ФГ/ БОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования)

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400 «Управление и информатика в технических системах», 221000 «Мехатроника и робототехника», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110800 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 2

Составители: А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Г.Ф. Федотенко

Diskr2.docx 620 K байт 31.10.2014 уч.-изд. 3.0 л.
(название файла) (объем файла) (дата) (объем издания)

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет »

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400 «Управление и информатика в технических системах», 221000 «Мехатроника и робототехника», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110800 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 2

Воронеж 2014

Составители: канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук, В.С. Купцов, ст. преп. Г.Ф. Федотенко

УДК 517

Элементы дискретной математики: методические указания по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400 « Управление и информатика в технических системах», 221000 «Мехатроника и робототехника», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110800 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения. Ч.2 / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет» ; сост. А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Г.Ф. Федотенко. Воронеж, 2014. 49 с.

Методические указания содержат теоретический материал, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Diskr2.docx»

Ил. 20. Библиогр.: 9 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. М.В. Юрьева

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых задач по теме:“Дискретная математика ”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов, рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

Дискретная математика являются в настоящее время одними из наиболее важных разделов математики. В данной работе изложены основные положения теории дискретной математики. Методическое указание содержит большое количество задач для проведения практических и индивидуальных занятий. К задачам даны ответы, большое количество пояснений дает возможность многие примеры выносить на самостоятельную работу.

1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1.1. Составные высказывания.

Основные понятия

В формально-логических выводах используются истинные и ложные предложения.

Определение: повествовательное предложение, о котором можно однозначно сказать, истинно оно или ложно, называется ***высказыванием***.

Примеры высказываний: "кит - животное", "все углы - прямые" и т. п. Первое из этих высказываний является, очевидно, истинным, а второе - ложным. Предложение "реши задачу", также как и "2+2", не является высказываем.

Определения математических понятий не являются высказываниями, т.к. это принятые соглашения.

Будем обозначать высказывания большими латинскими буквами: A, B, C,….

Элементарные, нерасчленяемые высказывания будем называть ***атомами.*** Употребляемые в обычной речи логические связки "и", "или", "если..., то...", "эквивалентно", частица "не" и т. д. позволяют из уже заданных высказываний строить новые, более "сложные" высказывания.

Аналогично тому, как в языке из простых предложений с помощью логических связок образуются сложные предложения, так и в логике высказываний из атомов можно образовывать ***составные высказывания***.

Истинность или ложность получаемых таким образом высказываний зависит от истинности и ложности исходных высказываний и соответствующей трактовки связок как операций над высказываниями.

Рассмотрим определения логических операций, соответствующих логическим связкам.

Каждому высказывания можно сопоставить его ***истинностное значение***, обозначаемое соответственно через И (если высказывание истинно), Л (если высказывание ложно).

Истинностное значение сложных высказываний зависит от истинностных значений высказываний, составлявших слоеное высказывание.

Эта зависимость устанавливается в данных ниже определениях я стращается в таблицах истинности.

Составные высказывания

С помощью рассмотренных в предыдущем пункте логических операций из заданной совокупности атомов (элементарных высказываний) можно строить различимо составные высказывания. Порядок выполнения действий указывается скобками.

Истинностное значение составного высказывания зависит только от истинностных значений образующих его атомов, оно может быть найдено на основании определение логических операций с помощью таблиц истинности.

Пример. $D=\overline{(A \wedge B)} \vee C$.

A	**B**	**C**	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$D=\overline{(A \wedge B)} \vee C$
И	И	И	И	Л	И
И	И	Л	И	Л	Л
И	Л	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И	И
Л	И	И	Л	И	И
Л	И	Л	Л	И	И
Л	Л	И	Л	И	И
Л	Л	Л	Л	И	И

1.2. Основные логические операции. Формулы логики

Логические операции.

Пусть A, B - произвольные высказывания, относительно которых не предполагается, что известно их истинностные значения.

Связке "НЕ" соответствует логическая операция отрицания, обозначение операции – знак $\rceil$ или $\overline{}$.

Определение. ***Отрицанием*** высказывания A называется высказывание $\overline{A}$ ($\rceil$A), которое истинно, если A – ложно, и ложно, если A – истинно.

Таблица истинности отрицания:

A	$\overline{A}$
И	Л
Л	И

Пример: A: 2*2=4 – истинное высказывание; $\overline{A}$: $\overline{2*2=4}$ или $2*2 \neq 4$ - ложное высказывание.

Связке "И" соответствует операция конъюнкция, обозначение операции – знак $\wedge$ (или &).

Определение. ***Конъюнкцией*** высказываний А и В называется высказывание $A \wedge B$ (читается "А и В"), которое истинно тогда и только тогда, когда А, В – истинно.

Таблица истинности конъюнкции:

А	**В**	$\mathbf{A \wedge B}$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Пример: А: 5 – нечетное число; В: Пушкин родился в 1799 г – истинные высказывания; поэтому высказывание $A \wedge B$: 5 – нечетное число $\wedge$ Пушкин родился в 1799 г. – истинное высказывание.

Связке "ИЛИ" соответствует операция дизъюнкция, обозначение операции – знак $\vee$.

В формально-логических выводах «или» употребляется не в исключающем смысле (в отличие от обыденной речи, где эта связка может употребляться и в исключающем смысле и в неисключающем смысле)

Определение. ***Дизъюнкцией*** высказываний А и В называется высказывание $A \vee B$ (читается "А или В"), которое ложно тогда и только тогда, когда А, В – ложны.

Таблица истинности дизъюнкции:

А	**В**	$\mathbf{A \vee B}$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Пример. А: $7<10$, и.в. В: 3 - число четное, л.в. $A \vee B$: $7<10$ $\vee$ 3 - число четное, и.в.

Связке "ЕСЛИ....ТО" соответствует логическая операция импликация, обозначение операции знак $\rightarrow$.

Определение. ***Импликацией*** высказываний А и В называется высказывание $A \rightarrow B$ (читается "если А, то В"), которое ложно тогда и только тогда, когда А – истинно, а В – ложно.

Таблица истинности импликации:

A	**B**	**A→B**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Пример. А: 2*2=5, л. в. В: 2=2, и. в. А→В: 2*2=5→ 2=2. и. в.

Высказывание А называется ***условием*** или ***посылкой***, высказывание В - ***заключением*** или ***следствием импликации***.

Связке "ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА" соответствует операция эквиваленция, обозначение операция – знак $\leftrightarrow$.

Определение. ***Эквиваленцией*** высказываний А и В навивается высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$ (читается :"А тогда и только тогда, когда В" или короче: "А эквивалентно В"), которое считается истинным только тогда, когда оба высказывания А и В имеют одинаковое истинностное значение.

Эквивалентность $A \leftrightarrow B$ читается также следующим образом: "Для того, чтобы А, необходимо и достаточно, чтобы В".

Таблица истинности эквиваленции:

A	**B**	**A↔B**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Пример. А: 7 – число простое; и.в. В: в равнобедренном треугольнике при основании углы равны, и.в. А↔В - и.в.

Стрелка Пирса - **↓.**
Логическая операция задается таблицей:

p	q	p ↓ q
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Стрелка Пирса является отрицанием дизъюнкции.

1) ***Штрих Шеффера*** - |.

Логическая операция задается таблицей:

p	q	p | q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Штрих Шеффера является отрицанием конъюнкции.

2) Сумма по модулю два - ⊕

Логическая операция задается таблицей:

p	q	p ⊕ q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Сумма по модулю два является отрицанием эквивалентности

Формулы логики высказываний

Основная задача логики высказываний состоит в изучении логических форм составных высказываний с помощью логических операций.

Понятие логической формы составного высказывания уточняется с помощью вводимого понятия формулы логики высказываний.

Понятие формул логики высказываний определяется следующим образом:

1. Элементарные формулы – атомы – являются формулами логики высказываний.
2. Если A, B – формулы, то $\overline{A}$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ также являются формулами логики высказываний.
3. только те выражения являются формулами логики высказываний, для которых это следует из 1, 2.

Согласно определения, всякая формула либо атом, либо образуется из атомов в результате применения 2.

Число скобок в формулах можно уменьшить, если опустить внешнюю пару скобок и упорядочить знаки логических операций по старшинству: $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$.

Знак $\leftrightarrow$ имеет самую большую область действия, знак $\overline{}$ самую маленькую.

Определение. Формулы логики, принимающие значение "истина" при любых значениях атомов, входящих в формулу, называется ***тождественно истинными*** (или законами логики, или тавтологиями).

Например, формула $(A \vee \overline{A})$ всегда тождественно истинна.

Определение. Формулы логики, принимающие всегда ложное значение, называются ***тождественно ложными*** (или противоречиями).

Например, формула $(A \wedge \overline{A})$ - противоречие.

Определение. Формулы алгебры логики, принимающие значение «ложь» хотя бы на одном наборе значений атомов, входящих в формулу называются ***опровержимыми***.

Определение. Формулы алгебры логики, принимающие значение «истина» хотя бы на одном наборе значений атомов, входящих в формулу называются ***выполнимыми***.

Определение. Формулы P и Q называются ***равносильными***, если их истинностные значения совпадают при любом выборе истинностных значений атомов, входящих в эти формулы.

Запись $P \equiv Q$ означает, что формулы P и Q равносильны.

1.3. Изучение законов логики. Равносильные преобразования.

Законы логики (свойства логических операций)

Следующие формулы являются законами логики.

1. $\overline{\overline{A}} = A$ - закон двойного отрицания.
2. $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ - закон коммутативности конъюнкции.
3. $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ - закон коммутативности дизъюнкции.
4. $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ - закон ассоциативности конъюнкции.
5. $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ - закон ассоциативности дизъюнкции.
6. $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ - закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции.
7. $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ - закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции.
8. $\overline{A \vee B} \leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ - закон отрицания дизъюнкции.
9. $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ - закон отрицания конъюнкции.
10. $\overline{A \rightarrow B} \leftrightarrow A \wedge \overline{B}$ - закон отрицания импликации.

11. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$ - закон выражения эквивалентности через конъюнкцию и импликацию.
12. $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$ - закон контрапозиции.
13. $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$ - закон силлогизма.

Для доказательства любого из приведенных выше законов можно использовать следующие способы:

1. Построить таблицы истинности для левых и правых частей эквивалентности и убедиться, что получены одинаковые значения для всех значений атомов.
2. Построить значение всей формулы и убедится, что формула является тавтологией.

Пример. Докажем закон отрицания конъюнкции ($\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$) этими способами:

1. Найдем значения для $\overline{A \wedge B}$ и $\overline{A} \vee \overline{B}$ и сравним их.

A	**B**	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
И	И	И	**Л**	Л	Л	**Л**
И	Л	Л	**И**	Л	И	**И**
Л	И	Л	**И**	И	Л	**И**
Л	Л	Л	**И**	И	И	**И**

2. Найдем значение $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ и убедимся, что при всех значениях А и В - это истинное значение.

A	**B**	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$
И	И	И	Л	Л	Л	Л	**И**
И	Л	Л	И	Л	И	И	**И**
Л	И	Л	И	И	Л	И	**И**
Л	Л	Л	И	И	И	И	**И**

Логическое следствие

Определение. Формула В есть ***логическое следствие*** формул A_1, A_2, .., A_n, если формула В принимает истинное значение при тех же значениях, при которых истинна каждая из формул $A_1, A_2, .., A_n$.

Запись $(A_1, A_2, .., A_n) \Rightarrow B$ означает, что B – логическое следствие формул $A_1, A_2, .., A_n$.

Пример. $(A \to B, A \to \overline{B}) \Rightarrow \overline{A}$.

Докажем данное следствие.

A	**B**	**A→B**	$\overline{B}$	**A→**$\overline{B}$	$\overline{A}$
И	И	И	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	И	Л
Л	И	**И**	Л	**И**	**И**
Л	Л	**И**	И	**И**	**И**

Из определения следует, что противоречие логически влечет любую формулу, а тавтология логически следует из любой формулы логики.

Определение. Формулы F и G называются равносильными, если они являются логическими следствиями друг друга. Обозначение: $F \equiv G$.

Проанализировав последнее определение, получаем, что формулы равносильны, если они на всех наборах значений переменных превращаются в одинаковые по истинностному значению высказывания.

Следующие теоремы связывают логическое следствие и импликацию, равносильность и эквиваленцию.

Теорема$_1$. $A \Rightarrow B$ тогда и только тогда, когда $A \to B$ – тавтология.

Теорема$_2$. $A \equiv B$ тогда и только тогда, когда $A \leftrightarrow B$ – тавтология.

2. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ.

2.1 Основные определения и действия с ними.

Переменная *x*, принимающая значения 0 или 1, называется булевой (или логической, двоичной). Функция *F*, зависящая от булевых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и принимающая также значения 0 или 1, называется булевой (или логической, двоичной) и обозначается $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Булевы функции F от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ могут быть заданы посредством таблицы истинности, содержащей 2^n строк и $n+1$ столбцов. В левой части таблицы содержатся наборы значений n переменных, расположенные в порядке возрастания их десятичного эквивалента, а в правой ее части – значения функции F на соответствующих наборах значений переменных.

В качестве примера рассмотрим таблицу истинности некоторой булевой функции F, зависящей от переменных x_1, x_2 и x_3.

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Булева функция n переменных F однозначно определяется 2^n - разрядным булевым вектором ее значений w(F) (т.е. w(F) – таблица истинности функции F). Например, в этом примере имеем w(F)=(00100111).

Рассматриваемая булева функция F принимает значения 0 на наборах 000, 001, 011 и 100, а значение 1 – на наборах 010, 101, 110 и 111.

Множество наборов, на которых функция F принимает значение 1, называется характеристическим и обозначается через N_F. В настоящем примере имеет место N_F = (010, 101, 110, 111).

Общее число различных булевых функций F от n переменных равно 2^{2^n}. Т.е. число булевых функций от двух переменных равно $2^{2^2}=16$, от трех переменных $2^{2^3}=2^8=256$.

Элементарные булевы функции. Равносильности

Булевых (или логических) функций от одной переменной $2^{2^1}=2^2=4$. Они приведены:

x	0	x	$\bar{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

x_1 x_2	конъюнкция $x_1 \wedge x_2$	дизъюнкция $x_1 \vee x_2$	импликация $x_1 \to x_2$	эквивалентность $x_1 \sim x_2$	сложение по модулю два $x_1 \oplus x_2$	стрелка Пирса $x_1 \downarrow x_2$
	0	0	1	1	0	1
	0	1	1	0	1	0
	0	1	0	0	1	0
	1	1	1	1	0	0

Основные элементарные булевы функции от двух переменных приведены выше.

Функция $x_1 \wedge x_2$ называется конъюнкцией, ее обозначают также $x_1 \& x_2$, но чаще всего знак конъюнкции аналогично знаку умножения опускают и пишут $x_1 x_2$. Конъюнкция $x_1 x_2$ равна единице, только если x_1=1 и x_2=1 одновременно, поэтому ее часто называют функцией И. Еще одно название конъюнкции — логическое умножение, поскольку ее таблица истинности действительно совпадает с таблицей обычного умножения для чисел 0 и 1.

Функция $x_1 \vee x_2$ называется дизъюнкцией. Дизъюнкция $x_1 \vee x_2$ равна единице, только если x_1=1 или x_2=1 (т.е. хотя бы одна переменная равна единице), поэтому ее часто называют функцией ИЛИ.

Кроме таблицы истинности, булевы функции могут быть заданы аналитически с помощью формул. Например, $F = (\bar{x}_1 \vee x_2 x_3) \oplus (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

Если формула *a* реализует булеву функцию *F*, которая тождественно равна единице, то она называется тождественно истинной. Если формула *a* реализует булеву функцию *F,* которая тождественно равна нулю, то она называется тождественно ложной.

Если формулы *a* и *b* зависят от одних и тех же переменных и реализуют одну и ту же булеву функцию *F*, то формулы *a* и *b* называются равносильными.

Основные равносильности

Закон двойного отрицания

$\bar{\bar{x}} = x$.

Идемпотентность

$x \vee x \vee \ldots \vee x = x, \;\; x x \cdots x = x$.

Коммутативность

$x \vee y = y \vee x, \; x y = y x$.

Ассоциативность

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x(yz) = (x\ y)\ z$.

Дистрибутивность

$x(y \vee z) = xy \vee xz$, $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$.

Законы де Моргана

$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$, $\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y}$.

Формулы с константами

$x \vee \bar{x} = 1, \quad 0 \vee x = x, \quad 1 \vee x = 1,$

$x\bar{x} = 0, \quad 0x = 0, \quad 1x = x.$

Дополнительные равносильности

$x \to y = \bar{x} \vee y$,

$x \sim y = \bar{x}\,\bar{y} \vee xy$,

$x \sim y = (x \to y)(y \to x)$,

$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$,

$x \oplus 1 = \bar{x}$,

$x \vee y = x \oplus y \oplus xy$,

$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$,

$x \mid y = \overline{xy}$,

$xy \vee x\bar{y} = x$, $\quad (x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x$ (законы склеивания),

$x \vee xy = x$ (закон поглощения).

$xy \vee \bar{x}z = xy \vee \bar{x}z \vee yz$ (закон обобщенного склеивания).

Переменная x_i булевой функции F называется несущественной (или фиктивной), если $F(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, то есть если изменение значения x_i в каждом наборе значений $x_1, x_2, ..., x_n$ не меняет значения функции. При этом существует такая формула, реализующая эту булеву функцию, в которой отсутствует x_i.

2.2. Совершенная дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (СДНФ и СКНФ). Дизъюнктивные нормальные формы

Определение. Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция литералов (переменных или их отрицаний), взятых не более чем по одному разу.

Например, конъюнкции $x_1\bar{x}_3$, $x_1x_2x_3$, 1 являются элементарными. Причем первая элементарная конъюнкция имеет ранг (число литералов) 2, вторая – 3, а третья – 0.

Следующие конъюнкции: $x_1\bar{x}_1$, $x_1x_2x_2$, $x_1\overline{x_2x_3}$, $x_1\overline{\bar{x}_2x_3}$, 0 не являются элементарными.

Определение. Элементарная конъюнкция булевой функции $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$, содержащая n литералов, называется полной (или минтермом).

Определение. Дизъюнкция любого конечного множества элементарных конъюнкций булевой функции F называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) функции F. Число элементарных конъюнкций (слагаемых, термов), составляющих ДНФ, называется длиной ДНФ.

Например, ДНФ $F = x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4$ имеет длину, равную 3.

Для произвольной булевой функции F существует, вообще говоря, много различных реализующих ее ДНФ, отличающихся друг от друга длиной, числом вхождений литералов и т.д.

Определение. Две (или несколько) ДНФ, реализующих одну и ту же булеву функцию F, называются эквивалентными (или равносильными).

Например, для функции $F=F(x_1,x_2,x_3)$, заданной булевым вектором w(F)=(00100111), существуют следующие эквивалентные ДНФ:

$$F=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3\,, \qquad (1)$$

$$F=x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3\,, \qquad (2)$$

$$F=x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\,, \qquad (3)$$

$$F=x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2\,, \qquad (4)$$

$$F=x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3\,. \qquad (5)$$

Определение. ДНФ булевой функции F, состоящая только из полных элементарных конъюнкций, называется совершенной ДНФ (СДНФ).

Например, (1) – СДНФ функции F.

Отметим, что СДНФ является единственной (с точностью перестановки слагаемых) для конкретной булевой функции F .

Любую булеву функцию F, заданную формулой, можно с помощью основных равносильностей преобразовать к ДНФ, а затем к СДНФ.

Конъюнктивные нормальные формы

Определение. Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция литералов (переменных или их отрицаний), взятых не более чем по одному разу.

Например, дизъюнкции $x_1 \vee \bar{x}_3$, $x_1 \vee x_2 \vee x_3$, 1 являются элементарными. Причем первая элементарная дизъюнкция имеет ранг (число литералов) 2, вторая – 3, а третья – 0.

Следующие дизъюнкции: $x_1 \vee \bar{x}_1$, $x_1 \vee x_2 \vee x_2$, $x_1 \vee \overline{x_2 \vee x_3}$, $x_1 \vee \overline{\bar{x}_2 \vee x_3}$, 0 не являются элементарными.

Определение. Элементарная дизъюнкция булевой функции $F=F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, содержащая n литералов, называется полной.

Определение. Конъюнкция любого конечного множества элементарных дизъюнкций булевой функции F называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ) функции F. Число элементарных дизъюнкций, составляющих КНФ, называется длиной КНФ.

Например, КНФ $F=(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$ имеет длину, равную 3.

Для произвольной булевой функции F существует, вообще говоря, много различных реализующих ее КНФ, отличающихся друг от друга длиной, числом вхождений литералов и т.д.

Определение. Две (или несколько) КНФ, реализующих одну и ту же булеву функцию F , называются эквивалентными (или равносильными).

Определение. КНФ булевой функции F, состоящая только из полных элементарных дизъюнкций, называется совершенной КНФ (СКНФ).

Например, $F=(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)$- СКНФ функции F, заданной вектором значений таблицы истинности w(F)=(01100111).

Отметим, что КДНФ является единственной (с точностью перестановки множителей) для конкретной булевой функции F . Любую булеву функцию F, заданную формулой, можно с помощью основных равносильностей преобразовать к КНФ, а затем к СКНФ.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Основу теории графов составляет совокупность методов и представлений, сформировавшихся при решении конкретных задач.

Граф есть совокупность точек и линий, соединяющих эти точки. Эти соединения могут обладать различными характеристиками, и теория графов занимается изучением этих характеристик. Граф характеризует отношения между множествами объектов.

Большое значение в теории графов имеет проблема разрешимости: найти эффективный или хотя бы достаточно простой в практически важных случаях алгоритм решения задачи.

В последнее время теория графов принимает все более прикладной характер, являясь эффективным аппаратом для формализации множества задач, связанных с дискретным размещением объектов. К ним, в частности, относятся: проектирование и исследование сетей связи, анализ электрических цепей, графы потока сигналов и теория обратной связи, блок-схемы программы, исследование автоматов, анализ и синтез логических цепей, задачи календарного планирования, планирование и обеспечение материально-технического снабжения, поиск информации, стратегия инвестиций, анализ качества, исследование движения транспорта, размещение предприятий коммунального обслуживания, моделирование, экономические задачи, теория игр, головоломки, доказательство теорем.

3.1. Основные понятия и определения теории графов

Пусть задано некоторое конечное множество *X,* элементы которого будем называть вершинами, и множество *V,* состоящее из пар элементов (x_i, x_j) множества *X*. Упорядоченная пара множеств $G=(X,V)$ называется графом. Вершины изображаются точками, а пары элементов – линиями, соединяющими точки, соответствующие образующим пары вершинам.

Если в определении графа существенно в каком порядке выбираются вершины (то есть пара (x_i, x_j) отлична от пары (x_j,x_i)), то такой граф называют ориентированным или орграфом, а пару (x_i, x_j) – дугой, при этом считается, что x_i – начальная вершина, а x_j – конечная. В геометрической интерпретации дуге соответствует направленный отрезок. Часто орграф задают парой $G=(X,\Gamma)$, где X – множество вершин, а Г – неоднозначное отображение, ставящее в соответствие каждой вершине подмножество в X. $\Gamma(x_i)$ – множество вершин $x_j \in X$, для которых в графе G существует дуга (x_i, x_j). $\Gamma^{-1}(x_i)$ – множество вершин $x_j \in X$, для которых в графе G существует дуга (x_j, x_i). Если в определении графа не существенен порядок вершин при образовании пары (x_i, x_j), то граф называют неориентированным или неорграфом, а пару (x_i , x_j) – ребром.

Число вершин графа называется его порядком.

Пример. На рис. 3.1 изображен ориентированный граф $G=(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_3)\})$, а на рис. 3.2 – неориентированный граф.

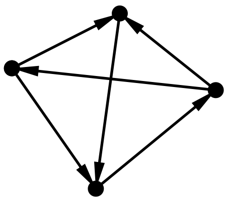


Рис. 3.1

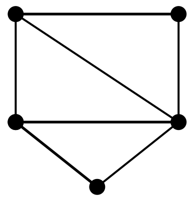


Рис. 3.2

Путем в графе G называется такая последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Для неорграфа такая последовательность ребер называется цепью. Если путь (цепь) проходит через вершины $x_1, ..., x_k$, то будем обозначать его (ее) символом $[x_1, \ldots, x_k]$.Для графа на рис. 3.1 последовательность дуг (x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_3) является путем и может быть обозначена следующим образом $[x_1, x_2, x_4, x_3]$. Для графа на рис. 3.2 цепью является, например, следующая последовательность ребер (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_5, x_4), которую обозначим через $[x_2, x_3, x_5, x_4]$.

Путь (цепь), у которого(-ой) начальная и конечная вершина совпадают, называется контуром (циклом). Для графа на рис. 3.2 циклом является, например, следующая цепь [x_2, x_3, x_5, x_1, x_2]. Простым циклом графа называется цикл, в котором все вершины различны за исключением начальной и конечной вершины, которые совпадают. Например, для графа на рис. 3.2 цикл [x_2, x_3, x_5, x_1, x_2] является простым, а цикл [x_2, x_3, x_4, x_5, x_3, x_1, x_2] не является простым. Петлей называется дуга, начальная и конечная вершины которой совпадают. Граф, полученный из орграфа заменой каждой дуги на ребро, называется основанием орграфа. Пример. На рис. 3.3.б изображен граф, который является основание графа, изображенного на рис. 3.3.а. Две вершины x_i и x_j называются смежными, если существует соединяющее их ребро (дуга) (x_i, x_j), при этом вершины называются инцидентными этому ребру (дуге), а ребро (дуга) – инцидентным(-ой) этим вершинам. Аналогично, два различных ребра (дуги) называются смежными, если они имеют по крайней мере одну общую вершину.

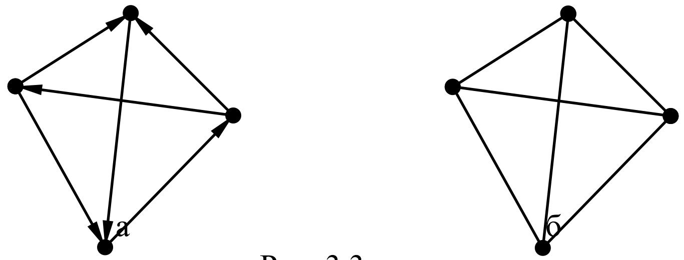


Рис. 3.3

Вершины x_1 и x_4 смежны (рис. 3.3), дуга (x_1, x_4) инцидентна вершинам x_1 и x_4, а вершины x_1 и x_4 инцидентны дуге (x_1, x_4). Ребра (x_1, x_3) и (x_3, x_4) смежны (рис. 3.2).

Замечание. Смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность является отношением между разнородными элементами.

Множество всех вершин графа G, смежных с некоторой вершиной x, называется окружением вершины x и обозначается через $N_G(x)$ или просто $N(x)$.

В неориентированном графе число ребер, инцидентных данной вершине x_i, называется степенью (валентностью) вершины x_i и обозначается $d(x_i)$. Вершина графа, имеющая степень 0, называется изолированной, а вершина, имеющая степень 1 – висячей.

Для неорграфа на рис. 3.2 $d(x_1)=3$, $d(x_3)=4$.

Число дуг, исходящих из вершины x_i ориентированного графа, называется полустепенью исхода вершины x_i и обозначается $d^-(x_i)$. Число дуг, заходящих в вершину x_i ориентированного графа, называется полустепенью захода вершины x_i и обозначается $d^+(x_i)$. Так, для орграфа, представленного на рис. 3.3.а) $d^-(x_1)=2$, $d^+(x_1)=1$.

Утверждение (лемма о рукопожатиях). Сумма степеней вершин графа G равна $2m$, где m – число ребер графа G.

Доказательство. Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, то оно добавляет двойку к сумме степеней графа G. Следовательно, все ребра дают вместе сумму степеней $2m$. Подграфом графа $G=(X,V)$ называется граф $G'=(X',V')$, для которого $X'\subseteq X$, $V'\subseteq V$, причем ребро (x_i, x_j) содержится в V' только в том случае, если x_i и x_j содержатся в X'.

Одним из подграфов графа на рис. 3.1 является следующий (рис. 3.4)

Если все вершины графа $G=(X,V)$ присутствуют в подграфе $G'=(X',V')$, тогда G' называется остовным подграфом, т. е. $X'=X$, $V'\subseteq V$.

Пусть X' – подмножество вершин X графа $G=(X,V)$. Тогда граф $G'=(X',V')$ называется порожденным подграфом графа G на множестве вершин X' (вершинно-порожденный подграф), если V' является таким подмножеством V, что ребро (x_i, x_j) входит в V' тогда и только тогда, когда x_i и x_j входят в X'.

На рис. 3.5 представлен порожденный подграф на множестве вершин $\{x_1, x_3, x_5\}$ неориентированного графа, изображенного на рис 3.2.

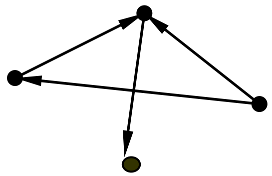


Рис. 3.4

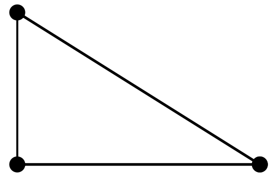


Рис. 3.5

3.2. Типы графов

Граф G называется *полным,* если любые две его вершины смежны. Полный граф порядка n обозначается символом K_n, число ребер в нем равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Граф называется *пустым,* если в нем нет ребер. Пустой граф порядка n обозначается через O_n. Граф, не содержащий вершин и, следовательно, ребер, называется *ноль-графом*. Граф, состоящий из одной вершины, называется *тривиальным*. Красивыми примерами являются *графы пяти платоновых тел* (т. е. правильных многогранников): *тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра* (рис. 3.6). Граф называется *двудольным,* если существует такое разбиение множества его вершин на две части *(доли),* что концы каждого ребра принадлежат разным частям. Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется *полным двудольным.* Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и из q вершин, обозначается символом $K_{p,q}$. При $p=1$ получаем *звезду* $K_{1,q}$. На рис. 3.7 изображены звезда $K_{1,5}$ и полный двудольный граф $K_{3,3}$. Аналогично двудольным графам определяются *k-дольный* и *полный k-дольный* графы для $k=3, 4, \ldots$ На рис. 3.8 приведен трехдольный граф.

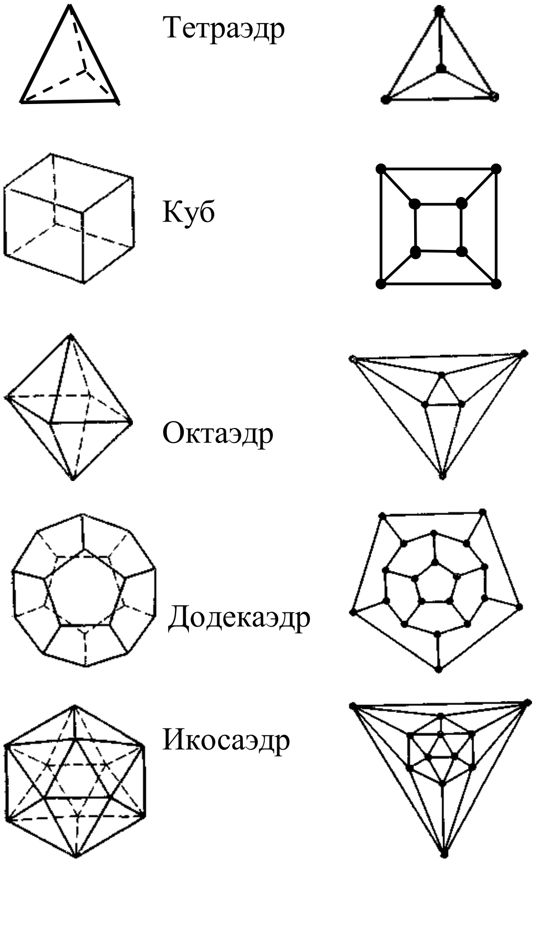


Рис. 3.6

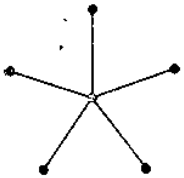


Рис.3.7

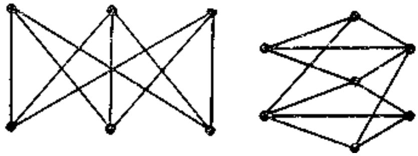


Рис. 3.8

Легко подсчитать число всех графов с фиксированным множеством вершин X. Эти графы различаются своими ребрами, и потому их число равно количеству подмножеств в $X^{(2)}$, т.е. $2^{\binom{n}{2}}$, где $n=|X|$. Однако эти графы не всегда следует различать. Как в применениях теории графов, так и в самой этой теории чаще существенно лишь то, что есть объекты (вершины графа) и связи между объектами (ребра). С этих позиций графы, которые получаются один из другого изменением наименований вершин, разумно не различать.

Два графа G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует взаимно-однозначное отображение между множествами их вершин, сохраняющее смежность. Такое отображение называется изоморфизмом. Два орграфа изоморфны, если существует изоморфизм между их основаниями, сохраняющий порядок вершин на каждой дуге.

Например, три графа, представленные на рис. 3.9, изоморфны, а графы на рис. 3.10 не изоморфны. Вопрос о том, изоморфны ли два данных графа, в общем случае оказывается сложным.

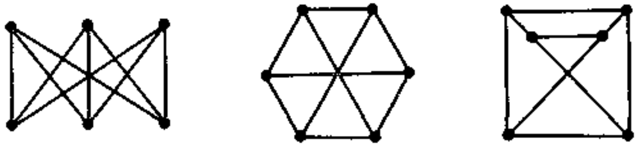


Рис. 3.9

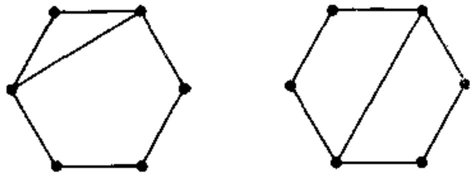


Рис. 3.10

Очевидно, что отношение изоморфизма графов является эквивалентностью, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы так, что графы из одного класса попарно изоморфны, а графы из разных классов не изоморфны. Изоморфные графы можно отождествлять, т. е. считать совпадающими (их можно изобразить одним рисунком). Они могли бы различаться конкретной природой своих элементов, но именно это игнорируется при введении понятия «граф».

В некоторых ситуациях все же приходится различать изоморфные графы, и тогда полезно понятие «помеченный граф». Граф порядка n называется *помеченным,* если его вершинам присвоены некоторые метки, например, номера 1, 2, ..., n. Отождествив каждую из вершин графа с ее номером (и, следовательно, множество вершин – с множеством чисел $\{1, 2, ..., n\}$), определим равенство помеченных графов $G_1=(X,V_1)$ и $G_2=(X,V_2)$ одного и того же порядка: $G_1=G_2$ тогда, когда $V_1=V_2$. На рис. 3.11 изображены три разных помеченных графа.

При необходимости подчеркнуть, что рассматриваемые графы различаются лишь с точностью до изоморфизма, говорят: «абстрактный граф». Строго говоря, *абстрактный* (или *непомеченный*) граф – это класс изоморфных графов.

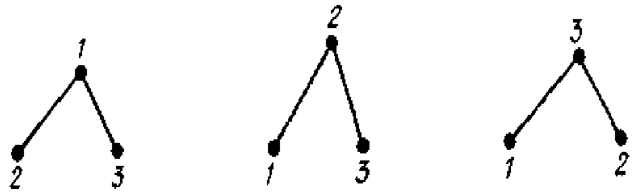


Рис. 3.11

Если вершины графа соединены более чем одним ребром, то такой граф называется мультиграфом, а ребра – кратными. Мультиграф не допускает петель.

Граф, не содержащий петель и кратных ребер, называется простым.

Граф $G=(X,V)$ называется *симметрическим***,** если в V для любой дуги (x_i, x_j) существует противоположно ориентированная дуга (x_j, x_i). Условимся в этом случае соединять обе вершины одной непрерывной линией без стрелок.

Граф называется антисимметрическим, если каждая пара смежных вершин соединена только в одном направлении и петли отсутствуют.

Граф, у которого все вершины имеют одну и ту же степень, называется регулярным (однородным) графом. Если степень каждой вершины равна r, то граф называется регулярным (однородным) степени r. На рис. 3.9 изображены регулярные графы степени 3.

Граф, который можно изобразить на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались в точках, отличных от вершин, называется планарным графом.

Реберным графом $L(G)$ простого графа G называется граф, вершины которого взаимно однозначно сопоставлены ребрам графа G, причем две вершины в $L(G)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра смежны в G.

Орграф G' называется обратным к данному орграфу G, если он имеет те же вершины, что и G, а дуга (x_i, x_j) принадлежит G' тогда и только тогда, когда дуга (x_j, x_i) принадлежит G.

3.3. Матричные представления графов

Информация о структуре графа может быть задана матрицей смежности. *Матрицей смежности* графа $G=(X,V)$, $|X|=n$ называется квадратная матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны,}\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Замечание. Матрица смежности неориентированного графа симметрична. В случае кратных ребер a_{ij} есть количество ребер, соединяющих вершины x_i и x_j. Для орграфа a_{ij} определяется как количество дуг, направленных от вершины x_i к вершине x_j.

Теорема. Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов (т.е. одновременно с перестановкой i-й и j-й строк переставляются i-й и j-й столбцы).

Согласно этой теореме по матрице смежности граф восстанавливается однозначно с точностью до изоморфизма.

Матрицей инцидентности графа $G=(X,V)$, $|X|=n$, $|V|=m$ называется матрица $B=(b_{ij})_{n\times m}$, элементы которой определяются следующим образом:

если G – ориентированный граф, то

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } x_i \text{ - начальная вершина дуги } v_j; \\ \text{-1, если вершина } x_i \text{ - конечная вершина дуги } v_j; \\ 0, \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } v_j; \end{cases}$$

если G - неориентированный граф, то

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } v_j; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание. *Для ориентированного графа петлю, т. е. дугу вида (*x_i, x_i*) удобно представлять иным значением в строке* x_i, *например, 2.*

3.4. Операции над графами

Рассмотрим операции над графами.

I. Бинарные операции.

1. *Объединение графов*. Рассмотрим графы $G_1 = (X_1, V_1)$ и $G_2 = (X_2, V_2)$. Объединение графов G_1 и G_2, обозначаемое как $G_1 \cup G_2$, представляет собой такой граф $G_3 = (X_1 \cup X_2, V_1 \cup V_2)$, что множество его вершин является объединением X_1 и X_2, а множество ребер – объединением V_1 и V_2.

2. *Пересечение графов*. Пересечение графов G_1 и G_2, обозначаемое как $G_1 \cap G_2$, представляет собой граф $G_3 = (X_1 \cap X_2, V_1 \cap V_2)$. Таким образом, множество вершин

графа G_3 состоит только из вершин, присутствующих одновременно в графах G_1 и G_2, а множество ребер графа G_3 состоит только из ребер, присутствующих одновременно в графах G_1 и G_2.

3. *Кольцевой суммой* $G_1 \oplus G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $G_3 = (X_1 \cup X_2,\ V_1 \oplus V_2)$, где $V_1 \oplus V_2 = (V_1 \setminus V_2) \cup (V_2 \setminus V_1)$.

Замечание. Объединение, пересечение и другие операции над ориентированными графами определяются точно также, как и в случае неориентированных графов.

4. *Соединением графов* G_1+G_2 называется граф $G_3 = (X_1 \cup X_2,\ V_1 \cup V_2 \cup \{(x_i, x_j) \mid x_i \in X_1, x_j \in X_2, x_i \neq x_j\})$.

5. Произведением $G_1 \times G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $G_3 = (X_1 \times X_2, V)$, в котором $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in V$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $(y_1, y_2) \in V_2$, или $y_1 = y_2$ и $(x_1, x_2) \in V_1$.

II. Унарные операции.

1. *1. Удаление вершины*. При удалении вершины из графа удаляются и все инцидентные ей ребра (дуги). Пусть $G = (X, V)$ – граф и $x \in X$. Удалить вершину x из графа G – это значит построить новый граф $G' = (X', V')$, в котором $X' = X \setminus \{x\}$ и V' получается из V удалением всех ребер, инцидентных вершине x.

2. Удаление ребра (дуги). Пусть $G = (X, V)$ – граф
Удалить ребро (дугу) v – это значит построить новый граф

$$G' = (X', V'),\ \text{в котором}\ X' = X\ \text{и}\ V' = V \setminus \{v\}.$$

При удалении ребра (дуги) его концевые вершины не удаляются. Операцией, являющейся обратной к удалению ребра, является добавление ребра.

3. *Слияние или отождествление вершин*. Говорят, что вершины x_i и x_j в графе G отождествляются (сливаются), если они заменяются такой новой вершиной x_k, что все ребра (дуги) графа, инцидентные x_i и x_j, становятся инцидентными новой вершине x_k.

4. *Стягивание ребра (дуги)*. Эта операция означает удаление ребра и отождествление его концевых вершин. Граф G_1 называется стягиваемым к графу G_2, если граф G_2 может быть получен из G_1 в результате некоторой последовательности стягиваний ребер.

5. *Подразбиение ребра*. Пусть $G=(X,V)$ – граф и $v=(x,y)\in V$. Выполнить подразбиение ребра v – это значит построить новый граф $G'=(X',V')$, в котором $X'=X\cup\{z\}$ (т.е. z – некая новая вершина) и $V'=(V\setminus\{v\})\bigcup\{(x,z),(z,y)\}$. С графической точки зрения эта операция означает «внесение в ребро новой вершины».

Граф $\overline{G}=(X,\overline{V})$ называется дополнением простого графа, если ребро (x_i, x_j) входит в $\overline{V}$ в том и только в том случае, если оно не входит в V. Другими словами, две вершины смежны в $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в G.

Пусть $G'=(X',V')$ является подграфом графа $G=(X,V)$. Подграф $G''=(X,V\setminus V')$ графа G называется дополнением графа G' в графе G.

3.5. Метрические характеристики графа.

Пусть G=(X,U) - связный граф, а x_i и x_j - две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего маршрута, соединяющего вершины x_i и x_j (пути из x_i и x_j) называется *расстоянием* между вершинами x_i и x_j и обозначается $d(x_i, x_j)$. Положим $d(x_i, x_j) = \infty$, если вершины x_i и x_j не соединены маршрутом (путем). Расстояние $d(x_i, x_j)$ удовлетворяет следующим аксиомам метрики:

1) $d(x_i, x_i) = 0$;
2) $d(x_i, x_j) \geq 0$;
3) $d(x_i, x_j) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_i = x_j$;
4) $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i)$ для симметрических графов;
5) $d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k) \geq d(x_i, x_k)$ (неравенство треугольника).

Расстояние для графа G удобно задавать матрицей расстояний. *Матрицей расстояний* графа с n вершинами называется квадратная матрица D порядка n, элементы которой определяются следующим образом:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если } x_i = x_j; \\ d(x_i, x_j), \text{если } x_i \neq x_j. \end{cases}$$

Матрицу расстояний можно определить

Для фиксированной вершины x_i величина

$$e(x_i) = \max_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

называется *эксцентриситетом* (отклоненностью) вершины x_i.

Максимальный среди эксцентриситетов вершин называется *диаметром* графа G и обозначается diam (G):

$$\mathrm{diam}(G) = \max_{x_i \in X} e(x_i) = \max_{x_i \in X} \max_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа называется его *радиусом* и обозначается через r(G):

$$r(G) = \min_{x_i \in X} e(x_i) = \min_{x_i \in X} \max_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

Вершина, имеющая минимальный эксцентриситет, называется *центром* графа.

Для вершины x_i число $P(x_i) = \sum\limits_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$ называется *передаточным числом*. Вершина графа, которой соответствует минимальное передаточное число

$$\max_{x_i \in X} P(x_i) = \max_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

называется *медианой* графа. Центров и медиан в графе может быть несколько.

.

3.6. Достижимость и связность

Основные определения

Понятия связности и достижимости используются для исследования структур различных организаций. Например, систему связи любой организации можно интерпретировать как граф, в котором люди представлены вершинами, а каналы связи – дугами. Естественно при рассмотрении такой системы поставить вопрос, может ли информация от одного лица x_i быть передана другому лицу x_j, т. е. существует ли путь, идущий от вершины x_i к вершине x_j. Если в графе существует путь, идущий от вершины x_i к вершине x_j, то говорят, что вершина x_j *достижима* из вершины x_i.

Если для любой пары вершин неориентированного графа существует цепь их соединяющая, то такой граф называется *связным.* Иначе неориентированный граф называется *несвязным.*

Ориентированный граф называется *сильно связным* или *сильным*, если для любых двух различных вершин x_i и x_j существует по крайней мере один путь, соединяющий x_i с x_j. Это определение означает также, что любые две вершины такого графа взаимно достижимы.

Ориентированный граф называется *односторонне связным* или *односторонним*, если для любых двух различных вершин x_i и x_j существует по крайней мере один путь из x_i в x_j или из x_j в x_i (или оба одновременно).

Ориентированный граф называют *слабо связным* или *слабым*, если для любых двух различных вершин графа существует по крайней мере один маршрут, соединяющий их.

Если для некоторой пары вершин орграфа не существует маршрута, соединяющего их, то такой орграф называется *несвязным*. Маршрут есть неориентированный двойник пути. Маршрут позволяет осуществлять «движение» по дугам, без учета их направленности.

Пример. Граф, приведенный на рис. 3.12(а) является сильно связный. Граф, показанный на рис. 3.12(б), не является сильным, так как в нем нет пути из x_5 в x_2, но односторонне связный. Граф, изображенный на рис. 3.12(в), не является ни сильным, ни односторонним, поскольку в нем не существует путей от x_5 к x_2 и от x_2 к x_5. Он – слабо связный. Наконец, граф, приведенный на рис. 3.12(г), является несвязным.

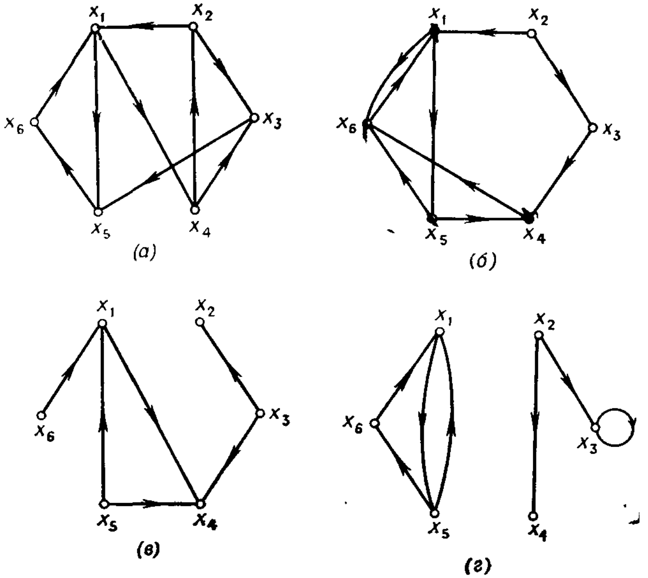


Рис. 3.12. Сильно связный граф (а), одностороне связный граф (б), слабо связный граф (в), несвязный граф (г)

Пусть дано некоторое свойство P, которым могут обладать графы. Максимальным подграфом графа G относительно свойства P называется порожденный подграф (X_S) графа G, обладающий этим свойством и такой, что не существует другого порожденного подграфа (X_H), у которого $X_S \subset X_H$ и который также обладает свойством P. Так, например, если в качестве свойства P взята сильная связность, то максимальным сильным подграфом графа G является сильный подграф, который не содержится в любом другом сильном подграфе, такой подграф называется сильной компонентой графа G. Это определения можно дать так: всякий максимальный по включению сильно связный подграф данного графа называется его сильной компонентой связности. Аналогично, односторонняя компонента представляет собой односторонний максимальный подграф, а слабая компонента – максимальный слабый подграф.

Например, в графе G, приведенном на рис. 3.12(б), подграф $(\{x_1, x_4, x_5, x_6\})$ является сильной компонентой графа G. С другой стороны, подграфы $(\{x_1, x_6\})$ и $(\{x_1, x_5, x_6\})$ не являются сильными компонентами, хотя и являются сильными подграфами, поскольку они содержатся в графе $(\{x_1, x_4, x_5, x_6\})$ и, следовательно, не максимальные.

В графе, показанном на рис. 3.12(в), подграф $(\{x_1, x_4, x_5\})$ является односторонней компонентой. В графе, приведенном на рис. 3.12(г), оба подграфа $(\{x_1, x_5, x_6\})$ и $(\{x_2, x_3, x_4\})$ являются слабыми компонентами, и у этого графа только две такие компоненты.

Из определений сразу же следует, что односторонние компоненты графа могут иметь общие вершины. Сильная компонента должна содержаться по крайней мере в одной односторонней компоненте, а односторонняя компонента содержится в некоторой слабой компоненте данного графа G.

Максимальный связный подграф неориентированного графа G называется *компонентой связности*.

Максимальный сильно связный подграф ориентированного графа G называется *сильной компонентой связности* (СК). Существуют два вида связности – вершинная связность и реберная связность.

Число вершинной связности – это наименьшее число вершин, удаление которых (вместе с инцидентными ребрами) приводит к несвязному графу. *Число реберной связности* – это наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.

При исследовании коммуникационных и логических сетей числа связности соответствующих графов можно интерпретировать как степень надежности этих сетей.

3.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ ГРАФА

Орграф называется *сильно связным*, если любые две его вершины взаимно достижимы, *односторонне связным*, если для любых двух вершин по крайней мере одна достижима из другой и *слабо связным*, если связным является лежащий в его основе неорграф.

Сильной компонентой орграфа называется его максимальный сильно связный подграф, подграф, не содержащийся ни в каком другом сильно связном подграфе этого графа.

Для определения сильных компонент графа необходимо:

Построить матрицу достижимости графа. Матрицей достижимости графа с n вершинами называется квадратная матрица R порядка n, элементы которой определяются следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } x_j \text{ достижима из } x_i; \\ 0, \text{в противном случае}; \end{cases}$$

2. Построить матрицу контрдостижимости графа. Матрицей контрдостижимости графа с n вершинами называется квадратная матрица Q порядка n, элементы которой определяются следующим образом:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } x_j \text{ достижима из } x_i; \\ 0, \text{в противном случае}; \end{cases}$$

$$r_{ii} = 1,\ q_{ii} = 1 \quad \forall\, i.$$

Матрицу контрдостижимости можно определить по матрице достижимости следующим образом:

3. Построить матрицу сильной связности графа. Матрицей сильной связности орграфа с n вершинами называется квадратная матрица S порядка n, элементы которой определяются следующим образом:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершины } x_j \text{ и } x_i \text{ взаимно достижимы;} \\ 0, \text{в противном случае;} \end{cases}$$

Матрицу сильной связности можно определить следующим образом:

$$R = Q^t, \; S = R * Q,$$

где * - операция поэлементного умножения матриц.

4. По матрице сильной связности выделить сильные компоненты графа. Если вершины x_i и x_j принадлежат одной сильной компоненте орграфа, то $s_{ij} = 1$. При этом строки (столбцы), соответствующие этим вершинам в матрице S, одинаковы.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1. С помощью основных равносильностей доказать, что в булевой функции $F = (x_2 \vee x_2x_3) \to (x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3)$ переменная x_3 является фиктивной.

Решение. Применяя закон поглощения и закон склеивания, получим

$$F = (x_2 \vee x_2x_3) \to (x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3) = x_2 \to x_1 .$$

Так как существует такая формула, реализующая эту булеву функцию, в которой отсутствует x_3, то эта переменная является фиктивной.

Задача 2. С помощью таблицы истинности убедиться в справедливости законов де Моргана $\overline{x\,y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

Решение. Построим таблицу истинности для $\overline{x\,y}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$.

x	$x\,y y$	$\overline{x\,y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
	0	1	1	1	1
	0	1	1	0	1
	0	1	0	1	1
	1	0	0	0	0

Так как в таблице истинности булевым функциям $\overline{x\,y}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$ соответствуют одинаковые столбцы, то формулы $\overline{x\,y}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$ равносильны.

Задача 3. С помощью основных равносильностей доказать закон обобщенного склеивания $x\,y \vee \bar{x}\,z = x\,y \vee \bar{x}\,z \vee y\,z$.

Решение. Применяя закон склеивания (в обратном порядке, то есть $y\,z = x\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z$) и дистрибутивность (то есть вынесем за скобки $x\,y$ и $\bar{x}\,z$), получим

$$x\,y \vee \bar{x}\,z \vee y\,z = x\,y \vee \bar{x}\,z \vee x\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z = x\,y(1 \vee z) \vee \bar{x}\,z(1 \vee y) = x\,y \vee \bar{x}\,z$$
.

Задача 4 **.** По таблице истинности составить СДНФ

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Решение: СДНФ: $F = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

Задача 5. По таблице истинности составить СКНФ.

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Решение: $F = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

Задача 6.

Определить метрические характеристики графа

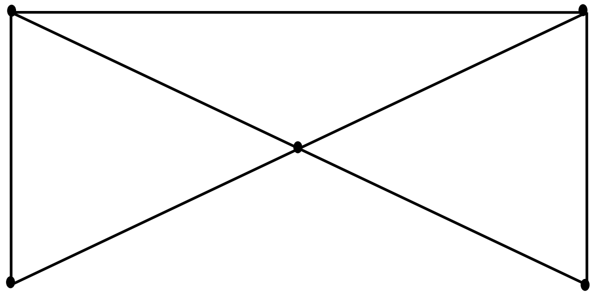


Рис. 4.1

Решение. Метрические характеристики определяются следующим образом:

$$D = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{ll} e(x_1)=2 & P(x_1)=6 \\ e(x_2)=1 & P(x_2)=4 \\ e(x_3)=2 & P(x_3)=6 \\ e(x_4)=2 & P(x_4)=5 \\ e(x_5)=2 & P(x_5)=5 \end{array}$$

Радиус графа равен 1, диаметр равен 2. Центр графа - вершина x_2; Медиана графа - вершина x_2.

Задача 7.

Найти сильные компоненты графа

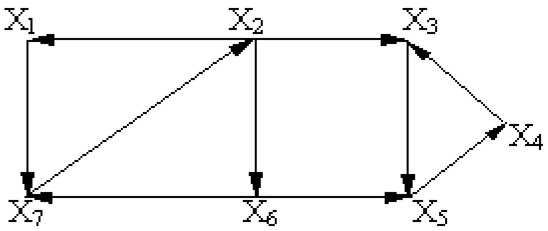


Рис. 4.2

Решение. Для данного графа матрицы R, Q и S имеют вид:

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
S = R * Q = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

В соответствии с матрицей S сильные компоненты графа: x_1, x_2, x_6,x_7 –первая сильная компонента; x_3, x_4, x_5 - вторая сильная компонента.

Задачи и упражнения по математической логике

1. Упростить следующие ПФ, используя равносильные преобразования:

а) $(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \to (Z \to X)$,

б) $(Y \to X) \wedge Y \vee \overline{(\overline{X} \wedge \overline{Y})}$,

в) $\overline{X} \vee X \wedge Z \vee \overline{X} \wedge Z \vee X \wedge Y$,

г) $(\overline{(\overline{X} \to \overline{Y})} \to X) \wedge (X \to \overline{(\overline{X} \to \overline{Y})})$,

д) $\overline{X} \wedge Y \wedge Z \vee \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee Y \wedge Z$,

е) $\overline{(X \wedge Y \wedge Z)} \to \overline{(X \wedge Z)}$.

2. Составить таблицы истинности следующих ПФ и определить их тип:

а) $X \to (\overline{X} \to Y)$,

б) $(X \to (Y \to Z)) \to (Y \to (X \to Z))$,

в) $X \wedge Y \vee \overline{X} \leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y}$, г) $\overline{(X \to Y)} \to (X \to Y)$,

д) $(\overline{X} \to Y) \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y}$.

3. Доказать равносильность

а) $(\overline{\overline{X} \to \overline{Y}}) \leftrightarrow X \equiv (X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{X}$,

б) $(\overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}) \vee (\overline{X \to Y}) \equiv (X \vee Y) \wedge X$,

в) $(Y \to X \vee Z) \wedge (\overline{X \vee Y}) \vee (X \to Z) \to X \wedge Y \wedge \overline{Z} \equiv X \wedge \overline{Z}$.

4. Определить конъюнктивное разложение по переменной X следующих ПФ:

а) $X \to (\overline{X} \to Y)$,

б) $X \to Y \vee Z$,

в) $(X \to \overline{Y}) \wedge Y \to \overline{X}$.

5. Определить дизъюнктивное разложение по переменной Y следующих ПФ:

а) $\overline{(X \to Y)} \to (X \to Y)$,

б) $(\overline{X} \to Y) \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y}$,

в) $(X \wedge \overline{Z} \to \overline{Y}) \leftrightarrow X$.

6. Привести к нормальным и совершенным нормальным формам следующие ПФ:

а) $X \to Y \wedge \overline{Z}$,

б) $(X \vee \overline{Y}) \to X$,

в) $X \wedge Y \vee \overline{X} \leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y}$.

7. Запишите символически следующие суждения:

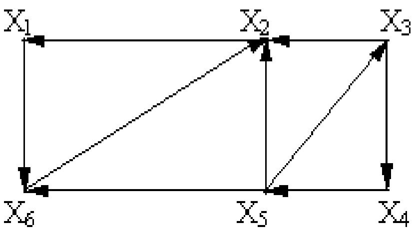
а) «вертолет является средством передвижения по воздуху, имеет двигатель, пилотскую кабину, систему управления, несущий винт, помещение для пассажиров или грузов»;

б) «подготовка специалистов высокой квалификации возможна лишь на базе всемерного развития вузовской науки, усиления связи вузовской, академической и отраслевой науки, обеспечения единства научной и учебной работы, широкого привлечения студентов к научным исследованиям»;

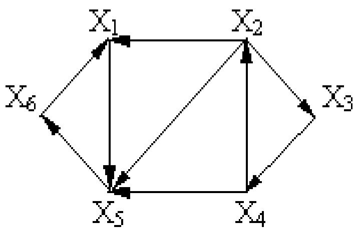
в) «если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я опоздаю на работу; если я опоздаю на работу и стану огорчаться, то я не попадусь на глаза моему начальнику; если я не сделаю в срок важную работу, то я начну огорчаться и попадусь на глаза моему начальнику. Следовательно, если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я сделаю в срок важную работу».

Задачи для самостоятельного решения

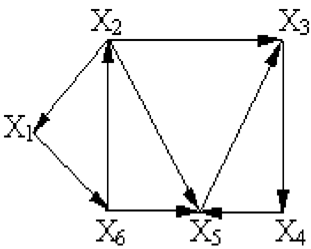
Определить сильные компоненты графов. изображенных на рис. 4.3.



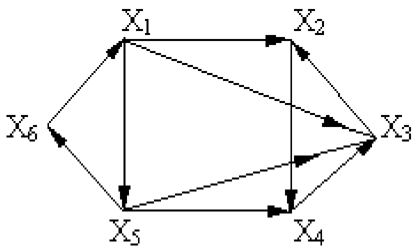
а



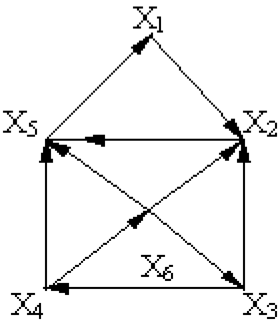
б



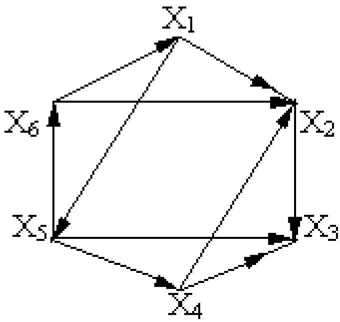
в



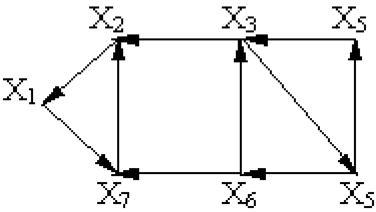
г



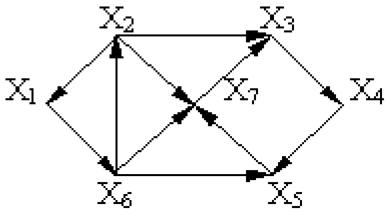
д



е



ж



з

Рис. 4.3

1. Доказать, что в неорграфе число вершин с нечетной степенью четно.

2. Построить граф (если он существует) с последовательностью степеней а) (4,3,3,2,2); б) (5,4,2,2,1) .

3. Найти матрицы достижимости и контрдостижимости для графов G_1 ,G_2, G_4, изображенных на рис. 4.4.

4. Доказать, что если G – несвязный граф, то $\overline{G}$ – связный.

5. Доказать, что в любом графе каждая его база содержит все вершины, имеющие нулевые полустепени захода.

6. Для графов, изображенных на рис. 4.5, найти сильнее компоненты, построить конденсацию, найти базы и антибазы.

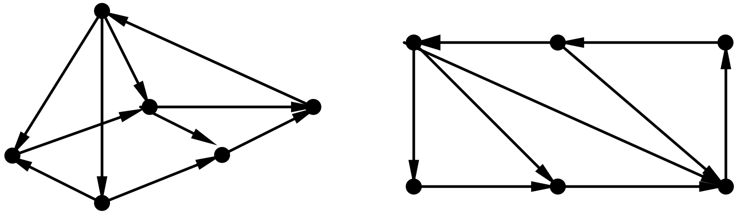


Рис. 4.4

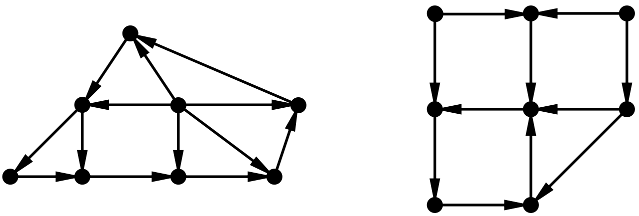


Рис. 4.5

7. Доказать, что хроматическое число каждого n-вершинного дерева ($n \geq 2$) равно 2.

8. Построить остовы для графов, изображенных на рис. 4.6.

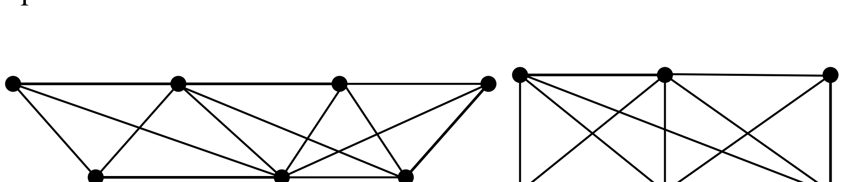


Рис. 4.6

9. Существует ли эйлеров цикл в графах, изображенных на рис. 4.7 ?

Рис. 4.7

10. Определить, какие из графов трех правильных многогранников имеют эйлеровы циклы.

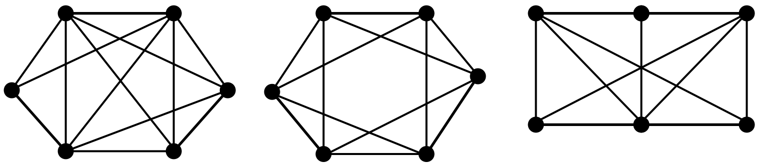


Рис. 4.8

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам самостоятельно изучать теоретические вопросы вышеуказанных тем курса математики, а также предоставят студентам широкие возможности для самостоятельного изучения и практической части .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Емеличев В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников. М.: Наука, 1990. – 384 с.

2. Собенина О.В. Дискретная математика: учеб. пособие / О.В. Собенина. Воронеж: ВГТУ, 2012. – 200 с.

3. Судоплатов С.В. Элементы дискретной математики: учебник / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. М.: ИНФРА-М, 2002. – 280 с.

4. Белецкая С.Ю. Решение задач теории графов: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «дискретная математика» для студентов по направлениям подготовки бакалавров 230100.62 «информатика и вычислительная техника», 230400.62 «информационные системы и технологии» очной формы обучения / С.Ю. Белецкая. Воронеж: ВГТУ, 2012. – 33 с.

5. Леденева Т.М. Специальные главы математики. Дискретная математика: учеб. пособие / Т.М. Леденева. Воронеж: ВГТУ, 1997. – 130 с.

6. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах / В.В. Тишин. СПб.: БХВ-Петербург. 2008. – 352 с.

7. Гаврилов Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. – 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.

8. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. СП.: Лань, 2005. - 400 с.

9. Булгакова И.Н. Дискретная математика. Элементы теории. Задачи и упражнения. Часть 2: учеб. пособие / И.Н. Булгакова, Г.Ф. Федотенко. Воронеж: ВГУ, 2004. – 61 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400 «Управление и информатика в технических системах», 221000 «Мехатроника и робототехника», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110800 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 2

Составители: Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Федотенко Галина Федоровна

В авторской редакции

Подписано к изданию 31.10. 2014.
Уч.-изд. л. 3,0. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14