.
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

.
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»

А.А. Катрахова Е.М. Васильев В.С. Купцов

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСАМ «МАТЕМАТИКА», «СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ»

Часть 2

Утверждено учебно-методическим советом университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2018

УДК 517.53 (075.8)
ББК 22.1 я7
К 29

Рецензенты:

кафедра дифференциальных уравнений Воронежского государственного университета (зав. кафедрой д-р физ.- мат. наук, проф. А.И. Шашкин);
д-р техн. наук, проф. Н.Д. Вервейко

Катрахова А.А.

К 29 Задачи и упражнения для организации самостоятельной работы по курсам «Математика», «Спецглавы математики»: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (1,7 Мб) / А.А. Катрахова, Е.М. Васильев, В.С. Купцов. – Воронеж : ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», - 2018. Ч. 2. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. Требования: ПК 500 и выше ; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024x768 ; Adobe Acrobat; CDROM дисковод ; мышь. – Загл. с экрана.

В учебном пособии приводятся задачи и упражнения для организации самостоятельной работы по дисциплинам «Математика», «Спецглавы математики». Материал иллюстрируется примерами.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлениям 27.03.04 «Управление в технических системах», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» (все профили), дисциплинам «Математика», «Спецглавы математики».

Ил. 19. Библиогр.: 32 назв.

УДК 517.53 (075.8)
ББК 22.1 я7

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие содержит задачи и упражнения для организации самостоятельной работы по курсу «Математика», «Спецглавы математики».

Содержание учебного пособия соответствует программе курса математики для бакалавров инженерно-технических специальностей втузов, рассчитанной на 468 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

ЗАНЯТИЕ №49

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ СХЕМЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Литература: [1], с. 17-20; 22-24, 26-28.

Контрольные вопросы и задания

1. Как вводиться классическое определение вероятностей? Каковы ее свойства?

2. В чем состоят недостатки классического определения?

3. Повторите основные формулы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания.

Дополнительные вопросы

1. Детерминированность, случайность и неопределенность. Раскрыт гносеологическое содержание этих понятий и разъяснить их отличия на примерах [7], с. 281.

2. Использование вероятностного подхода при выборе оптимальной стратегии в антагонистических играх (принцип недостаточного обоснования Лапласа). Применение этого подхода к принятию решений с максимальной стратегией [7], с. 302-305.

3. Вероятностная природа азартных игр. Показать объективные причины возникновения указанных игровых ситуаций на примерах. Разъяснить попытки субъективного подхода к решению таких игр [9], с.77.

4. Вероятностная основа смешанных стратегий в теории игр. Информационная защищенность этих стратегий, вытекающая из принципа их построения [9], с.326-331.

Примеры решения задач

Пример 1. В группе 16 студентов, из которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 4 отличника.

Решения. Общее число возможных элементарных исходов равно C_{16}^{9}(C_{16}^{9}-число сочетаний из 16 по 9). Число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию равно $C_6^4 \cdot C_{10}^5$. Искомая вероятность равна

$$P = \frac{C_6^4 \cdot C_{10}^5}{C_{16}^9} = \frac{6! \cdot 10! \cdot 9! \cdot 7!}{4! \cdot 2! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 16!} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 2} = \frac{189}{572} \approx 0{,}33$$

Пример 2. В урне имеется k шаров, помеченных номерами $1,2,...,k$. Из урны вынимают l раз $(l \le k)$ по одному шару, номер шара записывается и шар кладется обратно в урну. Найти вероятность того, что все записанные номера будут различны.

Решение. Очевидно, что число всех возможных исходов будет равно $n = k \cdot k \cdot k \cdot ... \cdot k = k^l$, а число всех благоприятных исходов m будет равно числу размещений из k элементов по l, т.е.

$m = A_k^l = \dfrac{k!}{(k-l)!}$. Таким образом, искомая вероятность равна $p = \dfrac{m}{n} = \dfrac{k!}{(k-l)!k^l}$.

Пример 3. *Задача о встрече*: два студента – Иванов и Петров – условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Каждый студент может прийти в любой момент времени в этом промежутке. Если Иванов пришел первым, то он ждет Петрова 20 минут, а затем уходит. Если Петров пришел первым, то он ждет Иванова 10 минут, а затем уходит. Найти вероятность встречи студентов.

Решение. Примем для простоты, что встреча должна состоятся между 0 и 1 часами. Пусть x - время прихода Иванова, а y - время прихода Петрова. Таким образом, имеем двумерную задачу на геометрическую вероятность. Очевидно, что все возможные значения моментов времени прихода студентов будут располагаться в квадрате $\{0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60\}$ (минут). Изобразим этот квадрат на рис. 6. При вычислении площади, "благоприятной" для встречи, рассмотрим два случая:

а) Иванов пришел первым $\Rightarrow x < y$. В этом случае он ждет Петрова не более 20 минут, т.е. условие встречи - $y + 20 > x$. Полученная система неравенств геометрически определяет нижнюю заштрихованную полосу(рис.6);

б) Петров пришел первым $\Rightarrow y < x$. В этом случае он ждет Иванова не более 10 минут, т.е. условие встречи - $y + 10 > x$. Полученная система неравенств геометрически определяет нижнюю заштрихованную полосу (рис.1). Таким образом, искомая вероятность встречи равна отношению заштрихованной (благоприятной) площади к площади всего квадрата $p=\dfrac{60^2-(60-20)^2/2-(60-10)^2/2}{60^2}=\dfrac{31}{72}\approx 0{,}43.$

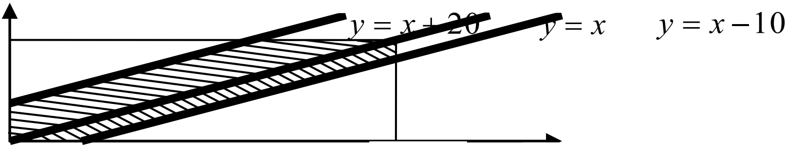


Рис. 1

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

[2], №№ 8, 11, 1; 17, 33, 45.

Форма отчетности: устный опрос, проверка задач преподавателем.

ЗАНЯТИЕ № 50

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Литература: [1], с. 31-34, 37-43, 45, 48-49.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение суммы и произведения событий.
2. Сформулируйте теорему сложения вероятностей несовместных событий.
3. Что называется условной вероятностью события?
4. Какие события называются независимыми? Зависимы или независимы:

а) совместные события;

б) события, образующие полную группу;

в) равновозможные события.

5. Какое из требований сильнее: независимость событий в ее совокупности или попарная независимость?

6. Сформулируйте терему умножения вероятностей.

7. Какие события называются противоположными?

8. Сформулируйте теорему умножения вероятностей для несовместных событий.

9. Докажите теорему сложения вероятностей событий, образующих полную группу.

10. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?

11. Докажите теорему о вероятности появления хотя бы одного события.

12. Докажите, что:

а) если события A и B независимы, то независимы также события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

б) если события $A_{1,}A_2,...,A_n$ независимы в совокупности, то и противоположные события $\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n$ независимы в совокупности.

Примеры решения задач

Пример 1. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна p_1, а для второго - p_2. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Решение. Искомая вероятность $P = p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1$, где q_1 и q_2 - вероятности непопадания в мишень при одном выстреле, соответственно первым и вторым стрелками.

Пример 2. В ящике имеется n деталей, из которых m стандартных. Найти вероятность того, что среди k наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение. Воспользуемся тем, что события $A = \{\text{среди извлеченных деталей есть ххот бы одна стандартна я}\}$ и $B = \{\text{среди извлеченных деталей нет ни одной стандартно й}\}$ - противоположные. Тогда $P(A) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{C_m^0 \cdot C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

Пример 3. На семи карточках написаны буквы, образующие слово „СОЛОВЕЙ”. Карточки перемешивают и из них наугад последовательно извлекают и выкладывают слева направо три карточки. Найдем вероятность того, что получится слово „ВОЛ” (событие *А).*

Введем события: A_1 — на первой выбранной карточке написана буква „В”; A_2 — на второй карточке — буква „О”; A_3 — на третьей карточке — буква „Л”. Тогда событие A есть пересечение событий A_1, A_2 и A_3. Следовательно, в соответствии с формулой умножения вероятностей

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 A_2).$$

Согласно ***классическому определению*** 2.1 ***вероятности,*** имеем

$$P(A_1) = \frac{1}{7}.$$

Если событие A_1 произошло, то на шести оставшихся карточках буква „О” встречается два раза, поэтому условная вероятность

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Аналогично определяем $P(A_3 \mid A_1 A_2) = \dfrac{1}{5}$.

Окончательно получаем

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{105}\approx 0{,}0095).$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) [2], №№64, 66, 72, 86.

2) Вероятности появления каждого из трех независимых событий соответственно равны p_1, p_2, p_3. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

Форма отчетности: устный опрос, применение студентами знаний соответствующего раздела в типовом расчете.

ЗАНЯТИЕ № 51

ФОРМУЛА БАЙЕСА

Литература: [1], с. 50-53.

Контрольные вопросы и задания

1. Чему равна сумма вероятностей событий, образующих полную группу?
2. Какие события называются гипотезами?
3. Запишите формулу полной вероятности.
4. Докажите формулу Байеса.
5. В чем состоит значение формулы Байеса?

Дополнительные вопросы

1. Вероятностные модели систем распознавания образов. Получение моделей с помощью безусловной плотности распределения признаков по классам [9],с. 127-128; [10],с. 63-67.

2. Байесовский метод распознавания образов. Использование в модели распознавания условных вероятностей [9], с. 129-131; [10], с. 67-70.

Примеры решения задач

Пример 1. В первой урне содержится 12 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 6 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

Решение. Пусть вероятность $P(A)$- искомая вероятность. Рассмотрим следующие гипотезы: H_1 - выбор из 1-й урны и из 2-й по белому шару, H_2 - выбор из 1-й урны и из 2-й урны по черному шару, H_3 - выбор из 1-й урны белого шара и из 2-й урны черного шара или выбор из 1-й урны черного шара и из 2-й урны белого шара. Вычисляем вероятности гипотез:

$$P(H_1)=\frac{8}{12}\cdot\frac{16}{20}=\frac{1}{5},\ P(H_2)=\frac{4}{12}\cdot\frac{14}{20}=\frac{7}{30},\ P(H_3)=\frac{8}{12}\cdot\frac{14}{20}+\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{20}=\frac{17}{30}.$$

Соответствующие условные вероятности будут равны: $P(A/H_1)=1,\ P(A/H_2)=0,\ P(A/H_3)=0{,}5.$ Тогда искомая вероятность

$$P=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{7}{30}\cdot 0+\frac{7}{30}\cdot 0{,}5=\frac{29}{60}.$$

Пример 2. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3- подготовлены отлично, 4- хорошо, 2 - удовлетворительно, 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеются 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 29 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, удовлетворительно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

Решение. Событие $A=${вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса}. Выдвигаем следующие гипотезы:

$H_1=${студент подготовлен отлично};

$H_2=${студент подготовлен хорошо};

$H_3=${студент подготовлен удовлетворительно};

$H_4=${студент подготовлен плохо}.

Вероятности гипотез до опыта равны:

$$P(H_1)=0{,}3,\quad P(H_2)=0{,}4,\quad P(H_3)=0{,}2,\quad P(H_4)=0{,}1.$$

Условные вероятности событий A равны:

$$P(A/H_1)=1,\quad P(A/H_2)=\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}=0{,}491,$$

$$P(A/H_3)=\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{8}{18}=0{,}105,\quad P(A/H_4)=\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}=0{,}009$$

Вычислим полную вероятность события A:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)+$$
$$+P(H_4)P(A/H_4)=0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}491+0{,}2\cdot 0{,}105+0{,}1\cdot 0{,}009=0518$$

По формуле Байеса переоценим вероятности гипотез после появления события A:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 1}{0{,}518}=0{,}58,$$

$$P(H_4/A)=\frac{P(H_4)P(A/H_4)}{P(A)}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}009}{0{,}518}=0{,}002,$$

Пример 3. Врач после осмотра больного считает, что возможно одно из двух заболеваний, которые мы зашифруем номерами 1 и 2, причем степень своей уверенности в отношении правильности диагноза он оценивает как 40% и 60% соответственно. Для уточнения диагноза бального направляют на анализ, исход которого дает положительную реакцию при заболевании 1 в 90% случаев и при заболевании 2 – в 20% случаев.

Анализ дал положительную реакцию. Как изменится мнение врача после этого?

Обозначим через A событие, означающее, что анализ дал положительную реакцию. Естественно ввести следующие гипотезы: H_1 - имеет место заболевание 1; H_2 - имеет место заболевание 2. Из условий задачи ясно, что априорные вероятности гипотез равны:

$$P(H_1)=0{,}4 \qquad \text{и} \qquad P(H_2)=0{,}6\,,$$

а условные вероятности события А при наличии гипотез H_1 и H_2 равны 0,9 и 0,2 соответственно. Используя формулу Байеса, находим

$$P(H_i \mid A)=\frac{0{,}4\cdot 0{,}9}{0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}2}=0{,}75\,.$$

Итак, врач с большей уверенностью признает наличие заболевания 1.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность втащить неизвестный билет для него будет наименьшей: когда он берет билет первым или последним?

Форма отчетности: устный опрос, рефераты, расчетно-графичесие задания и курсовые работы.

ЗАНЯТИЕ № 52

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПУАССОНА, БИНОМИНАЛЬНОГО, РАВНОМЕРНОГО, НОРМАЛЬНОГО И ПОКАЗАТЕЛЬНОГО

Литература: [1], с. 65-71, 122-128, 149-154.

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите законы распределения дискретных случайных величин: биноминальный, Пуассона, геометрический.

2. При каких условиях биноминальное распределение приближается к распределению Пуассона?

3. Приведите числовые характеристики дискретных случайных величин и их свойства.

4. Запишите законы равномерного, нормального и показательного распределений. Приведите примеры.

5. Запишите числовые характеристики непрерывных случайных величин.

6. Дайте определение простейшего потока событий.

Дополнительные вопросы

1. Что является потоком событий в системах массового обслуживания; в теории надежности? Разъяснить физический смысл простейшего потока в этих приложения [9], с. 15; 16; 20-23; 62-63; [8], с. 117-119.

2. Поток Эрланга как поток с ограниченным последействием. Физический смысл этого потока в системах массового обслуживания [9], с. 35-37; [8], с. 122-124.

3. Отличительные свойства простейшего потока и потока Эрланга, позволяющие выявить эти потоки при практическом анализе систем массового обслуживания. Привести примеры такого анализа [9], с. 35-37.

4. Привести примеры специальной регуляризации простейших потоком путем их "просеивания". Объяснить практические цели такой обработки потоков [9], с. 35-37; [8], с. 123.

5. Взаимосвязь характеристик потока заявок и потока их обслуживания с показателями эффективности системы массового обслуживания [9], с. 43-46.

6. Взаимосвязь характеристик потока отказов с показателями надежности отдельно функционирующей системы, последовательно и параллельно соединенных систем [9], с. 62-70; [8], с. 141-151.

7. Случайные процессы в системах управления. Характеристики этих процессов: функция и плотность распределения, математическое ожидание, дисперсия [3], с. 371-375; [11], с. 144-153.

8. Корреляционная функция случайного процесса. Ее физический смысл. Примеры корреляционных функций различных случайных процессов [3], с. 378-382; [11], с. 153-163.

9. Спектральная плотность случайного процесса и ее связь с корреляционной функцией. Физический смысл спектральной плотности [3], с. 382-385; [11], с. 166-173.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

x_i	-1	0	1	2
p_i	0.4	0.3	0.2	0.1

Решение. Математическое ожидание определяется так:
$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = -1 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 = 0$
.Дисперсия вычисляется по формуле:
$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4 - M^2(X) =$$
$$= (-1)^2 \cdot 0{,}4 + 0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}1 - 0^2 = 1.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1.$

Пример 2. Производят четыре независимых опыта, в каждом из которых некоторое событие A появляется с вероятностью $p = 0{,}8$. Построим ряд распределения и функций

распределения случайной величины X — числа появлений события A в четырех опытах.

В соответствии с условием задачи мы имеем дело со схемой Бернулли, т.е. число появлений события А распределено по биномиальному закону с параметрами n = 4, p = 0,8и q=1-p = 0,2. Значит, случайная величина X может принимать только значения i, $i = \overline{0,4}$.

Согласно формуле Бернулли

$$\mathbf{P}\{X = i\} = C_n^i p^i q^{n-i}, \quad i = \overline{0, n},$$

определим вероятности возможных значений случайной величины X:

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = C_4^0 p^0 q^4 = 0{,}0016, \quad \mathbf{P}\{X = 1\} = C_4^1 p^1 q^3 = 0{,}0256,$$
$$\mathbf{P}\{X = 2\} = C_4^2 p^2 q^2 = 0{,}1536, \quad \mathbf{P}\{X = 3\} = C_4^3 p^3 q^1 = 0{,}4096,$$
$$\mathbf{P}\{X = 4\} = C_4^4 p^4 q^0 = 0{,}4096.$$

Ряд распределения рассматриваемой случайной величины представлен в табл.

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 0{,}0016, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0{,}0272, & 1 < x \leqslant 2; \\ 0{,}1808, & 2 < x \leqslant 3; \\ 0{,}5904, & 3 < x \leqslant 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

График функции распределения *F(x)* изображен на рис. 2

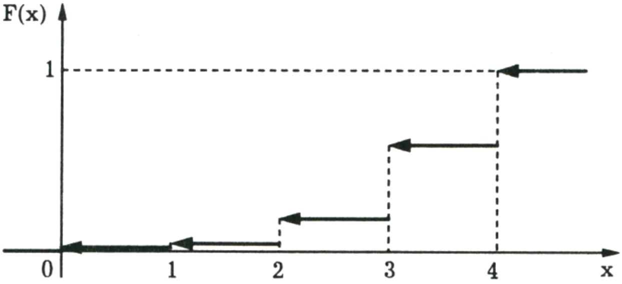


Рис. 2

Пример 3. Непрерывная случайная величина X имеет следующую плотность распределения:

Определим:

а) коэффициент *a*;

б) функцию распределения

в) графики *p(x)* и F(x);

г) вероятность P{2 < X < 3} попадания случайной величины *X* в интервал (2, 3);

д) вероятность того, что при четырех независимых испытаниях случайная величина *X* ни разу не попадет в интервал (2, 3).

а) Для нахождения коэффициента о воспользуемся свойством 3 плотности распределения. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2}\,dx = -\frac{a}{x}\bigg|_1^{+\infty} = a,$$

откуда получаем a=l.

б) В соответствии с определением плотности распределения

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0, & x \leqslant 1; \\ \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{dy}{y^2} = \frac{x-1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

в) Графики функций *p(x)* и F(x) изображены на рис. 3, 4.

г) $P\{2<X<3\}$ = F(3)-F(2) = 2/3 -1/2 =1/6.

д) Вероятность того, что *X* не попадет в интервал (2, 3) при одном испытании равна 1 - 1/6 = 5/6, а при четырех испытаниях — $(5/6)^4 \approx 0{,}48$.

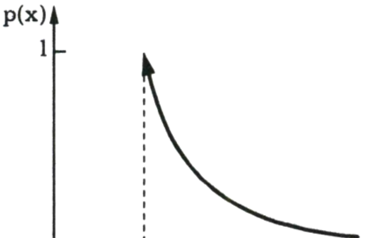


Рис. 3.

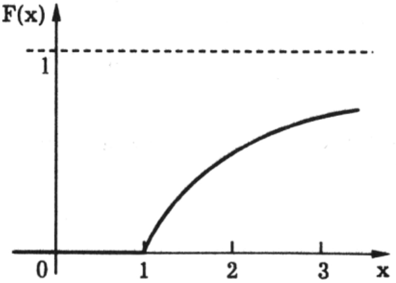


Рис. 4

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) [2], №№36, 215, 356, 357, 31, 316,366.

2) Доказать, что математическое ожидание биномиального распределения с параметрами n и p равно np, а дисперсия равна npq.

3) Вычислить математическое ожидание распределений Пуассона и показательного и сравнить их.

4) Найти дисперсию с среднее квадратическое отклонение случайной величины, равномерно распределенной в интервале (a,b).

5) Показать вероятностный смысл параметров a и σ для общего нормального распределения. Чему равны a и σ для нормированного нормального распределения?

6) Доказать, что непрерывная случайная величина T - время между появлениями двух событий простейшего потока с заданной интенсивностью λ – имеет показательное распределение и найти $M(T), D(T), \sigma(T)$, если задана интенсивность потока λ=5.

Форма отчетности: устный опрос, проверка решения задач преподавателем, применение студентами знаний соответствующего раздела в типовом расчете.

ЗАНЯТИЕ № 53

СИСТЕМА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Литература: [1], с 155-167.

Контрольные вопросы и задания

1. Понятие о системе случайных величин.
2. Дискретная двумерная случайная величина.
3. Непрерывная двумерная случайная величина.
4. Как связаны плотность распределения и интегральная функция двумерной случайной величины?
5. Найти распределение компонент.
6. Как определить вероятность попадания случайной точки в различные области на плоскости?
7. Каковы условия независимости компонент?
8. Назовите основные числовые характеристики системы двух случайных величин.
9. Чем отличаются коррелированность и независимость величин?
10. Рассмотрите правило составления таблицы распределения двумерной случайной величины. Приведите ее свойства.
11. Изучите свойства дифференциальной и интегральной функции распределения.
12. Определите закон распределения компоненты по известному закону распределения системы.

Примеры решения задач

Пример.

Задана дискретная двумерная случайная величина (X,Y):

$Y \setminus X$	1	2	4
1	0.4	0.2	0.1
3	0.1	0.1	0.1

Найти:а) безусловные законы распределения составляющих; б) условный закон распределения X при условии, что Y=3;в) условный закон распределения Y при условии, что X=1;г) числовые характеристики двумерной случайной величины.

Решение. а) Сложим вероятности по столбцам и получим безусловный закон распределения X :

X	1	2	4
P	0.5	0.3	0.2

Сложим вероятности по строкам. Безусловный закон распределения Y имеет вид:

Y	1	3
P	0.7	0.3

б) Вычислим:

$$P(x_1/y_2) = P(x_1,y_2)/P(y_2)=0.1/0.3=1/3,$$
$$P(x_2/y_2) = P(x_2,y_2)/P(y_2)=0.1/0.3=1/3,$$
$$P(x_3/y_2) = P(x_3,y_2)/P(y_2)=0.1/0.3=1/3,$$

Запишем искомый закон распределения X:

X	1	2	4
P	1/3	1/3	1/3

в) Аналогично запишем закон распределения Y:

Y	1	3
P	4/5	1/5

г) Числовые характеристики вычислим по формулам:

$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 1 \cdot 1/3 + 2 \cdot 1/3 + 4 \cdot 1/3 = 7/3$,

здесь p_1, p_2, p_3 необходимо брать из таблицы безусловного закона распределения X .

Аналогично вычислим $M(Y) = 1 \bullet 4/5 + 3 \bullet 1/5 = 7/5$.

$$\textit{Дисперсия} - D(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 - M^2(X) = 1^2 \cdot 1/3 + 2$$

$$= 14/9 \cdot D(Y) = 1 \cdot 4/5 + 3 \cdot 1/5 - (7/5)^2 = 16/25.$$

Среднее квадратичное отклонение $\delta(X) = \sqrt{14/9}$, $\delta(Y) = 4/5$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

[2], №№408-438.

Решите задачу о двух игральных картах или двух колодах карт.

Форма отчетности: устный опрос, проверка решения задач преподавателем.

ЗАНЯТИЕ № 54

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ

Литература: [1], с. 197-216.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие требования предъявляются к статистической оценке?
2. Что является оценкой для неизвестного математического ожидания, неизвестной дисперсии?
3. Объясните понятия: точность, доверительная вероятность, интервал.
4. Чему равен доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания нормального распределения: для случая известного среднеквадратического ожидания σ и для случая неизвестного σ.
5. Как оценивается точность измерений?

Примеры решения задач

Пример. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a

нормального распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение σ=5, выборочная средняя $x_B = 15$ и объем выборки $n = 100$.

Решение. Доверительный интервал равен: $x_B - t\sigma/\sqrt{n} < a < x_B + t\sigma/\sqrt{n}$. Здесь все величины известны, кроме t. Определим t из отношения $\Phi(t) = 0{,}95/2 = 0{,}475$ (см. таблицу приложения 2 [2]), t=1,96. Тогда получаем $15 - 1{,}96 \cdot 5/10 < a < 15 + 1{,}96 \cdot 5/10$. Искомый доверительный интервал: $14{,}02 < a < 15{,}98$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) [2], №№ 501-504, 508-511.

2) На двухчашечных стрелочных весах можно определить вес предметов А и В двумя способами:- поочередно взвесить каждый предмет и получить показания весов m_A и m_B; определить показания весов, положив оба предмета на одну чашку: m_{A+B}, и на разные чашки: m_{A-B}, а затем рассчитать вес предметов А и В как полусумму и полуразность этих показаний.

Определить, какой способ определения веса дает меньшую погрешность результата. Ответ получить в общем виде.

Форма отчетности: устный опрос, проверка решения задач преподавателем.

ЗАНЯТИЕ № 55

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Литература: [1], с 196-228.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение понятия выборки распределения статистических величин.
2. Что такое эмпирическая функция распределения, полигон, гистограмма?
3. Какие вы знаете точечные оценки параметров распределения и как их вычислить?
4. В чем заключается метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения?
5. В чем заключается метод наибольшего правдоподобия точечной оценки неизвестных параметров?
6. Какие вы знаете интервальные оценки статистических величин?
7. Как вычислить доверительные интервалы для оценки математического ожидания, среднего квадратичного отклонения и неизвестной вероятности.

Основные определения

Выборкой называется n-мерная случайная величина $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ с независимыми одинаково распределенными компонентами $X_i, i = 1, 2, \dots, n$. Число n называется объектом выборки. Любая функция $h = h(X_1,\ X_2, \dots, X_n)$ выборочных значений называется статистикой.

Пусть $\alpha -$ независимый параметр распределения случайной величины ξ. Статистика

$$a^* = a^*(X_1,\ X_2, \dots, X_n),,$$

используемая в приближенном равенстве $\alpha \approx \alpha^*$, называется *оценкой (точечной оценкой) неизвестного параметра по выборке.*

Классификация оценок.

Желательно, чтобы оценка не давала систематического завышения или занижения результатов, т. е. чтобы

$$M\alpha^*(X_1,\, X_2, \dots, X_n) = \alpha.$$

Оценка α^*, обладающая указанным свойством, называется несмещенной. В противном случае она называется смещенной.

Если при $n \to \infty$ оценка α^* сходится по вероятности к истинному значению параметра α:

$$\alpha^*(X_1,\, X_2, \dots, X_n) \underset{n \to \infty}{\overset{\text{по вер}}{\longrightarrow}} \alpha,$$

то оценка α^* называется состоятельной.

Состоятельность означает, что с ростом объема выборки качество оценки улучшается. *Если оценки α_1^* и α_2^* удовлетворяют неравенству $M(\alpha_1^* - \alpha)^2 < M(\alpha_2^* - \alpha)^2$, то оценка α_1^* называется более эффективная, чем любая другая.*

Методы получения оценок

Метод моментов. Пусть ξ – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x, \alpha)$, зависящей от одномерного неизвестного параметра α. Тогда математическое ожидание $M\xi$ является функцией α:

$$M\xi = \int_{-0}^{+\infty} xp(x_1, \alpha)\,\mathrm{d}x = \mu_1(\alpha).$$

Выборочное среднее $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ принимает значение, близкое к $M\xi$. Это позволяет записать уравнение для определения неизвестного параметра α:

$$\mu_1(\alpha) = \bar{X}.$$

Метод моментов аналогичным образом применяется к дискретным случайным величинам.

Метод максимального правдоподобия. Пусть ξ – дискретная случайная с распределением

$$P(\xi = a_i) = p_i(\alpha), i = 1, 2, \dots, k,$$

где a_i – возможные значения случайной величины ξ; $p_i(\alpha)$ –

соответствующие вероятности, зависящие от неизвестного параметра α, причем $\sum_{i=1}^{k} p_i(\alpha) = 1$ при любом допустимом значении α. Множество значений a_i случайной величины ξ может быть не только конечным, но и счетным. Если среди наблюдаемых выборочных значений $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ число a_i встречается n_i раз $(i = 1, 2, \dots, k)$, то для вероятности $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha)$ получения данной выборки имеем выражение

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = p_1^{n_1}(\alpha) p_2^{n_2}(\alpha) \dots p_k^{n_k}(\alpha).$$

Функция параметра α называется *функцией правдоподобия,* а величина α^*, при которой функция $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha)$ достигает максимума, - *оценкой максимального правдоподобия* неизвестного параметра α. Для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения *p(x, α)*, параметра α, метод максимального правдоподобия остается в силе. Отличие состоит в том, что теперь функция правдоподобия $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = p(x_1, \alpha) p(x_2, \alpha) \dots p(x_n, \alpha)$ выражается не через вероятность получения данной выборки, а через плотность распределения n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \dots, X_a)$ зависящей от параметра α. При этом α служит аргументом, значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, считаются фиксированными.

Контрольные вопросы и задания

8. Дайте определение понятия выборки распределения статистических величин.
9. Что такое эмпирическая функция распределения, полигон, гистограмма?
10. Какие вы знаете точечные оценки параметров распределения и как их вычислить?
11. В чем заключается метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения?
12. В чем заключается метод наибольшего правдоподобия точечной оценки неизвестных параметров?

13. Какие вы знаете интервальные оценки статистических величин?

14. Как вычислить доверительные интервалы для оценки математического ожидания, среднего квадратичного отклонения и неизвестной вероятности.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

[5], №№450,459,473,479,490,502,507,515,517,519.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

[2], №№450,459,473,479,490,502,507,515,517,519.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 56

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СВОБОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫБОРКИ

Литература: [1], с 231-249.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается метод произведений вычисления выборочной средней и дисперсии?
2. Как применить метод произведения в случае равноотстоящих и неравноотстоящих вариант?
3. Расскажите о методе сумм вычисления выборочной и средней дисперсии.
4. Как определить асимметрию и эксцесс эмпирического распределения.

5. Как построить нормальную кривую по опытным данным?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема $n = 35$:

Варианта	x_i	-1	0	2
Частота	n_i	10	20	5

Решение. Выборочная средняя

$$(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3)/n = ((-1)\cdot 10 + 0\cdot 20 + 2\cdot 5)/35 = 0.$$

Выборочная дисперсия равна:

$$D_B = ((x_1 - x_B)^2 \cdot n_1 + (x_2 - x_B)^2 \cdot n_2 + (x_3 - x_B)^2 \cdot n_3)/n =$$
$$= ((-1-0)^2 \cdot 10 + (0-0)^2 \cdot 20 + (2-0)^2 \cdot 5)/35 = 6/7.$$

Пример 2. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии X и Y по данным, приведенным в корреляционной таблице:

X/Y	20	25	30	35	40
16	4	6	0	0	0
26	0	8	10	0	0
36	0	0	32	3	9
46	0	0	4	12	6
56	0	0	0	1	5

Решение. Выборочное уравнение прямой линии регрессии X и Y имеет вид: $y_x - y_в = r_в \cdot s_y \cdot (x - x_в)/s_x$, где y_x – условная средняя, и – выборочные средние признаков X и Y, s_x и s_y – выборочные средние квадратические отклонения, выборочный коэффициент корреляции $r_в = \left(\sum\sum n_{xy}(xy - x_в y_в)\right)/\left(n s_x s_y\right)$, х и у – варианты, n_{xy} - соответствующие им частоты, $n = 50$ - объем выборки.

Вычислим:

$x_в = \sum\sum x n_{xy} / n = 31{,}7$; $y_в = \sum\sum y n_{xy} / n = 35{,}6$,

$D_B(X) = \sum\sum (x - x_в)^2 n_{xy} / n$, $D_B(Y) = \sum\sum (y - y_в)^2 n_{xy} / n$,

$s_x = \sqrt{D_B(X)} = 5{,}35$, $s_y = \sqrt{D_B(Y)} = 10{,}2$,

$r_B = 0{,}76$.

Здесь двойные суммы необходимо брать по всем индексам i,k вариант x_i, y_k (В этой задаче $i,k = 1,2,3,4,5$)

Искомое уравнение имеет вид:

$y - 35{,}6 = 0{,}76 \cdot 10{,}2 \cdot (x - 31{,}7)/5{,}35$ или $y = 1{,}45x - 10{,}36$.

Замечание. Для упрощения счета можно ввести условные варианты $u_i = (x_i - c_1)/h_1$ и $v_k = (y_k - c_2)/h_2$, где c_1 и c_2 - ложные нули вариант X и Y (новое начало отсчета), h_1 и h_2 - значение шага вариант X и Y.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

[2], №№524,526,530,532,534.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 57

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Литература: [1], с 282-341.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение нулевой, конкурирующей, простой и сложной гипотезы.
2. Как сравнить две дисперсии средние генеральных совокупности?

3. Расскажите о критериях Бартлета, Кочрена, Кендалла, Пирсона.

4. В чем заключается метод графической проверки гипотезы о нормальном распределении нормальной совокупности?

5. Что вы знаете о методе спрямленных диаграмм?

6. В чем заключается проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции?

7. Как осуществляются проверки гипотез о показательном, нормальном, биномиальном, равномерном распределении генеральной совокупности?

Примеры решения задач

Пример. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о распределении генеральной совокупности X по закону Пуассону с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$.

x_i	0	1	2	3	4
n_i	116	56	22	4	2

Решение. Выборочная средняя $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum x_i n_i$

.Предполагаемый закон Пуассона имеет вид:
$P_n(i) = (0{,}6)^i\, e^{-0{,}6} / i!$, т.е. $p_0 = P_{200}(0) = 0{,}5488$,
$p_1 = P_{200}(1) = 0{,}3293$, $p_2 = P_{200}(2) = 0{,}0988$,
$p_3 = P_{200}(3) = 0{,}0198$, $p_4 = P_{200}(4) = 0{,}0030$. Теоретические частоты $m_i = np_i = 200p_i$. Определим $m_0 = 109{,}76$, $m_1 = 65{,}86$, $m_2 = 19{,}76$, $m_3 = 3{,}96$, $m_4 = 0{,}6$. Малочисленные частоты n_3, n_4 и m_3, m_4 можно объединить в новые $n_3 = 4 + 2 = 6$ и

$m_3 = 3{,}96 + 0{,}6 = 4{,}56$. Значение критерия Пирсона $\chi^2 = \sum (n_i - m_i)^2 \big/ m_i = 2{,}54$. По таблице критических точек распределения(см. приложение 5 [2]), по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = s - 2 = 2$, где s - число частот, находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}(0{,}05;2) = 6{,}0$. Так как $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то имеется подтверждение гипотезы о распределение случайной величины X по закону Пуассону.

Указание. При решении этой задачи удобно использовать расчетную таблицу

<table>
<tr><th>x_i</th><th>n_i</th><th>p_i</th><th>m_i</th><th>$n_i - m_i$</th><th>$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>116</td><td>0,5488</td><td>109,76</td><td>6,24</td><td>0,355</td></tr>
<tr><td>1</td><td>56</td><td>0,3293</td><td>65,86</td><td>-9,86</td><td>1,476</td></tr>
<tr><td>2</td><td>22</td><td>0,0988</td><td>19,76</td><td>2,24</td><td>0,254</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>0,0198</td><td>3,96</td><td rowspan="2">1,44</td><td rowspan="2">0,455</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>0,0030</td><td>0,60</td></tr>
</table>

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

[2], №№558,568,592,600,607,611,614,619,625,632, 636,642,646,651,663.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 58-61

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Литература: [12], с. 12-51, 54-83,с. 119-129, с. 210-224, с. 248-257, с. 448-488.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается метод Даламбера для уравнения колебания струны?
2. Какие вы знаете уравнения математической физики ?
3. В чем заключается метод Фурье для уравнений математической физики?
4. Какому уравнению подчиняется стационароая задача об обтекании тела идеадьной жидкостью?

6. В чем состоят задачи Дирихле и Неймана ?

Дополнительные вопросы

1. Как применяются гармонические функции при решении задач уравнений математической физики ?
2. В чем заключается метод приведения уравнений второго порядка в частных производных к каноническому виду?

Примеры решения задач

Пример 1. Рассмотрим два частных случая колебания бесконечной струны:

1) колебания возбуждаются с помощью начального отклонения $\varphi(x)$, начальные скорости $\psi(x)=0$;

2) начальные отклонения $\varphi(x)=0$, начальные скорости $\psi(x)\neq 0$.

В первом случае решение задачи имеет вид $u(t,x)=\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$.

Это означает, что если начальная форма струны имеет вид, изображенный на рис.5, то в момент времени t форма струны имеет вид, изображенный на рис.6.

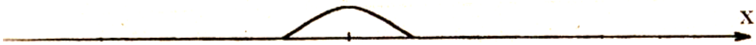


Рис. 5

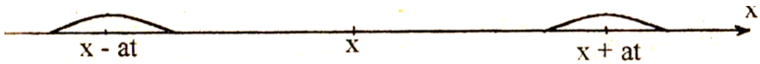


Рис. 6

Таким образом, начальное возмущение струны из любой точки x распространяется вправо и влево со скоростью a, уменьшенной по величине в два раза. После прохождения полуволны точки струны возвращаются в положение равновесия. Следовательно, чтобы получить отклонение точки x в момент времени t, необходимо сложить отклонения точек $x-at$ и $x+at$ в начальный момент времени, уменьшенные в 2 раза.

Во втором частном случае решение задачи имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-ax}^{x+ax}\psi(z)dz = \frac{1}{2a}\left[\Psi(x+at)-\Psi(x-at)\right],$$

где $\Psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\psi(z)dz$ - первообразная функции $\psi(x)$. Пусть график функции $\psi(x)$ имеет вид, изображенный на рис.7. Форма струны в момент времени имеет вид, изображенный на рис.8.

Таким образом, и в этом случае от точки x вправо и влево со скоростью a перемещается волна, но теперь после прохождения волны точки струны занимают новое положение равновесия. В общем случае описанные выше процессы в струне накладываются один на другой.

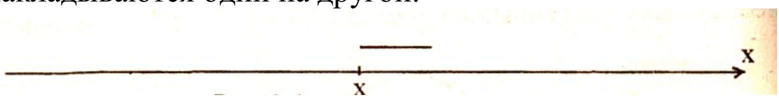


Рис. 7

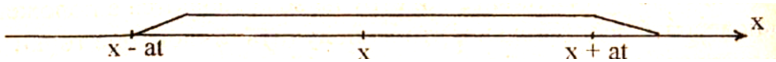


Рис.8

Б) Рассмотрим струну, положение которой в стоянии равновесия совпадает с полуосью Ox (- 0 $\leq$ x < ∞). В начальный момент времени $t=0$ точками струны придаются начальное отклонение $\varphi(x)$ и начальная скорость $\psi(x)$. Найдем решение задачи о колебаниях струны в двух случаях, когда левый конец струны закреплен (задача 1) и когда точка x=0 может свободно перемещаться в направлении колебаний (задача 2). Иными словами, требуется найти функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую при $0<x<\infty, t>0$ уравнению

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},$$

начальным условиям

$$\begin{cases} u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

и граничному условию

$$u(t,x)\big|_{x=0} = 0 \qquad \text{(задача 1)}$$

или

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad \text{(задача 2)}$$

Для этого докажем следующие утверждения.

Теорема 1. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетные, то

$$u(t,x)\Big|_{x=0} = 0$$ при любом t.

2. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четные, то $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0.$

В самом деле, если $\varphi(-x) = -\varphi(x), \psi(-x) = -\psi(x)$, то

$$u(t,x)\Bigg|_{x=0} = \frac{\varphi(at)+\varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(z)dz = 0.$$

Если же функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четные, то $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \frac{\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)}{2} + \frac{\psi(x+at)+\psi(x-at)}{2a}$.

Отсюда, учитывая, что производная от четной функции является нечетной функцией, получаем, что

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\varphi'(at)+\varphi'(-at)}{2} + \frac{\psi(at)-\psi(-at)}{2a} = 0.$$

Чтобы получить решение задачи 1, продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю числовую ось Ох нечетным образом, то есть построим функции

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{если } x \ge 0, \\ -\varphi(-x) & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{если } x \ge 0, \\ -\psi(-x) & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Решение задачи о колебаниях бесконечной струны с начальными условиями $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ имеет вид

$$u(t,x) = \frac{\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi_1(z)dz.$$

Полученная функция $u(t,x)$ удовлетворяет основному дифференциальному уравнению при всех х, при $x \ge 0$ удовлетворяет начальным условиям и в силу доказанной теоремы удовлетворяет граничному условию $u(t,x)\big|_{x=0}=0$. Можно преобразовать ее к виду

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz \text{ если } t\le\frac{x}{a}, \text{ и}$$

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz \text{ если } t>\frac{x}{a}.$$

Аналогично, продолжая функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю числовую ось Ox четным образом, получим решение задачи 2 на полуоси $0<x<\infty$ с граничным условием $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$.

$$u(t,x)=\frac{\varphi_2(x+at)+\varphi_2(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi_2(z)dz$$

где

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{если } x\le 0,\\ \varphi(-x) & \text{если } x<0,\end{cases}$$

$$\psi_2(x)=\begin{cases}\psi(x) & \text{если } x\le 0,\\ \psi(-x) & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Окончательное решение задачи 2 принимает вид

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$$

если $t\le\dfrac{x}{a}$, и

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(z)dz + \int_0^{at-x}\psi(z)dz\right]$$

если $t > \dfrac{x}{a}$.

Пример 2. Пусть начальное отклонение $\varphi(x)$ полуограниченной струны, закрепленной в точке *x=0*, отлично от нуля только в некотором промежутке *(a,b)*, а начальная скорость $\psi(x)=0$.Продолжим функцию $\varphi(x)$ на всю числовую ось *Ox* нечетным образом и рассмотрим процесс распространений колебаний в неограниченной струне. Процесс распространения колебаний в полуограниченной струне показан на рис.9.

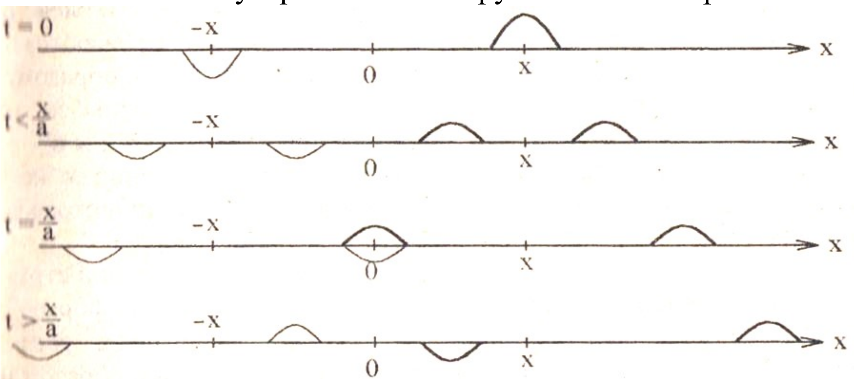


Рис. 9

Вначале процесс происходит так, как в неограниченной струне. Заданное отклонение разбивается на две полуволны, движущиеся в разные стороны с постоянной скоростью *a*. При $t = \dfrac{x}{a}$ полуволна, движущаяся влево с положительной полуоси

Ox, складывается с такой же полуволной, движущейся вправо с отрицательной полуоси *Ox* и имеющей положительный знак.

В результате отклонения взаимно уничтожаются. При $t > \dfrac{x}{a}$ волна из отрицательной полуоси $\boldsymbol{Ox}$ продолжает движение вправо с той постоянной скоростью. Процесс происходит так, как будто волн движущаяся влево, достигнув точки $x=0$, отражается от этой точки, меняет знак на противоположный и продолжает движение вправо с той же скоростью.

Если же в точке $x = 0$ задано граничное условие $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$, то отражение волны отклонения от граничной точки происходит без изменения знака.

Описанный выше способ построения решения задачи о распространении колебаний в полуограниченной струне применим решения задачи о колебаниях конечной струны. Физическая карт на распространения волн в конечной струне с закрепленными концами выглядит следующим образом. Начальное отклонение из точки $\boldsymbol{x}$ при $t > 0$ распространяется со скоростью $\boldsymbol{a}$ вправо и влево виде полуволн, которые, достигнув граничных точек, отражаются от этих точек и меняют знак на противоположный. Таким образом, зная время $\boldsymbol{t}$ и расстояние $\boldsymbol{at}$, которое проходят полуволны за это время, можно определить, из каких точек пришли полуволны в данную точку и сколько отражений они претерпели. Точно так же распространяются волны импульса с той разницей, что при отражении этих волн от граничных точек они не меняют знак.

Аналитически решение задачи о колебаниях конечной струны с закрепленными концами можно получить с помощью формулы Даламбера, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на отрезке $[0,l]$, продолжить на всю числовую ось $\boldsymbol{Ox}$ нечетным образом и периодически с периодом $2l$.

Формула для u(x,t) дает решение задачи Коши , если $\varphi_0(x)$имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\varphi_1(x)$ - до первого.

Задача Коши поставлена корректно. Действительно, полученное решение единственно, что следует из способа вывода формулы для u(x,t) . Несомненна далее непрерывная зависимость решения u(x,t) от начальных данных. В самом деле, для любого δ>0 можно указать такое δ > 0, что если заменить $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$на $\overline{\varphi}_0(x)$ и $\overline{\varphi}_1(x)$ так, что

$$\left|\varphi_0(x)-\overline{\varphi}_0(x)\right|<\delta, \quad \left|\varphi_1(x)-\overline{\varphi}_1(x)\right|<\delta \quad (-\infty<x<\infty),$$

то разность между новым решением $\overline{u}(x,t)$ и первоначальным $u(x,t)$ будет по абсолютной величине меньше ε на любом конечном отрезке времени.

Рассмотрим два частных случая.

I) Начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное смещение имеет место лишь в конечном промежутке (-α, α) струны, т. е. $\varphi_0(x)$ = 0 вне этого промежутка.

Решение *u(x,t)* выражается при этом формулой

$$u(x,t)=\frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2}.$$

Решение является суммой двух волн, распространяющихся направо и налево со скоростью *a*, причем начальная форма обеих волн определяется функцией $\frac{1}{2}\varphi_0(x)$, равной половине начального смещения. Пусть точка *x* струны лежит правее промежутка (-α, α), т. е. *x*>α. При t <$\frac{x-\alpha}{a}$ из вида функции $\varphi_0(x)$ и формулы (10) следует, что *u*(*x, t*) = 0, т. е. до точки x волна еще не дошла. С момента времени t = $\frac{x-\alpha}{a}$ точка x начнет колебаться (момент прохождения переднего фронта прямой волны). При t > $\frac{x+\alpha}{a}$ следует, что $u(x,\ t) = 0$. Моменту времени t= $\frac{x+\alpha}{a}$ соответствует прохождение заднего фронта прямой волны через точку x, после чего в этой точке $u(x,\ t)$ обращается в нуль. Аналогичные рассуждения можно провести для точек струны, лежащих внутри промежутка (-α, α) или левее его. Таким образом, в каждой точке струны после прохождения обеих волн (а для точек, лежащих вне области начального смещения, после прохождения только одной) наступает покой.

2) Начальное смещение равно нулю, а $\varphi_0(x)$ отлична от нуля лишь в конечном промежутке (-α, α). В таком случае говорят, что струна имеет только начальный импульс. Решение для *u(x,t)* принимает следующий вид:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)dz.$$

или, полагая $\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{x}\varphi_1(z)dz=\psi(x)$

получим $u(x,t)=\psi(x+at)-\psi(x-at)$,

т. е. по струне распространяются две волны—одна прямая и одна обратная. Исследуем полученное решение более подробно. Пусть точка x струны лежит правее промежутка (-α, α). При *t*= 0 промежуток интегрирования (x - at, x + at) вырождается в точку x, а затем при увеличении t он расширяется в обе стороны со скоростью *a*. При t < $\frac{x-\alpha}{a}$ он не будет иметь общих точек с (-α, α), функция $\varphi_1(z)$ в нем равна нулю, и даст u(x, t) = 0, т. е. покой в точке x. Начиная с момента времени t = $\frac{x-\alpha}{a}$ промежу (x — at, x + at) будет налегать на (-α, α), в котором $\varphi_1(z)$ отлична от нуля, и точка x начнет колебаться (момент прохождения переднего фронта волны через точку x). Наконец, при t > $\frac{x+\alpha}{a}$ промежуток (x — at, x + at) будет содержать целиком промежуток (-α, α), интегрирование по (x — at, x + at) будет сводиться к интегрированию по (-α, α), так как вне его $\varphi_1(z)$ = 0, т. е. при t > $\frac{x+\alpha}{a}$ мы имеем постоянное значение u(x, t), равное

$$\frac{1}{2a}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi_1(z)dz$$

Момент времени t = $\frac{x+\alpha}{a}$ есть момент прохождения заднего фронта волны через точку x. Таким образом, действие начального импульса приводит к тому, что с течением времени точки струны сдвигаются на отрезок, длина которого выражается интегралом, и остаются без движения в этом новом положении. Волны оставляют после себя как бы след своего прохождения.

3) *Ограниченная струна*. Рассмотрим теперь струну длины *l*, закрепленную на концах. Задача о колебании такой струны сводится к нахождению решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

при граничных условиях $u\big|_{x=0} = 0$, $u\big|_{x=l} = 0$ и начальных условиях

$$u\big|_{t=o} = \varphi_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x)\ \ (0 \le x \le l).$$

Решение Даламбера $u(x,t) = \Theta_1(x-at) + \Theta_2(x+at)$ конечно, годится в этом случае, но определение Θ_1 и Θ_2 по формулам:

$$\Theta_1(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)dz,\ \Theta_2(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)dz$$

встречает здесь то затруднение, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$а следовательно, Θ_1(x) и Θ_2(x), определены лишь в промежутке (0,l) согласно физическому смыслу задачи, а аргументы x±at могут лежать и вне этого промежутка. Стало быть, для возможного применения решения нужно продолжить функции Θ_1(x) и Θ_2(x) или, что вполне эквивалентно, функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ вне промежутка (0,l) . С точки зрения физической, это продолжение сводится к определению такого начального возмущения бесконечной струны, чтобы движение ее участка (0,l) было то же самое, как если бы он, был закреплен на концах, а оставшаяся часть струны была бы отброшена. Для продолжения функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ воспользуемся граничными условиями. Принимая во внимание граничные условия , получим:

$\Theta_1(-at) + \Theta_2(at) = 0, \Theta_1(l-at) + \Theta_2(l+at) = 0$ или, обозначая at через x, $\Theta_1(-x) = -\Theta_2(x), \Theta_1(l-x) = -\Theta_2(l+x)$. Когда x изменяется в промежутке (0,l), то первая из формул определяет функцию Θ_1(x) в промежутке (— l, 0), вторая — функцию Θ_2(x) в промежутке (l, 2l). Стало быть, обе функции Θ_1(x) и Θ_2(x) вполне определяются на промежутке длины 2l. Далее следует, что $\Theta_2(2l+x) = -\Theta_1(-x) = \Theta_2(x)$, $\Theta_1(2l+x) = \Theta_1(x)$, т. е. функции Θ_1(x) и Θ_2(x) являются функциями периодическими с периодом $2l$. Итак, функции $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ определены при всех вещественных x. Принимая во внимание, что

$$\varphi_0(x)=\Theta_1(x)+\Theta_2(x)\,,\qquad \varphi_1(x)=a\left[\Theta'_2(x)-\Theta'_1(x)\right],$$

найдем $\varphi_0(-x)=\Theta_1(-x)+\Theta_2(-x)=-\Theta_2(x)-\Theta_1(x)=-\varphi_0(x)$,

$$\varphi_1(-x)=a\left[\Theta'_2(-x)-\Theta'_1(-x)\right]=a\left[\Theta'_1(x)-\Theta'_2(x)\right]=-\varphi_1(x),$$

$$\varphi_0(x+2l)=\varphi_0(x)\,,\ \varphi_1(x+2l)=\varphi_1(x).$$

Эти формулы показывают, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ продолжаются из промежутка (0, l) в промежуток (— l, 0) нечетным образом, а затем с периодом $2l$. Чтобы полученное решение имело непрерывные производные до второго порядка включительно, нужно, помимо условий дифференцируемости функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, потребовать еще выполнения условий

$$\varphi_0(l)=\varphi_0(0)=0\,,\ \ \varphi_0(l)=\varphi_0''(0),\ \ \varphi_1(l)=\varphi_1(0)=0$$

Это есть условия согласования начальных и граничных условий. Выясним, какое действие оказывают закрепленные концы струны на ее колебания. Для этого обратимся к полуплоскости xOt.

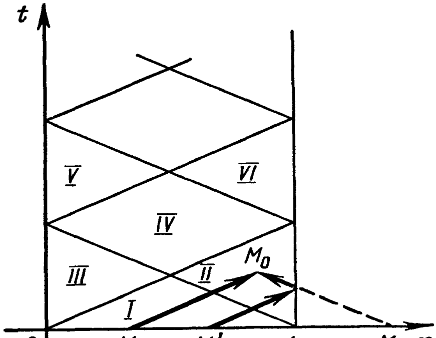


Рис. 10

Ввиду ограниченности струны надо рассматривать только полосу верхней полуплоскости t > 0, заключающую между прямыми x = 0 и x = l (рис. 10). Проведем через точки O и L характеристики до встречи с противоположными границами полосы и т. д. Мы разобьем, таким образом, полосу на области (I), (II), (III), ...

Точки области (I) соответствуют тем моментам времени t, когда к точкам x струны доходят прямая и обратная волны, вошедшие в начальный момент времени из внутренних точек струны. Следовательно, фиктивно добавленные бесконечные части струны еще на процесс колебания не влияют. Точки вне области (I) соответствуют тем моментам времени t, когда к точкам x струны доходят уже волны, вышедшие в начальный момент времени из фиктивной части струны. Возьмем, например, точку M_0 $(x_0,$ $t_0)$ в области (II). Так как $u(x_0,t_0)=\Theta_1(x_0-at_0)+\Theta_2(x_0+at_0)$,

то в этой точке имеются две волны одна— прямая, дошедшая от начально возмущенной точки M_1 струны с абсциссой $x = x_o — at$, другая—обратная из точки M_2 с абсциссой $x = x_o+at$, причем в данном случае M_1 есть реальная точка струны, M_2 — фиктивная. Нетрудно заменить ее реальной точкой, заметив, что, в силу, $\Theta_2(x_0+at_0)=\Theta_2(l+x_0+at_0-l)=-\Theta_1(2l-x_0-at_0)$,

и, таким образом, обратная волна $\Theta_2(x_0+at_0)$ есть не что иное, как прямая волна $-\Theta_1(2l-x_0-at_0)$, вышедшая в начальный момент времени из точки M'_2 $(2l-x_0-at_0)$ (симметричной с M_2 относительно точки L), которая, дойдя до конца струны L в момент

$t=\dfrac{l-(2l-x_0-at_0)}{a}=\dfrac{x_0+at_0-l}{a}$, изменила свое направление и знак на обратный и к моменту времени t_0 дошла в таком виде до точки M_0.

Таким образом, действие закрепленного конца x = l свелось к отражению волны смещения, связанному с переменой знака смещения и с сохранением его абсолютной величины.

То же явление мы обнаружим и для волн, дошедших до конца x = 0; в точках области (III) мы будем иметь две волны: обратную и прямую, отраженную от конца x = 0. В точках областей (IV), (V), (VI), ... получим волны, которые претерпели несколько таких отражений от обоих концов струны. Из предыдущих рассуждений следует, что колебание струны, закрепленной на концах, будет периодическим с периодом— $\frac{2l}{a}$.

Пример 3. Продольный удар груза по стержню.

Рассмотрим цилиндрический стержень, один конец (x = 0) которого закреплен, а другой (x=l) свободен. В начальный момент времени t = 0 свободный конец подвергается удару груза массы M, движущегося вдоль оси стержня со скоростью υ. Изучим продольные колебания стержня, которые возникают при ударе по стержню. Мы знаем, что уравнение продольных колебаний однородного стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}).$$

Граничное условие на левом конце (x = 0) будет, очевидно,

$$u(0,t)=0.$$

Далее, уравнение движения груза под действием силы реакции стержня, которая равна по величине усилию в сечении x = l стержня и направлена в противоположную сторону, имеет вид

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=l} = -ES \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}.$$

Это и будет граничное условие на конце x =l. Уравнению можно придать вид

$$ml \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=l} = -a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}.$$

если обозначить через m=$\dfrac{M}{\rho Sl}$ отношение массы движущегося груза к массе стержня. Искомое решение u(x, t) должно удовлетворять также начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le l,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \ \text{ при } \ 0 \le x \le l \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\upsilon \ \text{ при } t=0 \text{ и } x=l.$$

Второе начальное условие означает, что в момент удара движущегося груза все промежуточные сечения стержня имеют скорость, равную нулю, а скорость конца стержня равна скорости груза. Известно, что общее решение нашего уравнения имеет вид

$$u = \varphi(at - x) + \psi(at + x),$$

где φ и ψ— произвольные функции. Определим функции φ и ψ так, чтобы решение u(x,t) удовлетворяло граничным условиям и начальным условиям. Из граничного условия следует, что ψ=-φ; тогда решение принимает вид

$$u = \varphi(at - x) - \varphi(at + x).$$

Из начальных условий имеем

$$0 = \varphi(-x) - \varphi(x)$$

$$(0 \le z \le l)$$

$$0 = \varphi'(-x) - \varphi'(x)$$

Отсюда следует, что φ(z) = 0, когда —l<z<l, т. е. в этом же интервале φ(z) — постоянная, которую можно считать равной нулю. Следовательно, мы имеем φ(z) = 0 (—l<z<l)

Определим теперь функцию φ(z) , вне интервала —l<z<l. Для этого воспользуемся граничным условием. Получим $ml\left[\varphi''(at-l) - \varphi''(at+l)\right] = \varphi'(at-l) - \varphi'(at+l)$ или, полагая

$$z = at + l, \qquad \varphi''(z) + \frac{1}{ml}\varphi'(z) = \varphi''(z-2l) - \frac{1}{ml}\varphi'(z-2l)$$

Это уравнение дает возможность продолжить функцию φ(z) за пределы интервала (—l, l). Определим φ(z) вне интервала (—l, l). При l< z < 3l мы имеем

$$\varphi''(z)+\frac{1}{ml}\varphi'(z)=0$$

откуда

$\varphi'(z)=Ce^{-\frac{z}{ml}}$, где C — произвольная постоянная.

Начальное условие дает: $a[\varphi'(-l+0)-\varphi'(l+0)]=-\upsilon$

Или $\varphi'(l+0)=\frac{\upsilon}{a}$.

Следовательно, $\frac{\upsilon}{a}=Ce^{-\frac{1}{m}}$, так что $C=e^{\frac{1}{m}}\frac{\upsilon}{a}$ и

$$\varphi'(z)=\frac{\upsilon}{a}e^{-\frac{z-l}{ml}} \qquad (l<z<3).$$

Заметим, что φ' (z) в точке z = l имеет разрыв непрерывности.

При 3l < z < 5l уравнение для φ(z) принимает вид

$$\varphi''(z)+\frac{1}{ml}\varphi'(z)=-\frac{2\upsilon}{2ml}e^{-\frac{z-3l}{ml}},$$ откуда

$$\varphi'(z)=Ce^{-\frac{z}{ml}}-\frac{2\upsilon}{aml}(z-3l)e^{-\frac{z-3l}{ml}},$$

где C —произвольная постоянная. Произвольную постоянную C мы найдем из условия непрерывности изменения скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$ в сечении x=l при t > 0, в частности при t =$\frac{2l}{a}$. Это дает

$$\varphi'(l-0)-\varphi'(3l-0)=\varphi'(l+0)-\varphi'(3l+0)$$

или $-\frac{\upsilon}{a}e^{-\frac{2}{m}}=\frac{\upsilon}{a}-Ce^{-\frac{3}{m}}$, откуда $C=\frac{\upsilon}{a}(e^{\frac{1}{m}}+e^{\frac{3}{m}})$.

Далее получим

$$\varphi'(z)=\frac{\upsilon}{a}e^{-\frac{z-l}{ml}}+\frac{\upsilon}{a}\left[1-\frac{2}{ml}(z-3l)\right]e^{-\frac{z-3l}{ml}} \qquad (3l<z<5l)$$

Поступая далее таким же образом, мы можем найти φ'(z) в интервалах $5l<z<7l$, $7l<z<9l$ и т. д.

Функция φ(z) определяется интегрированием выражения φ' (z); постоянная интегрирования определяется из условия непрерывности функции u(x, t) в точке x = l. Это условие, если положить t последовательно равным 0, $\frac{2l}{a}$, ..., дает уравнения

$$0=\varphi(-l+0)-\varphi(l+0),$$
$$\varphi(l-0)-\varphi(3l-0)=\varphi(l+0)-\varphi(3l+0),\ \ldots$$

откуда получаем

$$0=\varphi(-l+0)=\varphi(l+0),\ \varphi(3l+0)=\varphi(3l-0),\ \ldots$$

Таким образом, мы имеем

$$\varphi(z)=\frac{ml\upsilon}{a}\left(1-e^{-\frac{z-l}{ml}}\right) \quad (l<z<3l),$$

$$\varphi(z)=\frac{ml\upsilon}{a}e^{-\frac{z-l}{ml}}+\frac{ml\upsilon}{a}\left[1+\frac{2}{ml}(z-3l)\right]e^{-\frac{z-3l}{ml}} \quad (3l<z<5l),\ \ldots$$

Из полученного решения следует, что при $0<t<\frac{l}{a}$, $\varphi(at-x)=0$ и $u(x,t)=-\varphi(at+x)$, т. е. по стержню распространяется только обратная волна, идущая от конца x = l, подвергнувшегося удару; при $t=\frac{l}{a}$ она достигнет закрепленного конца и при $\frac{l}{a}<t<\frac{2l}{a}$ к ней прибавится отраженная волна φ(at —x), т. е. решение будет иметь вид u(x, t) = φ(at—x) — φ(at+x).

При t = $\frac{2l}{a}$ волна φ(at—x) отразится от конца x = l, так что слагаемое φ(at+x) в решении на интервале $\frac{2l}{a} < t < \frac{3l}{a}$ будет иметь уже другое выражение. Таким образом u(x, t) имеет различные выражения в интервалах

$$0 < t < \frac{l}{a},\ \frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a},\ \frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a},\ \ldots,\ n\frac{l}{a} < t < (n+1)\frac{l}{a}.$$

В изложенном выше решении мы считали, что стержень как бы соединяется с ударяющим телом для любого момента времени t > 0. Но если тело отделяется от стержня, то полученное решение пригодно только на тот промежуток времени, пока $\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} < 0$. Когда же в этом решении $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точке x =l становится положительным, соударение оканчивается.

При 0< t < $\frac{2l}{a}$ $\quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = -\frac{\upsilon}{a} e^{-\frac{at}{ml}} < 0$ и акт соударения не может закончиться.

При $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ $\quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = -\frac{\upsilon}{a} e^{-\frac{at}{ml}} \left[1 + 2e^{\frac{2}{m}} (1 - \frac{at-2l}{ml}) \right]$

И $\frac{\partial u(l,t)}{\partial t}$ становится положительным, когда

$$\frac{2at}{ml} = \frac{4}{m} + 2 + e^{-\frac{2}{m}};$$

последнее уравнение может иметь в интервале $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ — корень при условии, что $2 + e^{-\frac{2}{m}} < \frac{4}{m}$.

Уравнение $2 + e^{-\frac{2}{m}} < \frac{4}{m}$.

имеет корень m= 1,73 ...

Если m<1,73 ..., соударение прекращается в момент времени t, который лежит в интервале $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ и определяется по формуле

$$t=\frac{l}{a}\left(2+m+\frac{1}{2}me^{-\frac{2}{m}}\right).$$

Если m> 1,73 ..., то можно таким же способом проверить, заканчивается ли соударение в момент времени t, лежащий в интервале $\frac{4l}{a} < t < \frac{6l}{a}$

Пример 4. Решить неоднородное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2t, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0$$

при однородных краевых условиях

$$u|_{x=0} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0$$

и нулевых начальных условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

Задача описывает вынужденные колебания однородной струны, закрепленной на концах, под действием внешней возмущающей силы $f(x,t) = 2t$. Применяя метод Фурье разделения переменных, полагаем $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$м для решения соответствующего однородного уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях. Подставив $u(x,t)$ это уравнение, получаем равенство

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)},$$

Возможное лишь в случае, если обе части его не зависят ни от *x,* ни от *t,* т.е. представляет собой одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через с: $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = c.$

Используем краевые условия:

$u(0,t) = X(0)\cdot T(t) = 0$,следовательно

$X(0) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = X'(l)T(t) = 0$ и $X'(l) = 0,$

Таким образом, приходим к задаче Штурма-Лиувилля: найти такие значения параметра с, при которых существуют нетривиальные (т.е. отмеченные от тождественного нуля) решения уравнения, удовлетворяющие краевым условиям

$$X''(x) - cX(x) = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X'(l) = 0 \qquad (*)$$

При $c \geq 0$ в общем решение уравнения, согласно краевым условиям, $c_1=0$, $c_2=0$ и решение задачи (*) становятся $X(x) \equiv 0$ – случаи не интересны. При с>0, $c=-\lambda^2$: общее решение вида: $X(x)=c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$, $X(x)=-c_1\lambda\sin\lambda x+c_2\lambda\cos\lambda x$. $X(0)=c_1 1+c_2 0=c_1=0$, $X'(l)=c_2\lambda\cos\lambda l=0$, $\forall c_2 \neq 0$ считаем. Поэтому $\cos\lambda l=0$. Находим ее собственные значения $\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{1}{l}$, и соответствующие им собственные функции $X_k(x)=i\pi\lambda_k x$, k=0,1,2,…,определяемые с точностью до постоянного множителя, который мы полагаем равным единице.

Следовательно, лишь при $c=-\lambda^2_к$, к=0,1,2,…, имеем нетривиальные решения задачи (*). Теперь решение задачи ищем в виде Фурье

$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\sin(\lambda_k x)$, где $T_k(0) = 0, T'_k(0) = 0$

Подставляя $u(x,t)$ в основное уравнение , получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}(T''_k(t) + \lambda_k^2 T_k(t))\sin(\lambda_k x) = 2t\cdot 1$$

Для нахождения функций $T_k(t)$ разложим функцию 1 в ряд Фурье по синусам на интервале(0,1):

$1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\sin(\lambda_k x)$, Так как

$\int_0^1 \sin^2(\lambda_k x)\,dx = \frac{1}{2}$, то получаем уравнение

$$T''_k(t)+\lambda_k^2 T_k(t)=\frac{4t}{\lambda_k},$$

Общее решение которого, имеет вид

$$T_k(t)=\mathrm{A}\sin(\lambda_k t)+B\cos(\lambda_k t)\frac{4t}{\lambda_k^3};$$

Значения неопределенных коэффициентов: A=$-\frac{4t}{\lambda_k^4}$, B=0,

$$T_k(t)=\frac{4t}{\lambda_k^3}-\frac{4t}{\lambda_k^4}sin(\lambda_k t)$$

Окончательно:

$$u(x,t)=4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^4}(\lambda_k t-\sin(\lambda_k t))sin(\lambda_k t),\ \ \lambda_k=\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

Пример 5. Решить неоднородное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1-x)t,\ 0<x<1,\ t>0.$$

При начальных условиях $u|_{t=0}=0$ и однородных краевых условиях $u|_{x=1}=0,\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$

Применяя метод Фурье разделения переменных, полагаем $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ для решения соответствующего однородного уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при наших краевых условиях . Приходим к задаче Штурма-Лиувилля $X''(x)+\lambda^2X(x)=0$, $X''(0)=0$, $X(1)=0$. Находим собственные значения $\lambda_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0,1,2,\ldots$ и соответствующие им собственные функции $X_k(x)=\cos\lambda_k x$.

Решение задачи ищем в виде

$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cos(\lambda_k x)$, где$T_k(0)=0$.

Подставляя $u(x,t)$ в основное уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(T'_k(t)+\lambda_k^2T_k(t))cos(\lambda_k x)=(1-x)t$$

Для нахождения функции $T_k(t)$ разложим функцию 1-x в ряд Фурье по косинусам на интервале (0,1):

$$1 - x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\lambda_k x)$$

Так как $a_k = 2\int_0^1 (1 - x)\cos(\lambda_k x)\,dx = \frac{2}{\lambda_k^2}$, то получаем

$T'_k(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = \frac{2}{\lambda_k^2} t$ при условии $T_k(0) = 0$.

Решая задачу Коши, находим ее решение

$$T_k(t) = \frac{2}{\lambda_k^6}\left(e^{-\lambda_k^2 t} + \lambda_k^2 t - 1\right)$$

Подставляя функцию $T_k(t)$ в формулу для u(x,t), находим искомое решение задачи :

$$u(x,t) = 2\frac{1}{\lambda_k^6}\left(e^{-\lambda_k^2 t} + \lambda_k^2 t - 1\right)\cos(\lambda_k x),$$ где $\lambda_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$

В данной задаче рассматривается ограниченный стержень длины l=1 и решается уравнение теплопроводности стержня, где $u(x,t)$ - температура стержня в точке x в момент времени t

Пример 6. Привести уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

к каноническому виду и решить его.

Это уравнение гиперболического типа, так как B^2-$AC=\sin^2x+\cos^2x=1$. Согласно общей теории, составляем уравнение (22a) dy^2 - 2sinxdxdy-cosxdx^2 = 0 или dy + (l + sinx)dx=0, dy-(1-sinx)dx = 0, интегрируя эти уравнения, получим X+y-cosx=C_1, x-y+cosx=C_2.

Вводим новые переменные (ξ,η) по формулам

ξ = x + y — *cosx*, *η= x-y+cosx*. Тогда наше уравнение в новых независимых переменных приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$

Положив ξ=α+β, η=α-β, приведем уравнение к каноническому виду:

$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0$. Уравнение можно проинтегрировать в замкнутом виде, т. е. найти формулу, дающую все решения этого уравнения. Действительно, перепишем это уравнение в виде

$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$ Тогда $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \Theta(\eta)$, где θ(η) — произвольная функция η. Интегрируя полученное уравнение по η, считая ξ параметром, найдем, что $u = \int \Theta(\eta) d\eta + \varphi(\xi)$, где φ(ξ) — произвольная функция по ξ. Полагая $\int \Theta(\eta) d\eta = \psi(\eta)$, получим

u=φ(ξ)+ψ(η), или, возвращаясь к старым переменным (x, y), получим решение основного уравнения в виде

$$u(x,y)=\varphi(x+y-\cos x)+\psi(x-y+\cos x).$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Задача 1. Однородная струна, закрепленная на концах x = 0 и x=*l*, имеет в начальный момент времени t=0 форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку $x = \frac{l}{2}$. Определить форму струны в моменты времени $t=\frac{l}{2a}$ и $t=\frac{l}{a}$, предполагая, что начальные скорости осутствуют.

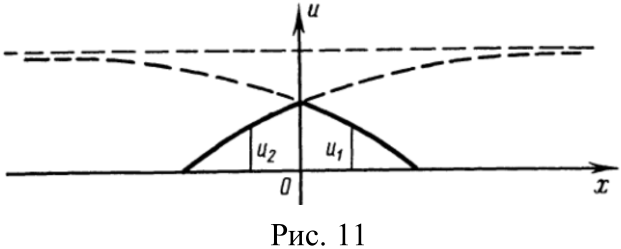


Рис. 11

2. Бесконечная струна, находящаяся в прямолинейном положении равновесия, получает в начальный момент времени (t= 0) удар от молоточка, масса которого равна M, причем этот молоточек касается струны в точке x= 0 и имеет начальную скорость V_0.

Доказать, что в любой момент времени t > 0 возмущенная струна имеет вид, показанный на рис. 11, где u_1—прямая волна: $u_1 = \dfrac{MaV_0}{2T}\left\{1 - e^{\frac{2T_0}{Ma^2}(x-at)}\right\}$ при x-at<0; u_1=0 при x-at>0,

и $u_2(x, t)$ — обратная волна:

$u_2 = \dfrac{MaV_0}{2T}\left\{1 - e^{-\frac{2T_0}{Ma^2}(x+at)}\right\}$ при x+at>0; u_2=0 при x+at<0.

Указание. При интегрировании уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

следует принять во внимание условия

$$M\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\Big|_{x=0} = M\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\Big|_{x=0} = -T_0\frac{\partial\, u_2}{\partial x} + T_0\frac{\partial\, u_1}{\partial x}\Big|_{x=0}.$$

Задача 2. Дана неограниченная пластина толщиной 2R при температуре $0^\circ C$. Пластина нагревается с обеих сторон одинаково постоянным тепловым потоком q.
Найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени t > 0.
Ответ:

$$u(x,t) = \frac{a^2 q}{kR}\left(t - \frac{R^2 - 3x^2}{6a^2}\right) - \frac{2qR}{k\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi x}{R},$$

где k—коэффициент внутренней теплопроводности.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения
$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при условиях

$$k\frac{\partial u}{\partial x} + q\Big|_{x=-R} = 0, \quad -k\frac{\partial u}{\partial x} + q\Big|_{x=R} = 0, \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 0.$$

Задача 3. Привести к каноническому виду уравнения:

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(3 + \sin^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ответы:

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta - \xi}{32}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

$$\xi = 2x + \sin x + y, \eta = 2x - \sin x - y.$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \xi = \frac{x^2}{2} + y, \eta = x.$$

Форма отчетности: устный опрос

ЗАНЯТИЕ № 62

ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Литература: [16], с. 280-327, [30], с. 46-68.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое вариация, функционал, экстремаль и их свойства ?

2. Какие вы знаете уравнения Эйлера вариационного исчисления ?

3. Как вычисляется минимум функционала?

4. В чем заключается вариационный метод решения физических задач (привести пример)?

Дополнительные вопросы

1. Как применяются вариационный метод при решении технических задач (привести пример)?

2. Как применяются вариационный метод при решении задач теории управления (привести пример)?

Примеры решения задач

Пример 1.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y_2 dx, \; y(x_0)=y_0, \; y(x_1)=y_1.,$$

Уравнение Эйлера имеет вид $F_y=0$ или $y=0$.

Экстремаль $y = 0$ проходит через граничные точки только при $y_0 = 0$ и $y_1 = 0$ (рис. 12).

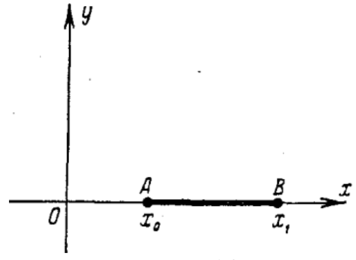


Рис. 12

Если $y_0 = 0$ и $y_1 = 0$, то, очевидно, функция $y=0$ реализует минимум функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$$

так как $v\,[y\,(x)] \geq 0$, причем $v = 0$ при $y = 0$.

Если же хотя бы одно из y_0 и y_1 не равно нулю, то минимум функционала на непрерывных функциях не достигается, что и понятно, так как можно выбрать последовательность непрерывных функций $y_n(x)$, графики которых состоят из все более и более круто спускающейся из точки (x_0, y_0) к оси абсцисс дуги кривой, затем из отрезка оси абсцисс, почти совпадающего со всем отрезком (x_0, x_1), и, наконец, возле точки x_1 круто поднимающейся к точке (x_1, y_1) дуги кривой (рис. 13). Очевидно, что на кривых такой последовательности значения функционала сколь угодно мало отличаются от нуля и, следовательно, нижняя грань значений функционала равна нулю, однако эта нижняя грань не может достигаться на непрерывной кривой, так как для любой непрерывной кривой $y = y(x)$, отличной от тождественного нуля, интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx > 0$$

Эта нижняя грань значений функционала достигается на разрывной функции (рис. 14.)

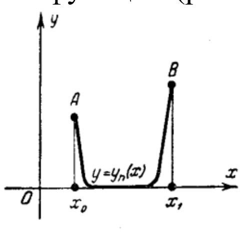


Рис. 13

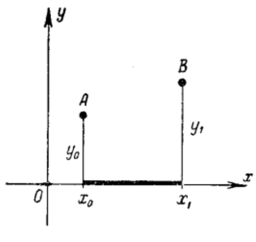


Рис. 14

$$y(x_0) = y_0$$

$$y(x_0) = 0, \; x_0 < x < x_1$$

$$y(x_1) = y_1$$

Функция F линейно зависит от y':

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'$$

$$v=\int_{x_0}^{x_1}\left(M+N\frac{dy}{dx}\right)d'x$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'-\frac{d}{dx}N(x,y)=0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'-\frac{\partial N}{dx}-\frac{\partial N}{\partial y}y'=0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0.$$

Но это опять, как и предыдущем случае, конечно, а не дифференциальное уравнение. Кривая $\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}=0$, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям, следовательно, вариационная задача, как правило, не имеет решения в классе непрерывных функций.

Если же $\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}\equiv 0$, то $Mdx+Ndy$ является точным дифференциалом и

$$v=\int_{x_0}^{x_1}\left(M+N\frac{dy}{dx}\right)d'x=\int_{x_0}^{x_1}(Mdx+Ndy)$$

не зависит от пути интегрирования, значение функционала v постоянно на допустимых кривых. Вариационная задача теряет смысл.

Пример 2

$$v[y(x)]=\int_0^1\left(y^2+x^2y'\right)dx$$

y(0)=0, y(1)=a.

Уравнение Эйлера имеет вид $\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}=0$ или *y-x=0.*

Первое граничное условие $y(0)=0$ удовлетворяется, но второе граничное условие удовлетворяется лишь при $a=1$. Если же $a \neq 1$, то экстремали, удовлетворяющей граничным условиям, не существует.

Пример 3.

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(y+xy'\right)dx \quad \text{или} \quad [y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(ydx+xdy)$$

.

$$y(x_0)=y_0 \quad y(x_1)=y_1$$

Уравнение Эйлера превращается в тождество $1\equiv 1$. Подынтегральное выражение является точным дифференциалом, и интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$v[y(x)]=\int_{0x_0}^{x_1}d(yx)=x_1y_1-x_0y_0$$

,

по какой бы кривой мы ни интегрировали. Вариационная задача не имеет смысла.

F зависит лишь от y':F = F (y').

Уравнение Эйлера имеет вид $F_{y'y'}\ y''=0$, так как $F_y=F_{xy'}=F_{yy'}=0$. Отсюда $y''=0$ или $F_{y'y'}=0$. Если $y''=0$, то

$y=C_1x+C_2$— двухпараметрическое семейство прямых линий. Если же уравнение $F_{y'y'}(y')=0$ имеет один или несколько действительных корней $y'=k_i$, то $y=k_{ix}+C$, и мы получаем однопараметрическое семейство прямых, содержащееся в полученном выше двухпараметрическом семействе $y=C_1x+C_2$. Таким образом, в случае $F=F(y')$ экстремалями являются всевозможные прямые линии $y=C_1x+C_2$.

Пример 4. Время $t[y(x)]$, затрачиваемое на перемещение по некоторой кривой $y=y(x)$ из точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x_1, y_1)$, если скорость $\frac{ds}{dt}=v(y')$ зависит только от y', является функционалом вида. Следовательно, экстремалями этого функционала являются прямые линии.

F зависит лишь от x и y′:F = F(x, y′).

Уравнение Эйлера приобретает вид $\frac{d}{dx}F_{y'}(x,\ y') = 0$ и, следовательно, имеет первый интеграл. $F_{y'}(x,\ y') = C_1$, причем так как полученное уравнение первого порядка $F_{y'}(x,\ y') = C_1$ не содержит y, то уравнение может быть проинтегрировано или путем непосредственного разрешения относительно y' и интегрирования, или путем введения подходящим образом выбранного параметра.

Пример 5. Функционал

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx$$

(t — время, затрачиваемое на перемещение по кривой $y = y(x)$ из одной точки в другую, если скорость движения $v = x$, так как если $\frac{ds}{dt} = x$, то $\frac{ds}{x} = dt$ и

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx.$$

Первый интеграл уравнения Эйлера будет $F_{y'} = C_1$ и

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Это уравнение проще всего интегрируется, если ввести параметр, полагая $y' = tg\ t$; тогда

$$x = \frac{1}{C_1}\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1}\sin t$$

$$x = \overline{C_1}\sin t\text{, где } \overline{C_1} = \frac{1}{C_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = tgt\text{, } dy = tgtdx = tgt \cdot \overline{C_1}\cos tdt = \overline{C_1}\sin tdt$$

интегрируя, получаем $y = -\overline{C_1}\cos t + C_2$. Итак,

$$x = \overline{C_1}\sin t\text{, } y - C_2 = -\overline{C_1}\cos t$$

или, исключая t, получаем $x^2 - (y-C_2)^2 = \overline{C_1^2}$ —семейство окружностей с центрами на оси ординат.

F зависит лишь от y и y′: F = F(y, y′).

Уравнение Эйлера имеет вид: $F_y - F_{yy'} - F_{y'y'}y'' = 0$ так как $F_{xy'} = 0$. Если умножить почленно это уравнение на y', то, как нетрудно проверить, левая часть превращается в точную производную. Действительно,

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = F_y y' + F_{y'}y'' - y''F_{y'} - F_{yy'}y'^2 - F_{y'y'}y'y'' = y'\left(F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y''\right)$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'F_{y'} = C_1$, причем так как это уравнение первого порядка не содержит явно x, то оно может быть проинтегрировано путем разрешения относительно y' и разделения переменных или путем введения параметра.

Пример 6. Задача о наименьшей поверхности вращения: определить кривую с заданными граничными точками, от вращения которой вокруг оси абсцисс образуется поверхность наименьшей площади (рис. 15).

Как известно, площадь поверхности вращения

$$S[y(x)] = 2\pi\int_{x_2}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

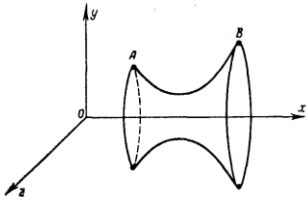


Рис. 15

Подынтегральная функция зависит лишь от y и y' и, следовательно, первый интеграл уравнения Эйлера будет иметь вид $F\text{-}y'F_{y'}= C_1$ или в данном случае у

$$y=\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1.$$

После упрощений получаем

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1.$$

Проще всего это уравнение интегрируется подстановкой $y'=sht.$ тогда $y = C_1\ ch\ t$, а

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{C_1shtdt}{sht}=C_1dt, \quad x=C_1t+C_2.$$

Итак, искомая поверхность образуется вращением линии, уравнение которой в параметрической форме имеет вид

$$x=C_1t+C_2$$
$$y=C_1cht$$

Исключая параметр t, будем иметь $y=C_1ch\frac{x-C_2}{C_1}$ семейство цепных линий, от вращения которых образуются поверхности, называемые катеноидами. Постоянные C_1 и C_2 определяются из условия прохождения искомой линии через заданные граничные точки (в зависимости от положения точек A и B может существовать одно, два или ни одного решения).

Пример 7. Задача о брахистохроне: определить кривую, соединяющую заданные точки A и B, при движении по которой материальная точка скатится из точки A в точку B в кратчайшее время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

Поместим начало координат в точку A, ось Ox направим горизонтально, ось Oy — вертикально вниз. Скорость движения материальной точки $\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$ откуда находим время, затрачиваемое на перемещение точки из положения $A\ (0,\ 0)$ в положение $B(x_1,y_1)$:

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$$

Так как этот функционал также принадлежит к простейшему виду и его подынтегральная функция не содержит явно x, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F\text{-}y'F_{y'}=C$, или в данном случае $(\sqrt{1+y'^2}/\sqrt{y})-(y'^2/\sqrt{y(1+y'^2)})=C$. Откуда после упрощений будем иметь $1/\sqrt{y(1+y'^2)})=C$ или $y(1+y'^2)=C_1$. Введем параметр t, полагая $y' = ctg\, t$; тогда получим:

$$y=\frac{C_1}{1+ctg^2 t}=C_1\sin^2 t=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t).$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2C_1\sin t\cos t dt}{ctg t}=2C_1\sin^2 t dt=C_1(1-\cos 2t)dt$$

$$x=C_1\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t)+C_2$$

Следовательно, в параметрической форме уравнение искомой линии имеет вид

$$x-C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t),\quad y=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t)$$

Если преобразовать, параметр подстановкой $2t=t_1$ и принять во внимание, что $C_2=0$, так как при $y=0$, $x=0$, то мы получим уравнение семейства циклоид в обычной форме:

$$x = \frac{C_1}{2}(t_1 - sint_1),, y = \frac{C_1}{2}(1 - cost_1),$$

где $C_1/2$- радиус катящегося круга, который определяется из условия прохождения циклоиды через точку $B(x_{1,},y_1)$. Итак, брахистохроной является циклоида.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Пример 1. На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(y')^2 - y^2\right]dx;$$

$$y(\pi/2) = 1\ ,\ \ y(0) = 0.$$

Пример 2. На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 \left[(y')^2 + 12xy\ \right]dx;$$

$$y(0) = 0\ ,\ y(1) = 1$$

Пример 3. Длина дуги кривой

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Найти экстремали.

Форма отчетности: устный опрос

ЗАНЯТИЕ № 63-64

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ. КОМБИНАТОРИКА

Литература: [18], с. 10-48, с. 159-172, [20], с.5 -39, [31] с. 270-276

Контрольные вопросы и задания

1. Понятия множества их свойства?
2. Какие вы знаете операции над множествами ?
3. Дайте определения бинарного отношения.
4. Что такое перестановки, размещения, сочетания ?
5. В чем состоят диаграммы Эйлепа- Венана ?

Дополнительные вопросы

1. Как применяются множества при решении электротехнических задач (привести пример) ?
2. Как применяются множества при решении задач теории управления (привести пример) ?

Примеры решения задач

Задача 1 . Пусть Y — множество студентов группы, а X – множество отличников той же группы. Так как каждый отличник группы является в то же время студентом этой группы, то множество X является подмножеством множества Y.

Замечание. Не следует смешивать отношение принадлежности $\in$ и отношение включения $\subseteq$. Хотя $0 \in \{0\}$ и $\{0\} \in \{\{0\}\}$, неверно, что $0 \in \{\{0\}\}$, поскольку единственным элементом множества $\{\{0\}\}$ является $\{0\}$.

Задача 2 . Справедливы следующие включения: $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $Q \subset R$, $R \subset C$.

Заметим, что если X является подмножеством Y и наоборот, то X и Y состоят из одних и тех же элементов, поэтому

$$X = Y \Leftrightarrow (X \subseteq Y \text{ и } Y \subseteq X).$$

Таким образом, чтобы доказать равенство двух множеств, надо установить два включения.

Задача 3. Покажем, что множества $M_1=\{x \mid \sin x = 1\}$ и $M_2=\{x \mid x = \frac{\pi}{2}+2\kappa\pi,\ \kappa \in Z\}$ совпадают.

Если $x \in M_1$, то x является решением уравнения $\sin x=1$. Но это значит, что x можно представить в виде $x=\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi$ и поэтому $x \in M_2$. Таким образом, $M_1 \subseteq M_2$. Если $x \in M_2$, т.е. $x=\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi$, то $\sin x=1$, т.е. $M_2 \subseteq M_1$. Следовательно, $M_1=M_2$.

Задача 4 . Пусть $X=\{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда

$P(X)=\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \varnothing\}.$

Задача 5 . Пусть $X=\{1,2\}$, $Y=\{3,4,5\}$. Тогда $X \times Y = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$, $Y \times X = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2)\}$, $X \times X = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$.

Задача 6. Если $X=\{2,3,4,5,6,7,8\}$, то бинарное отношение $R=\{(x,y) \mid x$ делит y и $x \le 3\}$, заданное на множестве X, можно записать в виде $R=\{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6)\}$.

Задача 7. Определим свойства отношения $R=\{(x,y) \mid x,y \in \boldsymbol{N}$ и x – делитель $y\}$, заданного на множестве натуральных чисел.

1. Так как $\frac{x}{x}=1$ для всех $x \in \boldsymbol{N}$, то R рефлексивно.

2. Рассмотрим элемент $(2,4) \in R$. 2 - делитель 4, но 4 не является делителем 2, т. е. $(4,2) \notin R$, следовательно, R - несимметричное отношение.

3. Так как, если $\frac{y}{x} \in \boldsymbol{N}$ и $\frac{z}{y} \in \boldsymbol{N}$, то $\frac{z}{x}=\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y} \in \boldsymbol{N}$ и R – транзитивно.

Задача 8. На блюде лежат 5 яблок и 2 груши. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение: плод можно выбрать семью способами (5+2=7).

Задача 9. Среди студентов первого курса 30 человек имеют дома компьютер, 35 – учебник по информатике; оказалось, что 10 студентов имеют и компьютер, и учебник по информатике. Сколько студентов на первом курсе?

Решение: пусть множество A составляют студенты, имеющие компьютер, множество B – студенты, имеющие учебник по информатике; по условию задачи:

$$|A| = 30, |B| = 35, \; |A \cap B| = 10, \quad |A \cup B| = ?$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 30 + 35 - 10 = 55.$$

Задача 10. Определить количество клеток в игре «морской бой», если номер клетки состоит из буквы (букв 10) и цифры (цифр тоже 10).

Решение: количество клеток равно 10•10=100.

Задача 11. Сколько номеров, состоящих из двух букв, за которыми идут три цифры можно составить, если использовать 29 букв и 10 цифр.

Решение: обозначим множество букв A, множество цифр – B; каждый номер требуемого вида является набором длины n из декартова произведения $A \times A \times B \times B \times B$; по условию $|A| = 29$, $|B| = 10$, тогда по следствию из теоремы3 имеем:

$$|A \times A \times B \times B \times B| = 29 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 841\,000.$$

Задача 12. Шесть человек могут в разном порядке сесть за круглый стол, сколько существует способов разместить эти шесть человек за столом?

Решение: т.к. все люди различны и их комбинации различаются только порядком следования, то мы имеем перестановки без повторений. Определим их число:

$P(6) = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Задача 13. Сколько различных «слов» можно составить из букв слова ДЕД, МАТЕМАТИКА.

Решение: имеем перестановки с повторениями.

А) ДЕД $n=3$, $k=2$, $n_1=2$, $n_2=1$ и $P_3(2, 1) = 3!/(2! \cdot 1!) = 6 / 2 = 3$;

Б) МАТЕМАТИКА $n=10$, $k=6$, $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=2$, $n_4=n_5=n_6=1$. То $P_{10}(2,3,2,1,1,1)=10!/(2! \cdot 3! \cdot 2!)=2\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot9\cdot10 = 134\,400$.

Задача 14. Расписание одного дня состоит из двух пар. Определить число вариантов расписания при выборе из пяти дисциплин, если не может быть одинаковых пар.

Решение: имеем размещения без повторений из пяти элементов по два, из число: $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20$.

Задача 15. Сколько четырехзначных номеров можно составить из 10 цифр?

Решение: имеем размещения с повторениями из 10 элементов по 4, их число: $\overline{A_{10}^4} = 10^4 = 10000$.

Задача 16. В шахматном турнире участвует 7 человек; сколько партий будет сыграно, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна партия?

Решение: имеем сочетания без повторений из 7 элементов по 2; их число: $C_7^2 = \frac{A_7^2}{P_2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{6 \bullet 7}{2} = 21$.

Задача 17. Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеется 4 сорта пирожных?

Решение: имеем сочетания с повторениями из четырех по 7 по, их число: $\overline{C_4^7} = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{8 \bullet 9 \bullet 10}{1 \bullet 2 \bullet 3} = 120$

Задача 18. Сколькими способами можшо выбрать из полной колоды карт , содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были все четыре масти?

Решение: Пусть у нас есть масти a, b, c, d. Тогда комбинации которые нас утраивают это комбинации a,b,c,d,a,a и a,b,c,d,a,b. То есть 4 карты разных мастей и две другие карты могут быть либо одной масти между собой, либо разных мастей между собой. Тогда считаем количество способов: для комбинации один количество способов выбрать ту масть, карт которой, мы берем три штуки: $C_4^1 * C_{13}^3$, далее считаем количество способов вытащить другие три карты, причем разных мастей между собой и не той масти, которую вытянули первой. Число таких способов $C_{13}^1 * C_{13}^1 * C_{13}^1 = 13^3$.

Таким образом, для условной комбинации a,b,c,d,a,a получаем $C_4^1 * C_{13}^3 * 13^3$ способов. Далее рассмотрим вторую условную комбинацию, ее можно описать так: есть 2 масти, карт которых, у нас по две и еще две карты, разных между собой, мастей, и не таких, как первые четыре карты. Считаем количество способов сначала выбрать 2 масти, карт которых, у нас по две и из каждой из этих двух мастей взять по 2 карты: $C_4^2 * C_{13}^2 * C_{13}^2$. А теперь нам нужно вытянуть еще две карты, не таких мастей, как первые 4 и разные между собой. Число таких способов 13^2.

Далее, обобщая два результата, получаем общее число способов:

$$C_4^1 * C_{13}^3 * 13^3 + C_4^2 * C_{13}^2 * C_{13}^2 * 13^2.$$

Ипи $(C_4^1 * C_{13}^3 * 13^3) + (C_4^2 * C_{13}^2 * C_{13}^2 * 13^2)$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения
Множества

1. Докажите равенства $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, где A, B, C - множества.
2. Верно ли равенства $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, где A, B, C - множества?
3. Что является дополнением к множеству четных чисел во множестве натуральных чисел?
4. Что является дополнением к множеству $\{1,3,5\}$ во множестве $\{1,2,3,4,5,6\}$?
5. Что является дополнением к множеству $\{1,3,5\}$ во множестве $\{1,3,5\}$?
6. Даны множества $X_0=\{1,2,3,4,5,6\}$, $X_1=\{1,2,3,4\}$, $X_2=\{2,3,4,5\}$, $X_3=\{2,3,4\}$, $X_4=\{3,4,5\}$, $X_5=\{2,3\}$, $X_6=\{3,4\}$, $X_7=\{4,5\}$, $X_8=\{2,4\}$. Сформируйте частичный порядок на этих множествах.
7. Пусть X - множество всех прямых на плоскости. Являются ли эквивалентными отношения а) параллельности прямых и б) перпендикулярности прямых?
8. Приведите пример четырех различных рефлексивных отношений на множестве $A = \{2,5,3,4,8,1\}$.

9. Приведите пример трех различных отношений на множестве $A = \{2,5,3,4,8,1\}$, не являющихся рефлексивными.
10. Приведите пример двух различных симметричных отношений и двух различных, не являющихся симметричными, на множестве $\{1,2,4,6,7,0,10\}$.
11. Приведите пример двух различных транзитивных отношений и двух различных, не являющихся транзитивными, на множестве $\{1,2,4,6,7,0,10\}$.
12. Приведите пример множества и двух различных эквивалентностей на нем.
13. Приведите пример множества и двух различных частичных порядков на нем.
14. Определите свойства следующих отношений, заданных на множестве действительных чисел (***R***)
а) $R=\{(x,y)|\ x,y\in \boldsymbol{R}$ и $x - y<0\}$, в) $R=\{(x,y)|\ x,y\in \boldsymbol{R}$ и $2x \geq 3y\}$, c) $R=\{(x,y)|\ x,y\in \mathrm{R}$ и $|x| \geq |y|\}$.
15. Докажите, что если отношения R_1 и R_2 рефлексивны, то рефлексивны следующие отношения $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \circ R_2$, R_1^{-1}.
16. Докажите, что если R эквивалентность, то R^{-1} есть также эквивалентность.
17. Докажите, что $R_1 \cup R_2$ – эквивалентность тогда и только тогда, когда $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$.

Комбинаторика

1. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата – белый и чёрный? А если нет ограничения на цвет квадратов?

   Ответ: 1042; 4032.

2. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты, не лежащие на одной горизонтали и вертикали?

   Ответ: 32×24.

3. Имеется три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами они могут упасть? А если известно, что по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой "1"?

   Ответ: 480.

4. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт (52 карты) по одной карте каждой масти?

   Ответ: 13^4.

5. В магазине лежат 6 экземпляров романа И. С. Тургенева "Рудин", 3 экземпляра его же романа "Дворянское гнездо" и 4 экземпляра романа "Отцы и дети". Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы "Рудин" и "Дворянское гнездо", и 7 томов, содержащих романы "Дворянское гнездо" и "Отцы и дети". Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов? Та же задача, если, кроме того, в магазине есть 3 тома, в которые входят романы "Рудин" и "Отцы и дети".

   Ответ: 134; 143.

6. Возможно ли равенство $P_n = 36A_{n-1}^2$ и если да, то при каких n?

Ответ: Да, при $n = 6$.

7. Сколькими способами могут 4 человека разместиться в четырёхместном купе железнодорожного вагона?

Ответ: 24.

8. Найти число простых чисел, не превосходящих 250.

Ответ: 53.

9. У одного человека есть 7 книг, у другого 9.Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого, если все книги различны? Та же задача, но меняются две книги одного на две книги другого.

Ответ: 63; 756.

10. Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если используются 27 букв русского алфавита.

Ответ: 33820×10^4.

11. Сколькими способами можно составить список из 7 студентов?

Ответ: 5040.

12. Из спортклуба, насчитывающего 30 человек, надо выбрать команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать? А если нужно выбрать команду из четырех человек для участия в эстафете 100+200+400+800?

Ответ: 27405; 657720.

13. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из семи цифр 0, 1, 2,... , 6 , если каждая из них может повторяться несколько раз?

Ответ: 2058.

14. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,4,6,7,8, если никакую цифру не использовать более одного раза?

Ответ: 6!.

15. На танцевальном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них четыре пары для танцев?

Ответ: 17417400.

16. Из цифр 1,2,3,4,5 составляются всевозможные числа, каждое из которых содержит не менее трех цифр. Сколько таких чисел можно составить, если повторение цифр в числах запрещено?

Ответ: $P_5 + A_5^4 + A_5^3 = 300$.

17. Сколькими способами можно выбрать 6 одинаковых или разных пирожных в кондитерской, где продаются 11 разных сортов пирожных?

Ответ: H_{11}^{4}.

18. Сколько всего костей домино, если используется для их образования 7 цифр 0,1,2,3,4,5,6. Ответ обосновать.

Ответ: 28, так как кости домино можно рассматривать как неупорядоченные 2-выборки из 7-и цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 с повторениями;

19. В группе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок,11 - физический;10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учащихся посещают оба кружка? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

Ответ: 6; 14.

20. Изучаются 10 учебных предметов. В понедельник надо поставить 6 уроков, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

Ответ: 151200.

21. Сколькими способами читатель может выбрать 3 разные книги из пяти?

Ответ: 10.

22. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "тик-так" чтобы одинаковые буквы не шли друг за другом? То же самое для слова "тартар".

Ответ: 84; 30.

23. Сколько целых чисел от 0 до 999,которые не делятся ни на 2,ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Ответ: 228.

24. Сколькими способами можно переставить числа 12341234 так, чтобы ни какие две одинаковые цифры не шли друг за другом?

Ответ: 864.

25. Сколькими способами можно переставить числа 12345254 так, чтобы ни какие две одинаковые цифры не шли друг за другом.

Ответ: 2230.

26. Сколько разных слов можно составить, переставляя буквы в слове "мама"? Напишите эти слова.

Ответ: 6.

Форма отчетности: устный опрос

ЗАНЯТИЕ № 65-67

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Литература: 18], с.172-212, [20],с.140 -181, [31] с. 277-282

Контрольные вопросы и задания

1. Какие вы знаете логические операции над высказываниями?
2. В чем состоят равносильные преобразования над высказываниями ?
3. Как составляется таблица истинности ?
4. Что такое формы СДНФ и СКНФ и работа с ними.?

Дополнительные вопросы

1. Как строится булева функция согласно тексту задачи?
2. Как вычисляется решение логического уравнения (привести пример).?

Примеры решения зада

Задача 1. С помощью основных равносильностей доказать, что в булевой функции $F=(x_2 \vee x_2x_3)\to(x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3)$ переменная x_3 является фиктивной.

Решение. Применяя закон поглощения и закон склеивания, получим

$$F=(x_2 \vee x_2x_3)\to(x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3)=x_2 \to x_1 .$$

Так как существует такая формула, реализующая эту булеву функцию, в которой отсутствует x_3, то эта переменная является фиктивной.

Задача 2. С помощью таблицы истинности убедиться в справедливости законов де Моргана $\overline{x\,y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

Решение. Построим таблицу истинности для $\overline{x\,y}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$.

xy	$\overline{x\,y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	1	1	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0

Так как в таблице истинности булевым функциям $\overline{x\,y}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$ соответствуют одинаковые столбцы, то формулы $\overline{x\,y}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$ равносильны.

Задача 3. С помощью основных равносильностей доказать закон обобщенного склеивания $x\,y \vee \bar{x}\,z = x\,y \vee \bar{x}\,z \vee y\,z$.

Решение. Применяя закон склеивания (в обратном порядке, то есть $y\,z = x\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z$) и дистрибутивность (то есть вынесем за скобки $x\,y$ и $\bar{x}\,z$), получим

$$x\,y \vee \bar{x}\,z \vee y\,z = x\,y \vee \bar{x}\,z \vee x\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z = x\,y(1 \vee z) \vee \bar{x}\,z(1 \vee y) = x\,y \vee \bar{x}\,z\,.$$

Задача 4 . По таблице истинности составить СДНФ

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Решение: СДНФ: $F = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

Задача 5. По таблице истинности составить СКНФ.

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Решение:

$F=$

$$= (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Упростить следующие ПФ, используя равносильные преобразования:

а) $(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \to (Z \to X)$,

б) $(Y \to X) \wedge Y \vee \overline{(\overline{X} \wedge \overline{Y})}$,

в) $\overline{X} \vee X \wedge Z \vee \overline{X} \wedge Z \vee X \wedge Y$,

г) $((\overline{\overline{X} \to \overline{Y}}) \to X) \wedge (X \to \overline{(\overline{X} \to \overline{Y})})$,

д) $\overline{X} \wedge Y \wedge Z \vee \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee Y \wedge Z$,

е) $\overline{(X \wedge Y \wedge Z)} \to \overline{(X \wedge Z)}$.

2. Составить таблицы истинности следующих ПФ и определить их тип:

а) $X \to (\overline{X} \to Y)$,

б) $(X \to (Y \to Z)) \to (Y \to (X \to Z))$,

в) $X \wedge Y \vee \overline{X} \leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y}$,

г) $\overline{(X \to Y)} \to (X \to Y)$,

д) $(\overline{X} \to Y) \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y}$.

3. Доказать равносильность

а) $(\overline{\overline{X} \to \overline{Y}}) \leftrightarrow X \equiv (X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{X}$,

б) $(\overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}) \vee \overline{(X \to Y)} \equiv (X \vee Y) \wedge X$,

в) $(Y \to X \vee Z) \wedge (\overline{X \vee Y}) \vee (X \to Z) \to X \wedge Y \wedge \overline{Z} \equiv X \wedge \overline{Z}$.

4. Определить конъюнктивное разложение по переменной X следующих ПФ:

а) $X \to (\overline{X} \to Y)$,

б) $X \to Y \vee Z$,

в) $(X \to \overline{Y}) \wedge Y \to \overline{X}$.

5. Определить дизъюнктивное разложение по переменной Y следующих ПФ:

а) $\overline{(X \to Y)} \to (X \to Y)$,

б) $(\overline{X} \to Y) \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y}$,

в) $(X \wedge \overline{Z} \to \overline{Y}) \leftrightarrow X$.

6. Привести к нормальным и совершенным нормальным формам следующие ПФ:

а) $X \to Y \wedge \overline{Z}$,

б) $(X \vee \overline{Y}) \to X$,

в) $X \wedge Y \vee \overline{X} \leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y}$.

7. Запишите символически следующие суждения:

а) «вертолет является средством передвижения по воздуху, имеет двигатель, пилотскую кабину, систему управления, несущий винт, помещение для пассажиров или грузов»;

б) «подготовка специалистов высокой квалификации возможна лишь на базе всемерного развития вузовской науки, усиления связи вузовской, академической и отраслевой науки, обеспечения единства научной и учебной работы, широкого привлечения студентов к научным исследованиям»;

в) «если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я опоздаю на работу; если я опоздаю на работу и стану огорчаться, то я не попадусь на глаза моему начальнику; если я не сделаю в срок важную работу, то я начну огорчаться и попадусь на глаза моему начальнику. Следовательно, если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я сделаю в срок важную работу».

Форма отчетности: устный опрос

ЗАНЯТИЕ № 68

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Литература: [18], с.198-159, [20], с.44 -140, [31] с. 282-293

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается графа и их свойства?
2. Какие вы знаете операции над графами ?
3. В чем заключается матричное представления графа?
4. Как определенются сильные компоненты графа ?
5. Как вычисляются метрические характеристики графа?

Дополнительные вопросы

1. Как применяются графы при решении тезнических задач (привести пример).?
2. В чем заключается метод построения матриц достижимости, сильной связности графа ?

Примеры решения задач

Задача 1. Определить метрические характеристики графа рис. 16

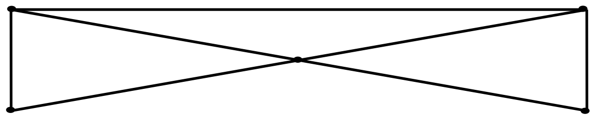


Рис. 16

Решение. Метрические характеристики определяются следующим образом:

$$
D = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\quad
\begin{array}{ll} e(x_1) = 2 & P(x_1) = 6 \\ e(x_2) = 1 & P(x_2) = 4 \\ e(x_3) = 2 & P(x_3) = 6 \\ e(x_4) = 2 & P(x_4) = 5 \\ e(x_5) = 2 & P(x_5) = 5 \end{array}
$$

Радиус графа равен 1, диаметр равен 2. Центр графа - вершина x_2; Медиана графа - вершина x_2.

Задача 2.

Найти сильные компоненты графа рис. 17

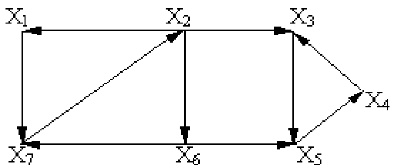


Рис. 17

Решение. Для данного графа матрицы R, Q и S имеют вид:

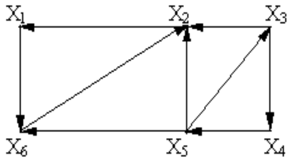
$$
R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$S = R * Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

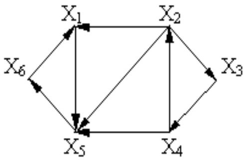
В соответствии с матрицей S сильные компоненты графа: x_1, x_2, x_6,x_7 –первая сильная компонента; x_3, x_4, x_5 - вторая сильная компонента.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

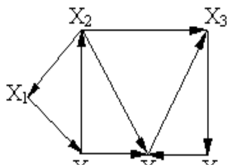
Определить сильные компоненты графов. изображенных на рис.18 а, б, в, г,д,е,ж,з .

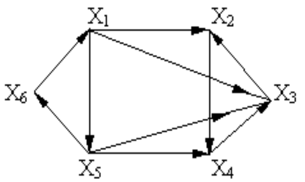


а

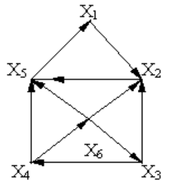


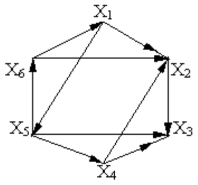
б



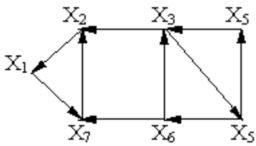


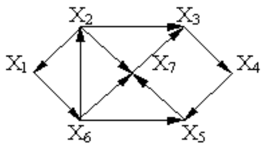
в г





д е





ж з

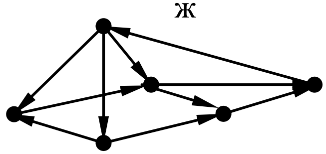


Рис. 18

1. Доказать, что в неорграфе число вершин с нечетной степенью четно.

2. Построить граф (если он существует) с последовательностью степеней а) (4,3,3,2,2); б) (5,4,2,2,1) .

3. Найти матрицы достижимости и контрдостижимости для графов G_1 ,G_2, G_4, изображенных на рис. и .

4. Доказать, что если G – несвязный граф, то $\overline{G}$ – связный.

5. Доказать, что в любом графе каждая его база содержит все вершины, имеющие нулевые полустепени захода.

6. Для графов, изображенных на рис.19, найти сильнее компоненты, построить конденсацию, найти базы и антибазы.

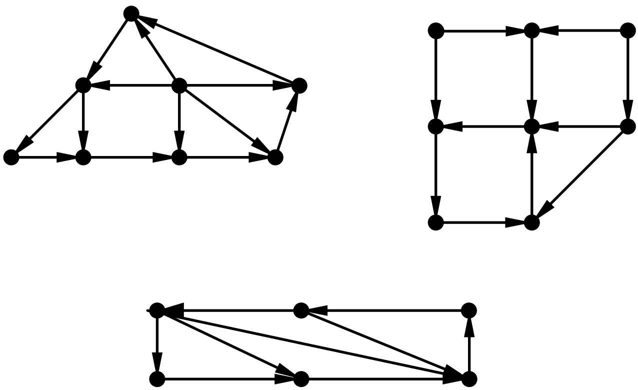


Рис. 19

8. Доказать, что хроматическое число каждого n-вершинного дерева ($n \geq 2$) равно 2.

Форма отчетности: устный опрос

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее пособие написано авторами на основе многолетнего опыта преподавания курса высшей математики в техническом университете и рассчитано на студентов тех специальностей, в программу которых входят курсы «Математика», «Спецглавы математики».

Материал пособия авторы постарались изложить так, чтобы максимально помочь студентам в их самостоятельной работе. С этой целью в пособии разобрано большое количество примеров, которые помогут студентам глубже усвоить теоретический материал курса и приобрести навыки решения задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. М.: Высш.шк., 1972.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике /В. Е. Гмурман. М.: Высш.шк., 1979.
3. Теория автоматического управления Под ред. В. Б. Яковлева. М.: Высш.шк., 2003.
4. Теория автоматического управления: Ч.1. / Под ред. А. А. Воронова. М. Высш.шк., 1986
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Ч.2. / Н. С. Пискунов. М.: Интеграл-Пресс, 2003
6. Мак-Кракен Д. Численные методы и программирование на Фортране /Д. Мак-Кракен, У. Дорн. М.: Мир, 1977.
7. Волков И.К. Исследование операций /И. К. Волков, Е. А. Загоруйко. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
8. Вентцель Е.С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. М.: Дрофа, 2004.
9. Кузин Л.Т. Основы кибернетики: Ч.2. /Л. Т. Кузин. М.: Энергия, 1979.
10. Горелик А.Л. Методы распознания /А .Л. Горелик, В. А. Скрипкин. М.: Высш.шк., 1989.
11. Теория автоматического управления /под ред. А. А. Воронова. М.:Высш.шк., 1986.Ч.2.
12. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. М.: Высш. шк. 1970.
13. Семенов М.П. Методы математической физики: Пособие / М. П. Семенов.Воронеж: ВГТУ. 2002.
14. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – М.: Наука, 1975. – 127 с.

15. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариацион ного исчисления / М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник. М.: Гостехиздат, 1950.

16. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. -М.: Наука, 1969.

17. Краснов М.Л. Вариационное исчисление./ М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. – М.: Наука, 1973. - 188 с.

18. Судоплатов С.В. Элементы дискретной математики: учебник / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. М.: ИНФРА-М, 2002. – 280 с.

19. Леденева Т.М. Специальные главы математики. Дискретная математика: учеб. пособие / Т.М. Леденева. Воронеж: ВГТУ, 1997. – 130 с.

20. Собенина О.В. Дискретная математика: учеб. пособие / О.В. Собенина. Воронеж: ВГТУ, 2012. – 200 с.

21. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах / В.В. Тишин. СПб.: БХВ-Петербург. 2008. – 352 с.

22. Гаврилов Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. – 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.

23. Булгакова И.Н. Дискретная математика. Элементы теории. Задачи и упражнения. Часть 1: учеб. пособие / И.Н. Булгакова, Г.Ф. Федотенко. Воронеж: ВГУ, 2004. – 61 с.

24. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. СП.: Лань, 2005. - 400 с.

25. Катрахова А.А. Теория вероятностей и элементы математической статистики: учеб. пособие / А.А Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж: ВГТУ, 2009.

26. Катрахова А.А. Элементы уравнений математической физики: учеб. пособие / А.А Катрахова Г.Ф. Федотенко, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж: ВГТУ, 2012.

27. Катрахова А.А. Элементы вариационного исчисления и приложение к теории управления : учеб. пособие / А.А Катрахова., Е.М. Васильев, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж: ВГТУ, 2012.

28. Катрахова А.А. Дискретная математика в задачах управления : учеб. пособие / А.А Катрахова., Е.М. Васильев, В.С. Купцов, Воронеж, 2016. -144 с.

29. Катрахова А.А. Спецглавы математики: Ч.1 : учеб. пособие / А.А Катрахова, В.С. Купцов. Воронеж, / 2017.

30. Краснов В.Л. Вариационное исчисление / М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселев. Москва: Наука, 1973, -190 с.

31. Жуков В.М. Практические занятия по математике Ростов на Дону: Феникс, 2012 – 343 с.

32. Асеев Г.Г. Дискретная математика: учеб. пособие / Г. Г. Ассев, О. М. Абрамов, Д. Э. Ситников. Ростов на Дону: Феникс, 2003 – 144 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Катрахова Алла Анатольевна
Васильев Евгений Михайлович
Купцов Валерий Семенович

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСАМ «МАТЕМАТИКА», «СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ»

Часть 2

В авторской редакции

Подписано к изданию 21. 05. 2018

Объем данных 1,7 Мб.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14