z\big|_{AB} = z(x) = x^2(6-x)\cdot(2-x-(6-x)) = -4x^2(6-x)$, $0 \le x \le 6$.

На концах отрезка [0,6]: $z(0) = z(6) = 0$. Находим критические точки функции $z(x) = -24x^2 + 4x^3$. Имеем $z'_x = -48x + 12x^2$. Решая уравнение $12x(x-4) = 0$, получаем $x_2 = 4$; соответственно, $y_2 = 6 - 4 = 2$. Итак $M_2(4;2)$-критическая точка на отрезке АВ; значение функции $z\big|_{M_2} = z(4,2) = -128$. Следовательно, $z = \dfrac{1}{4}$ внутри ΔAOB в точке $M_1(1;0{,}5)$; $z = 0$ на сторонах ОВ и ОА и в вершинах ΔAOB; $z = -128$ на стороне АВ. Итак, наибольшего значения функция достигла $z_{наиб} = z(1;0{,}5) = \dfrac{1}{4}$ в точке $M_1(1;0{,}5)$, а наименьшего значения $z_{наим.} = z(4;2) = -128$ на границе области в точке $M_2(4;2)$.

14. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основные понятия

Дифференциальным уравнением называют уравнение типа $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, где x - независимая переменная, $y = f(x)$-искомая функция, $y', y'', ..., y^{(n)}$-ее производные. Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = f(x)$, которая при подстановке ее и ее производных обращает уравнение в тождество. Порядком дифференциального уравнения называется наибольший порядок n входящей в него производной.

Интегрированием дифференциального уравнение называется процесс нахождения его решения.

Общим решением дифференциального уравнения порядка n называется такое решение $y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которые являются функцией от независимой переменной х и от n произвольных независимых постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$. Частным решением называется решение, полученное из общего решения при некоторых конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$. Привести дифференциальное уравнение к квадратурам означает привести это уравнение до вычисления интегралов. Если интеграл вычисляется, то говорят уравнение, что уравнение вычисляется в квадратурах.

Дифференциальное уравнение первого порядка

Разрешением относительно производной называется дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$ которое можно записать в виде $y' = f(x, y)$.

Уравнение с разделяющимися переменными.

Решение уравнений вида сводится к нахождению неопределенных интегралов, если функция двух переменных $f(x, y)$ представима в виде произведения двух функций одной переменной $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$.

Заменяя y' на $\frac{dy}{dx}$, получаем $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$

Уравнением с разделяющимися переменными называются уравнения вида $M(x)dx + N(y)dy = 0$

Интегрируя обе части последнего неравенства, получаем $\int M(x)dx = -\int N(y)dy$.

Общим интегралом дифференциального уравнения называется его решение, которое находится в виде $F(x,y)=C$ или $F(x,y,C)=0$.

Однородные уравнения и уравнения, приводящие к однородным

Однородной функцией порядка α называется функция $f(x,y)$, удовлетворяющая условию $f(tx,ty)=t^{\alpha}f(x,y),\alpha\geq 0$. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение $y'=f(x,y)$, где $f(x,y)$-однородная функция нулевого порядка. Заменой $y=xu(x),y'=u(x)+xu'(x)$. Оно становится к уравнению с разделяющимися переменными.

К однородным сводятся уравнения вида $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение $y'+p(x)y=q(x)x^{\alpha}y^{\alpha}$.

Для интегрирования этого уравнения сделаем замену $y=u(x)v(x)=uv,y'=u'v+uv'$. Таким образом вместо одной независимой функции вводятся две. При этом появляется возможность выбрать одну из функций $u=u(x)$ или $v=v(x)$ исходя из соображений удобства. Подставим у и у' в дифференциальное уравнение. Получим $u'v+uv'+p(x)uv=q(x)y^{\alpha}$,

Или $u'v+u(v+'+p(x)v)=q(x)y^{\alpha}=q(x)u^{\alpha}v^{\alpha}$.

Положим $v'+p(x)v=0$, тогда получим уравнение с разделяющимися переменными $\dfrac{dv}{dx}+p(x)v=0$. Проинтегрировав это уравнение, найдем функцию $v=v(x)$. Подставив ее в уравнение, получим дифференциальное уравнение относительно функции $u=u(x)$, после интегрирования которого найдем искомую функцию $y=u(x)v(x)$.

Уравнение в полных дифференциалах.

Уравнением в полных дифференциалах называется

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, где левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u=u(x,y)$, т. е.

$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy,$$

Или $P(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx,\ Q(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy$. Из первого из этих уравнений находим $u=u(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)$.

Можно доказать, что если выполнено условие $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$,

то уравнение Pdx+Qdy=0 является уравнением в полных дифференциалах.

Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x).$$

Уравнение называется однородным, если q(x)=0.
Решение уравнения ищутся в виде произведения двух неизвестных функций $y=u(x)\cdot v(x)$. Так как

$y'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$, $u'v+uv'+puv=q$ или

$u'v+u(v'+pv)=q.$ И, полагая $v'+pv=0,$

Найдем $v=v(x).$

Основное уравнение примет вид $u'v=q$. Это уравнения является также решением уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим функцию $u=u(x)$. Тогда функция $y=v(x)v(x)$ будет решением уравнения . Таким образом, интегрирование линейного дифференциального уравнения первого порядка сводится к интегрированию двух уравнений с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0, n>1$.

Разрешенным относительно старшей производной называется уравнение $y^n = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$.

Условиями Коши или начальными условиями для уравнения n-го порядка называются соотношения $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0,..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, где x_0, y_0, y'_0,…,$y_0^{(n-1)}$-заданные числа. Задача нахождение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условием, называется задачей Коши. Некоторые уравнения высших порядков допускают понижение порядка. Для примера рассмотрим дифференциальные уравнения второго порядка: $F(x,y',y'')=0,\ \ F(y,y',y'')=0$. В первом случае замена $z=y'$, $z'=y''$ приводит к уравнению первого порядка $F(x,z,z')=0$; а во- втором замена $y'=\frac{dy}{dx}=p=p(y)$, $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$.

Также сводится к уравнению первого порядка $F\left(y,p,\frac{dp}{dy}\right)=0.$

15. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентам называется уравнение вида $y''+py'+qy=r(x)$, где p, q- некоторые числа; r(x)-функция от x.

Однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение, в котором правая часть r(x) равна нулю: $y''+py'+qy=0$. Общее решение уравнения равно сумме какого либо частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения . Опишем сначала способ нахождения общего решения однородного уравнения . Характеристическим уравнением для однородного уравнения называется квадратное уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ Относительно неизвестной λ . В соответствии со знаком дискриминанта D=p^2-4q возможны три случая:

1. D>0: характеристическое уравнение имеет два различных корня λ_1 и λ_2;
2. D=0: характеристическое уравнение имеет один корень λ_0;
3. D<0: действительных корней характеристическое Уравнение не имеет. В этом случае находятся числа $\alpha = -p/2,\ \beta = \sqrt{q - p^2/4}$.

Найдем решение уравнения для всех этих случает.

1. Если характеристическое уравнение имеет два различных корня $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где C_1, C_2—произвольные постоянные.
2. Если характеристическое уравнение имеет единственный корень λ_0, то общее решение уравнения имеет вид $y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_0 x}$, где C_1, C_2—произвольные постоянные.
3. Характеристическое уравнение не имеет корней, то общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_2 e^{\alpha x}\cos\beta x$, где C_1, C_2—произвольные постоянные, где $\alpha = -p/2,\ \beta = \sqrt{q - p^2/4}$.

Способы нахождения частных решений неоднородного уравнения зависят от вида правой части и в явном виде находятся только для функций f(x) специального вида.

Пусть f(x) имеет вид $y = e^{\alpha x}(Q(x)\sin\beta x + P(x)\cos\beta x)$, где α, β - некоторые числа, причем β не равно нулю, Q(x), P(x)-многочлены от x. В этом случае частное решение уравнения ищется в виде $y = x^z e^{\alpha x}\left(U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x\right)$, где U(x),V(x)-многочлены, степени которых равны наибольшей из степеней многочленов P(x) и Q(x). При этом показатель s выбирается по следующему правилу:

1. z=0, если $(\alpha^2-\beta^2+\alpha p+q)^2+(2\alpha+p)^2\neq 0$;
2. z=1, $\begin{cases}\alpha^2-\beta^2+\alpha p+q=0,\\ 2\alpha+p=0\end{cases}$

Многочлены U(x) и V(x) указанной степени в формуле записываются в общем виде с произвольными коэффициентами. Затем находится производные y' и y'' функции . После подстановки y, y' и y'' в уравнение получается линейная система уравнений для определения коэффициентов многочленов U(x) и V(x). Пусть теперь правая часть уравнения имеет вид

$f(x)=e^{\alpha x}P(x)$, где α -некоторое число, P(x)- многочлен от x

Частное решение уравнения ищется в виде $y=x^z e^{\alpha x}U(x)$,
где U(x)-многочлен с неопределенными коэффициентами, степень которого равна степени многочлена P(x). При этом показатель z выбирается по следующему правилу:

1) Z=0, если $\alpha^2+\alpha p+q\neq 0$,

2) Z=1, $\begin{cases}\alpha^2+\alpha p+q=0,\\ p^2-4q\neq 0\end{cases}$ 3) Z=2, $\begin{cases}\alpha^2+\alpha p+q=0,\\ p^2-4q=0\end{cases}$

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Уравнение $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$

Представляет собой общий вид дифференциального уравнения второго порядка с правой частью f(x). Здесь $a_1(x), a_2(x), f(x)$ -некоторые непрерывные функции.

Уравнение называется однородным, если f(x)=0.

Задачей Коши называется задача решения уравнения при заданных начальных условиях $y(_0x) = y_0, y'(x_0) = y'_0$. Линейными независимыми решениями однородного уравнения называется решение $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, для которого определитель Вронского (вронскиан)

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall x,$$

И линейно зависимыми, если $W(y_1(x), y_2(x)) = 0$ для некоторых x. Известно, что всякое линейное уравнение однородное уравнение $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = 0$, где $a_1(x)$ и $a_2(x)$ - непрерывные функции, имеет два линейно независимых решения. Фундаментальной системой решений называется система двух линейно независимых функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, являющихся решениями однородного уравнения. Для решений уравнений вида применяется метод вариации произвольных постоянных, который заключатся в том, что общее решения уравнения ищется в виде $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$-функции, которые определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}.$$ Из системы находится

$$C_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}, \quad C_1'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}.$$ Тогда

$$C_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}dx + C_1, \quad C_1(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} + C_2$$

16. СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + f_2(x), \end{cases}$$

где $f_1(x)$и $f_2(x)$-непрерывные функции. Система называется однородной, если $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, $\forall x$. Решением системы называется вектор-функция $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, координатные функции которой для всех x удовлетворяют каждому из равенств. Задача Коши для системы формируется следующим образом: найти решение y=y(x) системы, которые при $x=x_0$ удовлетворяют условиям $y_1(x_0)=y_1^0$, $y_2(x_0)=y_2^0$, где y_1^0 и y_2^0-заданные числа. Если ввести векторы ***y***, $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ и матрицу $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, то систему можно записать в матричном виде $y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Ay + f(x)$. Вектор-функция $y_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \end{pmatrix}$и $y_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \end{pmatrix}$ называются линейно независимыми, если существуют числа α_1 и α_2, такие что

$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0,$ и линейно независимыми, если основное тождество выполняется в единственном случае, когда $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$. Фундаментальной системой решений однородной системы $y' = Ay$ называется два ее линейно независимых решения $y_1(x)$, $y_2(x)$. Общим решением системы

$y' = Ay$ называется решение $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, y_1, y_2 –фундаментальная система решений. Частным решением y_0 системы (40) называется любое решение, удовлетворяющее ей. Общим решением неоднородной системы является вектор-функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ - фундаментальная система, $y_0(x)$ - частное решение.

Решение задач

Задача 1.

$$\left(e^{2x}+5\right)dy + ye^{2x}dx = 0, \quad \frac{dy}{y} + \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+5} = 0,$$

$$\ln|y| + \frac{1}{2}\int \frac{de^{2x}}{e^{2x}+5} = \ln|c|, \quad \ln|y| + \frac{1}{2}\ln|x+5| = \ln|c|,$$

$$\ln\left|y\cdot\sqrt{x+5}\right| = \ln|c|, \quad c = y\cdot\sqrt{x+5}$$

$$\textit{Ответ}: y(x,y) = y\cdot\sqrt{x+5}$$

Задача 2.

$$y' = \frac{x+2y}{2x-y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+2\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}}, \quad \frac{y}{x} = u, \quad y = x\cdot u, \quad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+2u}{2-u}$$

$$\frac{xdu}{dx} = \frac{\ln x}{3}, \quad du = \frac{\ln xdx}{3x}, \; u = \tfrac{1}{3}\ln x + c, \; z = \frac{x\ln x}{3} + cx,$$

$\dfrac{1}{y} = \dfrac{x\ln x}{3} + cx$ -общее решение, $y(1) = 3, \Rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{\ln 1}{3} + c$,

$$c = \frac{1}{3}, \; \frac{1}{y} = \frac{x\ln x}{3} + \frac{x}{3}, \; \frac{1}{y} = \frac{x\ln x + x}{3}, \; \frac{1}{y} = \frac{x\ln x + x}{3}$$

$$\textit{Ответ}: y = \frac{3}{x(\ln x + 1)}.$$

Задача 3.

$$y''' - 4y'' + 4y' = (x-1)e^x$$

$y = \bar{y} + У$, $k^3 - 4k^2 + 4k = 0$ - характеристическое ур-е

$k_1 = 0$, $k_{2,3} = 2$, $\bar{y} = c_1 + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 x \cdot e^{2x}$ - общее решение однородного уравнения

$$У = x^r e^{2x}\left(Pe(x)\cos\beta x + Qe(x)\sin\beta x\right)$$

$$\alpha = 1\ ,\ \beta = 0\ ,\ \alpha + \beta_i = 0\ ,\ r = 2, l = 1$$

$$У = e^x(Ax + B),\ У' = e^x(Ax + B + A)$$

$$У^{//} = e^x(Ax + B + 2A), У^{///} = e^x(Ax + B + 3A)$$

$$e^x(Ax + B + 3A) - 4e^x(Ax + B + 2A) + 4e^x(Ax + B + A) = (x-1)e^x,$$

$$Ax + B - A = (x-1),\ \begin{cases} A = 1 \\ B - A = -1 \end{cases},\ A = 1, B = 0\ , У = x \cdot e^x\ ,$$

$$y = c_1 + (c_2 + c_3 x) \cdot e^{2x} + xe^x.$$

Ответ: $y = c_1 + (c_2 + c_3 x) \cdot e^{2x} + xe^x$

Задача 4

$$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x; y(-1) = \frac{3}{2}$$

Решим однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному:

$$y' - \frac{y}{x+2} = 0,\ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+2},\ \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+2} + \ln|c|,\ \ln|y| = \ln|x+2| + \ln|c|$$

$$y = c(x+2)$$

Используя метод вариации произвольных постоянных, найдём частное решение искомого уравнения ,а затем общее:

$$y' = c(x)(x+2),\ y' = c'(x)(x+2) + c(x)\cdot 1,$$

$$c'(x)(x+2) + c(x) - \frac{c(x)(x+2)}{x+2} = x^2 + 2x\ ,$$

$$\frac{dc}{dx}(x+2) = x(x+2),\ \int dc = \int xdx$$

$c(x) = \frac{1}{2}x^2 + \bar{c}$, $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + \bar{c}\right)(x+2)$ - общее решение.

Найдём частное решение $\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{2}(-1)^2+c\right)(-1+2); c=1$.

$y=\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)(x+2)$ - частное решение. *Ответ*: $y=\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)(x+2)$

Задача 5.

Найти решение задачи Коши.

$$y'+\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}e^x,\quad y(1)=e,\ y=uv,\ y'=u'v+v'u$$

$$u'v+v'u+\frac{uv}{x}=\frac{x+1}{x}e^x, u'v+u\left(v'+\frac{v}{u}\right)=\frac{x+1}{x}e^x$$

$$v'+\frac{v}{u}=0,\ \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}, \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}, \ln|v|=-\ln|x|+\ln|c|$$

$$v=\frac{c}{x},\ vx=c,\ c=1,\ v=\frac{1}{x},\ \frac{u'}{x}=\frac{x+1}{x}e^x,\ u'=(x+1)e^x$$

$$\frac{du}{dx}=(x+1)e^x,\ du=(x+1)e^x dx,\ \int du=\int(x+1)e^x dx$$

$$u=xe^x+c,\ udx+xdu=\sqrt{2+u^2}dx+udx,\ \Big|x\sqrt{2+u^2},\ x\neq 0.$$

$$\frac{du}{\sqrt{2+u^2}}=\frac{dx}{x},\ \ln\left|u+\sqrt{2+u^2}\right|=\ln|x|+\ln|c|,\ u+\sqrt{2+u^2}=cx$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{2+\frac{y^2}{x^2}}=cx,\ \frac{y}{x}+\sqrt{\frac{2x^2+y^2}{x}}=cx, c=\frac{y+\sqrt{2x^2+y^2}}{x^2}$$

Ответ: $c=\frac{y+\sqrt{2x^2+y^2}}{x^2}$

Задача 6.

Найти общий интеграл

$$y'=\frac{x+8y-9}{10x-y-9},\ \frac{dy}{dx}=\frac{x+8y-9}{10x-y-9},\quad \begin{array}{l} y=ux \\ dy=udx+xdu \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -1-80=-81,\ \begin{cases} x+8y-9=0 \\ 10x-y-9=0 \end{cases},\ \begin{cases} x=9-8y \\ 90-80y-y-9=0 \end{cases}.$$

$$81-81y=0,\ y=1,\ x=9-8\cdot 1=1,\ \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=1 \end{cases},\ \begin{cases} x=u+1 \\ y=v+1 \end{cases}.\ dx=du.$$

$$dy=dv,\ v'=\frac{u+1+8v+8-9}{10u+10-v-1-9},\ v'=\frac{u+8v}{10u-v},\ v'=\frac{1+8\frac{v}{u}}{10-\frac{v}{u}}.$$

Делаем замену $\frac{v}{u}=z$, $v=uz$, $v'=z+z'u$, $z+z'u=\frac{1+8z}{10-z}$,

$z'u=\frac{1+8z+z^2-10z}{10-z}$ и $\frac{dz}{du}u=\frac{z^2+8z-10z+1}{10-z}$, $\frac{u}{du}=\frac{z^2-2z+1}{(10-z)dz}$,

$\frac{du}{u}=\frac{(10-z)dz}{z^2-2z+1}$, $\frac{du}{u}=\frac{(10-z)dz}{(z-1)^2}$ и $\int\frac{du}{u}=\int\frac{(10-z)dz}{(z-1)^2}$ т.е.

$\ln|c|+\ln|u|=\frac{9}{1-z}-\ln|z-1|$, $\frac{9}{1-z}-\ln|z-1|-\ln u=c$,

$\frac{9u}{u-v}-\ln|v-u|=c$.

Ответ: $\frac{9(x-1)}{x-y}-\ln|y-x|=c$

Задача 7.

Найти решение задачи Коши.

$$y''+9y=\frac{9}{\sin 3x},\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=4,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\pi}{2}.$$

$k^2+9=0$, $k_1=3i$, $k_2=-3i$. $y_{общ}=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$, $c_1=c_1(x)$,

$c_2=c_2(x)$. $\begin{matrix} y_1=\cos 3x \\ y_2=\sin 3x \end{matrix},\ \begin{matrix} y_1'=-3\sin 3x \\ y_2'=3\cos 3x \end{matrix}.$

Пусть $f(x)=\frac{9}{\sin 3x}$.

$$\begin{cases} c_1' \cdot y_1 + c_2' \cdot y_2 = 0 \\ c_2' \cdot y_1' + c_2' \cdot y_2' = f(x) \end{cases}, \begin{cases} c_1' \cdot \cos 3x + c_2' \sin 3x = 0 \\ c_1'(-3\sin 3x) + c_2' \cdot 3\cos 3x = \dfrac{9}{\sin 3x} \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1' = \cos 3x \cdot 3\cos 3x -$$
$$-\sin 3x(-3\sin 3x) = 3$$

$$c_1' = \frac{-y_2 \cdot f}{W} = -\frac{-\sin 3x \cdot \dfrac{9}{\sin 3x}}{3}, \; c_1' = -3, \; c_1 = -3x + c_3.$$

$$c_2' = \frac{-y_1 \cdot f}{W} = -\frac{\cos 3x \cdot \dfrac{9}{\sin 3x}}{3} = 3ctg\, 3x,$$

$$c_2' = \frac{-y_1 \cdot f}{W} = -\frac{\cos 3x \cdot \dfrac{9}{\sin 3x}}{3} = 3ctg\, 3x,$$

$$c_2 = \ln \sin 3x + c_4$$
$$y = (-3x + c_3)\cos 3x + (\ln|\sin 3x| + c_4)\sin 3x.$$
$$y' = (-3)\cos 3x + (-3x + c_3)(-\sin 3x)3 +$$
$$+\left(\frac{1}{\sin 3x}\cos 3x \cdot 3\right)\sin 3x + (\ln|\sin 3x| + c_4)\cos 3x \cdot 3$$

$$\begin{cases} y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4 \\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}, \begin{cases} (\ln + c_4) \cdot 1 = 4 \\ \left(-\dfrac{\pi}{2} + c_3\right)(-1) \cdot 3 = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}, \begin{cases} c_3 = 0 \\ c_4 = 4 \end{cases}.$$

Ответ: $y = -3x\cos 3x + (\ln|\sin\ 3x| + 4)\sin\ 3x$

Задача 8.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

$$N(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

$$M(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y}=x\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{y^2},\ \frac{\partial M}{\partial x}=y\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{y^2}$$

$\dfrac{\partial N}{\partial y}=\dfrac{\partial M}{\partial x}$, => данное уравнение в полных дифференциалах

$$u=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\varphi(y)=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{y}+\varphi(y)=$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}+\ln|x|+\frac{x}{y}+\varphi(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=M=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{y^2}+\varphi'(y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2},$$

$$\varphi'(y)=\frac{1}{y},\ \varphi(y)=\int\frac{dy}{y}+c_2=\ln y+c_2,$$

$$u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\frac{x}{y}=c$$

Ответ: $\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\dfrac{x}{y}=c$

Задача 9.

$$\left(e^{2x}+5\right)dy+ye^{2x}dx=0,\quad \frac{dy}{y}+\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+5}=0,$$

$$\ln|y|+\frac{1}{2}\int\frac{de^{2x}}{e^{2x}+5}=\ln|c|,\quad \ln|y|+\frac{1}{2}\ln|x+5|=\ln|c|,$$

$$\ln\left|y\cdot\sqrt{x+5}\right|=\ln|c|,\quad c=y\cdot\sqrt{x+5}$$

Ответ $: c=y\cdot\sqrt{x+5}$

Задача 10.

Решить дифференциальное уравнение

$$y'-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}\ .$$

Это уравнение Бернулли с $n=1/2$. Полагаем $y(x)=u(x)v(x)$. Получаем уравнение $u'v+uv'-\frac{4}{x}uv=x\sqrt{uv}$ или $u'v+u\left(v'-\frac{4}{x}v\right)=x\sqrt{uv}$. Подберем такую функцию $v(x)$, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. решим дифференциальное уравнение $v'-\frac{4}{x}v=0$. Находим $v=x^4$. Решаем затем уравнение $u'x^4=x\sqrt{ux^4}$ и получаем его общее решение $u=\frac{1}{4}\ln^2|Cx|$. Следовательно, общее решение исходного уравнения $y=uv=\frac{1}{4}x^4\ln^2|Cx|$. Нетрудно заметить, что $y=0$ является особым решение исходного уравнения.

Ответ: y= $\frac{1}{4}x^4\ln^2|Cx|$.

Задача 11.

Решить систему $\begin{cases} x'+y'-y=e^t \\ 2x'+y'+2y=\cos t \end{cases}$ при данных начальных условиях: $t_0=0$, $x_0=-\frac{3}{17}$, $y_0=\frac{4}{17}$.

Сначала приводим систему к нормальному виду

$$\begin{cases} x'=-3y+\cos t-e^t \\ y'=4y-\cos t+2e^t \end{cases}.$$

Первое уравнение дифференцируем по t, после чего вместо y' подставим выражение из второго уравнения системы: $x''=-3y'-\sin t-e^t=-12y+3\cos t-\sin t-7e^t$. Из этого уравнения и первого уравнения исходной системы составим новую систему $\begin{cases} x'=-3y+\cos t-e^t \\ x''=-12y+3\cos t-\sin t-7e^t \end{cases}$, из первого уравнения которой выражаем $3y=-x'+\cos t-e^t$ и, подставляя во второе, получаем $x''-4x'=-3e^t-\cos t-\sin t$. Соответствующее характеристическое уравнение $k^2-4k=0$ имеет корни $k_1=0$, $k_2=4$ $\Rightarrow$ $x_{oo}=C_1+C_2e^{4t}$. Частное решение ищем в виде $x_{чн}=Ae^t+B\cos t+C\sin t$. После определения коэффициентов получаем $x_{чн}=e^t-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\sin t$. Следовательно $x=x_{oo}+x_{чн}=C_1+C_2e^{4t}+e^t-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\sin t$. Найдя производную $x'=4C_2e^{4t}+e^t+\frac{3}{17}\sin t+\frac{5}{17}\cos t$, получаем $3y=-\left(4C_2e^{4t}+e^t+\frac{3}{17}\sin t+\frac{5}{17}\cos t\right)+\cos t-e^t$. Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t \\ y = -\frac{4}{3}C_2 e^{4t} - \frac{2}{3}e^t + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t \end{cases}.$$

Подставляя начальные условия, определяем значения постоянных C_1 и C_2: $\begin{cases} -\frac{3}{17} = C_1 + C_2 + 1 - \frac{3}{17} \\ \frac{4}{17} = -\frac{4}{3}C_2 - \frac{2}{3} + \frac{4}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$

Итак, мы имеем ответ.

Ответ: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t \\ y = \frac{2}{3}e^{4t} - \frac{2}{3}e^t + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t \end{cases}.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам выполнить типовой расчет по вышеуказанной теме курса математики, а также предоставляет студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической и теоретической части курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С. Ч 1. Дифференциальные и интегральные исчисления Москва 2001 г.

2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов Т.Я. Кожевникова – М.: «Оникс 21 век» «Мир и образование», 2003. Ч. 1.

3. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)/ Л.А. Кузнецов.М.: Высш. шк., 2007.204 с.

4. Шипачёв В.С. Высшая математика. Учебник для вузов/В.С. Шипачёв.М.: Высш. шк. 2002.

5. Задачи и упражнения по математическому анализу. Для вузов. Под редакцией Б.П. Демидовича М.: Наука, 1966.
6. Шистяков А. А ,Малышева И. А. , Полозков Д. П. Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Векторный анализ Москва 1987 г.
7. Катрахова А. А. , Федотенко Т. Ф. Дифференциальные уравнения и их приложения. Учебное пособие ВГТУ Воронеж 2009 г

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям и типовым расчетам по дисциплине «Математика» для студентов специальностей 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.04 «Управление в технических системах» , 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 35.03.06 «Агроинженерия», очной формы обучения

Часть 2

Составители: Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Федотенко Галина Федоровна

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.03. 2015.
Уч.-изд. л. 3,8. «С»

ФГБОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14