Воронежский государственный технический университет

А.А. Катрахова   В.С. Купцов

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2006

УДК 517.53

Катрахова А.А., Купцов В.С. Кратные интегралы. Векторный анализ: Учеб. пособие. Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т , 2006. 97 с.

Учебное пособие является руководством к решению практических задач и выполнению типовых расчетов по разделам «Кратные интегралы. Векторный анализ» в соответствии с программой курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов. Оно содержит подробные решения задач и краткое изложение теоретического материала по указанным разделам.

Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлениям инженерно-технических специальностей дисциплины «Математика».

Табл. 1. Ил. 38. Библиогр.: 8 назв.

Рецензенты: кафедра дифференциальных уравнений ВГУ (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. А.И. Шашкин); д-р физ.-мат. наук, проф. А.Г. Баскаков.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие содержит разбор и подробное решение типовых задач по разделам кратные, криволинейные и поверхностные интегралы и векторный анализ. Содержание пособия соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов, рассчитанной на 700 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

Каждому практическому занятию предшествует конспективное изложение основных сведений из теории, справочные данные и формулы, относящиеся к соответствующему разделу. После подробного разбора типовых задач различной степени трудности помещены задачи для самостоятельного решения, которые в нужных случаях снабжены указаниями и ответами. Некоторые задачи решены различными способами. Такое построение пособия предоставляет студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической части курса математики.

1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Вычисление двойного интеграла в декартовых прямоугольниках. Изменение порядка интегрирования.

а) Двойной интеграл по прямоугольной области

Если область *D,* на которую распространяется двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)\,ds = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \qquad (1.1)$$

прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и определяемыми уравнениями

$x = a, x = b, (a \le x \le b),\ y = c, y = d, (c \le y \le d),$ то двойной интеграл вычисляется по одной из формул:

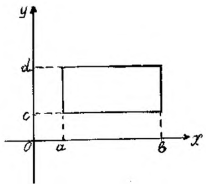


Рис. 1.1

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \qquad (1.2)$$

или

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dy \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \qquad (1.3)$$

Интегралы, стоящие в правых частях этих формул называются повторными или двухкратными.

В формуле (1.2) $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ называется внутренним и вычисляется в предположении, что переменная *y* сохраняет на отрезке *[a, b]* фиксированное постоянное значение. При этом подынтегральная функция *f(x, y)* является функцией только одной переменной *x*. В результате вычисления этого интеграла получится функция переменной *y*.

После того, как эта функция определена, надо выполнить внешнее интегрирование под переменной *y*. В результате этого вторичного интегрирования получится уже не функция, а число.

Если же для вычисления двойного интеграла применяется формула (1.3), то порядок интегрирования меняется. Первое (внутреннее) интегрирование ведется по переменной *y* в предположении, что переменная *a* на отрезке *[c, d]* сохраняет постоянное фиксированное значение, а повторное (внешнее) интегрирование по переменной *x*. В результате вычисления внутреннего интеграла $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ получится функция переменной *x*, а повторное интегрирование дает число.

Задача 1.1.

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (6xy^2 - 12x^2y)dxdy$ по области *D*, ограниченной: $x = 0;\ x = 1;\ y = 2;\ y = 3.$

Решение. Область *D* представляет собой квадрат со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 1.2). Произведем вычисление этого интеграла сначала по формуле 1.2.

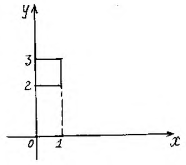


Рис.1.2

Получим:

$$I = \iint\limits_Д (6xy^2 - 12x^2y)dxdy = \int_2^3 dy \int_0^1 (6xy^2 - 12x^2y)dx =$$

$$= \int_2^3 dy\left[3x^2y^2 - 4x^3y\right]\Big|_0^1 = \int_2^3 (3y^2 - 4y)\,dy = \left(y^3 - 2y^2\right)\Big|_2^3 = 9\,.$$

Изменим порядок интегрирования, т.е. и вычислим внутренний интеграл по *y*, а внешний по *x*, по формуле 1.3.

Получим:

$$I = \int_0^1 dx \int_2^3 (6xy^2 - 12x^2y)dy = \int_0^1 dx\left(2xy^3 - 6x^2y^2\right)\Big|_2^3 =$$

$$= \int_0^1 \left(54x - 54x^2 - 16x + 24x^2\right)dx = \int_0^1 \left(38x - 30x^2\right)dx =$$

$$= \left(19x^2 - 10x^3\right)\Big|_0^1 = 9\,.$$

Ответ: $I = 9.$

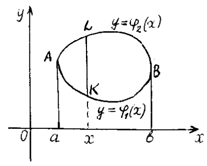
Поскольку подынтегральная функция непрерывна, то результаты вычислений совпали, они не зависят от порядка интегрирования.

б) Двойной интеграл по произвольной плоской фигуре

Если область интегрирования *D* ограничена кривой, которую каждая прямая, параллельная оси *OY*, пересекает не более чем в двух точках рис. 1.3, то двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dxdy \qquad (1.4)$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ непрерывны, обозначены и сохраняют аналитическое выражение.



Интеграл в правой части этой формулы также называется повторным или двухкратным.

Если область *D* ограничена кривой, которую любая прямая, параллельная оси *OX*, пересекает не более, чем в двух точках (рис. 1.4), то двойной интеграл, распространенный на эту область, может быть вычислен по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\,. \qquad (1.5)$$

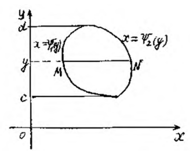


Рис. 1.4

Причем предполагается, что функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ на отрезке $[c,\ d]$ однозначны, непрерывны и сохраняют аналитическое выражение.

Следует обратить внимание на то, что во внешнем интеграле в обоих случаях пределы интегрирования величины постоянные и в результате вычисления двойного интеграла получится постоянная величина.

Если подынтегральная функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то значение повторного интеграла, распространенного на эту область, не зависит от порядка интегрирования по различным аргументам.

Свойства определенных интегралов распространяются и на двойные интегралы. В формулах (1.4) и (1.5) для вычисления двойного интеграла предполагалось, кривая, ограничивающая область интегрирования D, пересекается всякой прямой, параллельной одной из координатных осей, не больше, чем в двух точках. Если это условие не выполнено, то область D следует разбить на части так, чтобы в каждой из частей это условие выполнялось.

Задача 1.2.

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^3+y^3\right)dxdy$, если область D ограничена линиями $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $x = 4$. Вычислить этот же интервал, изменив порядок интегрирования.

Решение. Представим на чертеже область D (рис. 1.5). Воспользуемся формулой (1.4).

Получим:

$$I = \iint\limits_D \left(x^3+y^3\right)dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x}\left(x^3+y^3\right)dy$$

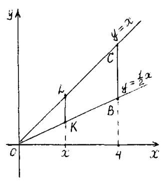


Рис. 1.5

Чтобы получить пределы интегрирования в повторном интеграле спроектируем область D на ось OX, получим отрезок $[0, 4]$, таким образом, нижний предел изменяется переменной x равен 0, а верхний 4 во внешнем интеграле. Затем на отрезке $[0, 4]$ оси OX выбирается произвольная точка X, через которую проводится прямая, параллельная оси OY.

Область D ограничена силу прямой $y = \frac{1}{2}x$, а сверху – прямой $y = x$ (Уравнения линий, ограничивающих область D, должны быть разрешены относительно той переменной, по которой вычисляется внутренний интеграл).

Вычисление следует начинать с внутреннего интеграла:

$$\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x}\left(x^3+y^3\right)dy = \left(x^3 \cdot y + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}x}^{x} =$$

$$x^3\left(x - \frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4}\left(x^4 - \frac{1}{16}x^4\right) = \frac{47}{64}x^4.$$

Получилась функция переменной x. Вычислим теперь интеграл:

$$\int\limits_0^4 \frac{47}{64}x^4 dx = \frac{47}{64} \cdot \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^4 = \frac{752}{5}.$$

Вычислим теперь тот же интеграл, измерив порядок интегрирования: внутреннее интегрирование произведем по переменной x, а внешнее – по y.

Из чертежа (рис. 1.6) видно, что левая часть контура области D одна линия $x = y$, а правая состоит из двух линий, определяемых разными уравнениями: уравнение OB $y = \frac{1}{2}x$, а уравнение BC $x = 4$. В этом случае область D следует разбить на части так, чтобы из них справа ограничивалась линией, определяемой одним аналитическим выражением. Такими частями будут области D_1, ограниченная контуром OAB и область D_2, ограниченная контуром ACB. Область $D = D_1 \cup D_2$. По этому по свойству аддитивности двойного интеграла, получим

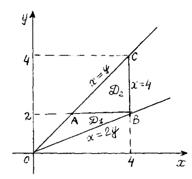


Рис. 1.6

$$\iint_D \left(x^3+y^3\right) dxdy = \iint_{D_1} \left(x^3+y^3\right) dxdy + \iint_{D_2} \left(x^3+y^3\right) dxdy .$$

Так как теперь внутренние интегралы будут вычисляться по переменной x, то уравнения линий, ограничивающих каждую из областей D_1 и D_2 должны быть решены относительно переменной x.

Область D_1 ограничена прямыми $x = y$, $x = 2y$, $y = 2$.

Область D_2 ограничена прямыми $x = y$, $x = 4$, $y = 2$.

Точка B имеет координаты $(4; 2)$. Спроектировав каждую из областей интегрирования D_1 и D_2 на ось OY получим пределы интегрирования внешних интегралов: в первом интеграле от 0 до 2, во втором от 2 до 4. Обозначим:

$$I_1 = \iint_D \left(x^3+y^3\right) dxdy, \quad I_2 = \iint_{D_2} \left(x^3+y^3\right) dxdy .$$

Получим:

$$I_1 = \int_0^2 dy \int_y^{2y} \left(x^3+y^3\right) dx = \int_0^2 dy \left(\frac{x^4}{4} + y^3 x\right)\Bigg|_y^{2y} =$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{4}\left(16y^4 - y^4\right) + y^3(2y-y)\right] dy = \int_0^2 \frac{19}{4} y^4 dy = \frac{19}{20} y^5 \Bigg|_0^2 = \frac{152}{5} .$$

$$I_2 = \int_2^4 dy \int_y^4 \left(x^3+y^3\right) dx = \int_2^4 dy \left(\frac{x^4}{4} + y^3 x\right)\Bigg|_y^4 =$$

$$= \int_2^4 \left[\frac{1}{4}\left(4^4 - y^4\right) + y^3(4-y)\right] dy = \int_2^4 \left(64 + 4y^3 - \frac{5}{4} y^4\right) dy =$$

$$= \left(64y + y^4 - \frac{1}{4} y^5\right)\Bigg|_2^4 = 120 .$$

Искомый интеграл равен сумме:

$$I_1 + I_2 = \frac{152}{5} + 120 = \frac{752}{5} = 150\frac{2}{5} .$$

Ответ: $I = 150\dfrac{2}{5}$.

Результаты вычислений совпали, поскольку подынтегральная функция $x^3 + y^3$ непрерывна в области D, но выбрав рационально порядок интегрирования можно сократить вычисления. В данной задаче более рационально в повторном интеграле производить внутреннее интегрирование по y, а внешнее по x.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+y) dxdy$.

Область D ограничена линиями $x = 0$, $y = \dfrac{3}{2}x\ (x \geq 0)$, $y = 4 - (x-1)^2$.

Этот же интеграл вычислить, изменив порядок интегрирования.

Указание. При вычислении внутреннего интеграла по y, а внешнего по x (см. рис. 1.7) получим

$$I = \int_0^2 dx \int_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} (x+y)\, dy = \frac{208}{15} .$$

При вычислении внутреннего интеграла по x, а внешнего по y область надо разбить на две части OAC и ABC (см. рис. 1.7) и разрешить уравнение параболы $y = 4 - (x-1)^2$ относительно переменной x, получим $x = 1 \pm \sqrt{4-y}$, причем линия AB определяется уравнением $x = 1 \pm \sqrt{4-y}$, а линия BC уравнением $x = 1 \pm \sqrt{4-y}$.

После изменения порядка интегрирования получим:

$$I=\int_0^3 dy\int_0^{\frac{2}{3}y}(x+y)\,dx+\int_3^4 dy\int_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}}(x+y)\,dx\,.$$

Ответ: $\dfrac{208}{15}$.

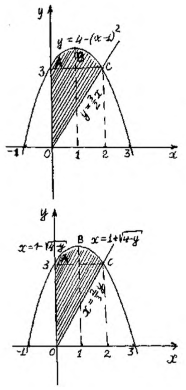


Рис. 1.7

Задача 1.6. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \dfrac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy$ по области D ограниченной прямыми: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Показать, что изменение порядка интегрирования приводит к различным результатам и объяснить причину этого.

Указание. а) С одной стороны $I=\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{x-y}{(x+y)^3}\,dy$.

Внутренний интеграл $\int_0^1 \dfrac{x-y}{(x+y)^3}\,dy=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Ответ: $I=\dfrac{1}{2}$.

б) С другой стороны $I=\int_0^1 dy\int_0^1 \dfrac{x-y}{(x+y)^3}\,dx$.

Внутренний интеграл $\int_0^1 \dfrac{x-y}{(x+y)^3}\,dx=\dfrac{1}{(1+y)^2}$.

Ответ: $I=-\dfrac{1}{2}$.

Различные результаты вычислений объясняются тем, что в точке $(0, 0)$ подынтегральная функция не является непрерывной.

Задача 1.7. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dxdy$ по области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ и объяснить, почему ответ зависит от порядка интегрирования.

Ответ: а) $I=\dfrac{\pi}{4}$; б) $I=-\dfrac{\pi}{4}$.

1.2. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

В полярных координатах $dS = rdrd\varphi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где r – полярный радиус ($0 \le r < +\infty$), φ – полярный угол ($0 \le \varphi \le 2\pi$), а двойной интеграл:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS=\iint\limits_D f[r\cos\varphi,\ r\sin\varphi]\,rdrd\varphi\,. \qquad (1.6)$$

Область D должна быть отнесена к полярной системе координат (рис. 1.8).

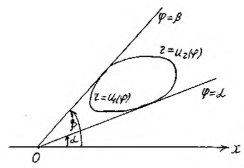


Рис. 1.8

Если она ограничена двумя лучами с уравнениями $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ и линиями, определяемыми уравнениями $r = u_1(\varphi)$ и $r = u_2(\varphi)$, где функции $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, однозначны и сохраняют аналитическое выражение, то двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле (1.6):

$$\iint_D F(r,\varphi)\, r\,dr\,d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{u_1(\varphi)}^{u_2(\varphi)} F(r,\varphi)\, r\,dr. \qquad (1.7)$$

Интеграл, стоящий в правой части этой формулы – повторный (иначе двукратный). Во внутреннем интеграле φ следует рассматривать как величину постоянную.

Задача 1.8. Вычислить $\iint_D r^2 \sin\varphi \; dr\,d\varphi$, где область D ограничена линиями $r = R$ и $r = 2R\sin\varphi$.

Решение. Область D ограничена окружностями радиуса R, одна из них с центром в начале координат $(r = R)$, а другая с центром в точке с координатами (O, R) на оси $OУ$ (рис. 1.9).

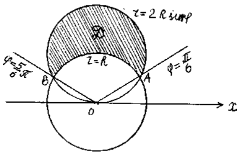


Рис. 1.9

Чтобы определить, как изменяется в области D полярный угол φ, проведем лучи из начала координат в точки A и B. Решая систему уравнений $\begin{cases} r = R \\ r = 2R\sin\varphi \end{cases}$, найдем значения угла φ, соответствующие лучам OA и OB.

Получим $2R\sin\varphi = R;\ \sin\varphi = \frac{1}{2},\ \varphi_1 = \frac{\pi}{6},\ \varphi_2 = \frac{5}{6}\pi$.

Таким образом, пределы изменения полярного угла φ в области D от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5}{6}\pi$.

Теперь найдем пределы изменения полярного радиуса в области D. Для этого под произвольным углу φ, взятым в промежутке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$ проведем из полюса O луч OP. В точке C

входа этого луча в область D $r = R$, а в точке P выхода из области $r = 2R\sin\varphi$, поэтому полярный радиус изменяется в области D R до $2R\sin\varphi$.

Поэтому $\iint_D r^2 \sin\varphi \; dr\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \sin\varphi \; d\varphi \int_R^{2R\sin\varphi} r^2 dr$.

(Мы вынесли $\sin\varphi$ за знак внутреннего интеграла, так как при вычислении внутреннего интеграла переменная φ сохраняет постоянное значение).

Внутренний интеграл равен

$$\int_R^{2R\sin\varphi} r^2 dr = \frac{r^3}{3}\Bigg|_R^{2R\sin\varphi} = \frac{1}{3}\left(8R^3\sin^3\varphi - R^3\right) = \frac{1}{3}R^3\left(\sin^3\varphi - 1\right)$$

Внешний интеграл равен

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{1}{3}R^3\left(8\sin^3\varphi - 1\right)\sin\varphi \; d\varphi = \frac{1}{3}R^3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(8\sin^4\varphi - \sin\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}R^3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\sin^4\varphi \; d\varphi - \frac{1}{3}R^3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\sin\varphi \; d\varphi = \frac{R^3}{12}\left(\pi + 3\sqrt{3}\right).$$

Указание. При вычислении $\int \sin^4\varphi \; d\varphi$ следует использовать тригонометрические формулы $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

Задача 1.9. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D r^3 dr d\varphi$, где область D ограничена полярной осью и кривой $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ $\left(\varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Кривая $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ – лемниската. В области D полярный угол изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

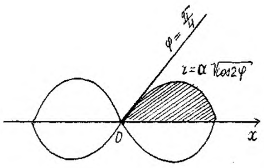


Рис. 1.10

Верхний предел изменения φ можно получать из уравнения лемнискаты, подставив $r = 0$, то есть $a^2\cos 2\varphi = 0;\ \cos 2\varphi = 0$, $2\varphi = \frac{\pi}{2},\ \varphi = \frac{\pi}{4}$.

(Учтено условие $\varphi \le \frac{\pi}{2}$). Нижний предел получается из условия, что область D ограничена полярной осью. Чтобы определить пределы изменения полярного радиуса области D, проведем луч из полюса O, пересекающий область D под произвольным углом φ $\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right)$. Он входит в область D в полюсе, то есть при $r = 0$, а выходит в точке на лемнискате, в котором $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Получим: $\iint\limits_D r^3 dr d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 dr$.

Внутренний интеграл равен

$$\int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 dr = \frac{2^4}{4}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{1}{4}a^4\cos^2 2\varphi .$$

Внешний интеграл равен

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}a^4\cos^2 2\varphi \; d\varphi = \frac{1}{4}a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}a^4\left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{32}\pi a^4 .$$

Ответ: $\frac{1}{32}\pi a^4$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.10.

В интеграле $I = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x\sqrt{x^2+y^2}\,dy$ перейти к полярным координатам.

Ответ: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sec\varphi} r^2 dr$.

1.3. Применение двойных интегралов для вычисления площадей и объемов

а) Вычисление площадей плоских фигур

Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \iint\limits_D dS ,$$

где dS - дифференциал площади.

Если фигура отнесена к прямоугольной системе координат, то предыдущая формула примет вид:

$$S = \iint\limits_D dxdy\,. \tag{1.8}$$

Если фигура отнесена к полярной системе координат, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \iint\limits_D r \cdot dr d\varphi\,. \tag{1.9}$$

Задача 1.11. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + (y-a)^2 = a^2$.

Решение.

Линии, ограничивающие область, это окружности с центрами в точках $(a, 0)$ и $(0, a)$ радиуса a.

Наличие в уравнении кривой выражения $x^2 + y^2$ указывает на целесообразность перехода к полярным координатам по формулам:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$.

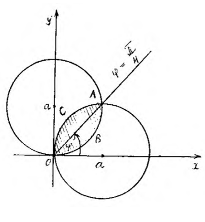


Рис. 1.11

Если раскрыть скобки, то уравнения окружностей запишутся в виде:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0;$$
$$x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

В полярных координатах они примут вид:

$$r = 2a\cos\varphi \tag{1.10}$$
$$r = 2a\sin\varphi \tag{1.11}$$

Луч OA делит искомую площадь на две части D_1 и D_2 (рис. 1.11). Решая совместно уравнения (1.9) и (1.10) получим, что точка A лежит на биссектрисе первого координатного угла. Уравнение луча OA: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Искомая площадь области $D = D_1 \cup D_2$ в силу свойства аддитивности двойного интеграла равна:

$$S = \iint\limits_{D_1} r dr d\varphi + \iint\limits_{D_2} r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r dr\,.$$

Вычислим отдельно внутренние интегралы:

$$\int_0^{2a\sin\varphi} r dr = \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{2a\sin\varphi} = 2a^2\sin^2\varphi\,;$$

$$\int_0^{2a\cos\varphi} r dr = \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{2a\cos\varphi} = 2a^2\cos^2\varphi\,.$$

Поэтому искомая площадь равна:

$$S = 2a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi\, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi\right) =$$

$$= 2a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi\right) =$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \text{ кв. ед.}$$

Замечание. Так как из рис. 1.11 видно, что искомая площадь области D состоит из двух равных между собой по площади областей D_1 и D_2, то $S = 2\iint\limits_{D_1} r dr\, d\varphi$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.12. Найти площадь, ограниченную линиями $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ и $x^2 + y^2 - ax = 0$.

Указание. Уравнение линий преобразовать к полярным координатам. Получим

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi} r\,dr .$$

Ответ: $S = \frac{3}{4}\pi a^2$ *кв. ед.*

Задача 1.13. Найти площадь, ограниченную линиями: $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$ и $x = 0$.

Указание. Перейти к полярным координатам, получим

$$S = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{R}^{2R\sin\varphi} r\,dr .$$

Ответ: $S = \frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *кв. ед.*

б) Вычисление объемов тел

Двойной интеграл $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ равен объему цилиндрического тела, ограниченного с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси OZ. Направляющей служит контур z, ограничивающий область интегрирования D, лежащую в плоскости XOY и являющуюся нижним основанием этого цилиндрического тела. Сверху тело ограничено поверхностью, определяемой уравнением $z = f(x, y)$ (рис. 1.12). Таким образом, объем такого цилиндрического тела равен

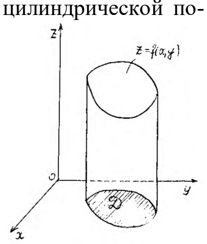


Рис. 1.12

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy . \qquad (1.12)$$

Если вычисления ведутся в полярных координатах, то предыдущая формула примет вид:

$$V = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi . \qquad (1.13)$$

Предполагается, что функция $z = f(x, y)$ непрерывна и однозначна в области D.

Задача 1.14. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$, $x + y - 3 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Первая поверхность представляет собой эллиптический параболоид с осью симметрии OZ. Он пересекает ось OZ в точке $(0, 0, 1)$ (рис. 1.13).

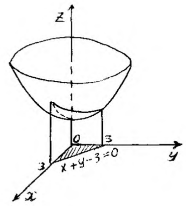


Рис. 1.13

Поверхность $x + y - 3 = 0$ – это плоскость, параллельная оси OZ, а остальные поверхности – это координатные плоскости. На плоскость XOY поверхность проектируется в треугольник D, ограниченный координатными осями и прямой $x + y - 3 = 0$. Сверху тело ограничено поверхностью $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$. Объем тела вычисляется по формуле (1.12).

$$V = \iint_D \left(4x^2 + 2y^2 + 1\right)dxdy = \int_0^3 dy \int_0^{3-y} \left(4x^2 + 2y^2 + 1\right)dx =$$

$$= \int_0^3 dy \left(\frac{4}{3}x^3 + 2x\cdot y^2 + x\right)\Bigg|_0^{3-y} = \int_0^3 \left[\frac{4}{3}(3-y)^3 + 2(3-y)y^2 + (3-y)\right]dy =$$

$$= \int_0^3 \left(39 - 37y + 18y^2 - \frac{10}{3}y^3\right)dy = \left(39y - \frac{37}{2}y^2 + 6y^3 - \frac{10}{12}y^4\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= 39\cdot 3 - \frac{37}{2}\cdot 9 + 6\cdot 27 - \frac{5}{6}\cdot 81 = 45 \text{ куб. ед.}$$

Ответ: $V = 45$ *куб. ед.*

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.15. Определить объем тела ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2$, $y = 5$, $y = 0$, $z = 0$.

Указание. В формулу (1.11) подставить z из уравнения поверхности, ограничивающей сверху это тело. Это параболический цилиндр с образующими, параллельными оси OY $z = 4 - x^2$.

Учесть симметрию тела относительно плоскости YOZ (рис. 1.14). Переходя к повторному интегралу, получим

$$V = 2\int_0^5 dy \int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx .$$

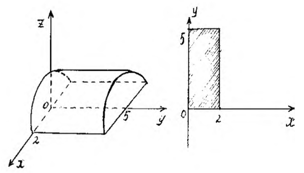


Рис. 1.14

Ответ: $V = 55\frac{1}{3}$ *куб. ед.*

Задача 1.16. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = a^2 - x^2$; $x + y = a$, $y = 2x$, $y = 0$.

Указание. Поверхность $z = a^2 - x^2$ – параболический цилиндр. Эта поверхность ограничивает тело сверху. Проекция тела на плоскость XOY представляет собой треугольник (рис. 1.15). По формуле (1.11) получим

$$V = \int_0^{\frac{2}{3}a} dy \int_{\frac{y}{2}}^{a-y} \left(a^2 - x^2\right) dx$$

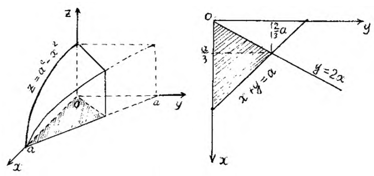


Рис. 1.15

Ответ: $V = \frac{41}{162}a^4$ *куб. ед.*

Задача 1.17. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + a^2z = a^2$; $z = 0$.

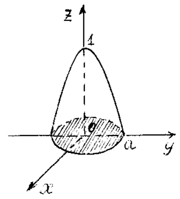


Рис. 1.16

Указание. Поверхность представляет собой параболоид вращения. Наличие слагаемого $x^2 + y^2$ в уравнении поверхности указывает на то, что удобно перейти к полярным координатам. Область интегрирования – это круг радиуса a (рис. 1.16). Уравнение поверхности параболоида в полярных координатах имеет вид

$$r^2 + a^2z = a^2; \quad z = \frac{1}{a^2}\left(a^2 - r^2\right)$$

$$V = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(a^2 - r^2\right) r dr .$$

Ответ: $V = \frac{1}{2}\pi a^2$ *куб. ед.*

Задача 1.18. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $2x + y - 2 = 0$; $4x + 3y - 2z = 0$ и координатными плоскостями.

Ответ: $V = \frac{5}{3}$ *куб. ед.*

в) Вычисление площади поверхности

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то плоскость той части поверхности, которая проектируется на плоскость XOY в область D_{XOY} вычисляется по формуле

$$S = \iint_{D_{XOY}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy . \qquad (1.14)$$

Предполагается, что функция $z = f(x, y)$ непрерывна и однозначна в области D и имеет в этой области непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Иногда выгодно проектировать поверхность, площадь которой вычисляется, не на плоскость XOY, а на плоскость YOZ, тогда уравнение поверхности следует решить относительно переменной $x = x(y, z)$.

Получим формулу:

$$S = \iint\limits_{Dyoz} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dydz\,. \qquad (1.15)$$

Если поверхность, площадь которой вычисляется, проектируется на плоскость XOZ, тогда уравнение поверхности следует решить относительно переменной $y = y(x, z)$.

Получим формулу:

$$S = \iint\limits_{Dyoz} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz\,. \qquad (1.16)$$

Задача 1.19. Вычислить площадь той части поверхности $y = x^2 + z^2$, которая находится в первом октанте и ограничена плоскостью $y = 2$.

Решение. Поверхность, площадь которой требуется вычислить, часть параболоида вращения (ось вращения $OУ$) находящаяся в первом октанте, и ограничена плоскостью $y = 2$, перпендикулярной к оси $OУ$.

Спроектируем вычисляемую поверхность на плоскость XOZ. Тогда получим четверть круга, ограниченного окружностью (рис.1.17), уравнение которой получим, исключая y, из двух уравнений:

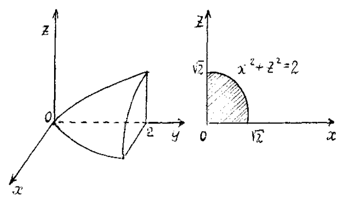


Рис. 1.17

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Уравнение этой окружности: $x^2 + z^2 = 2$; $y = 0$.

Так как мы проектировали поверхность на плоскость XOZ,то ее уравнение должно быть решено относительно переменной y и следует воспользоваться формулой (1.15).

Из условия задачи $y = x^2 + z^2$; $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial y}{\partial z} = 2z$.

Получим формулу:

$S = \iint\limits_{Dxoz} \sqrt{1 + 4\left(x^2 + z^2\right)}\, dxdz$, где область интегрирования четверть круга радиуса $\sqrt{2}$.

Наличие под корнем выражения $x^2 + z^2$ указывает на то, что целесообразно ввести полярные координаты, учитывая, сто в этих координатах $x^2 + z^2 = r^2$. Полярный угол изменяется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а полярный радиус от 0 до $\sqrt{2}$. Получим:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{8}\left(1+4r^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+4r^2\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,\frac{\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(1+8)^{\frac{3}{2}}-1\right]d\varphi=$$

$$=\frac{13}{6}\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{13}{12}\pi\ \text{кв. ед.}$$

Ответ: $S=\frac{13}{12}\pi$ *кв. ед.*

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.20. Найти площадь поверхности, вырезанную цилиндром $x^2+y^2=1$, из сферы $x^2+y^2+z^2=4$.

Указание. Спроектировать вычисляемую поверхность на плоскость *XOУ* (рис. 1.18). Вычислить $\frac{1}{8}$ часть искомой площади находящейся в первом октанте. Проекцией будет четверть круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=1$.

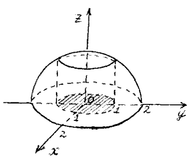


Рис. 1.18

Уравнение сферы решить относительно переменной *z*. Получится $z=\sqrt{4-\left(x^2+y^2\right)}$.

Воспользуемся формулой (1.14). После перехода к полярным координатам получим:

$$\frac{S}{8}=\iint_{Dxoy}\frac{2rdrd\varphi}{\sqrt{4-2^2}}$$

Ответ: $S=8\pi\left(2-\sqrt{3}\right)$ *кв. ед.*

Задача 1.21. Найти площадь поверхности, ограниченной конусом $z^2=x^2+y^2$ и плоскостью $z=2$.

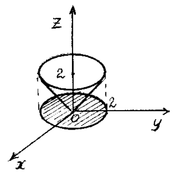


Рис. 1.19

Указание. Спроектировать поверхность на плоскость *XOУ*.

Проекцией является круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=4$ (рис. 1.19).

Уравнение поверхности решить относительно переменной *z* получим $z=\sqrt{x^2+y^2}$ Воспользоваться формулой (1.13). Перейти к полярным координатам.

Ответ: $S=4\pi\sqrt{2}$ *кв.ед.*

Задача 1.22. Вычислить площадь поверхности шара радиуса *a*

Ответ*:* $S=4\pi a^2$ *кв. ед.*

2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Вычисление тройного интеграла в декартовых прямоугольных координатах

В прямоугольных координатах элемент объема *dV* вычисляется по формуле: $dV=dxdydz$.

Тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ трех независимых переменных, в области *V* (рис. 2.1) имеет вид:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV=\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

и вычисляется по формуле:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (2.1)$$

Под областью *V*, на которую распространен тройной интеграл, понимается пространственная область, ограниченная снизу и сверху поверхностями, определяемыми уравнениями $z=\varphi_1(x,y)$ и $z=\varphi_2(x,y)$ $(\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y))$, а с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными от *OZ*.

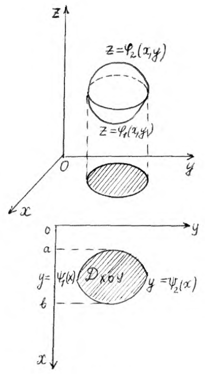


Рис. 2.1

Переменные, *X* и *У* изменяются в плоской области D_{xoy}, которая является проекцией на плоскость *XOУ*, пространственной области *V*.

Область D_{xoy} ограниченна непрерывными кривыми, определяемыми уравнениями $y=\psi_1(x)$ и $y=\psi_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = в$

$(a < в,\ \psi_1(x) \le \psi_2(x))$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится к трем последовательным интегралам по формуле (2.1). При, вычислении внутреннего интеграла $\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ переменные *X* и *У* следует рассматривать как постоянные. В результате получится функция двух независимых переменных *X* и *У*.

Таким образом, мы сведем вычисление тройного интеграла к двойному интегралу, с вычислением которого мы уже знакомы.

Отметим, что порядок интегрирования может быть изменен, но при этом пределы интегрирования во внешнем интеграле всегда величины постоянные.

Задача 2.1. Вычислить интеграл: $I = \iiint\limits_V x dxdydz$,

где *V* – тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $2x + 2y + z - 6 = 0$.

Решение. Тетраэдр, ограниченный снизу плоскостью $z = 0$, сверху плоскостью $z = 6 - 2x - 2y$. Поэтому в области интегрирования *V* переменная *z* изменяется от $z = 0$, до $z = 6 - 2x - 2y$ (рис. 2.2).

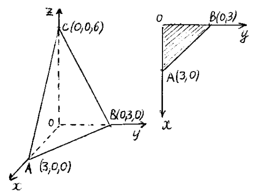


Рис. 2.2

Проекцией области *V* на плоскость *XOУ* является треугольник *OAB*.

Уравнение прямой *AB* получим, решая совместно уравнения плоскостей:

$$\begin{cases} z = 6 - 2x - 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

Отсюда, уравнение прямой *AB* имеет вид: $x + y - 3 = 0$.

В области D_{xoy} переменная *x* изменяется в пределах $0 \le x \le 3$, а переменная *y* изменяется $0 \le y \le 3 - x$.

Поэтому:

$$I = \iiint\limits_V x dxdydz = \int\limits_0^3 x dx \int\limits_0^{3-x} dy \int\limits_0^{6-2x-2y} dz.$$

Вычислим внутренний интеграл в тройном интеграле

$$\int\limits_0^{6-2x-2y} dz = z \Big|_0^{6-2x-2y} = 6 - 2x - 2y.$$

Следовательно:

$$I=\int_0^3 x\,dx\int_0^{3-x}(6-2x-2y)\,dy.$$

Вычислим внутренний интеграл в двойном интеграле:

$$\int_0^{3-x}(6-2x-2y)\,dy=\left(6y-2xy-y^2\right)\Big|_0^{3-x}=6(3-x)-(3-x)^2=$$
$$=9-6x+x^2.$$

Получим

$$I=\int_0^3 x\left(9-6x+x^2\right)dx=\left(\frac{9}{2}x^2-6\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^3=\frac{27}{4}.$$

Ответ: $I=\frac{27}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.2. Вычислить тройной интеграл:

$$I=\iiint_V x\cdot y\cdot z\cdot dxdydz,$$

где V – тело, ограниченное поверхностями $y=x^2$; $x=y^2$; $z=xy$; $z=0$.

Указание:

$$I=\int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy\int_0^{xy} z\,dz.$$

Ответ: $I=\frac{1}{96}$.

Задача 2.3. Вычислить тройной интеграл:

$$I=\iiint_V x\cdot y\cdot z\cdot dxdydz,$$

где V – пирамида, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Ответ: $I=\frac{1}{720}$.

Задача 2.4. Вычислить тройной интеграл:

$$I=\iiint_V z^2\,dxdydz,$$

где V – тело, ограниченное параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=1$.

Указание:

Проекцией поверхности V не плоскость XOY D_{xoy} является круг. Уравнение окружности, ограничивающей этот круг $x^2+y^2=1$ (рис. 2.3). В области интегрирования переменная изменяется в пределах $x^2+y^2\le z\le 1$.

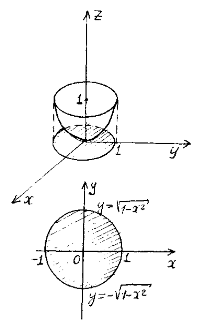


Рис. 2.3

В области D_{xoy} переменная y изменяется от ее значения $y=-\sqrt{1-x^2}$ на нижней части окружности до значения $y=\sqrt{1-x^2}$ на верхней части этой же окружности.

Переменная x изменяется в пределах $-1\le x\le 1$.

По формуле (2.1) получим:

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^{1}z^2\,dz.$$

Ответ: $I=\frac{\pi}{4}$.

2.2. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

а) Цилиндрические координаты

В цилиндрических координатах положение точки M в пространстве определяется следующим образов:

Точка M проектируется на плоскость XOY и определяются полярные координаты ρ и φ ее проекции.

Третьей цилиндрической координатой является расстояние точки M от плоскости XOY, т.е. ее аппликата z (рис. 2.4). Область изменения цилиндрических координат определяется неравенствами:

$$z > 0,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty .$$

Формулы, обязывающие прямоугольные координаты и цилиндрические координаты точки имеют вид:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z \qquad (2.2)$$

В цилиндрических координатах элемент объема:

$$dV = \rho\, dz\, d\varphi\, dz \qquad (2.3)$$

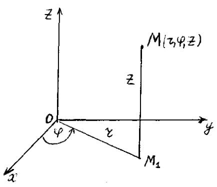


Рис. 2.4

Для того, чтобы тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ преобразовать к цилиндрическим координатам, надо x, y и z в подынтегральной функции заменить по формулам (2.2), а элемент объема $dxdydz$ по формуле (2.3). После этого тройной интеграл вычислить тремя последовательными интегрированиями.

б) Сферические координаты

В сферических координатах положение точки M в пространстве, определяется тремя числами ρ, φ, θ,

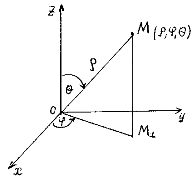


Рис. 2.5

где ρ - расстояние точки M от начала координат $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $(\rho \ge 0)$. Точка M проектируется на плоскость XOY в точку M_1. Угол φ, составленный OM_1 и осью OX является второй сферической координатой точки M. Он отсчитывается от оси OX против часовой стрелки может изменяться от 0 до 2π.

Третьей сферической координатой является угол θ между осью OZ и OM $(0 \le \theta \le \pi)$.

Формулы, связывающие прямоугольные координаты точки и ее сферические координаты имеют вид:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi \qquad (2.4)$$
$$z = \rho\cos\theta$$

В сферических координатах элемент объема:

$$dV = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi . \qquad (2.5)$$

Для того, чтобы тройной интеграл преобразовать к сферическим координатам надо x, y и z заменить в подынтегральной функции по формулам (2.4), а элемент объема $dxdydz$ по формуле (2.5). После того вычислить его тремя последовательными интегралами (порядок интегрирования безразличен). Заметим, что переход к сферическим координатам особенно удобен в том случае, когда областью интегрирования является шар (или часть шара) или подынтегральная функция содержит в себе выражение вида $x^2 + y^2 + z^2$, так как в сферических координатах $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

2.3. Применение тройных интегралов в геометрии и механике

а) Вычисление объема тела

Объем тела, ограниченного областью *V*, в прямоугольных координатах вычисляется по формуле:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz\,. \qquad (2.6)$$

В цилиндрических координатах объем тела:

$$V=\iiint\limits_V r\,dr\,d\varphi\,dz\,. \qquad (2.7)$$

В сферических координатах объем тела:

$$V=\iiint\limits_V r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\,. \qquad (2.8)$$

Задача 2.5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2-2z=0$ и $x^2+y^2=2-z$.

Решение. Первая поверхность сфера. Преобразуем уравнение сферы к виду $x^2+y^2+(z-1)^2=1$. Откуда видно, что центр сферы находится на оси *OZ* в точке $(0, 0, 1)$, а ее радиус равен 1. Вторая поверхность – параболоид вращения (рис. 2.6).

Найдем уравнение линии, по которой пересекаются эти поверхности. Этой линией является окружность. Определим, на какой высоте над плоскостью *XOY* расположена эта линия.

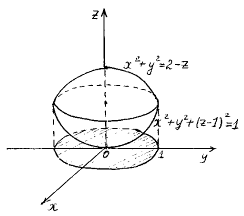


Рис. 2.6

Для этого из второго уравнения подставим значение $x^2+y^2=2-z$ в первое уравнение, получим $(2-z)^2+z^2-2z=0$ или $z^2-3z+2=0$.

Решая его получим $z_1=1$, $z_2=2$. Точка, в которой $z=2$ – это вершина параболоида, поэтому линия пересечения поверхностей находится на высоте $z=1$

над плоскостью *XOY*. Уравнение этой линии получим, подставляя $z=1$ в уравнение любой из этих поверхностей.

Оно имеет вид $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$.

Это окружность, она проектируется на плоскость *XOY* в окружность $x^2+y^2=1$, а все тело проектируется в круг D_{XOY}, ограниченный этой окружностью.

По формуле (2.6) объем тела равен $V=\iiint\limits_V dxdydz$.

Внутреннее интегрирование проведем по переменной *z*. Определим пределы изменения переменной в области интегрирования: из уравнения сферы получим на нижней полусфере $z=1-\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}$, а из уравнения параболоида $z=2-(x^2+y^2)$. Таким образом, в области интегрирования $1-\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}\le z\le 2-\left(x^2+y^2\right)$.

Поскольку под знаком интеграла имеется выражение x^2+y^2, а область интегрирования круг, удобно перейти к полярным координатам, в которых $x^2+y^2=r^2$, а элемент площади $dxdy=rdrd\varphi$.

Так как в круге D_{XOY} $0\le z\le 1$, $0\le\varphi\le 2\pi$, то

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 rdr\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{2-r^2}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(2-r^2-1+\sqrt{1-r^2}\right)rdr=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(1-r^2+\sqrt{1-r^2}\right)rdr=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(r-r^3+r\sqrt{1-2^2}\right)dr=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{12}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{7}{12}\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{7}{6}\pi\,.$$

Ответ: $V=\frac{7}{6}\pi$ *куб. ед.*

Задача 2.6. Определить объем шара радиуса *R*.

Решение. Проведем вычисления в сферической системе координат. Поместим центр шара в начало координат. В прямоугольной системе координат уравнение поверхности шара (сферы) имеет вид:

$$x^2 + y^2 + r^2 = R^2.$$

Переходя к сферическим координатам получим уравнение поверхности шара $\rho^2 = R^2$ или $\rho = R$. Вычислим объем той части шара, которая находится в первом октанте по формуле:

$$\frac{V}{8} = \iiint\limits_V \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^R \rho^2 d\rho \ .$$

Внутренний интеграл $\int_0^R \rho^2 d\rho = \dfrac{R^3}{3}$.

Поэтому $\dfrac{V}{8} = \dfrac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta = \dfrac{\pi R^3}{6}$.

Окончательно объем шара радиуса R равен:

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ куб. ед.

Ответ: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ *куб. ед.*

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $4z = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

Указание.

Тело проектируется на плоскость *XOY* в круг, рис. 2.7 ограниченный окружностью, уравнение которой можно получить, выразив из второго уравнения $x^2 + y^2 = 12 - z^2$ и подставив это выражение в первое уравнение.

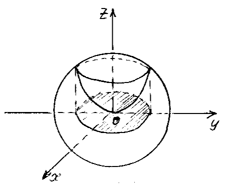


Рис. 2.7

Ответ: $V = \dfrac{8}{3}\pi(6\sqrt{3} - 5)$ *куб. ед.*

Задача 2.8. Найти объем тела, ограниченного сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ и $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$.

Указание.

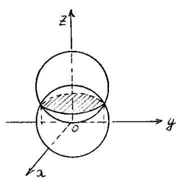


Рис. 2.8

Круг (рис. 2.8), в который проектируется тело на плоскость *XOY* ограничен линией $x^2 + y^2 = 12$.

При вычислении двойного интеграла по области D_{XOY} перейти к полярным координатам:

$0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le r \le 2\sqrt{3}$. Получим:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{3}} r dr \int_{4-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} dz \ .$$

Ответ: $V = \dfrac{80}{3}\pi$ *куб. ед.*

Задача 2.9.

Вычислить объем части шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, которая лежит внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$.

Указание. Перейти к цилиндрическим координатам в уравнениях поверхностей. Тогда:

$$V = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_0^{\sqrt{4R^2 - r^2}} dz \ .$$

Ответ: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3(8 - 3\sqrt{3})$ *куб. ед.*

Задача 2.10. Вычислить объем, ограниченный поверхностями $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = z$, $z = 0$.

Указание. Перейти к цилиндрическим координатам.

Ответ: $V = \dfrac{\pi R^3}{2}$ *куб. ед.*

б) Вычисление массы тела

Если дано некоторое тело с объемной плотностью $\gamma(x, y, z)$, представляющий собой непрерывную функцию, то масса m этого тела, равна тройному интегралу от функции плотности $\gamma(x, y, z)$, распространенному на объем V, занимаемый этим телом:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dxdydz. \qquad (2.9)$$

Задача 2.11. Вычислить массу тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 3z$, если плотность в каждой точке тела равна аппликате точки (т.е. $\gamma = z$) (см. рис. 2.7).

Решение.

В этой задаче удобно перейти к цилиндрическим координатам, так как в уравнении параболоида содержится сумма $x^2 + y^2$, а в цилиндрических координатах $x^2 + y^2 = r^2$.

Запишем уравнения поверхностей, ограничивающих тело, в цилиндрических координатах.

Уравнение сферы примет вид:

$$r^2 + z^2 = 4; \quad r^2 = 4 - z^2.$$

Уравнение параболоида: $r^2 = 3z$.

Из этих уравнений следует, что на параболоиде: $z = \dfrac{r^2}{3}$, а на сфере $z = \sqrt{4 - r^2}$.

Спроектируем это тело на плоскость XOY. Проекцией будет круг. Найдем радиус этого круга. Для этого определим, при каком значении z пересекаются поверхности, т.е. определим z из системы:

$$\begin{cases} r^2 = 4 - z^2 \\ r^2 = 3z \end{cases};$$

Получим $z^2 + 3z - 4 = 0$; $z_1 = 1$; $z_2 = -4$.

Смыслу задачи удовлетворяет только $z = 1$.

Подставим это значение в любое из уравнений системы, получим $r^2 = 3$, $r = \sqrt{3}$.

Итак, радиус круга, в который проектировалось тело равен $\sqrt{3}$; переменные r, φ, z в теле изменяются в пределах:

$$0 \le r \le \sqrt{3}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \frac{r^2}{3} \le z \le \sqrt{4 - r^2}.$$

Масса тела вычисляется по формуле (2.9), в которой элемент объема $dxdyxd = rdrd\varphi\, dz$.

Таким образом,

$$m = \iiint\limits_V z \cdot r \cdot drd\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} rdr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} zdz = \frac{13}{4}\pi.$$

Ответ: $m = \dfrac{13}{4}\pi$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.12. Вычислить массу тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, если в каждой точке тела плотность равна квадрату ее расстояния от начала координат.

Указание. Квадрат расстояния точки от начала координат равен сумме: $x^2 + y^2 + z^2$, координат этой точки, поэтому $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; и масса тела равна:

$$m = \iiint_V \gamma(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,$$

так как тело ограничено сферой, то удобно перейти к сферическим координатам, по формулам (2.4), (2.5).

Получим,

$$m = \iiint_V \rho^3 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta,$$

где $0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$.

Ответ: $m = \frac{4}{5}\pi$.

Задача 2.13. Вычислить массу пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, если плотность ее в текущей точке тела $M(x, y, z)$ равна $\gamma = x \cdot y \cdot z$.

Ответ: $m = \frac{1}{720}$.

Задача 2.14. Найти массу однородного тела (плотность в каждой его точке $\gamma = const$), ограниченного поверхностями

а) $z = 2 - x - y, \quad a^2 + y^2 = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0.$

Ответ: а) $V = \frac{3\pi - 4}{6}\gamma$, б) $V = \frac{32}{9}\gamma$.

3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Криволинейный интеграл первого рода, его вычисление, физический смысл и механические приложения

Пусть на плоскости XOY задана кривая AB, в каждой точке которой определена непрерывная функция $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y.

Рассмотрим криволинейный интеграл I рода (по длине дуги) от этой функции по кривой AB. Он обозначается $\int f(x,y)dl$, кривая AB называется кривой интегрирования, A – начальной, а B – конечной точками интегрирования. Из определения криволинейного интеграла первого рода следует, что он не зависит от направления кривой AB, т.е.:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{AB} f(x,y)dl.$$

Если AB – пространственная кривая, то криволинейным интегралом первого рода, распространенным на эту кривую называется интеграл вида:

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl,$$

где функция $f(x, y, z)$ – функция трех независимых переменных, которая определена и непрерывна в каждой точке кривой AB.

Масса m материальной кривой, имеющей плотность $\gamma(x, y, z)$ равна криволинейному интегралу первого рода от функции $\gamma(x, y, z)$ по пространственной кривой AB, т.е.:

$$m = \int_{AB} \gamma(x,y,z)dl. \qquad (3.1)$$

В этом состоит физический (механический) смысл криволинейного интеграла первого рода.

Если масса распределена непрерывно вдоль дуги плоской кривой AB с плотностью функции $\gamma = \gamma(x, y)$ в каждой точке кривой, то статические моменты M_x и M_y дуги относительно координатных осей OX и OY соответственно определяются по формулам:

$$M_x = \int_{AB} y\gamma(x,y)dl; \qquad M_y = \int_{AB} x\gamma(x,y)dl. \qquad (3.2)$$

Моменты инерции этой дуги относительно координатных осей OX и OY соответственно равны:

$$J_x = \int_{AB} y^2\gamma(x,y)dl; \qquad J_y = \int_{AB} x^2\gamma(x,y)dl. \qquad (3.3).$$

Координаты центра тяжести дуги AB вычисляются по формулам:

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\int\limits_{AB}x\cdot\gamma(x,y)dl}{\int\limits_{AB}\gamma(x,y)dl}; \tag{3.4}$$

$$y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\int\limits_{AB}y\cdot\gamma(x,y)dl}{\int\limits_{AB}\gamma(x,y)dl}. \tag{3.5}$$

Если кривая однородна, то плотность функции $\gamma(x, y) = const$, поэтому формулы (3.4) и (3.5) примут вид:

$$x_c=\frac{\int\limits_{AB}xdl}{\int\limits_{AB}dl} \qquad y_c=\frac{\int\limits_{AB}ydl}{\int\limits_{AB}dl}, \tag{3.6}$$

где $\int\limits_{AB}dl$ - длина дуги AB.

Если плоская гладкая кривая AB задана параметрическими уравнениями вида $x = x(t);$ $y = y(t)$, причем, существуют непрерывные производные x_t' и y_t' где параметр t применяется на дуги AB в пределах $\alpha\le t\le\beta$.

Тогда $dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$ и криволинейный интеграл выражается через определенный по формуле:

$$\int\limits_{AB}f(x,y)dl=\int\limits_{a}^{b}f[x(t),y(t)]\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt. \tag{3.7}$$

Если кривая AB задана уравнением $y = y(x);$ где $a\le x\le в$, то

$$\int\limits_{AB}f(x,y)dl=\int\limits_{a}^{b}f[x,y(x)]\sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\,dx. \tag{3.8};$$

Рассмотрим теперь случай пространственной гладкой кривой AB. Пусть ее параметрические уравнения имеют вид:

$x = x(t);$ $y = y(t);$ $z = z(t);$ причем существуют непрерывные производные $x_t',$ y_t' и z_t' Предположим, что параметр t изменяется в пределах $\alpha\le t\le\beta$.

Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_{AB}f(x,y,z)dl=\int\limits_{a}^{b}f[x(t),y(t),z(t)]\cdot\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt. \tag{3.9}$$

Криволинейный интеграл от функции $f(x, y)$ по дуге, заданной уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$, вычисляется с помощью формулы:

$$\int\limits_{AB}f(x,y)dl=\int\limits_{a}^{b}f[r\cos\varphi, r\sin\varphi]\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi. \tag{3.10}$$

Задача 3.1. Вычислить $\int\limits_{AB}x^2ydl$, где AB часть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащая в I четверти.

Решение. Выразим из уравнения окружности явно ординату y через абсциссу x, получим $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (в первой четверти $y\ge 0$).

Найдем $y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ и подставим в выражения

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx; \quad \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

По формуле (3.8) получим:

$$\int\limits_{AB}x^2ydl=\int\limits_{0}^{R}x^2\cdot\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=R\int\limits_{0}^{R}x^2dx=R\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^R=\frac{R^4}{3}.$$

Ответ: $\frac{R^4}{3}$.

Задача 3.2.

Найти центр тяжести полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в верхней полуплоскости, а также ее момент инерции относительно оси OX (плотность считать равной единице).

Решение. Центр тяжести дуги кривой определяется по формуле (3.6). Из соображений симметрии следует, что он находится на оси OY. Поэтому $x_c = 0$. $y_c = \dfrac{\int_{AB} y\,dl}{\int_{AB} dl}$, где $\int_{AB} dl = \pi R$, так как это длина полуокружности.

Для вычисления числителя дроби воспользуемся параметрическими уравнениями окружности:

$$x = R\cos t;$$
$$y = R\sin t.$$

Тогда $dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt = R\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = R\,dt$.

$$\int_{AB} y\,dl = \int_0^{\pi} R\sin t \cdot R\,dt = R^2\int_0^{\pi}\sin t\,dt = R^2(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 2R^2;$$

$$y_c = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}.$$

Ответ: $x_c = 0$, $y_c = \dfrac{2R}{\pi}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.3. Найти координаты центра тяжести одной арки циклоиды:

$$x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

(Считать плотность равной единице).

Указание. Воспользоваться формулами (3.6).

Учитывая симметрию, заключаем, что абсцисса центра тяжести $x_c = \pi a$.

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt = 2a\sin\frac{t}{2}\,dt\ ; \qquad \int_{AB} dl = 8a.$$

$$\int_{AB} y\,dl = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^2\int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt =$$
$$= 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt = \frac{32}{3}a^2.$$

Ответ: $x_c = \pi a$; $y_c = \dfrac{4}{3}\pi a$.

Задача 3.4. Найти массу участка кривой $y = \ln x$ от точки с абсциссой $x_1 = \sqrt{3}$ до точки с абсциссой $x_2 = 2\sqrt{2}$, если плотность в каждой точке равна квадрату ее абсциссы.

Указание. $dl = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{x}dx$; $m = \displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} x\sqrt{1 + x^2}\,dx$.

Ответ: $m = \dfrac{19}{3}$.

Задача 3.5.

Определить центр тяжести дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащий в первой четверти $\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Плотность считать равной единице.

Ответ: $x_c = y_c = \dfrac{2}{5}a$.

3.2. Криволинейный интеграл второго рода и его вычисление

Пусть во всех точках дуги AB плоской кривой определены и непрерывны функции двух независимых переменных $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, тогда можно рассмотреть криволинейные интегралы по координатам:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{AB} Q(x,y)dy\,.$$

Сумму этих двух интегралов обозначают символами

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

и называют общим криволинейным интегралом второго рода (по координатам x и y).

Если AB непрерывная гладкая кривая в пространстве, а функция $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывные функции трех независимых переменных, заданные по этой кривой, тогда сумма трех интегралов $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx$, $\int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy$ и $\int\limits_{AB} R(x,y,z)dz$ называется общим криволинейным интегралом второго рода (по координатам) и обозначается

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\,. \qquad (3.11)$$

Если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ – проекции силы $\overline{F}$ на координатные оси, то общий криволинейный интеграл второго рода (3.11) выражает работу этой силы при перемещении материальной точки M по кривой AB из положения A в положение B.

В этом состоит физический смысл криволинейного интеграла второго рода.

В отличие от криволинейного интеграла первого рода криволинейный интеграл второго рода меняет свой знак на противоположный при изменении направления обхода кривой AB, то есть

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx = -\int\limits_{BA} P(x,y,z)dx\,.$$

Вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Если гладкая пространственная кривая AB задание параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ причем изменению t от α до β соответствует движение точки по кривой от A к B (не обязательно, чтобы α было меньше β).

Тогда

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big[P(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot y'(t) +$$

$$+ R(x(t),y(t),z(t)) \cdot z'(t) \big]\, dt. \qquad (3.12)$$

Если кривая AB – расположена, например, в плоскости XOY, то формуле (3.12) примет вид:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big[\big(x(t),y(t)\big) \cdot x'(t) +$$

$$+ Q\big(x(t),y(t)\big) \cdot y'(t) \big]\, dt\,. \qquad (3.13)$$

Если же плоская гладкая кривая задана уравнением $y = y(x)$, где $a \le x \le b$, $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то криволинейный интеграл второго рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \big[P\big(x,y(x)\big) +$$

$$+ Q\big(x,y(x)\big) \cdot y'(x) \big]\, dx \qquad (3.14)$$

Задача 3.6. Вычислить $\int\limits_{AB} x^2 dx + \sqrt{xy}\, dy$, где AB – первая четверть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против часовой стрелки.

Решение. Из уравнения окружности выразим y через x.

Получим $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$, так как в первой четверти $y \ge 0$, то $y=\sqrt{R^2-x^2}$; $dy=-\dfrac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

Учитывая, что интегрирование ведется против часовой стрелки x изменяется от R до 0.

По формуле (3.14) получим:

$$\int_{AB} x^2dx+\sqrt{x}\,ydy=\int_R^0 x^2dx+\sqrt{x}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)dx=$$

$$=\int_R^0\left(x^2-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_R^0=-\frac{R^3}{3}+\frac{2}{5}R^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{15}R^2\left(6\sqrt{R}-5R\right)$$

Ответ: $\dfrac{1}{15}R^2\left(6\sqrt{R}-5R\right)$.

Задача 3.7. Вычислить криволинейный интеграл, $\int\limits_{AB}2xydx+y^2dy+z^2dz;$ где AB один виток линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$ от точки $A(1, 0, 0)$ до $B(1, 0, 4\pi)$.

Решение. Очевидно, что вдоль дуги AB параметр t изменяется от 0 до 2π. По формуле (3.12), получим

$$\int_{AB}2xydx+y^2dy+z^2dz=\int_0^{2\pi}\left[2\cos t\cdot\sin t(-\sin t)+\sin^2 t\cdot\cos t+4t^2\right]dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t\cdot\cos t+8t^2)dt=\left(-\frac{\sin^3 t}{3}+\frac{8t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{64}{3}\pi^3.$$

Ответ: $\dfrac{64}{3}\pi^3$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.8. а) Вычислить $\int\limits_{AB}\left(x^2-y^2\right)dx$, где AB – дуга параболы $y = x^2$ от точки $x = 0$ до точки $x = 2;$

б) Вычислить $\int\limits_{AB}\left(x^2-y^2\right)dy$, где AB та же дуга.

Ответ: а) $-\dfrac{56}{15}$; б) $\dfrac{40}{3}$.

Задача 3.9. Вычислить $\int\limits_{AB}(x-y)dx+(x+y)dy$, где AB

1) отрезок прямой, соединяющий точки $A(2, 3)$ и $B(3, 5);$

2) дуга параболы $y = x^2$ $(0 \le x \le 2);$

3) дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $C(0, 0)$ и $D(4, 2)$.

Ответ: 1) $\dfrac{23}{2}$; 2) $\dfrac{38}{3}$; 3) $\dfrac{22}{3}$.

Задача 3.10. Вычислить:

$$I=\int_L\left(2y-6xy^3\right)dx+\left(2x-9x^2y^2\right)dy;$$

где L одна из линий, соединяющих точки $O(0, 0)$ и $A(2, 2)$.

1) отрезок $OA;$
2) парабола $y=\dfrac{1}{2}x^2$;
3) парабола $x=\dfrac{1}{2}y^2$;
4) кубическая парабола $y=\dfrac{1}{4}x^3$
5) ломанная OCA, где $C(2, 0)$.

Решение.

1) Уравнение прямой на которой лежит отрезок *OA* $y = x$, поэтому $dy = dx$. Заменим в подынтегральном выражении *y* на *x*, а *dy* на *dx*, получим:

$$I=\int_0^2 \left(2x-6x\cdot x\cdot x^3\right)dx+\left(2x-9x^2\cdot x\cdot x^2\right)dx=-88.$$

2) Из уравнения кривой $y=\frac{1}{2}x^2$ следует, что $dy = x\cdot dx$.

Заменяя в подынтегральном выражении *y* на $\frac{1}{2}x^2$, а *dy* на *xdx*, получим, что

$$I=\int_0^2\left[2\cdot\frac{1}{2}x^2-6x\left(\frac{1}{2}x^2\right)^3\right]dx+\left[2x-9x^2\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right]xdx=$$

$$\int_0^2\left(3x^2-3x^7\right)dx=-88$$

3) Так как уравнение линии $x=\frac{1}{2}y^2$, то $dx = ydy$. Заменим в подынтегральном выражении *x*, на $\frac{1}{2}y^2$, а *dx* на *ydy*, получим, учитывая, что *y* изменяется от *0* до *2*.

$$I=\int_0^2\left[2y-6\left(\frac{1}{2}x^2\right)y^3\right]ydy+\left[2\cdot\frac{1}{2}y^2-9\left(\frac{1}{2}y^2\right)^2y^2\right]dy=$$

$$=\int_0^2\left(3y^2-\frac{21}{4}y^6\right)dy=\left(y^3-\frac{3}{4}y^7\right)\Big|_0^2=8-\frac{3}{4}\cdot128=-88.$$

4) Убедиться самостоятельно, что $I = -88$.

5) Вычислим этот интеграл по ломанной *OCA*, состоящий из отрезка *OC* оси *OX* и отрезка *CA* прямой $X = 2$.

В этом случае на отрезке *OC*: $y = 0$, $dy = 0$. На отрезке *CA*: $x = 2$, $dx = 0$, а *y* изменяется от *0* до *2*, так как

$$\int_{OCA}=\int_{OC}+\int_{CA}.$$

$$I=\int_0^2\left(2\cdot2-9\cdot2^2\cdot y^2\right)dy=\left(4y-12y^3\right)\Big|_0^2=-88.$$

Итак, по какой бы из указанных кривых, соединяющих точки *(0, 0)* и *(2, 2)*, мы не вычисляли этот интеграл, оказывается, что он равен одному и тому же числу. Иначе говоря, величина этого интеграла не зависит от пути интегрирования.

Ниже будет указано условие, которому должно удовлетворять подынтегральное выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ в криволинейном интеграле второго рода, чтобы интеграл не зависел от пути интегрирования, соединяющего эти точки.

3.3. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Если функции $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязью области *D*, то для того, чтобы в криволинейный интеграл

$$\int_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (3.15)$$

Но условие (3.15) является необходимым и достаточным для того, чтобы выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, являлось полным дифференциалом некоторой функции. Поэтому можно утверждать, что для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от пути интегрирования AB, а зависел только от его концов и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$, было полным дифференциалом некоторой функции.

Но, если выполняются условия (3.15) и выражение $Pdx + Qdy$, является полным дифференциалом некоторой функции, то криволинейный интеграл $\oint\limits_L P\,(x,y)dx + Q(x,y)dy$, взятый по любому замкнутому контуру L целиком лежащему в односвязной ограниченной замкнутой области D равен 0.

Если путь, по которому вычисляется криволинейный интеграл, безразличен, то употребляется обозначение:

$$\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x_1,\,y_1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad (3.16)$$

где (x_0, y_0) и (x_1, y_1) – координаты начала и конца пути интегрирования.

Задача 3.11. Выяснить, будет ли криволинейный интеграл зависеть от формы пути интегрирования:

$$I = \int\limits_{AB} \left(6xy + 4y^2 + 5y\right)dx + \left(3x^2 + 8xy + 5x\right)dy .$$

Решение. Здесь $P(x, y) = 6xy + 4y^2 + 5y$,
а функция $Q(x,y) = 3x^2 + 8xy + 5x$. Интеграл не будет зависеть от пути интегрирования, если выполнено условия (3.15).

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x + 8y + 5; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x + 8y + 5,$$

Следовательно, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, и криволинейный интеграл зависит от формы пути интегрирования.

Задача 3.12. Убедится, что интеграл

$$I = \int\limits_{AB} \left(6xy^2 + 4x^3\right)dx + \left(6x^2y + 3y^2\right)dy$$

не зависит от формы пути интегрирования, и после этого вычислить его по отрезку прямой, соединяющей точки $(2, 3)$ и $(3, 4)$.

Решение. $P(x, y) = 6xy^2 + 4x^3$, $Q(x,y) = 6x^2y + 3y^2$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy, \quad \text{т.е.} \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Интеграл не будет зависеть от пути интегрирования.

Уравнение прямой, соединяющий точки с координатами $(2, 3)$ и $(3, 4)$ имеет вид: $y = x + 1$; $dy = dx$.

Получим:

$$I = \int\limits_{(2,3)}^{(3,4)} \left(6xy^2 + 4x^3\right)dx + \left(6x^2y + 3y^2\right) =$$

$$= \int\limits_2^3 \left[6x(x+1)^2 + 4x^3 + 6x^2(x+1) + 3(x+1)^2\right]dx = 426 .$$

Ответ: 426.

Задача 3.13. Будет ли криволинейный интеграл,

$$\oint\limits_L \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}\,dy ,$$

взятый по замкнутому контуру L равен 0 ?

Решение: При выполнении условия $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$

(где $P(x, y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}$, $Q(x, y) = -\dfrac{2y}{x^3}$).

Криволинейный интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, будет равен нулю. Поэтому, чтобы ответить на вопрос, вычислим:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{6y}{x^4},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{6y}{x^4},\qquad \text{т.е. } \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Так как функции выражение $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ имеют разрыв при $x = 0$, следует указать, что заданный интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, будет равен нулю, но этот контур не должен проходить через точку с абсциссой $x = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.14. Вычислить интеграл

$$\int_{(1,1)}^{(3,2)} \frac{x}{(x+y)^2}dx+\frac{2x+y}{(x+y)^2}dy.$$

Указание. Убедится, что $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. За путь интегрирования выбрать прямую, соединяющие точки $(1, 1)$ и $(3, 2)$. Ее уравнение $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Ответ: $ln\frac{5}{2}-\frac{1}{10}$.

Задача 3.15. Будет ли криволинейный интеграл

$$\oint_L \left(x^2+y^2\right)(xdx+ydy)$$

по любому замкнутому контуру, будет равен нулю. Подтвердить полученное заключение непосредственным вычислением, по какому-нибудь замкнутому контуру.

Указание. Проверить, является ли подынтегральное выражение полным дифференциалом, для этого найти $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial y}$, где $P(x, y) = x^3 + xy^2$; $Q(x, y) = x^2y + y^3$,

так как $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=2xy$, то можно утвердительно ответить на вопрос задачи.

Выбрать в качестве замкнутого контура, например, окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Параметрические уравнения такой окружности имеют вид:

$$\begin{cases} x=cos\,t \\ y=sin\,t \end{cases}\qquad (0\le t\le 2\pi).$$

Задача 3.16. Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующие интегралы:

1) $$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\left(2xy^2+3x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{y^2}\right)dx+\left(2x^2y+3y^2+\frac{1}{y^2}-\frac{2x^2}{y^3}\right)dy$$

(вдоль путей, не пересекающих координатных осей и не проходящих через начале координат).

2) $$\int_{(2,1)}^{(5,3)}\frac{-y^2dx+x^2dy}{(x-y)^2};$$

(вдоль путей, которые не пересекают биссектрису первого и третьего координатных углов).

Ответ: 1) $-\frac{15}{4}$; 2) $5{,}5$.

3.4. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла второго ряда

Криволинейный интеграл по простому замкнутому гладкому контуру L, ограничивающему односвязную область D может быть преобразован в некоторый двойной интеграл по области D, ограниченной этим контуром.

Это преобразование выполняется по формуле Грина, которая имеет вид:

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (3.17)$$

Предполагается, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, а также их частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в области D и на контуре L, который ее ограничивает, причем, контур L, пробегается в положительном направлении, т.е. так, что область D остается слева.

Если формулу Грина прочесть справа налево, то можно сказать, что она сводит вычисление двойного интеграла по области D к вычислению криволинейного интеграла взятого по контуру L, ограничивающему эту область.

Формула (3.17) справедлива не только для области D указанного вида, но и для более сложных областей, ограниченных несколькими простыми гладкими контурами. В случае:

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

следует рассматривать как сумму интегралов по составляющим контурам, причем, интегрирование по этим контурам должно вестись в таком направлении, чтобы область D оставалась слева.

Многие криволинейные интегралы, взятые по замкнутому контуру, удобно вычислять, сводя их к двойному.

Задача 3.17. Вычислить, применяя формулу Грина, интеграл.

$$\oint_L x^2ydx+xy^2dy,$$

где L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Решение. Здесь $P(x, y) = - x^2 y$; $Q(x, y) = - x y^2$;

$\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2$.

Подставляя эти значения в формулу (3.17), получим:

$$I=\oint_L x^2ydx+xy^2dy=\iint_D\left(y^2+x^2\right)dxdy,$$

где D – круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = a^2$. Вычисление полученного интеграла удобно провести в полярных координатах, при этом элемент площади $dxdy = rdrd\varphi$,

а $x^2 + y^2 = r^2$. Получим

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_D r^3drd\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^3dr=2\pi\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi a^4}{2}.$$

Ответ: $I=\frac{\pi a^4}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.18. С помощью формулы Грина вычислить интеграл

$$I=\oint_C\frac{1}{x}arctg\frac{y}{x}dx+\frac{2}{y}arctg\frac{x}{y}dy, \text{ где}$$

C – замкнутый контур, составленный дугами двух окружностей $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$ $(y > 0)$ и отрезками прямых $y = x$ и $y=\sqrt{3}\,x$ $(y > 0)$, заключенных между этими окружностями (рис. 3.1).

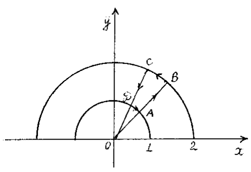


Рис. 3.1

Указание. Найти $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

По формуле Грина интеграл равен: $I = \iint\limits_D \dfrac{1}{x^2+y^2}dxdy$.

В данной задаче удобно перейти к полярным координатам

$$I = \iint\limits_D \frac{1}{r^2} r dr d\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_1^2 \frac{1}{r} dr d\varphi = \frac{\pi}{12}\ln 2.$$

Ответ: $I = \dfrac{\pi}{12}\ln 2$.

Задача 3.19. Криволинейный интеграл из предыдущей задачи и по тому же контуру вычислить, не прибегая к формуле Грина.

Указание. Уравнения окружности преобразовать к параметрической форме. Получим уравнение:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

Параметр t на дуге BC изменяется от $\dfrac{\pi}{4}$ до $\dfrac{\pi}{3}$, а на дуге DA от $\dfrac{\pi}{3}$ до $\dfrac{\pi}{4}$.

Интегралы по этим двум дугам взаимно уничтожаются. Перемещая x на отрезке AB изменяется от $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ до $\sqrt{2}$, а на отрезке CD от 1 до $\dfrac{1}{2}$.

С помощью интеграла второго рода, площадь плоской фигуры, ограниченной кусочно-гладкой кривой вычисляется, по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x dy - y dx, \tag{3.18}$$

где L – контур, ограничивающий искомую площадь, а интегрирование по этому контуру ведется в положительном направлении, т.е. чтобы область D оставалась слева.

Для вычисления площади с помощью криволинейного интеграла применяются такие формулы:

$$S = -\oint\limits_L y dx; \tag{3.19}$$

$$S = \oint\limits_L x dy. \tag{3.20}$$

Задача 3.20. С помощью криволинейного интеграла, вычислить площадь, ограниченную эллипсом:

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos t \\ y = b\cdot\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Решение. Воспользуемся формулой (3.18). Найдем:
$dx = -a\cdot\sin t\, dt$, $\quad dy = b\cdot\cos t\, dt$.

Подынтегральное выражение по этой формуле равно:
$x\,dy - y\,dx = (a\cdot b\cdot\cos^2 t + a\cdot b\cdot\sin^2 t)dt = a\cdot b\cdot dt$.

Получим:

$$S=\frac{1}{2}\oint_L a\cdot b\,dt=\frac{1}{2}a\cdot b\int_0^{2\pi}dt=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot 2\pi=\pi\cdot a\cdot b \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $S=\pi\cdot a\cdot b$ *(кв.ед.).*

Задача 3.21. Определить площадь, ограниченную одной аркой циклоиды (рис. 3.2).

$$\begin{cases} x=a\cdot(t-\sin t)\\ y=a\cdot(1-\cos t)\end{cases}\qquad (0\le t\le 2\pi).$$

Решение.

Найдем $dx = a\cdot(1 - \cos t)dt$

$dy = a\cdot\sin t\, dt.$

Тогда, подынтегральное выражение по формуле (3.18) примет вид:

$x\,dy - y\,dx = a(t - \sin t)\cdot a\cdot\sin t\, dt -$

$- a(1 - \cos t)\cdot a(1 - \cos t)\, dt =$

$= a^2(t\sin t + 2\cos t - 2)dt.$

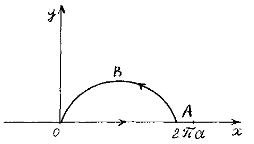


Рис. 3.2

Интегрирование ведется по контуру $OABO$ в направлении, указанном стрелками. На отрезке OA $y = 0$ и $dy = 0$. Поэтому на этом отрезке подынтегральное выражение примет вид: $x\,dy - y\,dx = 0$.

На дуге ABO параметр t изменяется от 2π до 0. Учитывая это, получим:

$$S=\frac{1}{2}\oint_C a^2(t\sin t+2\cos t-2)dt=\frac{1}{2}a^2\int_{2\pi}^{0}(t\sin t+2\cos t-2)=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\cdot 6\pi=3\pi\cdot a^2 \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ: $S = 3\pi a^2$ *(кв. ед.).*

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.22. Определить площадь, ограниченную астроидой:

$$\begin{cases} x=a\cdot\cos^3 t\\ y=a\cdot\sin^3 t\end{cases}\qquad (0\le t\le 2\pi).$$

Ответ: $S=\frac{3}{8}\pi\; a^2$ (кв. ед).

Задача 3.23. Найти площадь, ограниченную кардиоидой:

$$\begin{cases} x=2a\cdot\cos t-a\cdot\cos 2t\\ y=2a\cdot\sin t-a\cdot\sin 2t\end{cases}\qquad (0\le t\le 2\pi).$$

Ответ: $S = 6\pi a^2$ *(кв. ед.).*

4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Поверхностные интегралы первого рода

Вычисление поверхностного интеграла от скалярной функции

Пусть в точках кусочно-гладкой поверхности Σ с кусочно-гладкой границей C определена некоторая ограниченная функция $f(M)$. (Поверхность Σ может быть, в частности, замкнутой). Поверхностный интеграл от функции

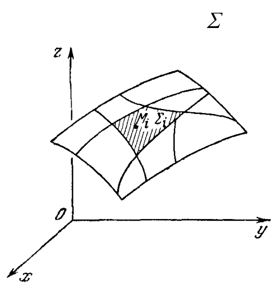


Рис. 4.1.

$f\,(M)$ по поверхности Σ и обозначается символом $\iint\limits_{\Sigma} f(M)\,ds$.

Точку M поверхности Σ можно задать декартовыми координатами x, y, z. Поэтому функцию $f\,(M)$, определенную на Σ, мы будем обозначать также $f(x,y,z)$, а соответствующий поверхностный интеграл $-\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)ds$. Приведем поверхностный интеграл к двойному интегралу.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда поверхность задана уравнением в декартовых координатах.

Пусть Σ – гладкая поверхность, заданная уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, где D – замкнутая ограниченная область, а $f(x, y, z)$-некоторая ограниченная функция, определенная на поверхности Σ. Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\,ds = \iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+\left[z'_x\right]^2+\left[z'_y\right]^2}\;dxdy\ .(4.1)$$

При этом поверхностный интеграл, стоящий слева, существует, если существует двойной интеграл, стоящий в правой части равенства.

Замечание. Пусть поверхность Σ состоит из нескольких частей, каждая из которых может быть представлена уравнением вида $x= x(y, z)$, $y= y(z, x)$ или $z= z(x, y)$. Для сведения поверхностного интеграла, взятого по такой поверхности к двойному интегралу можно, воспользоваться тем, что поверхностный интеграл по поверхности Σ равен сумме интегралов, взятых по составляющим эту поверхность частям. Формулы будут в силе, когда поверхность не гладкая, а кусочно-гладкая.

Задача 4.1. Вычислить поверхностный итеграл $J = \iint\limits_{\Sigma} (x^2+ y^2)^{1.5}ds$, Σ – часть поверхности $z^2= x^2+ y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$, $z = 1$.

Решение. Вычислим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\ ,\ ds = \sqrt{1+\left[z'_x\right]^2+\left[z'_y\right]^2} =$$

$$= \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{2}dxdy\,.$$ Тогда интеграл J можно преобразовать в двойной и вычислить с помощью полярной системы координат $(x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi,\ 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le\pi/2)$

$$J = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2)^{1.5}\sqrt{2}dxdy = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1 r^4dr = 2\pi\sqrt{2}/5.$$

где – D проекция поверхности Σ на плоскость XOY $(D\colon x^2 + y^2 \le 1)$.

Применения поверхностных интегралов механике

Поверхностные интегралы первого рода часто встречаются в физических задачах. С такими интегралами приходится иметь дело при изучении распределения масс по поверхности, например при нахождении координат центра масс, моментов инерции материальных поверхностей.

Пусть по поверхности Σ (гладкой или кусочно-гладкой) распределена некоторая масса с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$, представляющей собой непрерывную функцию на Σ. Такую поверхность Σ будем кратко называть материальной поверхностью. Тогда имеют место следующие формулы:

1) Масса μ материальной поверхности Σ равна

$\mu = \iint\limits_{\Sigma} \rho(x, y, z)ds.$

2) Координаты центра масс материальной поверхности определяются формулами $x_c = (1/S) \iint\limits_{\Sigma} x\rho(x, y, z)\, ds$,

$y_c = (1/S) \iint\limits_{\Sigma} y\rho(x, y, z)\, ds$, $z_c = (1/S) \iint\limits_{\Sigma} z\rho(x, y, z)\, ds$,

$$S = \iint\limits_{\Sigma} \rho(x, y, z)ds. \qquad (4.2)$$

Для однородной поверхности $\rho = const$.

3) Моменты инерции поверхности Σ относительно осей координат равны

$J_z = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2)\, \rho(x, y, z)\, ds$, $J_y = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, ds$,

$J_x = \iint\limits_{\Sigma} (z^2 + y^2)\, \rho(x, y, z)\, ds.$

Задача 4.2. Вычислить координаты центра тяжести плоскости $x + y + z = 1$; $x, y, z \in [0,1]$ (плотность постоянна и равна 1).

Решение. Так как $z = 1 - x - y$, то $z'_x = -1$, $z'_y = -1$.

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + [z'_x]^2 + [z'_y]^2}\, dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \sqrt{3}\int_0^1 (1 - x)dx = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x_c = (1/S) \iint\limits_{\Sigma} x\, ds = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} \sqrt{3} dy = 2\int_0^1 x(1 - x)dx = 1/3.$$

Аналогично можно получить, что $y_c = z_c = 1/3$.

Задача 4.3. Вычислить площадь поверхности (S) части параболоида $y = x^2 + z^2$ в первом октанте, ограниченной плоскостью $y = 2$.

Решение. Введем полярную систему координат $x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, $0 \le r \le \sqrt{2}$, тогда

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + [y'_x]^2 + [y'_z]^2}\, \mathrm{dxdz} = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)}\, \mathrm{dxdz} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, dr = \frac{1}{12}\varphi\Big|_0^{\pi/2} (1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{12}\pi.$$

Поверхностные интегралы от векторных функций. Общее понятие поверхностного интеграла первого рода

Выше были рассмотрены поверхностные интегралы от скалярных функций. Это понятие можно перенести на векторные функции. Пусть $\overline{F}(M) = P\, i + Q\, j + R\, k$ - некоторая векторная функция, заданная на поверхности Σ. Определим интеграл от этой функции по поверхности Σ, положив

$$\iint\limits_{\Sigma} \overline{F}(M)\, ds = i \iint\limits_{\Sigma} P(M)\, ds + j \iint\limits_{\Sigma} Q(M)\, ds + k \iint\limits_{\Sigma} R(M)\, ds.$$

Существуют задачи, в которых ориентация элемента ds играет существенную роль. К ним относится задача о расчете количества жидкости, протекающей через поверхность за единицу времени, а также и ряд других. Эти задачи приводит к другому понятию поверхностного интеграла, так называемому поверхностному интегралу второго рода.

4.2. Поверхностные интегралы второго рода

Для того чтобы определить поверхностный интеграл второго рода, нужно ввести понятие стороны поверхности, аналогичное понятию ориентации кривой.

Пусть Σ – гладкая поверхность. Возьмем на Σ некоторую внутреннюю точку M_0, проведем через нее нормаль к поверхности Σ и выберем на этой нормали одно из двух возможных направлений. Это можно сделать, зафиксировав определенный единичный вектор $\bar{n}$, нормальный к поверхности Σ в точке M_0. Проведем теперь на поверхности Σ через точку M_0 какой-либо замкнутый контур C, не имеющий общих точек с границей поверхности, и будем двигать единичный вектор $\bar{n}$ из точки M_0 вдоль C так, чтобы этот вектор все время оставался нормальным к Σ и чтобы его направление менялось при этом движении непрерывно. Поскольку вектор $\bar{n}$ все время остается нормальным к Σ, то имеются две возможности: при возвращении в точку M_0 вектор $\bar{n}$ возвращается в первоначальное положение; в результате обхода по контуру C вектор $\bar{n}$ меняет свое направление на противоположное.

Гладкая поверхность Σ называется двусторонней, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности Σ и не имеющему общих точек с ее границей, не меняет направления нормали к поверхности. Если же на поверхности существует замкнутый контур, по которому направление нормали меняется на противоположное (при движении ее по контуру), то поверхность называется односторонней. Если поверхность Σ двусторонняя, то в каждой ее точке M можно выбрать единичный вектор нормали $\bar{n}(M)$ так, чтобы вектор $\bar{n}(M)$ зависел от точки M непрерывно ($\bar{n}(M)$ будет называться «непрерывным полем нормалей» на поверхности Σ). На односторонней поверхности нельзя построить ни одного непрерывного поля нормалей. Выбор на поверхности Σ определенного непрерывного поля нормалей будет называться выбором стороны этой поверхности.

Замечания:

1. Двустороннюю поверхность называют ориентируемой, а выбор определенной ее стороны – ориентацией поверхности. Односторонние поверхности называют не ориентируемыми.

2. Пусть Σ – ориентированная поверхность, ограниченная одним или несколькими контурами. Определим ориентацию каждого контура L, входящего в состав границы поверхности Σ, (согласованную с ориентацией поверхности Σ) по следующему правилу. Направление обхода контура L считается положительным (согласованным с ориентацией Σ), если наблюдатель, расположен на поверхности так, что направление вектора нормали совпадает с направлением от ног к голове, обходит контур L, оставляя поверхность Σ все время слева от себя. Противоположное направление считается отрицательным.

3. Правило согласования ориентации поверхности Σ и ограничивающего ее контура L можно сформулировать таким образом: пусть $\bar{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности Σ в некоторой точке M, принадлежащей L, и пусть $\bar{n}$ - вектор, нормальный к L и к $\bar{n}$ и направленный в ту сторону, с которой расположена поверхность Σ. Тогда положительное направление обхода контура L указывается вектором $[\bar{n}, \bar{n}]$

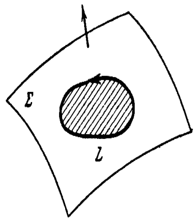


Рис. 4.2

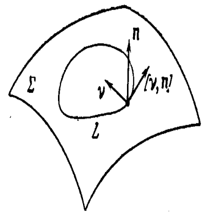


Рис. 4.3

Определение поверхностного интеграла второго рода

Пусть пространство заполнено движущейся жидкостью, скорость которой в точке (x, y, z) задается вектором $\overline{V}\ (x, y, z)$ с компонентами $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$.

Вычислим количество жидкости Π, протекающей за единицу времени через некоторую ориентированную поверхность Σ.

Рассмотрим бесконечно малый элемент $d\sigma$ поверхности Σ. Количество жидкости, протекающее через $d\sigma$ за единицу времени, равно $d\Pi = V_n$, где V_n – проекция скорости $\overline{V}$ на направление нормали $\overline{n}$ к $d\sigma$. Записав $d\Pi$ как скалярное произведение вектора V на единичный вектор нормали n к элементу $d\sigma$, имеем

$$d\Pi =[P \cos (\overline{n}, x)+ Q \cos (\overline{n}, y) + R \cos (\overline{n}, z)]\ d\sigma.$$

Чтобы получить количество жидкости, протекающее через всю поверхность Σ, нужно просуммировать предыдущее выражение по всем элементам $d\sigma$, т. е. взять интеграл

$$\Pi = \iint_{\Sigma} [P\cos(\overline{n}, x) + Q\cos(\overline{n},y) + R\cos(\overline{n}, z)]\ d\sigma. \qquad (4.3)$$

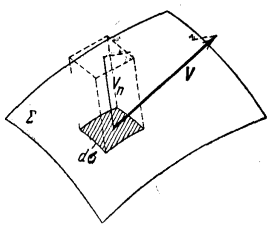


Рис. 4.4

Перейдем теперь к общему определению. Пусть Σ – гладкая двусторонняя поверхность. Фиксируем какую-либо определенную сторону поверхности (поле нормалей $\overline{n}(M)$) и рассмотрим векторную функцию $\overline{A} =(P, Q, R)$, заданную на

Σ. Обозначим A_n проекцию вектора $\overline{A}$ на направление нормали к Σ в данной точке

$$A_n = P \cos (\overline{n}, x) + Q \cos (\overline{n}, y)+ R \cos (\overline{n}, z),$$

где $\cos(\overline{n}, x)$, $\cos(\overline{n}, y)$ и $\cos(\overline{n}, z)$ – косинусы углов между направлением нормали к поверхности и направлениями координатных осей, т. е. координаты единичного вектора нормали n. Интеграл

$$\iint_{\Sigma} [P \cos(\overline{n}, x) + Q \cos(\overline{n}, y)+ R \cos(\overline{n}, z)]\ d\sigma \qquad (4.4)$$

называется поверхностным интегралом второго рода от вектор – функции $\overline{A} =(P, Q, R)$ по поверхности Σ (по выбранной стороне поверхности Σ) и будем обозначать

$$\iint_{\Sigma} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy.$$

При переходе к другой стороне поверхности координаты единичного вектора нормали, следовательно и сам интеграл, меняют свой знак на противоположный. Для односторонней поверхности понятие поверхностного интеграла второго рода не вводится.

В соответствии с этим поверхностный интеграл второго рода от векторной функции $\overline{A} = (P, Q, R)$ часто записывают в виде

$$\iint_{\Sigma} (\overline{A}, \overline{ds}) = \iint_{\Sigma} (\overline{A}, \overline{n}) d\sigma. \qquad (4.5)$$

Наряду с интегралами вида (4.5) в некоторых задачах приходится рассматривать интегралы вида

$$\iint_{\Sigma} [\overline{A}, \overline{n}] d\sigma\ . \qquad (4.6)$$

Значение такого интеграла представляет собой уже не скаляр, а вектор. Его вычисление сводится к покомпонентному интегрированию вектора $[\overline{A}, \overline{n}]$. Так как здесь подынтегральное выражение зависит от нормали $\overline{n}$ к поверхности Σ, то интеграл (4.6) будет поверхностным интегралом второго рода (но только «векторный», в отличие от «скалярного» интеграла (4.5)).

Сведение поверхностного интеграла второго рода к двойному интегралу

Из определения поверхностного интеграла второго рода вытекает следующий результат Пусть гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность Σ задана уравнением $z = z(x, y)$ (причем берется верхняя сторона этой поверхности) и $R(x, y, z)$ – некоторая ограниченная функция на поверхности Σ . Тогда

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,dxdy = \iint_{D} R(x, y, z(x, y))\,dxdy, \qquad (4.7)$$

где D – проекция поверхности Σ на плоскость $X0Y$; входящий в это равенство поверхностный интеграл существует, если существует стоящий справа двойной интеграл. Таким образом, для того, чтобы поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,d\sigma$, взятый по верхней стороне поверхности Σ (ее уравнение $z = z(x, y)$) преобразовать в двойной, следует в подынтегральную функцию вместо z подставить функцию $z(x, y)$, а интегрирование по поверхности Σ заменить интегрированием по ее проекции D на плоскость $X0Y$. Если же интеграл берется по нижней стороне поверхности Σ, то

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,dxdy = -\iint_{D} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

Так же получены формулы:

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)\,dydz = \pm \iint_{D_1} P(x(y,z), y, z)\,dydz\ ;$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\,dzdx = \pm \iint_{D_2} Q(x, y(z, x), z)\,dzdx,$$

где в первом случае под поверхностью Σ понимается поверхность, заданная уравнением $x = x(y, z)$, а во втором – поверхность, заданная уравнением $y = y(z, x)$.

Знак плюс берется в том случае, когда нормаль к поверхности образует с осью x (соответственно с осью y) острый угол, а знак минус, когда этот угол тупой. D_1 и D_2 – проекции поверхности Σ на плоскости $Y0Z$ и $Z0X$ соответственно. Формулой типа (4.7) можно воспользоваться для сведения поверхностного интеграла к двойному интегралу и в том случае, когда ориентированная поверхность Σ состоит из нескольких кусков, каждый из которых определяется уравнением вида $z = z(x, y)$. В этом случае рассматриваемый интеграл следует представить как сумму интегралов, отвечающих этим кускам, и затем к каждому из этих слагаемых применить формулу (4.7).

Задача 4.4. Вычислить поверхностный интеграл
$J = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2)^3 dxdy$, где Σ – верхняя часть круга $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Поверхность, по которой берется интеграл совпадает со своей проекцией на плоскость XOY D (D: $x^2 + y^2 \le 1$) и имеет с ней положительную ориентацию. Применяя полярную систему координат ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$), имеем $J = \iint_{D} (x^2 + y^2)^3 dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^7 dr = \pi/4$.

Задача 4.5. Вычислить поверхностный интеграл
$J = \iint\limits_{\Sigma} x^2 z^2 dxdy$, где Σ – нижняя сторона нижней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение. Вычислим

$$J = -\iint\limits_{D} x^2(1 - x^2 - y^2)dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int\limits_0^1 r^3(1 - r^2)dr =$$

$$= -\left.\left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\right|_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1+\cos 2\varphi)}{2} d\varphi = -\frac{\pi}{12}.$$

Здесь было учтено то, что нижняя сторона поверхности Σ имеет ориентацию противоположную ориентации XOY и, что $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, D: $x^2 + y^2 \le 1$, и $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

4.3. *Формула Остроградского*

Запишем формулу, связывающую тройной интеграл по пространственной области с поверхностным интегралом, взятым по внешней стороне поверхности, ограничивающей эту область. Эта формула называется формулой Остроградского.

Пусть, наконец, V – некоторая простая область с поверхностью Σ и пусть функции P, Q, R вместе со своими производными непрерывны в этой области всюду, включая ее границу, тогда можно записать равенство

$$\iiint\limits_V ((\partial P/\partial x) + (\partial Q/\partial y) + (\partial R/\partial z))\, dxdydz = \iint\limits_{\Sigma} P\, dydz + Q dzdx +$$

$$+ R\, dxdy = \iint\limits_{\Sigma} [P\cos(\bar{n}, x) + Q\cos(\bar{n}, y) + R\cos(\bar{n}, z)]d\sigma. \quad (4.8)$$

Замечание. При выводе формулы Остроградского мы считали, что функции P, Q, R и их частные производные непрерывны (а следовательно, и ограничены) в замкнутой простой области.

Можно доказать справедливость формулы Остроградского при следующих более общих условиях:

1. V – ограниченная область, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей.
2. Функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны, а следовательно, и ограничены в замкнутой области V.
3. Производные $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ существуют и непрерывны внутри области V (без границы) и интеграл $\iiint\limits_V [(\partial P/\partial x) + (\partial Q/\partial y) + (\partial R/\partial z)]\, dxdydz$ существует.

Задача 4.6. Вычислить интеграл $J = \iint\limits_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, взятый по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Решение. Воспользовавшись формулой Остроградского, будем иметь

$$J = 3\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{a} r^4 \sin\theta\, dr =$$

$= 0{,}8\pi a^5$, где r, φ, θ – сферические координаты.

4.4. *Формула Стокса*

Выведем формулу Стокса, которая связывает поверхностные и криволинейные интегралы. Формула Стокса обобщает формулу Грина и переходит в нее, если рассматриваемая поверхность сводится к плоской области, лежащей в плоскости

X0Y. Формула Стокса часто применяется в самом анализе и в его приложениях.

Пусть дана гладкая ориентированная поверхность Σ, ограниченная ориентированным контуром Λ, (ориентации Σ и Λ согласованы), и пусть в некоторой трехмерной области, содержащей внутри себя поверхность Σ, определена векторная функция (P, Q, R), такая, что P, Q и R непрерывны в этой области вместе со своими частными производными первого порядка.

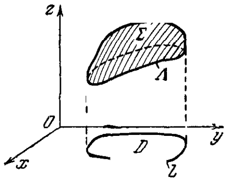


Рис. 4.5

Формула Стокса имеет вид:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Sigma \Big[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(\bar n, z) +$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(\bar n, x) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(\bar n, y)\Big]\,d\sigma =$$

$$= \iint_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx. \quad (4.9)$$

Если поверхность Σ сводится к плоской области, лежащей в плоскости *X0У*, то интегралы по *dzdx* и *dydz* обращаются в нуль и формула Стокса переходит в формулу Грина.

Замечание. Формула Стокса остается в силе в случае, когда граница контура Λ (поверхности Σ) состоит из нескольких отдельных контуров. Интеграл по контуру Λ понимаем как сумму интегралов, взятых по этим контурам, причем ориентация каждого из этих контуров должна быть согласована с выбором стороны поверхности Σ.

Определение. Трехмерная область V называется односвязной, если на любой замкнутый контур, лежащий в V, можно натянуть поверхность, также целиком лежащую в V (т.е. если внутри V найдется поверхность, имеющая этот контур своей границей).

Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны, вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой замкнутой ограниченной поверхностно односвязной области V, то можно доказать следующие свойства:

1. Интеграл $\oint P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, взятый по любому замкнутому контуру, лежащему внутри V, равен нулю.

2. $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не зависит от выбора пути, соединяющего точки A и B.

3. $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ – полный дифференциал некоторой однозначной функции, определенной в V.

4. Выполняются равенства

$$(\partial Q/\partial x) = (\partial P/\partial y), \quad (\partial R/\partial y) = (\partial Q/\partial z),$$
$$(\partial P/\partial z) = (\partial R/\partial x). \quad (4.10)$$

Рассмотрим некоторый замкнутый контур Λ, лежащий в V, так как область V по условию односвязна, то на Λ можно натянуть поверхность Σ, целиком лежащую внутри V. Применив к криволинейному интегралу, взятому по Λ, формулу Стокса получаем, что из (4.10) следует равенство

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Если выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$, то можно написать выражение этой функции

$$U(x, y, z) = \int_{(x^*, y^*, z^*)}^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \quad (4.11)$$

где интеграл взят по произвольному пути $M'M$ ($M'(x', y', x')$, $M(x, y, z)$), целиком лежащему в области V.

Если функции P, Q и R удовлетворяют условиям (4.10), но область, в которой они определены, не односвязна, то свойства интеграла $\oint\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ аналогичны свойствам криволинейного интеграла $\oint\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ в плоской многосвязной области.

В частности, равенство (4.11) при выполнении (4.10) и в случае многосвязной области представляет собой функцию, полный дифференциал которой равен $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, но в многосвязной области эта функция многозначна.

Задача 4.7. Вычислить $\oint\limits_{L} y\,dx + z\,dy + x\,dz$,

где L – контур (с положительным обходом) треугольника ABC с вершинами $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,3)$.

Решение. По формуле Стокса имеем $(P = y,\ Q = z,\ R = x)$

$$\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dydz +$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx = -\left(\iint\limits_{\Sigma} dxdy + \iint\limits_{\Sigma} dydz + \iint\limits_{\Sigma} dxdz\right) = -9\sqrt{3}/2.$$

Так как все интегралы в скобке равны между собой и равны площади прямоугольного треугольника с катетами равными 3.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.8. Вычислить поверхностный интеграл $J = \iint\limits_{\Sigma} (1/r^2)ds$, где Σ – цилиндр $x^2 + y^2 = 4$, ограниченный плоскостями $z = 0$, $z = 3$, а r – расстояние от точки поверхности до начала осей координат.

Ответ: $2\pi\, arctg(3/2)$.

Задача 4.9. Вычислить поверхностный интеграл $J = \iint\limits_{\Sigma} (1/r)ds$, где Σ – часть поверхности $z = xy$, отсеченная цилиндром $x^2 + y^2 = 9$,а r – расстояние от точки поверхности до оси Oz.

Ответ: $\pi[3\sqrt{10} + ln(3+\sqrt{10})]$.

Задача 4.10. Вычислить поверхностный интеграл $J = \iint\limits_{\Sigma} x^2y^2zdxdy$, где Σ – верхняя сторона нижней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Ответ: $-2\pi/(105)$.

Задача 4.11. Вычислить интеграл $J = \iint\limits_{\Sigma} xdydz + 2ydxdz + zdxdy$, где Σ – положительная сторона куба, составленного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=2$, $z=2$.

Ответ: 8.

Задача 4.12. Вычислить координаты центра тяжести однородного полушара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 0$ $(z \geq 0)$.

Ответ: $(0, 0, 1{,}5)$.

Задача 4.13. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями на $2x + z = 2$, $x + z = 1$, $y^2 = x$, $y = 0$ $(y > 0)$, если плотность его в каждой точке равна y этой точки.

Ответ: $1/(12)$.

5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики. Изложим элементы того математического аппарата, которым приходится пользоваться при изучении физических полей.

В физических задачах чаще всего встречаются величины двух типов: скаляры и векторы. В соответствии с этим мы будем рассматривать два типа полей – скалярные и векторные.

5.1. Скалярные поля

Пусть Ω - некоторая область в пространстве. В этой области задано скалярное поле, если каждой точке *M* этой области поставлено в соответствие некоторое число *U (M)*.

Примерами скалярных полей служат: поле температур внутри некоторого нагретого тела (в каждой точке *M* этого тела задана соответствующая температура *U (M)*); поле освещенности, создаваемое каким-либо источником света; поле плотности массы и т.д.

Пусть *U(M)* – некоторое скалярное поле, то, введя в области, где задано поле, декартовы координаты, можно представить это поле в виде непрерывной функции *U(x, y, z)*.

Для получения наглядной картины удобно пользоваться называемыми поверхностями уровня. Поверхностью уровня скалярного поля *U (M)* называется геометрическое место точек, в которых поле имеет вид *U(x, y, z) = C*. Этот способ изображения поля также удобен тогда, когда поле, задано не в пространственной, а в плоской области. Такое поле описывается функцией двух переменных *U(x, y)*. Кривые вида *U(x, y) = C* определяют линию уровня плоского скалярного поля *U (M)*.

Частные случаи: *Плоскопараллельное поле.* Если скалярное поле *U (M)* в декартовой системе координат можно описать функцией, зависящей от двух координат (*U(x, y)*), то поле называется плоскопараллельным (двумерным). Поле *U (M)* называется плоскопараллельным, если в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле *U (M)* переходит само в себя. Поверхности уровня такого поля –

это семейство (*U(x, y) = C*) цилиндрических поверхностей (рис. 4.2).

Осесимметрическое поле. Если для поля *U (M)* можно подобрать такую цилиндрическую систему координат, в которой оно изображается функцией, зависящей только от переменных $r = (x^2+ y^2)^{1/2}$ и *z* (но не от угла φ), то это поле называется осесимметрическим. Поверхности уровня такого поля представляют собой поверхности вращения.

Сферическое поле. Если значения *U (M)* зависят лишь от расстояния точки *M* от некоторой фиксированной точки M_0,то такое поле называется сферическим. Поверхности уровня сферического поля будут являтся семейством концентрических сфер .

Задача 5.1. Найти область определения функции
$z =1 /(x^2 + y^2)$ и определить линии уровня скалярного поля *z*.

Решение.

Поле *z* определено во всем пространстве за исключением точек, для которых $x^2+y^2=0$, т.е. $x = 0, y = 0$.

Линии уровня определяются уравнением $1/(x^2+y^2) = C$, $C (x^2 + y^2) = 1$ – уравнения семейства окружностей.

Производная по направлению

Пусть *U (M)* – скалярное поле. Рассмотрим две близкие точки *M M**, причем направление отрезка *MM** совпадает с направлением фиксированного единичного вектора $\overline{l}$. Если при этом отношение (*U(M*) – U(M))/h* (где *h* – длина отрезка *MM**) стремится к некоторому пределу, то этот предел называется производной скалярного поля *U (M)* в точке *M* по направлению $\overline{l}$ и обозначается $\partial U(M)/\partial\lambda$. Эта производная характеризует скорость изменения величины *U(M)* в направлении $\overline{l}$. Для ее вычисления выберем некоторую систему координат и представим $U(M)$ в виде $U(x, y, z)$.

Пусть направление $\overline{l}$ образует с осями координат углы α,β,γ. Тогда $MM^* = h\ (i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma)$ и $U(M^*) = U(x + h\cos a,\ y + h\cos\beta,\ z + h\cos\gamma)$, а производная $\partial U/\partial\lambda$- совпадает с производной по h от сложной функции $U(M^*)$ при $h = 0$. Дифференцируя, получаем

$$\partial U(M)/\partial\overline{l} = (\partial U(M^*)/\partial\overline{l})\big|_{h=0} = (\partial U/\partial x)\cos\alpha + (\partial U/\partial y)\cos\beta + (\partial U/\partial z)\cos\gamma = (grad\ U, \overline{l}).$$

где $\overline{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)/\partial z$, вектор $gradU = (\partial U/\partial x, \partial U/\partial y, \partial U/\partial z)$ называется градиентом скалярного поля U.

Из того, что $(\partial U/\partial\overline{l}) = |grad\ U|\ \cos\varphi$ (где φ – угол между $grad\ U$ и единичным вектором $\overline{l}$), можно заключить: в каждой точке, где значение $grad\ U$ не равно 0 существует единственное направление, по которому $\partial U/\partial\overline{l}$ имеет наибольшее значение, т.е. единственное направление наибыстрейшего возрастания функции U. Это направление совпадает с направлением вектора $grad\ U$.

Назовем линией градиента скалярного поля U всякую кривую, касательная к которой в каждой ее точке направлена по $grad\ U$ в этой же точке. Линии градиента поля – это те линии, вдоль которых поле U меняется быстрее всего. В каждой точке линия градиента ортогональна той поверхности уровня, на которой эта точка лежит.

Задача 5.2. Найти производную скалярного поля $U(x, y, z) = xy + z^2y^3x$ в точке $M\ (1, 1, 1)$ по направлению $\overline{l} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ проходящей через эту точку.

Решение. Вычислим

$grad\ U = (\partial U/\partial x, \partial U/\partial y, \partial U/\partial z) = (y+z^2y^3, x+2z^2y^2, x+2zy^3x)$,

$grad\ U|_M = (2,3,3)$. $\partial U/\partial I\ |_M = (grad\ U|_M, I) = 2+3+3=7$.

5.2. *Векторные поля*

Пусть в некоторой области Ω определено векторное поле, тогда каждой точке M этой области будет поставлен в соответствие определенный вектор $\overline{A}(M)$.

Если $\overline{A}\ (M)$ – некоторое векторное поле в пространстве, то, взяв в этом пространстве какую-либо декартову систему координат, мы можем представить $\overline{A}(M)$ как совокупность трех скалярных функций – компонент этого вектора. Эти компоненты мы будем обозначать $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$. Далее мы будем рассматривать векторные поля, компоненты которых непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка.

Пусть в области Ω задано векторное поле $\overline{A}\ (M)$. Кривая L лежащая в Ω, называется векторной линией, если в каждой точке этой кривой направление касательной к ней совпадает с направлением вектора $\overline{A}$ в этой же точке.

Рассмотрим снова некоторое скалярное поле $U(M)$. Построив в каждой точке M вектор $grad\ U$, мы получим векторное поле – поле градиента скалярной величины U. Введем следующее: Векторное поле $\overline{A}\ (M)$ называется потенциальным, если его можно представить как градиент некоторого скалярного поля $U\ (M)$: $\overline{A} = grad\ U$. Само скалярное поле U называется при этом потенциалом векторного поля $\overline{A}$.

Если векторное поле $\overline{A}$ имеет потенциал, то этот потенциал определяется полем $\overline{A}$ однозначно, с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Векторные линии потенциального поля $\overline{A}$ представляют собой, линиями градиента его потенциала U, т. е. линии наибыстрейшего изменения этого потенциала.

Условия, при которых данное векторное поле A потенциально:

$$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x, \quad \partial Q/\partial z = \partial R/\partial y, \quad \partial P/\partial z = \partial R/\partial x, \qquad (5.1)$$

но $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU$, то $P = \partial U/\partial x$, $Q = \partial U/\partial y$, $R = \partial U/\partial z$ (эти формулы можно легко получить из свойств, полученных при выводе формулы Стокса).

Для того, чтобы векторное поле $\overline{A} = (P, Q, R)$, имеющее непрерывные и непрерывно дифференцируемые компоненты, было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (5.1).

Если $\overline{A}$ - потенциальное векторное поле, то нахождение его потенциала сводится к нахождению функции по ее полному дифференциалу.

Задача 5.3. Найти векторные линии в векторном поле $\overline{A} = 4z\,j + 8yk$.

Решение. Так как $\dfrac{dx}{P(x,y,z)} = \dfrac{dy}{Q(x,y,z)} = \dfrac{dz}{R(x,y,z)}$, то имеем $\dfrac{dx}{0} = \dfrac{dy}{4z} = \dfrac{dz}{8y}$, $\dfrac{dy}{4z} = \dfrac{dz}{8y}$, $dx = 0$.

Интегрируя систему, получим
$X = h$ $(h=const)$, $2y^2 = z^2 + c$ – семейство гипербол, лежащих в плоскостях параллельных плоскости YOZ.

5.3. Поток векторного поля. Дивергенция

Количество жидкости, протекающей за единицу времени через данную (ориентированную) поверхность Σ, равно интегралу $\iint_{\Sigma} A_n\, d\sigma$, где A_n – нормальная составляющая вектора скорости $\overline{A} = (P, Q, R)$. Величина Π называется потоком жидкости через поверхность Σ. Пусть $\overline{A}$ произвольное векторное поле и Σ ориентированная поверхность. Поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint_{\Sigma} A_n\, d\sigma \qquad (5.2)$$

мы назовем потоком векторного поля $\overline{A}$ через поверхность.

Пусть $\overline{A}$ - некоторое векторное поле. Поставим в соответствие каждой пространственной области Ω, ограниченной гладкой или кусочно-гладкой поверхностью Σ, величину

$$\lim_{\Omega \to M} (1/V(\Omega)) \iint_{\Sigma} A_n\, d\sigma \qquad (5.3)$$

и назовем ее потоком вектора A через внешнюю сторону поверхности Σ. Мы получим аддитивную функцию области $\Phi(\Omega)$. Производная функции $\Phi(\Omega)$ по объему, т.е. предел (5.3) называется дивергенцией векторного поля $\overline{A}$ и обозначается $div\,\overline{A}$. Если $\overline{A} = (P, Q, R)$ – векторное поле, определенное в области Ω и такое, что функции P, Q, R непрерывны в Ω вместе со всеми своими первыми производными, то $div\,\overline{A}$ существует во всех точках этой области (в любой декартовой системе координат) и выражается формулой

$$div\,\overline{A} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z. \qquad (5.4)$$

Пользуясь этим понятием, формулу Остроградского можно записать так

$$\iint_{\Sigma} A_n\, d\sigma = \iiint_{\Omega} div\,\overline{A}\, dv, \qquad (5.5)$$

т.е. поток вектора $\overline{A}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности Σ равен интегралу от дивергенции поля $\overline{A}$, взятому по области, ограниченной поверхностью Σ.

Соленоидальное поле

Векторное поле, дивергенция которого тождественно равна нулю, называется соленоидальным или трубчатым. Для соленоидальных полей выполнен закон сохранения интенсивности векторной трубки.

Пусть $\overline{A}$ соленоидальное поле. Рассмотрим некоторую векторную трубку (поверхность, состоящая из векторных линий) и возьмем ее отрезок, заключенный между двумя ее сечениями Σ_1 и Σ_2 (рис. 5.1).

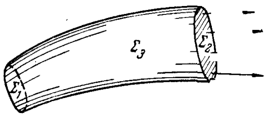


Рис. 5.1

Эти сечения вместе с боковой поверхностью Σ трубки образуют замкнутую поверхность Σ_3. Так как поле соленоидально, т.е. $div\ \overline{A} \equiv 0$, в силу формулы Остроградского

$$\oiint_{\Sigma} A_n\, d\sigma = \oiint_{\Sigma_1} A_n\, d\sigma + \oiint_{\Sigma_2} A_n\, d\sigma + \oiint_{\Sigma_3} A_n\, d\sigma = 0\,, \qquad (5.6)$$

причем в каждом из слагаемых имеется в виду внешняя сторона поверхности. Интеграл по поверхности Σ_3 равен нулю, так как по определению векторной трубки на поверхности Σ_3 направление векторного поля $\overline{A}$ перпендикулярно направлению нормали к этой поверхности. На Σ_3 величина $A_n \equiv 0$. Если теперь на сечении Σ_1 направление нормали изменим на противоположное, то равенство (5.6) можно записать в виде:

$$\oiint_{\Sigma_1} A_n\, d\sigma = \oiint_{\Sigma_2} A_n\, d\sigma\,, \qquad (5.7)$$

т.е. поток вектора $\overline{A}$ через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение.

Задача 5.4.

Найти поток векторного поля $\overline{A} = 2xi + (1 - 2y)j + 2zk$ через замкнутую поверхность S: $x^2 + z^2 = 1 - 2y\ (y \geq 0)$ и $z = 0$ (рис. 5.2).

Решение. Поток $П$ вычисляется по формуле

$$П = П_1 + П_2 = \oiint_{S_1} \overline{A}\,\overline{n}\, d\sigma + \oiint_{S_2} \overline{A}\,\overline{n}\, d\sigma,$$

где S_1 – часть поверхности параболоида (S_1 проектируется на $XOZ\ (y=0)$ и представляет собой уравнение окружности $x^2 + z^2 = 1)$, а S_2 – часть плоскости XOY.

$$П_1 = \oiint_{S_1} \overline{A}\,\overline{n}\, d\sigma = \oiint_{D_1} 3(x^2 + + z^2)dxdz = \oiint_{D_1} 3r^3 dr d\varphi = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3\, dr = 1.5\pi.$$

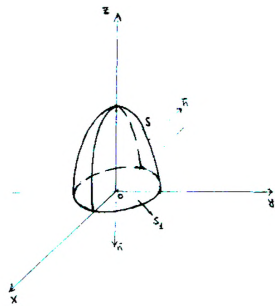


Рис. 5.2

Так как S_1: $F(z,y,z) = x^2 + z^2 - 1 + 2y$, то $\overline{n} = grad\ F / |gradF| =$

$$= \frac{xi}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}} + \frac{j}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}} + \frac{zk}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}},\ x^2 + z^2 = 1 - 2y,$$

а $\overline{n}$ с осью OY образует острый угол, т.е. является внешней нормалью к поверхности S_1. D_1 – проекция S_1 на XOZ.

$$П_2 = \oiint_{S_2} \overline{A}\,\overline{n}\, d\sigma = -\oiint_{S_2} d\sigma = -\pi$$

Так как на поверхности S_2 $(y = 0,\ x^2 + z^2 \leq 1)$ $\overline{n} = -j$.

$П = П_1 + П_2 = 1{,}5\pi - \pi = 0{,}5\pi.$

Уравнение неразрывности

Выведем уравнение движения жидкости, так называемого уравнения неразрывности.

Пусть $\overline{A}$ - поле скоростей движущейся жидкости. Мы будем предполагать, что в рассматриваемой области жидкость не исчезает и не возникает. Мы будем предполагать эту жидкость сжимаемой, т.е. считать плотность ρ некоторой функцией координат x, y, z и времени t.

Тогда $\partial\rho/\partial t = - div(\rho\,\overline{A})$ – уравнение, связывающее между собой скорость и плотность движущейся жидкости при отсутствии источников и стоков. Оно называется уравнением неразрывности.

Если ввести вектор $J = \rho\,\overline{A}$ плотность потока жидкости, то уравнение неразрывности будет

$$\partial\rho/\partial t + divJ = 0. \qquad (5.8)$$

Формула Остроградского на плоскости

Рассмотрим плоское векторное поле $\overline{A}$, т.е. поле, компоненты которого в некоторой декартовой системе координат имеют вид

$$P = P(x, y),\ \ Q = Q(x, y),\ \ R = 0\ . \qquad (5.9)$$

Дивергенция такого поля равна $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$. Пусть Ω - цилиндр единичной высоты, с основанием G, лежащим в плоскости $X0У$, и боковой поверхностью Σ (рис. 5.3).

Запишем для области Ω формулу Остроградского, предварительно заметив, что тройной интеграл от $div\,\overline{A}$ численно равен двойному интегралу от этого выражения по плоской области G, поток вектора (4.11) через поверхность Σ равен криволинейному интегралу

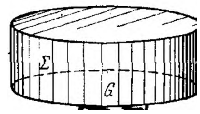


Рис. 5.3

$$П = \oint_L [P\cos(\overline{n}, x) + Q\cos(\overline{n}, y)]\,dl =$$

$$= \iint_G [\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y]\,dxdy \qquad (5.10)$$

где $\overline{n}$ - нормаль к контуру L, а поток через верхнее и нижнее основания цилиндра Ω равен нулю (последнее вытекает из того, что вектор (5.10) перпендикулярен оси z). Отбросим теперь окончательно третью координату z, будем рассматривать (5.10) как векторное поле, заданное в плоскости $XOУ$. Назовем криволинейный интеграл

$$\oint_L [P\cos(\overline{n}, x) + Q\cos(\overline{n}, y)]\,dl \qquad (5.11)$$

потоком этого векторного поля через контур L. Формула (5.10), так называемая формула Остроградского для плоскости, означает, что двойной интеграл от дивергенции плоского поля $\overline{A}$ по некоторой области G равен потоку вектора $\overline{A}$ через границу этой области. Формула (5.10) – просто эквивалент формулы Грина. Таким образом, как формула Стокса, так и формула Остроградского в плоском случае превращаются в формулу Грина.

5.4. Циркуляция векторного поля

Пусть $\overline{A} = (P, Q, R)$ – некоторое векторное поле и L – гладкая или кусочно-гладкая кривая. Криволинейный интеграл

$$Ц = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_L A_\tau\,dl,$$

где $A\tau$ – тангенциальная составляющая поля A на контуре L, которую назовем циркуляцией векторного поля А вдоль кривой L. Если $\overline{A} = (P,\ Q,\ R)$ – силовое поле, то его циркуляция вдоль кривой L представляет работу этого силового поля вдоль пути L. Для полей иной природы циркуляция имеет другой физический символ.

Задача 5.5. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{A} = xi - zj + yk$ L пересечение поверхности $y^2 = 4 - x - z$ с координатными плоскостями (рис. 5.4).

Решение. Циркуляция вдоль кривой L вычисляется по формуле

$$Ц = \oint_L \overline{A}\,\overline{dl} = \int_{L_1} \overline{A}\,\overline{dl} + \int_{L_2} \overline{A}\,\overline{dl} + \int_{L_3} \overline{A}\,\overline{dl} =$$

$$= -8 + 32{,}3 + 8 = 32/3,$$

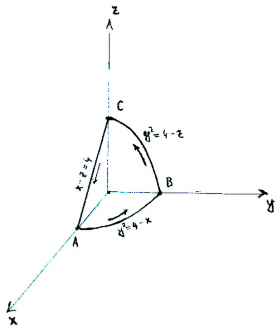


Рис. 5.4

где

$\int_{L_1} \overline{A}\,\overline{dl} = -\int_0^4 x dx = -x^2/2\Big|_0^4 = -8.$ Так как $L_1 = \overset{\frown}{AB}: z = 0,\ dz = 0,\ y^2 = 4 - x,\ x \in [0,4],$ $\overline{A}\,\overline{dl} = xdx;$

$$\int_{L_2} \overline{A}\,\overline{dl} = -\int_2^0 (y^2+4)dy =$$

$$= y^3/3 + 4y\Big|_0^2 = 32/3.$$

Так как $L_2 = \overset{\frown}{BC}: x = 0,$ $dx = 0,\ z = 4 - y^2,\ dz = -2ydy,\ y \in [0,2],$ $\overline{A}\,\overline{dl} = -zdy + ydz;$

$$\int_{L_3} \overline{A}\,\overline{dl} = \int_0^4 xdx = x^2/2\Big|_0^4 = 8.$$

Так как $L_3 = \overset{\frown}{CA}: y = 0,\ dy = 0,\ z + x = 4,\ x \in [0,4],$ $\overline{A}\,\overline{dl} = xdx.$

Задача 5.6. Найти работу силового поля $\overline{A} = x + xj - k$ вдоль одного витка линии $L: x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t\ (t \in [0,2\pi]).$

Решение. Работа $W = \int_{L_2} \overline{A}\,\overline{dl} = \int_{L_2} xdx + xdy - dz =$

$$= \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + \cos^2 t - 2]dt = -\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} + (t/2 + \sin^2 t/4)\Big|_0^{2\pi} - 4\pi = -3\pi.$$

5.5. Ротор векторного поля

Если L - замкнутый контур, то формула имеет тот же вид

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Sigma [(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,dxdy + (\partial R/\partial y -$$

$$- \partial Q/\partial z)\,dydz + (\partial P/\partial z - \partial R/\partial x)]\,dzdx, \qquad (5.12)$$

где поверхностный интеграл взят по некоторой поверхности Σ, натянутой на контур L. Правая часть равенства (5.12) представляет собой поток через поверхность Σ вектора. Назовем этот вектор ротором (или вихрем) векторного поля $\overline{A}$ и обозначим $rot\ \overline{A}$. Таким образом,

$$rot\ \overline{A} = (\partial R/\partial y - \partial Q/\partial z)\,i + (\partial P/\partial z - \partial R/\partial x)\,j + (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,k.$$

Пользуясь понятием ротора, можно записать формулу Стокса в следующем компактном виде

$$\oint_L A_\tau\, dl = \iint_\Sigma (rot\,\overline{A})_n\, d\sigma. \qquad (5.13)$$

Циркуляция векторного поля $\overline{A}$ вдоль некоторого замкнутого контура L равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность, натянутую на этот контур.

В определении ротора участвует не только само векторное поле $\overline{A}$, но и некоторая определенная система координат (x, y, z). Однако на самом деле вектор $rot\ \overline{A}$ не зависит от выбора координатной системы.

Циркуляция вектора $\overline{A}$ вдоль контура не зависит от выбора координатной системы.

Направление нормали $\overline{n}$ выбрано произвольно, поэтому проекция вектора $rot\ \overline{A}$ на любое направление, а следовательно и сам вектор $rot\ \overline{A}$, не зависят от выбора системы координат.

Ротор векторного поля $\overline{A} = (P, Q, R)$ удобно записывать в виде символического определителя

$$det = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

где i, j, k – единичные векторы, направленные по осям координат, а под умножением символа $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ на некоторую функцию понимается выполнение соответствующей операции дифференцирования (например, $(\partial/\partial x)R$ означает $\partial R/\partial x$).

Действительно, разложив определитель по элементам первой строки, получим, что $det = rot\ \overline{A}$.

Мы назвали потенциальным векторное поле, представимое в виде градиента некоторого скалярного поля, и показали, что векторное поле $\overline{A} = (P, Q, R)$ потенциально в том и только том случае, если его компоненты удовлетворяют условиям

$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, $\partial Q/\partial z = \partial R/\partial y$, $\partial R/\partial x = \partial P/\partial z$, но эти три условия означают не что иное, как равенство нулю всех трех компонент ротора поля $\overline{A}$.

Таким образом, для того чтобы векторное поле $\overline{A}$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $rot\ \overline{A} \equiv 0$.

Вычисление показывает, что для любого векторного поля $\overline{A}$ $div(rot\ \overline{A}) \equiv 0$, т.е. векторное поле, представимое в виде ротора какого-либо другого векторного поля, соленоидально. Всякому полю $\overline{A}$, удовлетворяющему условию $div\ \overline{A} = 0$ можно подобрать поле $\overline{B}$ так, что $\overline{A} = rot\ \overline{B}$. Векторное поле $\overline{B}$ определяется не однозначно, а с точностью до произвольного слагаемого $grad\ U$.

Если $\overline{A} = rot\ \overline{B}$, то поле $\overline{B}$ называется вектор – потенциалом поля $\overline{A}$.

Можно доказать, что всякое векторное поле $\overline{A}$ представимо в виде $\overline{A} = \overline{B} + \overline{C}$, где $\overline{B}$ потенциально, а $\overline{C}$ соленоидально.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.7. Найти область определения функции
$U(x,y) = sin(y^2 - 4x)$ и определить линии уровня скалярного поля.

Ответ: Параболы $y^2 = 4x + arc\ sin\ C$.

Задача 5.8. Найти производную скалярного поля
$U(x, y, z) = x^3y - xy^3 + 6z$ в точке $M\ (1, 1, -1)$ по направлению проходящей через эту точку в точку $A(3, -1, -2)$.

Ответ: 2.

Задача 5.9. Найти векторные линии в векторном поле

$\overline{A} = xi + 2z^2j + zk.$

Ответ: Пересечение поверхностей $x = C_1z$, $y = z^2+C_2$.

Задача 5.10. Найти поток векторного поля $\overline{A} = xi/3 + (z^2 - x^2)j + 2zk/3$ через полную поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 1$.

Ответ: 2π.

Задача 5.11. Найти поток векторного поля $\overline{A} = x^2i + y^2j + z^2k$ через нижнюю сторону части параболоида $x^2 + z^2 = 1 - 2z$, расположенную во втором октанте $(x \le 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$.

Ответ: $-(\pi/(48) + 4/(15))$.

Задача 5.12. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{A} = (x + z)i + (x - y)j + xk$ по контуру C: $x^2/4+y^2/9=1$.

Ответ: 6π.

Задача 5.13. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{A} = (x + y)i + (x - z)j + (y + z)k$ по контуру треугольника ABC, где $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Ответ: 1.

6. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

Выше было введено понятие градиента скалярного поля. Переход от скалярного поля U к $grad\ U$ можно рассматривать как некоторую операцию, которую обозначают символом V (читается «набла») и называют оператором «набла» или оператором Гамильтона. Таким образом, по определению $V = grad\ U$.

Оператор V удобно трактовать как символический вектор с компонентами: $V = i\partial/\partial x + j\partial/\partial y + k\partial/\partial z$. Применение его к скалярной функции – как умножение скаляра на этот вектор. С помощью вектора V удобно записывать и остальные операции векторного анализа, а именно, если $\overline{A} = (P, Q, R)$, то $div\ \overline{A} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z = (V, \overline{A})$, т.е. дивергенция векторного поля $\overline{A}$ есть скалярное произведение символического вектора V и вектора $\overline{A}$. Аналогично $rot\ \overline{A} = (\partial R/\partial y - \partial Q/\partial z)i + (\partial P/\partial z - \partial R/\partial x)j + (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)k = [V, \overline{A}]$, т.е. ротор векторного поля $\overline{A}$ есть векторное произведение вектора V на вектор $\overline{A}$.

Действия с вектором *V*

Необходимость введения символического вектора V состоит в том, что с его помощью удобно получать и записывать различные формулы векторного анализа.

Рассмотрим два равенства: $rot\ grad\ U = 0$ и $div\ rot\ \overline{A} = 0$. Переписав их с помощью вектора V, получим $[V, VU] = 0$ и $(V, V, \overline{A}) = 0$.

Аналогия между символическим вектором V и «настоящими» векторами не полная. Формулы, содержащие символический вектор V, аналогичны обычным формулам векторной алгебры в том случае, если они не содержат произведений переменных величин (скалярных или векторных), до тех пор, пока нам не приходится применять входящие в V операции дифференцирования к произведению переменных величин. Если же некоторое выражение содержит произведение двух или более переменных сомножителей, применяя к этому выражению вектор V, нельзя использовать обычные правила векторной алгебры. Пусть $U = U(x, y, z)$ – скалярное поле и $\overline{A} = \overline{A}(x, y, z)$ – векторное поле. Вычислим $div\ (U\overline{A})$, т.е. $(V, U\overline{A})$.

Применение вектора V сводится к применению входящих в него операций дифференцирования.

Дадим сводку формул, связывающих операции взятия градиента, ротора и дивергенции с основными операциями векторной алгебры:

1. $div(U\overline{A}) = (\overline{A}, grad\ U) + U\ div\ \overline{A}$;
2. $grad\ (UW) = W\ grad\ U + U\ grad\ W$;
3. $rot\ (U\overline{A}) = U\ rot\ \overline{A} + [grad\ U, \overline{A}]$;
4. $div[\overline{A}, \overline{B}] = (\overline{B}, rot\ \overline{A}) — (\overline{A}, rot\ \overline{B})$;
5. $rot[\overline{A}, \overline{B}] = (\overline{B}, V)\ \overline{A} - (\overline{A}, V)\ \overline{B} + \overline{A}\ div\ \overline{B} - \overline{B}\ div\ \overline{A}$;
6. $grad\ (\overline{A}, \overline{B}) = (\overline{B}, V)\overline{A} + (\overline{A}, V)\ \overline{B} + [\overline{B}, rot\ \overline{A}] + [\overline{A}, rot\ \overline{B}]$.

Дифференциальные операции второго порядка

Рассмотрим так называемые операции второго порядка, т.е. всевозможные комбинации трех указанных выше основных операций. Комбинируя символы *grad, rot, div* попарно, мы можем составить из них девять пар.

Все имеющиеся здесь возможности изображаются следующей таблицей.

Скалярное поле U	Векторное поле $\overline{A}$	
grad	*div*	*Rot*
	grad div $\overline{A}$	
		$div\ rot\ \overline{A} \equiv 0$
$rot\ grad\ U \equiv 0$		$rot\ rot\ \overline{A}$

В таблице пустые клетки, отвечающие не имеющим смысла сочетаниям основных операций.

Выражение *div grad U* называется оператором Лапласа и обозначается ΔU. Воспользовавшись известными выражениями градиента и дивергенции, получаем
$\Delta U = div(gradU) = \partial^2U/\partial x^2 + \partial^2U/\partial y^2 + \partial^2U/\partial z^2$.

Дивергенция и градиент не зависят от выбора координатной системы, а ΔU зависит от самого поля U. Оператор Лапласа Δ естественно рассматривать как скалярный квадрат вектора V, т.е. $\Delta = (V, V) = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2)$, и $(V,V)U = \partial^2U/\partial x^2 + \partial^2U\partial y^2 + \partial^2U/\partial z^2 = \Delta U$.

Оператор Δ применять не к скалярной величине, а к вектору. Если $\overline{A} = A_xi + A_yj + A_zk$, то под $\Delta\overline{A}$ понимается вектор $\Delta A_xi + \Delta A_yj + \Delta A_zk$.

Это выражение зависит только от самого вектора $\overline{A}$, но не от выбора системы координат. Рассмотрим теперь операции второго порядка для векторного поля. Применительно к векторному полю имеют смысл три операции второго порядка: $grad\ div\ \overline{A}$, $rot\ rot\ \overline{A}$, $div\ rot\ \overline{A}$. С выражением вида $div\ rot\ \overline{A}$ мы уже встречались ранее при нахождении условий соленоидальности поля и выяснили, что всегда $div\ rot\ \overline{A} = 0$. Выражения $grad\ div\ \overline{A}$ и $rot\ rot\ \overline{A}$ не обязаны обращаться в нуль. Они часто встречаются в различных вопросах механики и электродинамики. Рассмотрим выражение $rot\ rot\ \overline{A}$, которое в символической форме записывается так: $[V, [V, \overline{A}]]$.

Воспользовавшись формулой для двойного векторного произведения, получим, что $[V, [V, \overline{A}]] = V(V, \overline{A}) - (V, V)\ \overline{A}$, т.е. $rot\ rot\ \overline{A} = grad\ div\overline{A} - \Delta\overline{A}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем пособии рассмотрены решения типовых задач по разделам «Кратные интегралы и Векторный анализ».

Издание рекомендуется вместе со стандартными задачами по высшей математике для работы на практических занятиях, а также при выполнении типовых расчетов и при составлении комплексных заданий, аттестационных контрольных работ по указаным темам.

Авторы считают, что пособие поможет более глубокому и полному усвоению студентами материала по данным в пособии разделам и будет соответствовать эффективной организации учебного процесса по курсу «Математика» для студентов инженерно-технических специальностей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука , 1985. Т. 2. 560 с.

2. Шестаков А.А., Малышева И.А., Полозков Д.П. Курс высшей математики. М.: Высш. шк., 1987. 320 с.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1986. Т. 3. 656 с.

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989. 655 с.

5. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1967. 608 с.

6. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 4., Харьков: Изд-во ХГУ, 1986. 235 с.

7. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовой расчет. М.: Высшая школа, 1998. 206 с.

8. Сборник задач по высшей математике. 2 курс/ К.Н. Лунгу , В.П. Норин, Д.Т. Письменный , Ю.А. Шевченко. М.: Айрис- пресс, 2004. 592 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Катрахова Алла Анатольевна.
Купцов Валерий Семенович.

**КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ**

В авторской редакции.

Выпускающий редактор И.В. Медведева

Компьютерный набор А.А. Катраховой,
В.С. Купцова

Подписано в печать 0.4. 04.06. Формат 60x84/16.
Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л.5,9. Уч.-изд. л.4,5. Тираж 250. экз.
Зак. №___

Воронежский государственный технический университет
394026 Воронеж, Московский просп., 14