

730

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЛОЖНЫХ ФИГУР

Методические указания

к контрольной работе и задачам
по курсу «Сопротивление материалов»
для студентов всех специальностей
заочной формы обучения

Воронеж 2001

ВГАСУ
Факультет заочного обучения
Кафедра строительной механики

Контрольная задача №
по сопротивлению материалов

(бланк вклеивается в контр. работу)
Метод. указания № 730 (в библиотеке ВГАСУ)

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЛОЖНЫХ ФИГУР

Для заданной сложной фигуры необходимо:

1. Определить положение центра тяжести фигуры.
2. Вычислить моменты инерции и центробежный момент инерции относительно центральных осей.
3. Определить положение главных центральных осей инерции и вычислить главные моменты инерции.
4. Построить центральный эллипс инерции.

Исходные данные для расчета:

Схема № 11...

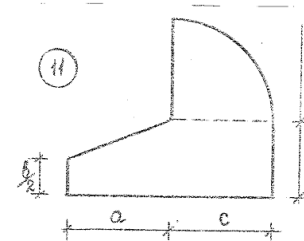
$a = 0,4$ м

$b = 0,4$ м

$c = 0,4$ м

Двутавр №

Швеллер №



Задание выдал : *МН*

Фамилия, И., О. студента :

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление элемента конструкции внешним воздействиям зависит не только от механических свойств материала, но и от геометрических характеристик поперечного сечения, которое является некоторой плоской фигурой нормальной к продольной оси (С – С на рис.1).

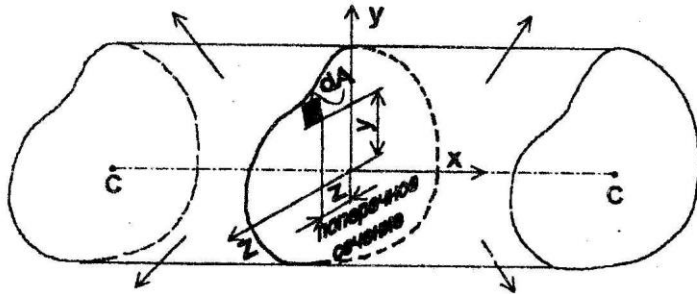


Рис. 1

В расчетах на прочность, жесткость и устойчивость используют площадь A , статические моменты S_y, S_z , моменты J_y, J_z и радиусы i_y, i_z инерции поперечного сечения. Вычислению этих геометрических характеристик посвящен специальный раздел курса «Сопротивление материалов» [1, 2, 3].

При выполнении расчетов элемент относят к системе координат X, Y, Z . Традиционно на кафедре строительной механики ВГАСУ принято располагать оси Y, Z в плоскости сечения, а ось X - по нормали к этой плоскости (см. рис. 1).

1. ЗАДАНИЕ

- Студенту выдается схема плоской сложной фигуры, составленная
- из простейших (прямоугольник, треугольник и т.п., см. прил.1) с указанием размеров a, b, \dots ;
 - из двух прокатных профилей (для специальности СДМ) с заданными в соответствии с прил. 2 и 3 номерами двутавра и швеллера.

ТРЕБУЕТСЯ:

- 1) Определить положение центра тяжести фигуры (студенты специальности ЭУС выполняют эту задачу в разделе «теоретическая механика», остальные – по сопротивлению материалов);

- 2) вычислить моменты инерции и центробежный момент инерции относительно центральных осей;
- 3) найти главные моменты инерции и установить положение главных центральных осей;
- 4) построить центральный эллипс инерции;
- 5) выполнить поверочный расчет на ПЭВМ (по желанию студента).

2. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

2.1. **Задание.** Изображается заданная фигура с указанием цены деления масштаба, размеров, расчленения этой фигуры на простейшие (прямоугольники, треугольники и т. п., двутавры и швеллеры) и положения их центров тяжести.

Следует иметь в виду, что расчленение на простые части может быть произведено не единственным способом. При выполнении этой операции надо исходить из условия получения наиболее простой процедуры расчета. Желательно, чтобы число составляющих фигур было наименьшим. Если в сечении есть отверстия или вырезы, то их считают с отрицательной площадью и моментами инерции.

Для прокатных профилей из таблиц сортамента (см. прил. 2 и 3) выписывают значения основных размеров, площадей и моментов инерции.

2.2. **Определение положения центра тяжести.** Вычисляют площади A_i составных частей и их сумму $\sum A_i = A$.

Фигуру относят к прямоугольной системе координатных осей Y, Z . Расположением их задаются из соображений удобства последующего расчета. Например, с началом координат в центре тяжести одной из простейших фигур.

Устанавливают расстояния y_{ci}, z_{ci} от выбранных осей до центров тяжести C_i составных частей. Вычисляют статические моменты

$$\left. \begin{aligned} S_y &= \sum A_i \cdot y_{ci}, \\ S_z &= \sum A_i \cdot z_{ci}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Координаты y_c, z_c центра тяжести C заданной фигуры в осях Y, Z находят соответственно по формулам

$$\left. \begin{aligned} y_c &= S_z / A, \\ z_c &= S_y / A. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Изображают центральные оси Y_c, Z_c с началом координат в точке C . Вычисляют расстояния $y_i = y_{ci} - y_c, z_i = z_{ci} - z_c$ от этих осей до центров тяжести C_i и также показывают на рисунке.

Если в пределах точности произведенных вычислений удовлетворяются условия

$$\left. \begin{aligned} S_{y_c} &= \sum A_i \cdot z_i = 0, \\ S_{z_c} &= \sum A_i \cdot y_i = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

то выполняют следующий пункт. В противном случае предварительно устраняют ошибки в расчете.

2.3. **Вычисление центральных моментов инерции и центробежного момента инерции.** Для каждой из составляющих фигур по формулам прил. 1 определяют моменты инерции $J_{y_{ci}}, J_{z_{ci}}$ и центробежный момент инерции $J_{y_{ci}z_{ci}}$ относительно собственных центральных осей Y_{ci}, Z_{ci} , параллельных Y_c, Z_c . Заметим, что если прокатный профиль повернут на 90° по сравнению с изображенным в прил. 2 и 3, то $J_{y_{ci}}, J_{z_{ci}}$ следует принимать соответственно равными J_z, J_y , представленным в ГОСТ, а $J_{y_{ci}z_{ci}} = 0$.

Используя теорему о зависимости моментов инерции относительно параллельных осей, находят центральные моменты инерции J_{y_c}, J_{z_c} и центробежный момент инерции $J_{y_c z_c}$ заданной фигуры

$$J_{y_c} = \sum (J_{y_{ci}} + z_i^2 \cdot A_i), \quad (2.4)$$

$$J_{z_c} = \sum (J_{z_{ci}} + y_i^2 \cdot A_i) \quad (2.5)$$

и
$$J_{y_c z_c} = \sum (J_{y_{ci}z_{ci}} + y_i \cdot z_i \cdot A_i). \quad (2.6)$$

2.4. **Определение главных моментов инерции и положения главных центральных осей инерции.** Значения главных моментов инерции J_{\max}, J_{\min} вычисляют по формулам

$$\left. \begin{aligned} J_{\max} &= 0.5 \cdot (J_{y_c} + J_{z_c}) + \sqrt{0.25 \cdot (J_{y_c} - J_{z_c})^2 + J_{y_c z_c}^2}, \\ J_{\min} &= 0.5 \cdot (J_{y_c} + J_{z_c}) - \sqrt{0.25 \cdot (J_{y_c} - J_{z_c})^2 + J_{y_c z_c}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Тангенс угла наклона к оси Y_c главной центральной оси I , момент инерции относительно которой максимальный J_{\max} , находят из выражения

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = J_{y_c z_c} / (J_{z_c} - J_{\max}). \quad (2.8)$$

В случае $\operatorname{tg} \alpha_{\max} > 0$ ось I изображают под углом

$$\alpha_{\max} = \arctg(\operatorname{tg} \alpha_{\max}), \quad (2.9)$$

отмеряемым от Y_c против хода часовой стрелки, а при $\operatorname{tg} \alpha_{\max} < 0$ - по направлению движения часовой стрелки. Вторую главную ось II, относительно которой J_{\min} , проводят через центр тяжести перпендикулярно оси I.

В пределах точности выполненных вычислений должны удовлетворяться равенства

$$J_{\max} + J_{\min} = J_{y_c} + J_{z_c}, \quad (2.10)$$

$$J_{\max} \cdot J_{\min} = J_{y_c} \cdot J_{z_c} - J_{y_c z_c}^2, \quad (2.11)$$

$$J_{I\ II} = 0.5 \cdot (J_{y_c} - J_{z_c}) \cdot \sin 2\alpha_{\max} + J_{y_c z_c} \cdot \cos 2\alpha_{\max} = 0. \quad (2.12)$$

2.5. Построение центрального эллипса инерции. Определяют главные радиусы инерции

$$\left. \begin{aligned} i_{\max} &= \sqrt{J_{\max}/A}, \\ i_{\min} &= \sqrt{J_{\min}/A}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Изображают заданную фигуру. Проводят главные центральные оси инерции, на которых в обе стороны от центра тяжести откладывают радиусы инерции (i_{\max} по оси II, i_{\min} по оси I). После чего любым из известных способов строят эллипс инерции с полуосями, равными i_{\max} и i_{\min} .

2.6. Поверочный расчет на ПЭВМ. По желанию студент может в вычислительном центре ВГАСУ произвести поверочный расчет геометрических характеристик заданной фигуры на ПЭВМ по программе MOMENT.EXE [4] и представить протокол расчета.

3. ИНСТРУКЦИЯ ДЛЯ РАБОТЫ С ПРОГРАММОЙ MOMENT.EXE

Заданная плоская сложная фигура относится к прямоугольной декартовой системе координат Y, Z (см. рис. 1). Нумеруются все характерные точки (вершины) фигуры по контуру при обходе по часовой стрелке. Криволинейные участки контура приближенно заменяются ломаными. У фигур, составленных из прокатных профилей, все закругления спрямляются. Для фигур с отверстием необходимо сделать обход выреза (отверстия) против хода часовой стрелки с указанием места входа на внутренний контур и выхода из него. Координаты точек записывают в виде таблицы

Число узлов:		
Координаты узлов:		
Узел	z	y
1		
2		
...

После этого следует обратиться к программе MOMENT.EXE.

После старта программы на экране появляется меню:

- 1 - Демонстрация работы программы,
- 2 - Ввод данных с клавиатуры и их корректировка,
- 3 - Ввод данных с диска и их корректировка,
- 4 - Вывод результатов вычислений на принтер,
- 5 - Вывод результатов вычислений на диск,
- 6 - Запись исходных данных на диск,
- 7 - Выход из программы.

Выбор позиции меню осуществляется нажатием соответствующей цифры.

1. Режим «Демонстрация работы программы»

Выполняет функцию помощи и служит для правильного задания исходных данных и наглядной графической интерпретации результатов вычислений. Он включает набор тестовых примеров, выбор которых осуществляется нажатием соответствующей цифры позиции меню:

- 1- Несимметричное сечение,
- 2- Сечение из прокатных профилей,
- 3- Сечение с пустотами.

После выбора позиции меню на экране изображается поперечное сечение. В левой части экрана сечение показано с указанием исходной системы координат. Вершины сечения пронумерованы, направление нумерации по часовой стрелке. Вершины контура пустоты занумерованы против часовой стрелки. Точки входа и выхода из внутреннего контура имеют двойную нумерацию. В правой части экрана сечение показано с изображением центральных и главных осей инерции. На главных осях построен эллипс инерции. В нижней части экрана приведены геометрические характеристики сечения: площадь, статические моменты, координаты центра тяжести, центральные моменты инерции, главные моменты инерции, главные радиусы инерции, угол поворота центральных осей до главных осей. Графическая копия экрана может быть выдана на принтер. Для этого перед запуском программы MOMENT.EXE необходимо запустить программу EGAEPSON.COM. Копия

рана на принтер выдается при нажатии клавиши Print Screen. Возврат в главное меню осуществляется нажатием любой клавиши.

2. Режим «Ввод данных с клавиатуры и их корректировка»

После входа в режим идет запрос числа вершин сечения и их координат. Номер вершины печатается на экране программой. Ввод числа заканчивается нажатием клавиши Enter. При вводе числа все символы, отличные от цифры, точки и знака минус, игнорируются. По окончании ввода координат происходит вход в режим корректировки.

В левой части экрана печатается таблица координат вершин, в правой изображено поперечное сечение с нумерацией вершин и координатными осями.

В нижней части предложение меню: «Для корректировки данных нажмите Enter, иначе любая другая клавиша». В случае нажатия клавиши Enter следует предложение меню: «Введите номер корректируемой точки». Ввод числа заканчивается нажатием клавиши Enter. В таблице координат место ввода координаты подсвечивается курсором. По окончании ввода на экран выводится измененная таблица координат и изображение сечения. В нижней части экрана предложение меню: «Для корректировки данных нажмите Enter, иначе любая другая клавиша». При нажатии клавиши, отличной от Enter, программа вычисляет геометрические характеристики сечения и дает заставку экрана, описанную в режиме «Демонстрация работы программы». Возврат в главное меню происходит после нажатия любой клавиши.

3. Режим «Ввод данных с диска и их корректировка»

После входа в режим идет запрос: «Введите имя файла». Ввод имени заканчивается нажатием клавиши Enter. Далее программа входит в режим корректировки, описанной выше.

4. Режим «Вывод результатов вычислений на принтер»

После выбора режима на принтер печатаются исходные данные и геометрические характеристики с последующим выходом в главное меню.

5. Режим «Вывод результатов вычислений на диск»

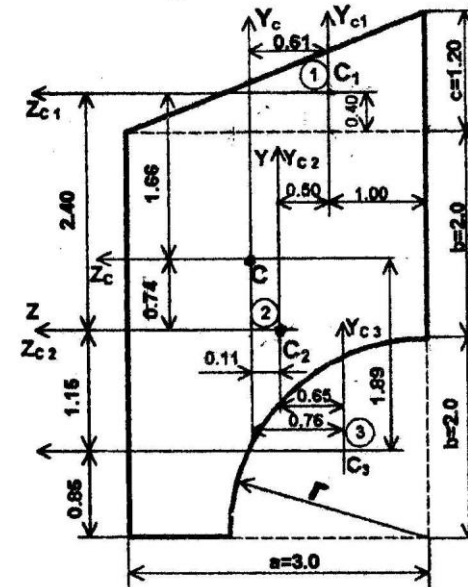
После выбора режима результаты вычислений записываются на диск в файл DISK.DAT и выход в главное меню.

6. Режим «Запись исходных данных на диск»

После выбора режима исходные данные записываются на диск в файл и выход в главное меню.

4. ПРИМЕР 1. ПЛОСКАЯ ФИГУРА, СОСТАВЛЕННАЯ ИЗ ПРОСТЕЙШИХ

4.1. На рис. 2 представлена схема фигуры с размерами a , b и c , выполнено расчленение на простейшие



① - треугольник со сторонами $b_1 = a = 3.00$ м, $h_1 = c = 1.20$ м,

② - прямоугольник со сторонами $b_2 = a = 3.00$ м, $h_2 = 2 \cdot b = 4.00$ м,

③ - вырез в виде четверти круга радиусом $r = b = 2.00$ м, и указаны их центры тяжести C_1, C_2, C_3 .

Рис. 2. М1:50. Размеры даны в метрах

4.2. Вычисляем площади простейших фигур

$$A_1 = (b_1 \cdot h_1) / 2 = (3.00 \cdot 1.20) / 2 = 1.80 \text{ м}^2;$$

$$A_2 = (b_2 \cdot h_2) = 3.00 \cdot 4.00 = 12.00 \text{ м}^2;$$

$$A_3 = -(\pi \cdot r^2) / 4 = -(3.14 \cdot 2^2) / 4 = -3.14 \text{ м}^2$$

и всей фигуры $A = A_1 + A_2 + A_3 = 1.80 + 12.00 - 3.14 = 10.66 \text{ м}^2$.

Задаемся началом координатных Y, Z осей в центре тяжести C_2 прямоугольника. Расстояния от этих осей до центров тяжести составных частей (см. рис. 2) будут

$$y_{C_1} = (h_1 / 3) + 0.5 \cdot h_2 = (1.20 / 3) + 0.5 \cdot 4.00 = 2.40 \text{ м},$$

$$z_{C_1} = (b_1 / 3) - 0.5 \cdot b_2 = (3.00 / 3) - 0.5 \cdot 3.00 = -0.50 \text{ м},$$

$$y_{C_2} = z_{C_2} = 0.00 \text{ м};$$

$$y_{c3} = (4 \cdot r / 3 \cdot \pi) - 0.5 \cdot h_2 = (4 \cdot 2.00 / 3 \cdot 3.14) - 0.5 \cdot 4.00 = 0.85 - 2.00 = -1.15 \text{ м},$$

$$z_{c3} = (4 \cdot r / 3 \cdot \pi) - 0.5 \cdot b_2 = (4 \cdot 2.00 / 3 \cdot 3.14) - 0.5 \cdot 3.00 = 0.85 - 1.50 = -0.65 \text{ м}.$$

По формулам (2.1) определяем статические моменты

$$S_y = A_1 \cdot z_{c1} + A_2 \cdot z_{c2} + A_3 \cdot z_{c3} = 1.80 \cdot (-0.50) + 12.00 \cdot 0.00 + (-3.14) \cdot (-0.65) = 1.14 \text{ м}^3,$$

$$S_z = A_1 \cdot y_{c1} + A_2 \cdot y_{c2} + A_3 \cdot y_{c3} = 1.80 \cdot 0 + 12.00 \cdot 0.00 + (-3.14) \cdot (-1.15) = 7.93 \text{ м}^3.$$

Из выражений (2.2) находим координаты центра тяжести всей фигуры в осях Y, Z

$$y_c = S_z / A = 7.93 / 10.66 = 0.74 \text{ м},$$

$$z_c = S_y / A = 1.14 / 10.66 = 0.11 \text{ м}.$$

По полученным данным на рис. 2 намечаем точку C и проводим через нее центральные оси Y_c, Z_c . Вычисляем расстояния от этих осей до центров тяжести

треугольника –	$y_1 = y_{c1} - y_c = 2.40 - 0.74 = 1.66 \text{ м},$
	$z_1 = z_{c1} - z_c = -0.50 - 0.11 = -0.61 \text{ м};$
прямоугольника –	$y_2 = y_{c2} - y_c = 0.00 - 0.74 = -0.74 \text{ м},$
	$z_2 = z_{c2} - z_c = 0.00 - 0.11 = -0.11 \text{ м};$
четверти круга –	$y_3 = y_{c3} - y_c = -1.15 - 0.74 = -1.89 \text{ м},$
	$z_3 = z_{c3} - z_c = -0.65 - 0.11 = -0.76 \text{ м}$

и показываем их на рис. 2.

Проверка условий (2.3)

$$S_{y_c} = A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2 + A_3 \cdot z_3 = 1.80 \cdot (-0.61) + 12.00 \cdot (-0.11) + (-3.14) \cdot (-0.76) = -2.42 + 2.39 = -0.03 \approx 0,$$

$$S_{z_c} = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 = 1.80 \cdot 1.66 + 12.00 \cdot (-0.74) + (-3.14) \cdot (-1.89) = 8.92 - 8.88 = 0.04 \approx 0.$$

4.3. Определяем моменты инерции и центробежные моменты инерции простейших фигур относительно собственных центральных осей (см. прил.1)

треугольника – $J_{yc1} = h_1 \cdot b_1^3 / 36 = 1.20 \cdot 3.00^3 / 36 = 0.90 \text{ м}^4,$

$$J_{zc1} = b_1 \cdot h_1^3 / 36 = 3.00 \cdot 1.20^3 / 36 = 0.14 \text{ м}^4,$$

$$J_{yc1 zc1} = -b_1^2 \cdot h_1^2 / 72 = -3.00^2 \cdot 1.20^2 / 72 = -0.18 \text{ м}^4.$$

прямоугольника – $J_{yc2} = h_2 \cdot b_2^3 / 12 = 4.00 \cdot 3.00^3 / 12 = 9.00 \text{ м}^4,$

$$J_{zc2} = b_2 \cdot h_2^3 / 12 = 3.00 \cdot 4.00^3 / 12 = 16.00 \text{ м}^4,$$

$$J_{yc2 zc2} = 0.00 \text{ м}^4;$$

четверти круга – $J_{yc3} = J_{zc3} = -0.055 \cdot r^4 = -0.055 \cdot 2.00^4 = -0.88 \text{ м}^4,$

$$J_{yc3 zc3} = -(-0.0167 \cdot r^4) = 0.0167 \cdot 2.00^4 = 0.27 \text{ м}^4.$$

По формулам (2.4), (2.5) и (2.6) находим центральные моменты и центробежный момент инерции заданной фигуры

$$J_{yc} = J_{yc1} + z_1^2 \cdot A_1 + J_{yc2} + z_2^2 \cdot A_2 + J_{yc3} + z_3^2 \cdot A_3 = 0.90 + (-0.61)^2 \cdot 1.80 + 9.00 + (-0.11)^2 \cdot 12.00 + (-0.88) + (-0.76)^2 \cdot (-3.14) = 8.02 \text{ м}^4,$$

$$J_{zc} = J_{zc1} + y_1^2 \cdot A_1 + J_{zc2} + y_2^2 \cdot A_2 + J_{zc3} + y_3^2 \cdot A_3 = 0.14 + 1.66^2 \cdot 1.80 + 16.00 + (-0.74)^2 \cdot 12.00 + (-0.88) + (-1.89)^2 \cdot (-3.14) = 15.57 \text{ м}^4,$$

$$J_{yczc} = J_{yc1zc1} + y_1 \cdot z_1 \cdot A_1 + J_{yc2zc2} + y_2 \cdot z_2 \cdot A_2 + J_{yc3zc3} + y_3 \cdot z_3 \cdot A_3 = -0.18 + 1.66 \cdot (-0.61) \cdot 1.80 + 0.00 + (-0.74) \cdot (-0.11) \cdot 12.00 + 0.27 + (-1.89) \cdot (-0.76) \cdot (-3.14) = -5.27 \text{ м}^4.$$

Замечание. Можно выполнить проверочный расчет. При этом вычисляем моменты и центробежный момент инерций относительно первоначально выбранных осей Y, Z

$$J_y = \sum (J_{yci} + z_{ci}^2 \cdot A_i), \quad (4.1)$$

$$J_z = \sum (J_{zci} + y_{ci}^2 \cdot A_i) \quad (4.2)$$

и $J_{yz} = \sum (J_{yci zci} + y_{ci} \cdot z_{ci} \cdot A_i) \quad (4.3)$

или для рассматриваемого примера

$$J_y = 0.90 + (-0.50)^2 \cdot 1.80 + 9.00 + 0.00^2 \cdot 12.00 + (-0.88) + (-0.65)^2 \cdot (-3.14) = 8.14 \text{ м}^4,$$

$$J_z = 0.14 + 2.40^2 \cdot 1.80 + 16.00 + 0.00^2 \cdot 12.00 + (-0.88) + (-1.15)^2 \cdot (-3.14) = 21.48 \text{ м}^4$$

и

$$J_{yz} = -0.18 + (-0.50) \cdot 2.40 \cdot 1.80 + 0.00 + 0.00 \cdot 0.00 \cdot 12.00 + 0.27 + (-0.65) \cdot (-1.15) \cdot (-3.14) = -4.42 \text{ м}^4.$$

Проверочные значения J_{ycp} , J_{zcp} и J_{ycpzcp} определяем из выражений

$$J_{ycp} = J_y - z_c^2 \cdot A, \quad (4.4)$$

$$J_{zcp} = J_z - y_c^2 \cdot A \quad (4.5)$$

и $J_{ycpzcp} = J_{yz} - y_c \cdot z_c \cdot A, \quad (4.6)$

где y_c, z_c - найденные по формулам (2.2) координаты центра тяжести C фигуры.

Для нашего случая будем иметь

$$J_{ycp} = 8.14 - 0.11^2 \cdot 10.66 = 8.01 \text{ м}^4,$$

$$J_{zcp} = 21.48 - 0.74^2 \cdot 10.66 = 15.64 \text{ м}^4$$

и $J_{ycpzcp} = -4.42 - 0.74 \cdot 0.11 \cdot 10.66 = -5.29 \text{ м}^4,$

которые в пределах точности вычислений совпадают с соответственно установленными выше и используемыми в дальнейших расчетах

$$J_{yc} = 8.02 \text{ м}^4, \quad J_{zc} = 15.57 \text{ м}^4 \quad \text{и} \quad J_{yczc} = -5.27 \text{ м}^4.$$

4.4. Воспользовавшись (2.7), определяем главные моменты инерции

$$J_{\max} = 0.5 \cdot (8.02 + 15.57) + \sqrt{0.25 \cdot (8.02 - 15.57)^2 + (-5.27)^2} = 11.80 + 6.48 = 18.28 \text{ м}^4,$$

$$J_{\min} = 11.80 - 6.48 = 5.32 \text{ м}^4.$$

По (2.8) и (2.9) находим $\operatorname{tg} \alpha_{\max} = (-5.27)/(15.57 - 18.28) = 1.945$ и

$$\alpha_{\max} = \operatorname{arctg}(1.945) = 62.79^\circ = 62^\circ 47'.$$

Так как $\operatorname{tg} \alpha_{\max} > 0$, то первая главная центральная ось инерции I отклоняется от оси y_c против хода часовой стрелки на угол $62^\circ 47'$.

При этом равенства (2.10), (2.11) и (2.12)

$$18.28 + 5.32 = 23.60 \text{ м}^4 \approx 8.02 + 15.57 = 23.59 \text{ м}^4,$$

$$18.28 \cdot 5.32 = 97.25 \text{ м}^4 \approx 8.02 \cdot 15.57 - (-5.27)^2 = 97.10 \text{ м}^4,$$

$$J_{II} = 0.5 \cdot (8.02 - 15.57) \cdot \sin 2 \cdot 62^\circ 47' + (-5.27) \cdot$$

$$\cdot \cos 2 \cdot 62^\circ 47' = -3.07 + 3.07 = 0.00 \text{ м}^4$$

удовлетворяются.

4.5. По формулам (2.13) вычисляем главные радиусы инерции

$$i_{\max} = \sqrt{18.28/10.66} = 1.31 \text{ м},$$

$$i_{\min} = \sqrt{5.32/10.66} = 0.71 \text{ м}.$$

На рис. 3 изображаем заданную фигуру, наносим центральные оси инерции I, II и строим эллипс инерции.

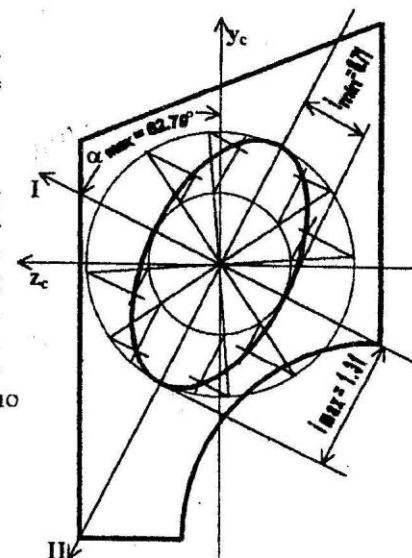


Рис.3. М 1:50. Размеры даны в метрах

4.6. Для расчета на ПЭВМ фигуру относим к системе координат с началом в центре окружности радиусом $r = 2$ м (рис.4) и обращаемся к программе MOMENT.EXE (см. п. 3). Протокол расчета приведен на рис. 5. Сравнение результатов, полученных в п.п. 4.2-4.5 и на ПЭВМ, дано в табл. 1.

Таблица 1
Сравнение результатов расчета

Способ расчета	По п.п. 4.2 - 4.5	на ЭВМ
$A, \text{ м}^2$	10,66	10,674
$y_c, \text{ м}$	0,74*	2,742*
$z_c, \text{ м}$	0,11*	1,607*
$J_{yc}, \text{ м}^4$	8,02	8,024
$J_{zc}, \text{ м}^4$	15,57	15,602
$J_{yczc}, \text{ м}^4$	-5,27	-5,282
$J_{\max}, \text{ м}^4$	18,28	18,313
$J_{\min}, \text{ м}^4$	5,32	5,313
$\alpha_{\max}, \text{ град.}$	62,79	62,82
$i_{\max}, \text{ м}$	1,31	1,310
$i_{\min}, \text{ м}$	0,71	0,705

Примечание: различие в результатах расчета объясняется отличием принятых в ручном счете и на ЭВМ значений координатных осей (эти данные отмечены *), а также изменой криволинейных участков ломаной линией.

Число узлов: 13

Координаты узлов:

узел	Z	Y
1	0.00	2.00
2	0.35	1.97
3	0.68	1.88
4	1.00	1.73
5	1.29	1.53
6	1.53	1.29
7	1.73	1.00
8	1.88	0.68
9	1.97	0.35
10	2.00	0.00
11	3.00	0.00
12	3.00	4.00
13	0.00	5.20

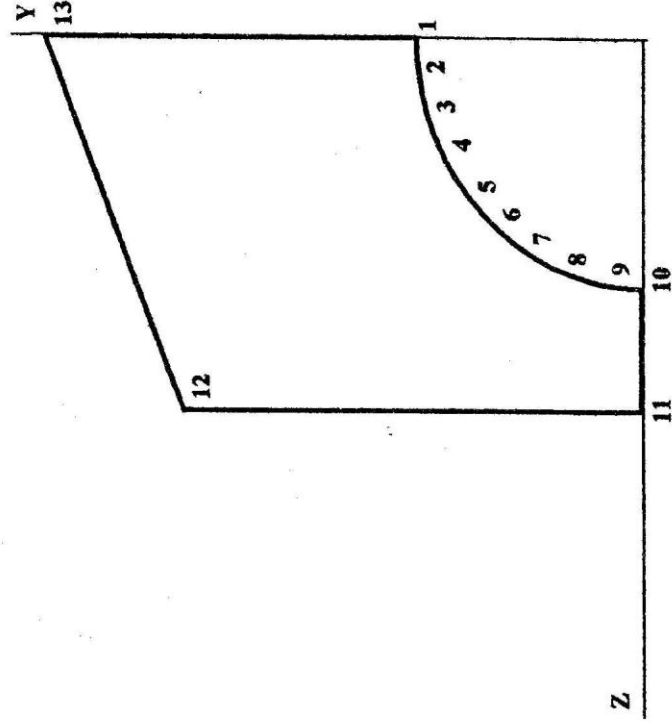
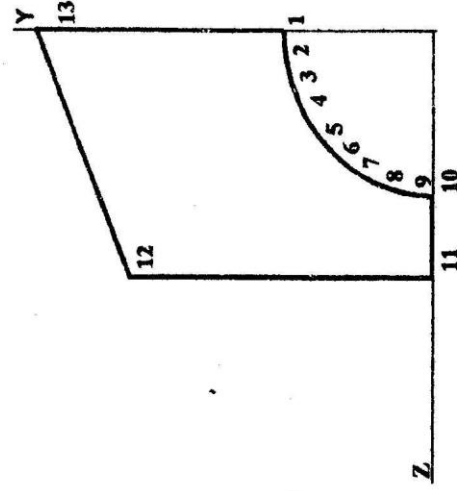


Рис. 4

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ



Площадь (A)
 Статические моменты (S_z, S_y)
 Координаты центра тяжести (Z_c, Y_c)
 Моменты инерции относительно центральных осей (J_z, J_y, J_{zy})
 Главные моменты инерции (J_{max}, J_{min})
 Радиусы инерции (ρ_{max}, ρ_{min})
 Угол поворота α (в градусах)

10.674	17.154	8.024	-5.282
29.274	2.742	5.313	
1.607		0.705	
15.602			
18.313			
1.310			
62.82			

Рис. 5

5. ПРИМЕР 2. ПЛОСКАЯ ФИГУРА ИЗ ПРОКАТНЫХ ПРОФИЛЕЙ

5.1. Заданная фигура составлена из:

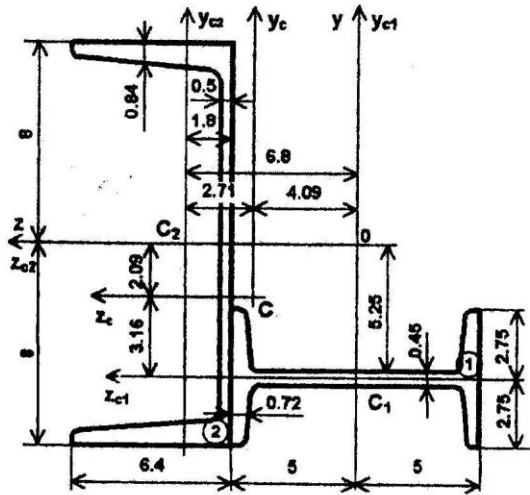


Рис. 6. М 1:2. Размеры даны в см

- двутавра ① номер 20 ГОСТ 8239-89 (см. прил. 2) с размерами $h_1 = 10$ см, $b_1 = 5.5$ см, $s_1 = 0.45$ см, $t_1 = 0.72$ см, площадью $A_1 = 12.0$ см², осевыми $J_{yc1} = 198$ см⁴, $J_{zc1} = 17.9$ см⁴ (учтен поворот на 90° по сравнению с изображенным в прил. 2) и центробежным $J_{yc1zc1} = 0.00$ см⁴, моментами инерции;

- швеллера ② номер 16 ГОСТ 8240-89 (см. прил. 3) с размерами $h_2 = 16$ см, $b_2 = 6.4$ см,

$$s_2 = 0.50 \text{ см}, t_2 = 0.84 \text{ см}, z_0 = 1.8 \text{ см}, A_2 = 18.1 \text{ см}^2, J_{yc2} = 63.3 \text{ см}^4, J_{zc2} = 747 \text{ см}^4 \text{ и } J_{yc2zc2} = 0.00.$$

5.2. Площадь фигуры $A = A_1 + A_2 = 12.0 + 18.1 = 30.1$ см².

Вспомогательные оси Y и Z проводим соответственно через точки C_1 и C_2 - центры тяжести элементов ① и ② (см. рис. 6).

В дальнейшем решение строится аналогично изложенному в п.п. 4.2-4.6. Поэтому ниже приводятся только результаты вычислений.

Координаты центров тяжести двутавра и швеллера в осях YOZ

$$y_{c1} = (b_1 / 2) - (h_2 / 2) = (5.5 / 2) - (16 / 2) = -5.25 \text{ см}, z_{c1} = 0.00 \text{ см};$$

$$y_{c2} = 0.00, z_{c2} = (h_1 / 2) + z_0 = (10 / 2) + 1.8 = 6.80 \text{ см}.$$

$$\text{Статические моменты } S_y = 12.0 \cdot 0.00 + 18.1 \cdot 6.80 = 123.1 \text{ см}^3,$$

$$S_z = 12.0 \cdot (-5.25) + 18.1 \cdot 0.00 = -63.00 \text{ см}^3,$$

Координаты центров тяжести:

фигуры в осях Y, Z

$$- y_c = -(-63.00) / 30.1 = -2.09 \text{ см}, z_c = 123.1 / 30.1 = 4.09 \text{ см};$$

элементов ①, ② в осях $Y_c C Z_c$

$$- y_1 = -5.25 - (-2.09) = -3.16 \text{ см}, z_1 = 0.00 - 4.09 = -4.09 \text{ см};$$

$$- y_2 = 0.00 - (-2.09) = 2.09 \text{ см}, z_2 = 6.80 - 4.09 = 2.71 \text{ см}.$$

Проверка: $S_{yc} = 12.0 \cdot (-4.09) + 18.1 \cdot 2.71 = -49.08 + 49.05 = -0.03 \approx 0,$
 $S_{zc} = 12.0 \cdot (-3.16) + 18.1 \cdot 2.09 = -37.92 + 37.83 = -0.09 \approx 0.$

5.3. По (2.4), (2.5) и (2.6) получим центральные

$$J_{yc} = 198 + (-4.09)^2 \cdot 12.0 + 63.3 + 2.71^2 \cdot 18.1 = 595 \text{ см}^4,$$

$$J_{zc} = 17.9 + (-3.16)^2 \cdot 12.0 + 747 + 2.09^2 \cdot 18.1 = 964 \text{ см}^4,$$

и центробежный

$$J_{yczc} = 0.00 + (-3.16) \cdot (-4.09) \cdot 12.0 + 0.00 + 2.09 \cdot 2.71 \cdot 18.1 = 258 \text{ см}^4,$$

моментами инерции всей фигуры.

Проверка: Относительно осей YOZ

$$J_y = 198 + 0.00^2 \cdot 12.0 + 63.3 + 6.80^2 \cdot 18.1 = 1098 \text{ см}^4,$$

$$J_z = 17.9 + (-5.25)^2 \cdot 12.0 + 747 + 0.00^2 \cdot 18.1 = 1096 \text{ см}^4,$$

$$J_{yz} = 0.00 + (-5.25) \cdot 0.00 \cdot 12.0 + 0.00 + 0.00 \cdot 6.80 \cdot 18.1 = 0.00 \text{ см}^4.$$

Проверочные значения для центральных осей $Y_c C Z_c$

$$J_{ycp} = 1098 - (-4.09)^2 \cdot 30.1 = 594 \text{ см}^4, \approx J_{yc} = 595 \text{ см}^4,$$

$$J_{zcp} = 1096 - (-2.09)^2 \cdot 30.1 = 965 \text{ см}^4, \approx J_{zc} = 964 \text{ см}^4,$$

$$J_{ycpzc} = 0.00 - (-2.09)^2 \cdot 4.09 \cdot 30.1 = 257 \text{ см}^4 \approx J_{yczc} = 258 \text{ см}^4.$$

5.4. Главные центральные моменты инерции

$$J_{\max} = 779.5 + 317.2 = 1096.7 \approx 1097 \text{ см}^4,$$

$$J_{\min} = 779.5 - 317.2 = 462.3 \approx 462 \text{ см}^4.$$

Положение первой главной оси инерции I определяется

$$\text{tg } \alpha_{\max} = 258 / (964 - 1097) = -1.940 \text{ и } \alpha_{\max} = -62.73^\circ.$$

Проверки:

$$1097 + 462 = 1559 \text{ см}^4 \approx 595 + 964 = 1559 \text{ см}^4;$$

$$1097 \cdot 462 = 506800 \text{ см}^8 \approx 595 \cdot 964 - 258^2 = 507000 \text{ см}^8;$$

$$J_{II} = 0.5 \cdot (595 - 964) \cdot \sin 2 \cdot (-62.73^\circ) + 258 \cdot \cos 2 \cdot (-62.73^\circ) = 150.3 - 149.7 \approx 150 - 150 = 0.$$

5.5. Главные радиусы инерции $I_{\max} = \sqrt{1097 / 30.1} = 6.04$ см,

$I_{\min} = \sqrt{462 / 30.1} = 3.92$ см. Фигура с главными центральными осями инерции I, II и эллипсом инерции представлена на рис. 7.

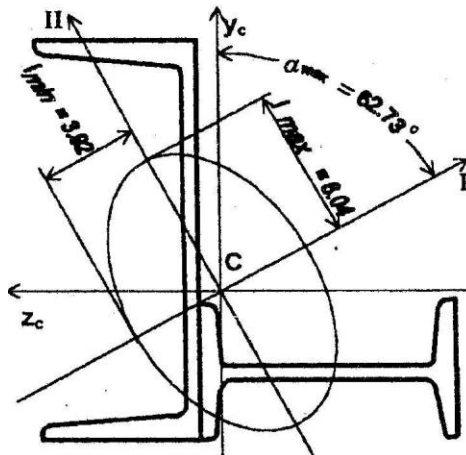


Рис. 7. М 1:2. Размеры даны в см.

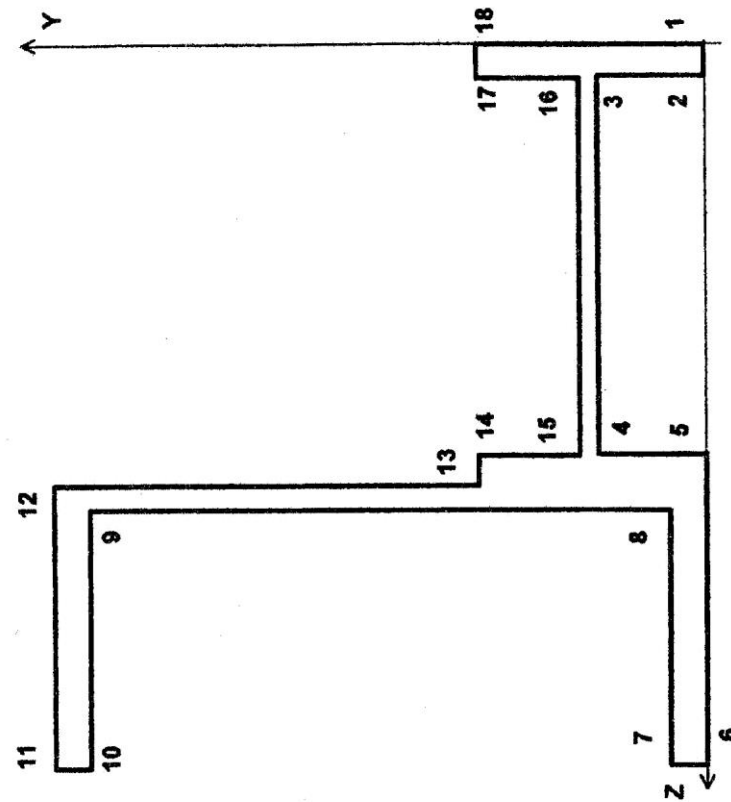
5.6. Для расчета на ПЭВМ отнесем фигуру к системе координат, совместив оси Y и Z соответственно с правой и нижней полками двутавра и швеллера (рис. 8). Протокол расчета по программе MOMENT.EXE приведен на рис. 9. Сравнение результатов аналитического расчета с полученными на ПЭВМ представлено в табл. 2.

Таблица 2

Сравнение результатов расчета

Способ расчета	По п.п. 5.2 - 5.5	на ЭВМ
A , см ²	30,1	29,684
Y_c , см	-2,09*	5,918*
Z_c , см	4,09*	9,237*
J_{Yc} , см ⁴	595	618,771
J_{Zc} , см ⁴	964	956,577
J_{YcZc} , см ⁴	258	261,829
J_{max} , см ⁴	1097	1099,255
J_{min} , см ⁴	462	476,094
α_{max} , град.	- 62,73°	- 61,41°
i_{max} , см	6,04	6,085
i_{min} , см	3,92	4,005

Примечание: различие в результатах расчета объясняется спрямлением закругленных участков прокатных профилей и отличием принятых в ручном счете и на ЭВМ начала координатных осей (последние отмечены *).

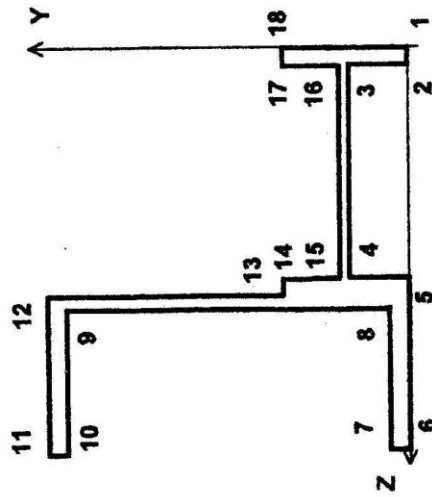


Число узлов: 18
Координаты узлов:

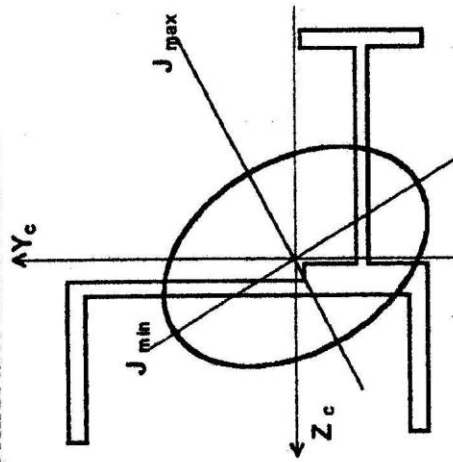
Узел	Z	Y
1	0.00	0.00
2	0.72	0.00
3	0.72	2.53
4	9.26	2.53
5	9.28	0.00
6	16.40	0.00
7	16.40	0.84
8	10.50	0.84
9	10.50	15.16
10	16.40	15.16
11	16.40	16.00
12	10.00	16.00
13	10.00	5.50
14	9.28	5.50
15	9.28	2.97
16	0.72	2.97
17	0.72	5.50
18	0.00	5.50

Рис. 8

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ



Площадь (A)
 Статические моменты (S_z, S_y)
 Координаты центра тяжести (z_c, y_c)
 Моменты инерции относительно центральных осей (J_z, J_y, J_{zy})
 Главные моменты инерции (J_{max}, J_{min})
 Радиусы инерции (I_{max}, I_{min})
 Угол поворота **ALFAMax** (в градусах)



29.684	274.176	261.829
175.669	5.918	
9.237		
956.577	618.771	
1099.255	476.094	
6.085	4.005	
-61.41		

Рис. 9

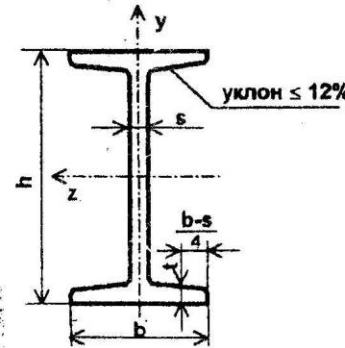
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая шк., 1995. – 560 с.
2. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: Наука., 1986. – 512 с.
3. Вычисление площадей, статических моментов и моментов инерции плоских фигур: Раздаточный материал к самостоятельной работе по сопротивлению материалов / Сост.: А.Н. Синозерский; Воронеж. инж.-строит. инст. – Воронеж: 1989. – 24 с.
4. Сборник расчетных работ по сопротивлению материалов на базе персональных ЭВМ: Учеб. пособие / В.С. Сафронов, А.Н. Синозерский, М.В. Шитикова и др.; Под общ. ред. В.С. Сафронова; Воронеж. арх.-строит. акад. – Воронеж, 1995. – 170 с.

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР

Фигура	Значения моментов инерции		
	J_{yc}	J_{zc}	J_{yczc}
	$\frac{h \cdot b^3}{12}$	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	0
	$\frac{h \cdot b^3}{36}$	$\frac{b \cdot h^3}{36}$	
	$\frac{\pi \cdot r^4}{4}$	$\frac{\pi \cdot r^4}{4}$	0
	$\frac{\pi \cdot r^4}{8}$	$0.11 r^4$	0
	$0.055 r^4$	$0.055 r^4$	

Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239-89)



- h - высота двутавра;
- b - ширина полки;
- s - толщина стенки;
- t - средняя толщина полки;
- A - площадь поперечного сечения;
- J - момент инерции;
- W - момент сопротивления;
- S - статический момент полусечения;
- i - радиус инерции;

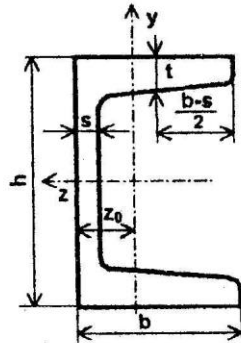
Номер двутавра	Масса l м, кг	Размеры				A , см ²	J_z , см ⁴	W_{z3} , см ³	i_z , см	S_{z3} , см ³	J_y , см ⁴	W_{y3} , см ³	i_y , см
		h	b	s	t								
10	9.46	100	55	4.5	7.2	12	198	39.7	4.06	23	17.9	6.49	1.22
12	11.5	120	64	4.8	7.3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38
14	13.7	140	73	4.9	7.5	17.4	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.5	1.55
16	15.9	160	81	5	7.8	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.7
18	18.4	180	90	5.1	8.1	23.4	1290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88
20	21	200	100	5.2	8.4	26.8	1840	184	8.28	104	115	23.1	2.07
22	24	220	110	5.4	8.7	30.6	2550	232	9.13	131	157	28.6	2.27
24	27.3	240	115	5.6	9.5	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37
27	31.5	270	125	6	9.8	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54
30	36.5	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69
33	42.2	330	140	7	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79
36	48.6	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89
40	57	400	155	8.3	13	72.6	19062	953	16.2	545	667	86.1	3.03
45	66.5	450	160	9	14.2	84.7	27696	1231	18.1	708	808	101	3.09
50	78.5	500	170	10	15.2	100	39727	1589	19.9	919	1043	123	3.23
55	92.6	550	180	11	16.5	118	55962	2035	21.8	1181	1356	151	3.39
60	108	600	190	12	17.8	138	76806	2560	23.6	1491	1725	182	3.54

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Задание	3
2. Рекомендации по выполнению работы	4
3. Инструкция для работы с программой MOMENT.EXE	6
4. Пример 1. Плоская фигура, составленная из простейших	9
5. Пример 2. Плоская фигура из прокатных профилей	16
Библиографический список	21
Приложение 1. Моменты инерции простейших фигур	22
Приложение 2. Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239-89)	23
Приложение 3. Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240-89)	24

Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240-89)

Приложение 3



h - высота швеллера;
 b - ширина полки;
 s - толщина стенки;
 t - средняя толщина полки;
 A - площадь поперечного сечения;
 J - момент инерции;
 W - момент сопротивления;
 S - статический момент полусечения;
 I - радиус инерции;
 z_0 - расстояние от оси Y до наружной грани стенки

Но- мер швел- лера	Мас- са 1 м, кг	Размеры, мм				A , см ²	J_z , см ⁴	W_z , см ³	I_z , см	S_z , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	I_y , см	z_0 , см
		h	b	s	t									
5	4.84	50	32	4.4	7	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.95	1.16
6.5	5.9	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15	2.54	9	8.7	3.68	1.08	1.24
8	7.05	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.3	12.8	4.75	1.19	1.31
10	8.59	100	46	4.5	7.6	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44
12	10.4	120	52	4.8	7.8	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54
14	12.3	140	58	4.9	8.1	15.6	491	70.2	5.6	40.8	45.4	11	1.7	1.67
16	14.2	160	64	5	8.4	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.3	13.8	1.87	1.8
16a	15.3	160	68	5	9	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2
18	16.3	180	70	5.1	8.7	20.7	1090	121	7.24	69.8	86	17	2.04	1.94
18a	17.4	180	74	5.1	9.3	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20	2.18	2.13
20	18.4	200	76	5.2	9	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.2	2.07
22	21	220	82	5.4	9.5	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37	2.21
24	24	240	90	5.6	10	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.6	2.42
27	27.7	270	95	6	10.5	35.2	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73	2.47
30	31.8	300	100	6.5	11	40.5	5810	387	12	224	327	43.6	2.84	2.52
33	36.5	330	105	7	11.7	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.59
36	41.9	360	110	7.5	12.6	53.4	10830	601	14.2	350	513	61.7	3.1	2.68
40	48.3	400	115	8	13.5	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.75

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЛОЖНЫХ ФИГУР

Методические указания к контрольной работе и задачам по курсу "Сопротивление материалов" для студентов всех специальностей заочной формы обучения

СОСТАВИТЕЛИ – профессор ВГАСУ
Александр Николаевич Синозерский,

кандидат технических наук
Грайр Егишеевич Габриелян.

РЕДАКТОР Аграновская Н.Н.

Подп. в печать 15.03.01. Формат 60 × 84 1/16. Уч.-изд. л. 1.5. Усл.-печ. л. 6.

Бумага для множительных аппаратов. Тираж 1000. Заказ № 71

Отпечатано на ротапринтере Воронежского государственного архитектурно-строительного университета

394006. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84