МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»

**Л.В. Акчурина Н.Н. Некрасова
А.Б. Кущев В.К. Каверина**

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

по дисциплине «Математика»
для студентов 1-го курса всех специальностей
направления 08.03.01 “Строительство”

Утверждено учебно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2018

УДК 517(07)
ББК 22.161я7
Д503

Рецензенты:
кафедра цифровых технологий
Воронежского государственного университета
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, профессор С.Д. Кургалин);
д-р тех. наук, профессор кафедры информатики и графики
ВГТУ В.П. Авдеев

Д503 **Дифференциальное исчисление для функции одной переменной: учебное пособие для студентов 1-го курса всех специальностей и форм обучения направления 08.03.01 "Строительство"** / Л.В. Акчурина, Н.Н. Некрасова, А.Б. Кущев, В.К. Каверина. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2018. – 103 с.

ISBN

Пособие содержит материал по разделам математического анализа дифференцирования функции одной переменной. Материал сгруппирован по темам, содержит теоретический материал, который сопровождается набором примеров с подробным решением.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению 08.03.01 "Строительство" и предназначено для студентов 1 курса.

Ил. 29. Библиогр.: 15 назв.

УДК 517(07)
ББК 22.161я7

ISBN ……………………………..

ВВЕДЕНИЕ

Математические методы исследования в современной науке и технике играют все большую роль. Это обусловлено, прежде всего, совершенствованием вычислительной техники, наличием большого спектра прикладных программ, которые опираются на методы дифференциального исчисления и благодаря которым существенно расширяются возможности применения математики при решении многих задач.

Для успешного изучения физики, механики, электротехники, теории машин и механизмов, а также других общетеоретических и специальных дисциплин необходимо понимать смысл математических терминов и понятий, таких как уравнение, функция, предел, производная. Поэтому курс математики является фундаментом всего образования инженера.

Настоящее учебное пособие определяет важнейшие понятия математики - такие как функция одной переменной, предел функции, ее непрерывность, бесконечно малые и бесконечно большие величины, производная и дифференциал функции. Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров и задач различной трудности.

Предлагаемое пособие ориентировано на студентов первого курса первого семестра очной и заочной форм обучения всех специальностей направления “Строительство”. Материал издания делится на параграфы, объединенные одной темой, которые в свою очередь разбиваются на более мелкие подразделы, в рамках которых рассматриваются и решаются отдельные конкретные вопросы.

Практическая значимость пособия состоит в подборе задач, помогающих студенту установить связь теоретических методов математического анализа с их практическим применением. Составлены варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы.

Авторы надеются, что работа с учебным пособием "Дифференциальное исчисление для функции одной переменной" поможет студентам подготовиться к восприятию дальнейших более сложных разделов курса математики, а также успешно подготовится к зачету или экзамену.

§ 1. Функции одной переменной

1.1. *Основные определения*

Определение 1.1. Две переменные величины x и y связаны функциональной зависимостью, если каждому значению одной из них соответствует определенное значение другой.

Если одна из двух функционально связанных между собой переменных величин может принимать свои значения независимо, то такая величина называется независимой переменной или аргументом. В этом случае другая величина называется зависимой переменной или функцией.

Определение 1.2. Переменная y называется функцией от переменной x, если каждому значению x из некоторой области D соответствует единственное значение y, обозначаемое $y(x)$ (читается «y от x»).

Запись $y(a)$ указывает, что речь идет о значении функции $y = y(x)$ в точке a. Например, если функция задана формулой $y = x^2$, то $y(2) = 4$, а $y(0{,}3) = 0{,}09$.

Определение 1.3. Множество всех возможных значений аргумента x, при которых существует соответствующее значение функции y, называется областью определения функции и обозначается $D(y)$.

Определение 1.4. Множество всех возможных значений, которые может принимать функция y, когда x пробегает всю область определения $D(y)$, называется областью изменения или областью значений функции и обозначается $E(y)$.

Существует очень наглядный способ представить функциональную связь между x и y – это *график функции*.

Определение 1.5. Графиком функции называется множество точек $M(x; y(x))$ на координатной плоскости xOy, чьи координаты имеют вид $(x; y(x))$, причем первая координата x пробегает всю область определения функции $D(y)$. Таким образом, горизонтальная ось Ox связывается с аргументом, а вертикальная ось Oy с функцией.

1.2. *Способы задания функций*

Графический способ. В этом способе задания для вычисления значений функции предлагается ее график, нарисованный на координатной плоскости. Для удобства график чертится на бумаге, на которой изображена координатная сетка, то для нахождения значения функции от некоторого значения x из области определения надо:

1. Найти на горизонтальной оси абсцисс точку, изображающую число x;
2. Провести через эту точку вертикальную прямую до ее пересечения с графиком функции, координаты ее имеют вид $M(x, y(x))$;
3. Провести через точку M горизонтальную прямую до ее пересечения с осью ординат в некоторой точке N;
4. Определить с помощью масштаба или координатной шкалы то число, которое соответствует точке N на оси ординат – это число и будет приближенным значением функции $y(x)$ в точке x.

Преимуществом этого способа является его наглядность. По графику видно, где функция возрастает, а где убывает, где находятся ее наибольшее или наименьшее значения, где функция меняется быстро, а где медленно.

Недостатком этого способа является низкая точность, с которой вычисляются значения функции.

Табличный способ. Функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции, где в одной графе таблицы перечисляются значения аргумента: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а в другой – соответствующие им значения функции $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$, … , $y_n = y(x_n)$. При этом в хороших таблицах значения аргумента задаются с малым шагом (часто), а соответствующие значения функции вычислены с высокой точностью.

Табл. 1

x	−5	0	7	12
$y(x)$	2	5	9	25

Удобством этого способа является простота и высокая точность получения значений функции ***для табличных значений аргумента.***

Недостатком является ограниченная точность вычисления значений функции для промежуточных (не вошедших в таблицу) значений аргумента. Недостатком также является отсутствие наглядности, по сравнению, например, с графиком функции. Однако табличный способ (в свою очередь) может быть полезен как промежуточный этап при построении графика функции.

Например, известные школьные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы и другие.

На смену табличному способу, в конце двадцатого века, пришел э***лектронно-вычислительный способ.*** С появлением компактных современных ЭВМ для вычисления любых значений данной функции с нужной точностью используется подпрограмма, в которой используется некоторый алгоритм вычисления. В частности, для вычисления используется ряд Маклорена, например, $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! + \dots$, где подставляется x в радианах можно вычислить синус любого острого угла, а зная свойства этой функции, то и любого угла.

Очень удобно сочетание электронно-вычислительного способа и графического, когда результаты вычислений отображаются на экране, что позволяет наглядно увидеть график функции. Например, на одном из всесоюзных съездов механики была на экране показана, рассчитанная на ЭВМ модель развития галактики, далее по очереди стали появляться различные типы галактик. Астрономы стали их классифицировать, далее стало понятно какие из них более молодые, а какие постарше.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным и эффективным способом, так как позволяет проводить ее исследование методами математического анализа. Функция задаётся в виде одного или нескольких уравнений:

$$y = x^2 + 2x - \sqrt{4x},\ 8^{x+y} = x \cdot y,\ f(x) = \begin{cases} \cos 3x, & x \le 0, \\ x+1, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x \ge 1. \end{cases}$$

Аналитически заданные функции делят на *явные* и *неявные*. Явной называется функция вида $y = f(x)$, представляющая выражение, разрешённое относительно y. Например, $y = \sqrt{x^3 - 3x + \sin x}$.

Функция с двумя переменными, заданная в виде уравнения $F(x,y)=0$, называется неявной функцией. Например, $4y^3+3\sin x^2-5=0$.

Функцию, заданную в явном виде $y=\log 2x-\sqrt{x}+7$, всегда можно представить в неявном виде $y-\log 2x+\sqrt{x}-7=0$. Обратно значительно труднее, а иногда просто невозможно.

К аналитически заданным функциям относятся также *параметрически* заданные функции. Пусть переменная t задана на промежутке $t\in[a,b]$, где t называется параметром, а переменные x и y являются функциями этого параметра $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\phi(t). \end{cases}$ Такой способ задания требует поточечного построения.

Например, окружность радиуса r с центром в начале координат описывается параметрически $\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t. \end{cases}$ Это не трудно проверить, если знать, что параметр $t\in[0;2\pi]$ задает угол с положительным направлением оси Ox:

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x(t)$	r	0	$-r$	0	r
$y(t)$	0	r	0	$-r$	0
точки	$A(r;0)$	$B(0;r)$	$C(-r;0)$	$D(0;-r)$	$A(r;0)$

В частности, вычислим точки пересечения кривой с осями координат, график функции представлен на рис. 1:

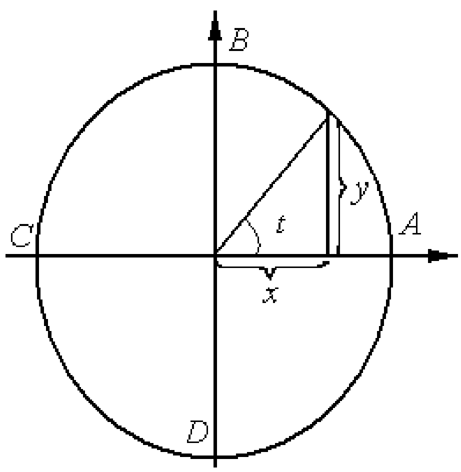


Рис. 1. График параметрически заданной окружности $\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t \end{cases}$ [10]

Параметрическое описание кривой эллипса при $t \in [0; 2\pi]$ имеет вид $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$ Из указанной пары уравнений, используя основное тригонометрическое тождество, можно получить каноническое уравнение эллипса.

1.3. *Основные элементарные функции*

В классическом математическом анализе выделены пять типов *основных элементарных функций*.

1. ***Степенные функции*** $y = x^a$ *, где показатель степени а – любое число; в зависимости от показателя степени а область определения такой функции может быть различной, но она всегда содержит* $(0,+\infty)$*; отметим, что в этот класс входят* $y = c$ *– «функция-константа», принимающая только одно значение с,* $-\infty < c < +\infty$*; прямая* $y = x$*, парабола* $y = x^2$*, гипербола* $y = 1/x$ *и другие кривые, но для всех степенных функций производная считается по одной и той же формуле* $(x^a)' = ax^{a-1}$.
2. ***Показательные функции*** $y = a^x$*, где основание степени а – положительное, не равное единице число,* $D(y)=(-\infty, \infty)$, $E(y)=(0, \infty)$*, их два подтипа: возрастающие при* $a > 1$ *и убывающие при* $0 < a < 1$.
3. ***Логарифмические функции*** $y = \log_a x$*, где основание а – положительное, не равное единице число,* $D(y)=(0, \infty)$, $E(y)=(-\infty, \infty)$*, так как они обратные к показательным функциям, то у них такая же ситуация с монотонностью: возрастающие при* $a > 1$ *и убывающие при* $0 < a < 1$.
4. ***Тригонометрические функции***: $y = \sin x$ *– функция «синус»,* $y = \cos x$ *– функция «косинус», их области определения – вся числовая ось, они ограничены (по абсолютной величине не превышают единицы) и обладают основным периодом* $T = 2\pi$;

$y = tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *– функция «тангенс», область определения – вся числовая ось за исключением точек* $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$y = ctg\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ – *функция «котангенс», область определения – вся числовая ось за исключением точек* $\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Для двух последних функций E(y) = (–∞, ∞), у двух последних функций основной период T = π.

Есть еще две тригонометрические функции «секонс» и «косеконс», получающиеся при делении единицы соответственно на синус и косинус, на практике для решения прямоугольных треугольников достаточно только первых трех тригонометрических функций.

5. *Обратные тригонометрические функции*:

$y = \arcsin x$ – *функция «арксинус», областью определения которой является отрезок* [–1, 1], *а областью значений – отрезок* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

$y = \arccos x$ – *функция «арккосинус», областью определения которой является отрезок* [–1, 1], *а областью значений – отрезок* $[0, \pi]$;

$y = arctg\ x$ – *функция «арктангенс», областью определения которой является вся числовая ось, а областью значений – интервал* $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

$y = arcctg\ x$ – *функция «арккотангенс», областью определения которой является вся числовая ось, а областью значений – интервал* $(0, \pi)$.

Определение 1.6. *Элементарными функциями* называется множество функций, полученных из вышеперечисленных основных элементарных функций с применением к ним конечного числа арифметических действий и операции суперпозиции.

Самое удивительное, что до двадцатого века множества элементарных функций хватало для описания окружающего мира, хотя при появлении операции интегрирования заметили, что есть «неэлементарные» первообразные. Например, для функции $f(x) = \sin x / x$ первообразная не является элементарной функцией. Дирихле придумал «неэлементарную» функцию, названную его именем, которая равна единице для иррациональных чисел, и нулю – для рациональных. Приведем пример существенно «неэлементарной» функции, без которой нельзя обойтись в современной радиотехнике, а именно дельта-функция – она равна нулю для всех отличных от нуля значений аргумента и равна бесконечности при $x = 0$. В неклассическом анализе дельта-функция является обобщенной производной от известной функции Хевисайда, которая равна нулю при $x < 0$ и равна единице при $x > 0$.

Рассмотрим простейшую *сложную* функцию, содержащую операцию суперпозиции для двух функций: $y = w(u(x))$. Сначала берется значение аргумента x, затем находится значение $u(x)$, наконец, от получившегося числа $u(x)$ находится значение $w(u(x)) = y(x)$. Та функция, которая выполняется последней (у нас это $w(u)$) называется *внешней* функцией, а все, что является аргументом внешней функции, образует *внутреннюю* функцию $u(x)$.

Например, функции $y = \cos(x^2)$, $y = \lg(x + 2^X)$ являются сложными с внешними функциями косинусом и логарифмом, соответственно, а простой элементарной функцией с тангенсами и логарифмами является функция $y(x) = tgx - 10\log_3(x) - tgx \cdot \log_3(x) - \dfrac{tgx + 12\log_3(x)}{tgx - \log_3(x)}$.

Например, сложную функцию $y = \lg\sin\sqrt{3^x}$, являющуюся суперпозицией четырех элементарных функций, можно разбить на цепочку элементарных функций $w = 3^x$, $v = \sqrt{w}$, $u = \sin v$, $y = \lg u$.

1.4. *Обратные функции*

Пусть на множестве X (области определения функции) задана функция $y = f(x)$ с множеством значений Y.

Предположим можно построить функцию $x = \varphi(y)$, которая каждому y из множества Y ставит в соответствие одно единственное значение x из множества X. Областью определения новой функции будет множество Y, а множество значений X. Такая функция $\varphi(y)$ (ее обозначают $f^{-1}(y)$) называется *обратной* к функции $f(x)$ и по определению $f(\varphi(x)) = x$ (или $\varphi(f(x)) = x$).

При составлении обратной функции необходимо, чтобы каждому y из множества Y ставилось в соответствие *единственное* значение x, а это условие выполнимо, только если исходная (ее еще называют прямой) функция была *строго монотонна*.

Графики взаимообратных функций всегда симметричны относительно прямой $y = x$, которая является биссектрисой 1-го и 3-го координатных углов.

Приведем примеры таких функций: $y = a^x$ и $y = \log_a x$; $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ при $x \ge 0$ (см. далее рис. 2б); $y = tgx$ и $y = arctgx$ при $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (см. рис. 2а).

Для последней пары функций можно рассматривать обратную функцию к прямой функции $y = \sin x$ и на другом промежутке, например, при $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, но, если возможно, берут промежуток с началом координат.

Для нечетных функций, с областью определения симметричной относительно начала координат, свойство нечетности сохраняется и для обратной функции.

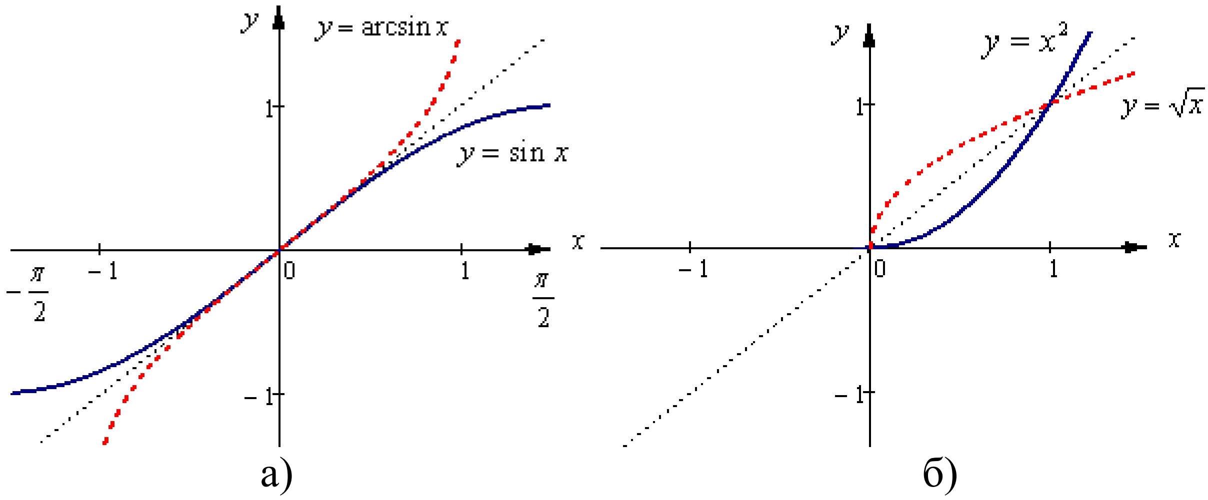


Рис. 2. Графики взаимообратных функций

Рассмотрим некоторые примеры на нахождение области определения функции. Напомним, что элементарная функция составляется из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и подстановок одной функции в аргумент другой. Поэтому в область определения элементарной функции войдут все те x, для которых аргументы каждой из функций, присутствующих в $y(x)$, будут находиться в пределах их областей определения.

Пересечение областей определения каждой из функций, присутствующих в $y(x)$ будет областью определения функции $y(x)$.

Пример 1. Найти область определения функции $y=\sqrt[8]{\frac{\pi^2}{4}-x^2}+\frac{\sin x}{1-\cos x}$. Найдем области определения каждого из слагаемых:

- извлечение $\sqrt[8]{\frac{\pi^2}{4}-x^2}$ возможно только тогда, когда $\frac{\pi^2}{4}-x^2\ge 0$, отсюда $x^2\le\frac{\pi^2}{4}$ или $|x|\le\frac{\pi}{2}$, что означает $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$;
- вычислить отношение $\frac{\sin x}{1-\cos x}$ возможно, если выбрать x так, чтобы выполнялось деление $\sin x$ на $(1-\cos x)$, что возможно лишь тогда, когда знаменатель $(1-\cos x)\ne 0$, т.е. $\cos x\ne 1$, тогда $x\in R/\{0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,...\}$.

Итак, областью определения функции $y(x)$ является пересечение отрезка $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ и $x\in R/\{0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,...\}$, так как на отрезок попадает только одна точка $x=0$, где второе слагаемое не определено, то, исключив ее, мы и получим все x, при которых $y(x)$ определена. Ответ: $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Пример 2. Найти область определения функции

$$y=\arcsin\frac{2x-1}{5}+\frac{2}{\sqrt{1-\log_2 x}}.$$

Функция $y(x)$ существует тогда, когда существуют оба слагаемых:

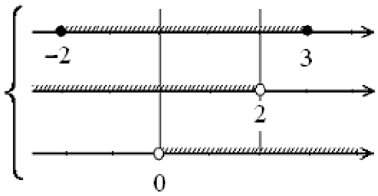
1) $\arcsin\frac{2x-1}{5}$ определен только тогда, когда аргумент его ограничен единицей по абсолютной величине $-1\le\frac{2x-1}{5}\le 1$;

2) $\frac{2}{\sqrt{1-\log_2 x}}$ существует тогда, когда знаменатель дроби не равен нулю и не отрицательно подкоренное выражение, т.е. $1-\log_2 x>0$;

3) второе слагаемое содержит функцию $\log_2 x$, которая определена только при положительном аргументе, т.е. $x>0$.

Таким образом, получим систему неравенств, которую решим графически:

$$\begin{cases} -1 \le \dfrac{2x-1}{5} \le 1, \\ 1-\log_2 x > 0, \\ x>0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \le 2x-1 \le 5, \\ \log_2 x < \log_2 2, \\ x>0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 3, \\ x<2, \\ x>0. \end{cases} \Rightarrow$$



Ответ: $x \in (0;2)$.

Замечание. На практике удобно пользоваться двумя правилами:

1. При арифметических действиях с функциями область определения является пересечением областей определений, входящих в выражение функций;
2. Чтобы найти область определения сложной функции, надо выписать область определения внешней функции, решить полученное неравенство и взять пересечение с областью определения внутренней функции.

Например, в последнем примере применение этих правил позволяет сразу выписать систему трех неравенств.

УПРАЖНЕНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Постройте графики функций: $y=3^x$; $y=(0.25)^x$; $y=\log_4 x$; $y=tgx$; $y=x^4$; $y=\sqrt{x}$.
2. Приведите пример элементарной функции.
3. Приведите пример сложной функции.
4. Укажите область значения функций:
   $y=\log_{0.5} x$; $y=x^4$; $y=-\sqrt{x}$; $y=-2x^2-4x+4$.
5. Для функций укажите соответствующие обратные функции:
   $y=\sin x$; $y=e^x$; $y=\log_2 x$; $y=tgx$; $y=x^3$; $y=\sqrt[4]{x}$.
6. Какая из функций является четной:
   1) $y=\sqrt[3]{x}+\cos x$, 2) $y=\sqrt[3]{x}\sin x+x^2$, 3) $y=\sqrt[3]{x}\cos x+e^x+e^{-x}$.
7. Указать область определения функции:
   $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-e^{\sqrt{x}}$; $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\ln x$; $f(x)=\arccos\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{1}{x}$.

§ 2. Числовая последовательность, основные определения и свойства

2.1. *Предел числовой последовательности*

Определение 2.1. *Числовой последовательностью* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется функция $x_n = \varphi(n)$ заданная на множестве натуральных чисел $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Числа $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ называются членами последовательности, а число x_n – общим членом последовательности.

Примеры:

1. $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$;

2. $x_n = \dfrac{1}{n}$, т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots \dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$;

3. $x_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$, т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-2, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, \ldots\right\}$;

4. $x_n = (-1)^{2n} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$, т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sqrt{3}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}, 1, \sqrt{\dfrac{3}{4}}, \ldots\right\}$;

5. $x_n = n^2$, т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\}$.

Основной характеристикой последовательности является ее сходимость. Дадим определение этого понятия.

Определение 2.2. Число A называется *пределом* числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$ в нумерации членов последовательности, что для всех последующих членов последовательности, т.е. для всех $n > N$, верно неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$, что обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ (или $x_n \to A$ при $n \to \infty$).

Определение 2.3. Последовательность, имеющая пределом конечное число $A < \infty$, называется *сходящейся*.

Определение сходящейся последовательности проще понять по рисунку, для этого нужно нанести на плоскость nOx точки $\{(n; x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ и определить, есть ли прямая $y = A$, к которой приближаются точки последовательности на плоскости при $n \to \infty$.

Например, числовая последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ состоит из чисел $\{x_n\} = \left\{0.5,\ 0.67,\ 0.75,\ 0.8, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$.

Нанесем на плоскость точки $\{(1;\,0.5),(2;\,0.67),(3;\,0.75),(4;\,0.8),\ldots\}$.

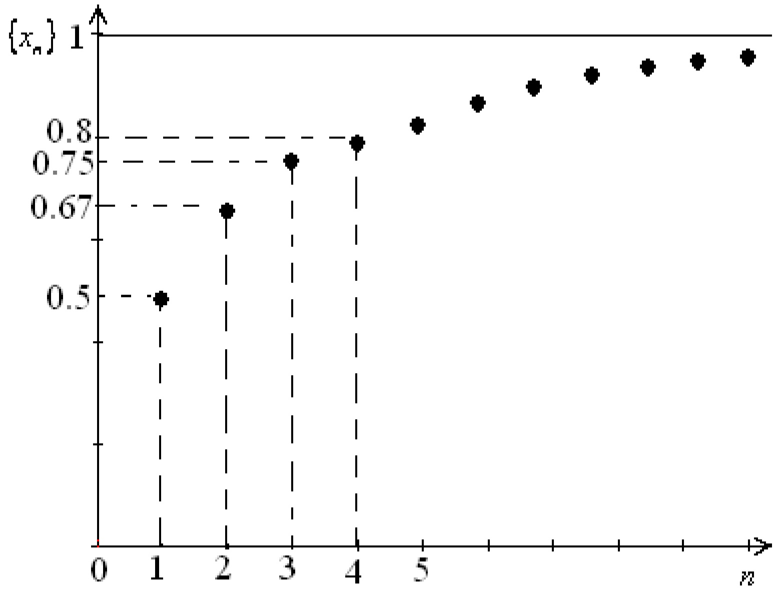


Рис. 3. Числовая последовательность $x_n = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ на плоскости nOx

По рис. 3 очевидно, что точки последовательности стремятся к прямой $y = 1$, т.е. можно сказать, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Определение 2.4 Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *убывающей*, если для любого номера n выполняется неравенство $x_n > x_{n+1}$, и *возрастающей*, если $x_n < x_{n+1}$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*.

Определение 2.5. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной*, если существует такое положительное число M, что для любого натурального n выполняется неравенство $|x_n| \le M$.

Определение 2.6. Последовательность, предел которой равен нулю, называется *бесконечно малой.* Последовательность, предел которой равен бесконечности, называется *бесконечно большой*.

Сформулируем без доказательства *важные свойства пределов последовательностей*:

1. Сходящаяся последовательность может иметь только один предел;
2. Любая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

2.2. *Предел функции в точке*

Понятие *предела функции* является основным понятием математического анализа, так как является основой таких операций как дифференцирование и интегрирование.

Определение 2.7. Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдётся такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, что для всех аргументов из окрестности точки $x = a$: $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (смотри рис. 4).

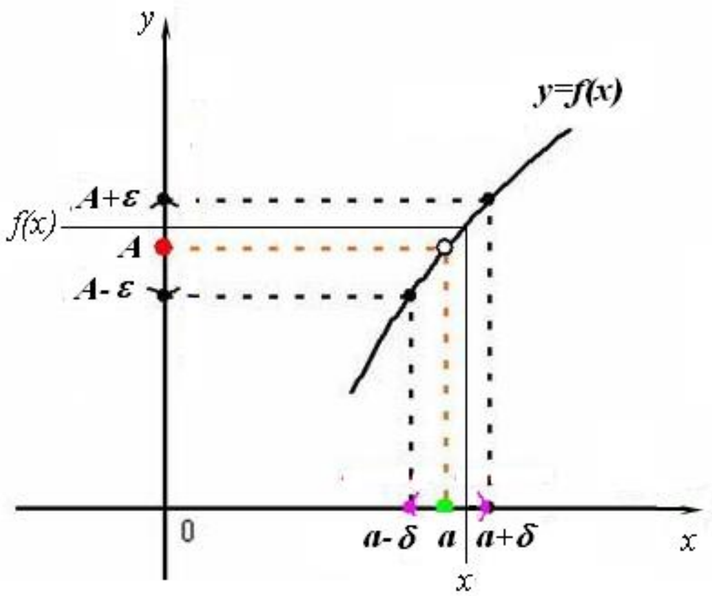


Рис. 4. Предел функции в точке $x = a$ [9]

Число A есть предел функции $f(x)$ в точке $x = a$, его обозначают $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, что значит, что для всех x, достаточно близких к числу a, соответствующие им значения функции $f(x)$ оказываются сколь угодно близкими к числу A.

Для практического вычисления предела, указанного выше определения недостаточно, так как непонятно, как проверить выполнение условия определения во всех близлежащих точках к $x = a$. Далее укажем еще два определения этого понятия, которые равносильны сказанному, но имеют больший практический смысл.

Определение 2.8. Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любой сходящейся к $x = a$ последовательности $\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\to} a$ справедливо: $\{f(x_n)\} \underset{n\to\infty}{\to} A$.

Например, вычислим предел, используя определение 2.8:

$$\lim_{x\to 2} \frac{6+x}{2+x} = \left[\begin{array}{l} \text{выберем} \\ \text{последовательность} \\ \text{сходящуюся к числу } 2 \\ \{x_n\} = \left\{2+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \to 2 \end{array} \right] = \lim_{x\to 2} \frac{6+\left(2+\frac{1}{n}\right)}{2+\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \left[\begin{array}{l} \text{т.к. при} \\ n\to\infty: \\ \frac{1}{n}\to 0 \end{array} \right] = \frac{6+2}{2+2} = 2.$$

Из вычислений очевидно, что вычисление предела сводится к подстановке значения $x = a$ в функцию $y = f(x)$.

Понятие предела тесно связано с другим основным понятием математики – непрерывностью. Забегая вперед, заметим, что по определению функция непрерывна в точке x_0, если предел функции равен значению функции в этой точке. Далее, в силу того, что из дифференцируемости функции вытекает ее непрерывность (а в основном изучаемые элементарные функции дифференцируемы за исключением некоторых точек), то на практике так пределы и вычисляют – подстановкой значения x_0 в функцию.

Однако могут возникнуть ситуации, при которых вычисление значения функции в конкретной точке x_0 невозможно. Такие случаи называются неопределенностями, они бывают видов $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty - \infty)$, $(0 \cdot \infty)$, (1^{∞}), (0^{∞}), (∞^{0}), (0^{0}). Для раскрытия каждого вида требуются определенные знания для правильного преобразования выражений, знание основных теорем о пределах, знание замечательных пределов и их следствий, что позволит идти в правильном направлении при вычислении пределов с неопределенностями.

2. 3. *Основные теоремы о пределе функции в точке*

1. Функция в точке может иметь только один предел.
2. Предел константы равен ей самой, т.е. $\lim\limits_{x\to a} C = C.$
3. Предел алгебраической суммы равен алгебраической сумме пределов:
$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm\varphi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a}\varphi(x) .$$
4. Предел произведения равен произведению пределов:
$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a}\varphi(x) .$$
5. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:
$$\lim_{x\to a}[k\cdot\varphi(x)] = k\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x).$$
6. Если предел знаменателя отличен от нуля, то есть $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$, то предел частного равен частному пределов: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}.$
7. Теорема о промежуточной функции: если в окрестности точки $x = a$ даны такие функции, что выполняется двойное неравенство $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_3(x) = A,$ тогда $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A.$.

2.4. *Замечательные пределы*

Первый замечательный предел. Справедливо равенство
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (2.1)$$

Доказательство.

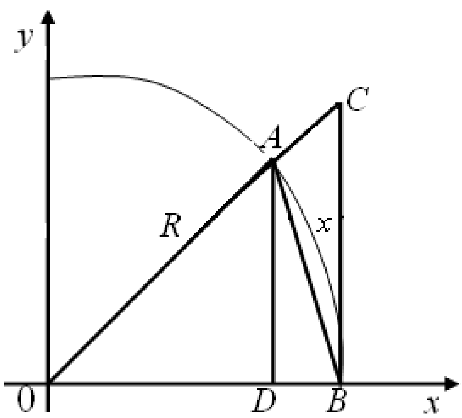


Рис. 5. Часть окружности единичного радиуса в 1-ой четверти [10]

Так как синус – нечетная функция, то $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}.$

Поэтому равенство (2.1) достаточно доказать только для положительных x, или, как говорят, для аргумента стремящегося к нулю справа, т.е. далее $x > 0$. На рис. 5 изображена окружность единичного радиуса.

Дуга $\overset{\smile}{BA}$ есть часть окружности, длина которой равна x. Согласно определению радианной меры угла $\angle COB$ содержит x радиан, тогда $\overset{\smile}{BA}= x$, $AD = \sin x$, $BC=\operatorname{tg} x$. Из рис. 5 видно, что $AD<x<CB$ (неравенство более строго можно обосновать, сравнивая площади ΔOAB, сектора OAB и ΔOBC), откуда следует неравенство $\sin x < x < tgx$. Выполнив деление всех частей двойного неравенства на $\sin x > 0$, получим: $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Перевернем каждую из дробей, из чего получим: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

При $x \to 0$ имеем $\cos x \to 1$, поэтому по свойству пределов о промежуточной функции все части неравенства стремятся к 1, а это значит $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Следствие. При $x\to 0$ функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ (рис. 6) имеют графики, близко лежащие к прямой $y = x$, поэтому справедливы следующие равенства:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1. \qquad (2.2)$$

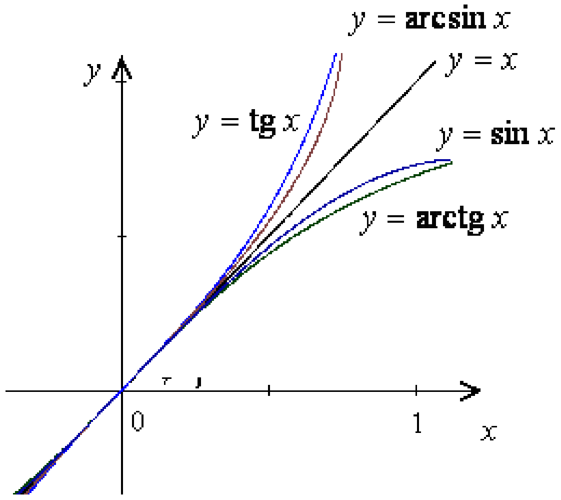


Рис. 6. Графики эквивалентных функций к функции $y = x$ при $x \to 0$

Из (2.1), (2.2) получим следующие полезные приближенные равенства

$$\sin x \approx x,\ \operatorname{tg} x \approx x,\ \ \arcsin x \approx x,\ \ \operatorname{arctg} x \approx x, \qquad (2.3)$$

эти формулы (в радианной мере измерения углов) верны только при малых x, причем, чем меньше x, тем формулы точнее.

Такие функции называются эквивалентными и при вычислении пределов, при малом аргументе, функция меняется на ее аргумент (см. далее пример 2), что упрощает вычисление.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 5x}$. При подстановке x=0 в тригонометрические функции получаем неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Поэтому выражение преобразуем так, чтобы можно было воспользоваться 1-ым замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$, где α – бесконечно малая величина: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^2 5x}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\dfrac{\sin x}{x}x\right)^2}{\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}5x\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{(5x)^2}=\dfrac{2}{25}$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3 3x}{\arcsin^2 5x\cdot tgx}$ есть неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, полученная при подстановке $x=0$ в дробь.

Укажем другой способ решения с помощью формул (2.3) через приближение эквивалентными функциями $arctg 3x\approx 3x$, $\arcsin 5x\approx 5x$ и $tgx\approx x$, получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3 3x}{\arcsin^2 5x\cdot tgx}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(arctg 3x)^3}{(\arcsin 5x)^2\cdot tgx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3x)^3}{(5x)^2\cdot x}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{27x^3}{25x^2\cdot x}=\dfrac{27}{25}$.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 4x\cos x}{arctg^2 8x\cdot\cos 3x}$ есть неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, полученная при подстановке $x=0$.

Заметим, что эквивалентными функциями при $x \to 0$ являются $tg4x \approx 4x$ и $arctg8x \approx 8x$, тогда получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 4x\cos x}{arctg^2 8x\cdot\cos 3x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(tg4x)^2\cos x}{(arctg8x)^2\cdot\cos 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4x)^2\cos x}{(8x)^2\cdot\cos 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16\cos x}{64\cdot\cos 3x}=\dfrac{1}{4}.$

Второй замечательный предел. Справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\,,\ \text{где } e\approx 2{,}72. \qquad (2.4)$$

Доказательство. Рассмотрим функции $y=\log_e(1+x)$ и $y=x$ (см. рис. 7). Угловые коэффициенты касательных, проведенных к прямой и к логарифмической функции одинаковые и равны $tg\varphi = tg45^0 = 1$, тогда прямая $y = x$ является касательной в нуле для функции $y=\ln(1+x)$, а значит при $x\to 0$ имеем $\log_e(1+x)\approx x$.

Последнее приближенное равенство обозначает, что предел соотношения функций при $x\to 0$ равен 1, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_e(1+x)}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1.$

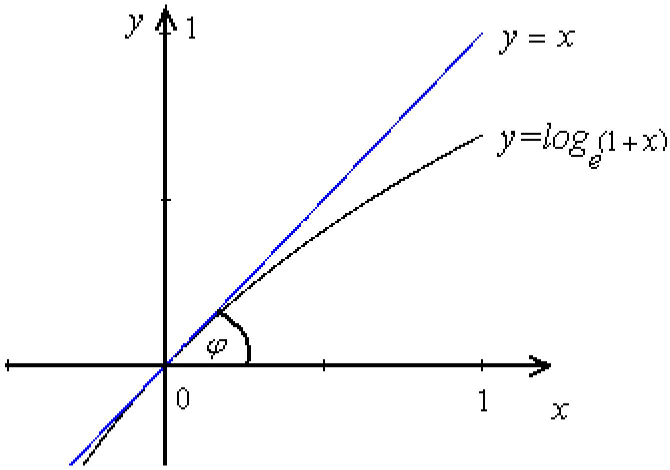


Рис. 7. Графики функций $y=\log_e(1+x)$ и $y=x$

С другой стороны, используя свойства логарифмической функции, можно заметить, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_e(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\log_e(1+x)$
$=\lim\limits_{x\to 0}\log_e(1+x)^{\frac{1}{x}}$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\log_e(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$, что возможно, только если аргумент функции логарифм равен e: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^\infty\right)=e$.

***Следствие* 1**. Если в формуле (2.4) сделать замену $t=\frac{1}{x}$, то при $x\to 0$ имеем $t\to\infty$, что позволяет записать предел в виде:

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=\left(1^{\infty}\right)=e. \qquad (2.5)$$

Отметим, что исторически предел (2.5) был сначала получен при натуральных значениях $t = n\in N$ и назван вторым замечательным пределом.

***Следствие* 2.** Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$, используя свойства логарифма: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\log_e(1+x)}{\log_e a}}{x}=\frac{1}{\log_e a}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}=\log_a e$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e. \qquad (2.6)$$

***Следствие* 3.** Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$. Введем замену переменной $a^x-1=t$, тогда $x=\log_a(t+1)$. При $x\to 0$, получим $t\to 0$.

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}}=\frac{1}{\frac{1}{\ln a}}=\ln a$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad (2.7)$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{3x}$ – это неопределенность типа $\left(1^{\infty}\right)$.

Применим 2-й замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=e$, где аргументом может быть непрерывная функция $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\left(1^{\infty}\right)=e$. Для этого приведем дробь $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\to 1$ при $x\to\infty$ к виду $\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)$, где $\varphi(x)\to\infty$.

Выделим в неправильной дроби целую часть:

$$\frac{x+1}{x+3}=\frac{(x+3)-3+1}{x+3}=\frac{(x+3)}{(x+3)}-\frac{2}{x+3}=1-\frac{2}{x+3}=1+\frac{1}{-\frac{x+3}{2}},$$ здесь при $x\to\infty$ имеем $\varphi(x)=-\frac{x+3}{2}\to\infty$.

После представляем выражение $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{3x}$ в виде $\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}$:

$$\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{3x}=\left[\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x+3}{2}}\right)^{\left(-\frac{x+3}{2}\right)}\right]^{\left(-\frac{2}{x+3}\right)}\right]^{3x}.$$

Так как по 2-му замечательному пределу выражение во внутренних квадратных скобках стремится к e при $x\to\infty$, и оставшаяся степень $\left(-\frac{2}{x+3}\right)\cdot 3x=\frac{-6x}{x+3}=\frac{-6}{1+\frac{3}{x}}\underset{x\to\infty}{\to}-6$, тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{3x}=$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[e^{-\frac{2}{x+3}}\right]^{3x}=e^{-6}$.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to-1+0}(1+x)^{x^2-1}$. Заметим, что предел вычисляется только справа в точке $x=-1$, так как значение функции слева не определено.

Имеем неопределенность вида $\left(0^0\right)$, которая вычисляется с помощью логарифмирования, для этого будем считать, что $A=\lim\limits_{x\to-1+}(1+x)^{x^2-1}$.

Прологарифмируем обе части равенства $\ln A=\ln\lim\limits_{x\to-1+0}(1+x)^{(x^2-1)}=$ $=\Big|$ и воспользовавшись непрерывностью функции логарифма на области определения, вынесем знак предела за знак функции $\Big|=$

$$=\lim_{x\to-1+0}\ln(1+x)^{x^2-1}=\lim_{x\to-1+0}(x^2-1)\ln(1+x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to-1+0}\frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{x^2-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Для полученной неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ применимо правило Лопиталя, согласно которому для неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ отношение функций можно заменить отношением производных этих функций (подробнее правило Лопиталя будет описано после введения операции дифференцирования): $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{\ln(1+x)}{\dfrac{1}{x^2-1}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{\left(\ln(1+x)\right)'}{\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)'}=$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}}=\lim_{x\to -1+0}\frac{\left(x^2-1\right)^2}{-2x(1+x)}=\lim_{x\to -1+0}\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{-2x(1+x)}=\lim_{x\to -1+0}\frac{(x-1)^2(x+1)}{-2x}=0\,.$$

Приравнивая начало и конец вычислений, получим $\ln A=0$, откуда $A=1$. Поскольку $A=\lim\limits_{x\to -1+}(1+x)^{x^2-1}$, окончательно $\lim\limits_{x\to -1+}(1+x)^{x^2-1}=1$.

2.5. *Вычисление пределов от рациональных дробей и иррациональных выражений*

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Если предел от рациональной дроби *в конечной точке* $x_0<\infty$ привел к неопределённости типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, то для ее раскрытия достаточно разложить многочлены числителя и знаменателя на простые множители и общие множители сократить.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=1.$

Если вычисление пределов при $x_0\to\infty$ отношения двух многочленов $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ приводит к неопределённости типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, то для раскрытия достаточно разделить многочлены числителя и знаменателя на слагаемое, которое быстрее всех растет на бесконечности, то есть на $x^{\max(n,m)}$ и, используя арифметические свойства предела, вычислить предел.

Если степень числителя больше степени знаменателя, то предел равен бесконечности, если меньше – предел равен нулю, а если $n=m$, то значение предела равно соотношению коэффициентов при старших степенях многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.

Пример 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^3-8x+1}{5x^4+1}$ приводит к неопределенности типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Для ее раскрытия поделим числитель и знаменатель на наибольшую из степеней многочленов числителя и знаменателя дроби, то есть на x^4: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(100x^3-8x+1\right)\dfrac{1}{x^4}}{\left(5x^4+1\right)\dfrac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{100}{x}-\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{5+\dfrac{1}{x^4}}$.

Так как $\dfrac{100}{x},\ \dfrac{8}{x^3},\ \dfrac{1}{x^4}\to 0$ при $x\to\infty$, то вся дробь стремится к $\dfrac{0}{5}=0$, то есть $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^3-8x+1}{5x^4+1}=0$.

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+2x^2-7}{8x^3+4x+3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{2}{x}-\dfrac{7}{x^3}}{8+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}=\dfrac{5}{8}$.

Если неопределённости типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ получены от выражений, содержащих иррациональности (выражения с квадратными корнями), то неопределённость раскрывается умножением числителя и знаменателя на сопряжённые им иррациональные выражения с последующим сокращением общих множителей (сопряжёнными называются иррациональные выражения вида $\sqrt{a}+\sqrt{b}$,$\sqrt{a}-\sqrt{b}$).

В случаях, если имеются корни произвольной степени, то удобнее пользоваться заменой корня (см. пример 11).

Пример 9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-x}{x^3-27}$ приводит к неопределенности типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю $\left(\sqrt{6+x}+x\right)$:

$$\frac{\left(\sqrt{6+x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{6+x}+x\right)}{\left(x^3-27\right)\cdot\left(\sqrt{6+x}+x\right)}=\frac{6+x-x^2}{\left(x^3-27\right)\cdot\left(\sqrt{6+x}+x\right)}.$$

Далее разложим на множители многочлены числителя и знаменателя, где корни числителя $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, тогда $6+x-x^2=-(x-3)\cdot(x+2)$.

Разность кубов в знаменателе (x^3-27) разложим по формуле сокращенного умножения $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$, то есть $x^3-27=(x-3)\cdot(x^2+3x+9)$.

Окончательно получим $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-x}{x^3-27}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$\lim_{x\to 3}\frac{6+x-x^2}{(x^3-27)\cdot(\sqrt{6+x}+x)}=-\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(x^2+3x+9)\cdot(\sqrt{6+x}+x)}=$$

$$-\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{(x^2+3x+9)\cdot(\sqrt{6+x}+x)}=\frac{5}{162}.$$

Теперь в последнем выражении при $x\to 3$ неопределенности нет, так как были сокращены одинаковые множители $(x-3)$, из-за которых она возникала.

Пример 10.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x+4}+3}=\frac{1}{6}.$$

Вычислим пример 10, применяя способ введения замены переменной.

Пример 11. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+4}=t\Rightarrow x=t^2-4\\ \text{при } x\to 5:\ t\to 3\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{t-3}{t^2-4-5}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{t\to 3}\frac{t-3}{t^2-9}=\lim_{t\to 3}\frac{t-3}{(t-3)(t+3)}=\lim_{t\to 3}\frac{1}{t+3}=\frac{1}{6}.$$

2.6. *Односторонние пределы*

Введенные выше определения понятия предела функции в точке равносильны между собой и равносильны понятию предела функции через односторонние пределы, определение которого будет приведено далее. Зачем же нужно приводить такое количество определений одного и того же математического определения? Определение 2.7 на «языке» окрестностей визуально просто для понимания. Определение 2.8 позволяет перейти к вычислению пределов на практике. Следующие определения позволят ввести развернутое определение непрерывности и классификацию точек разрыва функции.

Определение 2.9. Число A, обозначаемое $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = y(a-0)$, называется *левым пределом* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, что для всех аргументов из левой окрестности точки a: $x \in (a-\delta; a)$ будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение 2.10. Число A, обозначаемое $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = y(a+0)$, называется *правым пределом* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, что для всех аргументов из правой окрестности точки a: $x \in (a; a+\delta)$ будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теорема. *Предел функции в точке существует тогда и только тогда, когда оба односторонних предела существуют и равны между собой*

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x). \tag{2.8}$$

Равенство односторонних пределов показано на рис. 8.

Однако, если условие (2.8) не выполнено, то в рассматриваемой точке будет разрыв, их классификацию рассмотрим в следующем параграфе.

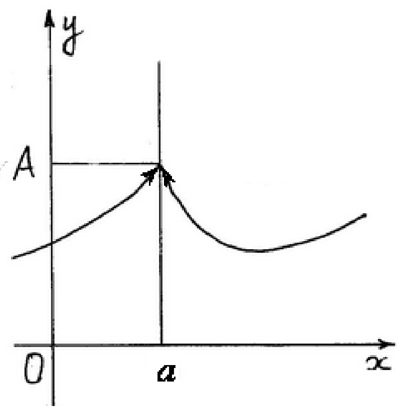


Рис. 8. Иллюстрация существования предела функции в точке $x=a$ [9]

Замечание. При вычислении пределов такого типа следует помнить, что переменная x либо строго меньше a, либо строго больше a, а значит простой подстановки не достаточно – нужно указать из какого интервала $(a-\delta;a)$ или $(a;a+\delta)$ выбирается x.

Вычисляя правосторонний предел $x\in(a;a+\delta)$, задать это возможно, если считать, что $x\to a+\varepsilon$, где ε - малое положительное число, такое что $\varepsilon>0$ и $\varepsilon\to 0$.

Аналогично, для левостороннего предела $x\in(a-\delta;a)$, имеем $x\to a-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ и $\varepsilon\to 0$.

Пример 12. Вычислить предел слева (односторонний предел):

$$\lim_{x\to 2-}\frac{e^x}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{e^x}{x-2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{2-\varepsilon}}{2-\varepsilon-2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{2-\varepsilon}}{-\varepsilon}=\begin{bmatrix}\text{при подстановке}\\ \text{получим}:\left(\dfrac{e^2}{-0}\right)\end{bmatrix}=-\infty.$$

Пример 13. Вычислить предел справа (односторонний предел):

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\ln x}{x^2-1}=\lim_{\substack{x\to 1+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\frac{\ln x}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(1+\varepsilon)}{(\varepsilon)^2+2\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon+2},$$

т.к. по формуле (2.6) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}=1$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\dfrac{1}{\varepsilon+2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{1}{\varepsilon+2}=\dfrac{1}{2}$.

В следующем параграфе будет предложен еще один способ вычисления односторонних пределов.

УПРАЖНЕНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется пределом числовой последовательности?
2. Что называется пределом функции в точке?
3. Какие свойства предела функции в точке Вы знаете?
4. Сформулируйте замечательные пределы, укажите следствия.
5. Приведите примеры функций эквивалентных в точке $x=0$.
6. Общий член последовательности $\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{9}{4},\frac{16}{5},...$ имеет вид …

1. $a_n=\dfrac{n^2}{n+1}$; 2. $a_n=(-1)^n\dfrac{n^2}{n+1}$; 3. $a_n=\dfrac{n^2}{2n-1}$; 4. $a_n=\dfrac{n^2}{n-1}$.

7. Вычислите значение пределов:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-3x^2}{\sqrt{x-1}}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-5}{x^2+1}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-9}{x-3}\right)^{\frac{2}{3x}}$.

8. Конечный предел при $x\to+\infty$ имеет только одна из следующих функции …

1. $f(x)=\dfrac{1+x^3}{x^2+1}$; 2. $f(x)=\dfrac{1+x^2+x^3}{1-x^3}$; 3. $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x^5+1}}{2\sqrt{x^3}}$; 4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}}{x+1}$.

9. Значение предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{x-2}\right)^{\frac{x}{3}}$ равно…

1. e^2; 2. $e^{1/3}$; 3. $e^{1/18}$; 4. 1.

10. Значение предела $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}$ равно…

1. e; 2. $2e$; 3. $e^{1/2}$; 4. 1.

11. Вычислить односторонние пределы функции $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x-1}}}{x+1}$ в точке $x_0=1$.

§ 3. Исследование функции на непрерывность

3.1. *Классификация точек разрыва функции*

Определение 3.1. Точка a из области определения функции $y=y(x)$ называется точкой *непрерывности* (см. рис. 9), если верны условия:

1) оба односторонних предела функции в точке a существуют и конечны

$$\lim_{x\to a-0} f(x)<\infty,\ \lim_{x\to a+0} f(x)<\infty; \qquad (3.1)$$

2) односторонние пределы равны между собой

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x); \qquad (3.2)$$

3) односторонние пределы равны значению функции в точке

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a). \qquad (3.3)$$

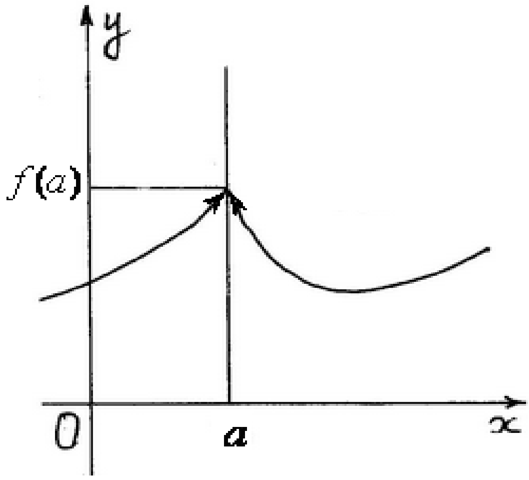


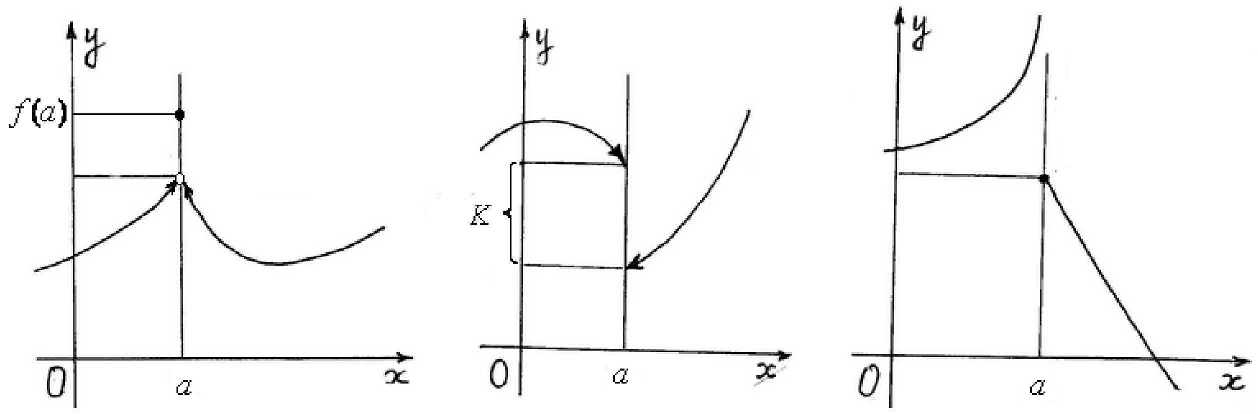
Рис. 9. Иллюстрация непрерывности функции в точке $x=a$ [9]

Если в определении 3.1 не выполняется хотя бы одно условие, то функция называется *разрывной* в точке $x=a$, при этом вводится следующая классификация точек разрыва:

- если условие (3.3) не выполняется, но выполняются условия (3.1) и (3.2), т. е. односторонние пределы конечны и равны между собой, но не равны значению функции $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\lim\limits_{x\to a+} f(x)\neq f(a)$, или сама функция в точке a не существует, то это *устранимый разрыв первого рода* (см. рис. 10а);

- если условие (3.2) не выполняется (не выполняется, очевидно, и условие (3.3)), но выполнено условие (3.1), т.е. односторонние пределы конечны, но не равны между собой:
$$\lim_{x\to a-} f(x)\neq \lim_{x\to a+} f(x)),$$
то это *неустранимый разрыв первого рода,* а разность $K=\lim\limits_{x\to a+} f(x)-\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ называется *скачком* функции (см. рис. 10 б);

- если условие (3.1) не выполняется, т. е. если хоть один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует, то имеем разрыв *второго рода* (см. рис. 10 в).



а) б) в)

Рис. 10. Классификация точек разрыва [9]

Всегда ли нужно для определения непрерывности функции в точке вычислять односторонние пределы и проверять все условия, записанные в определении 3.1?

Заметим, что все *элементарные* функции имеют область определения, находить которую мы уже умеем. Далее будет доказано, что если функция дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке непрерывна, поэтому все элементарные функции непрерывны в области их дифференцирования. Именно на этой области все условия определения 3.1 будут автоматически выполняться и единственную проверку, которую достаточно будет выполнить – это вычислить значение функции в точке. Если $y(a) < \infty$, где $a \in D(x)$, то функция в этой точке непрерывна.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{1}{1 - 4^{1/x+2}}$ в точках $x = 0$ и $x = -2$.

Эта функция элементарная, следовательно, она непрерывна всюду, где определена, а так как $y(0) = \dfrac{1}{1 - 4^{1/2}} = \dfrac{1}{1 - 2} = -1$ существует, то в этой точке $y(x)$ она непрерывна.

При $x = -2$ функция $y(x)$ не определена и, следовательно, имеет разрыв. Исследуем характер разрыва, для этого вычислим левый $y(-2 - 0)$ и правый $y(-2 + 0)$ пределы в точке $x = -2$.

При вычислении правого предела $y(-2 + 0)$, то есть при $x \to -2$ справа, x остается больше (-2), отсюда следует, что $x + 2 \to 0$, при этом $x+2>0$. Тогда $\dfrac{1}{x+2}\to+\infty$, значит $4^{\frac{1}{x+2}}\to 4^{+\infty}\to+\infty$. Отсюда $y(-2+0)=0$, так как знаменатель $1-4^{\frac{1}{x+2}}$ неограниченно растет.

Найдем $y(-2-0)$. Теперь полагаем, что $x\to-2$, но $x<-2$. Тогда $x+2\to 0$, где $x+2<0$, откуда $\dfrac{1}{x+2}\to-\infty$, а значит, $4^{\frac{1}{x+2}}\to 4^{-\infty}=\dfrac{1}{4^{+\infty}}\to 0$, и $y(-2-0)=\dfrac{1}{1-0}=1$.

Итак, сравним значения односторонних пределов $y(-2-0)=1\neq y(-2+0)=0$. Они оба конечны, но не равны между собой, следовательно, в точке $x=-2$ функция имеет разрыв первого рода типа “скачка”.

Если рассматривается задача определения непрерывности функции на интервале (конечном или бесконечном) или на отрезке, то особое внимание нужно уделять тем точкам, в которых значение функции не определено и граничным точкам области определения.

Определение 3.2. Функция называется непрерывной в интервале $(a,\ b)$ если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение 3.3. Функция называется непрерывной на отрезке $[a,\ b]$ если она непрерывна в интервале $(a,\ b)$ и, кроме того, непрерывна слева $y(a+0)=y(a)$ и справа $y(b-0)=y(b)$ на концах отрезка:

$$\lim_{x\to a+0} y(x)=y(a) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to b-0} y(x)=y(b).$$

Аналогично определяется непрерывность на промежутках $(a,b]$ и $[a,b)$.

Пример 2. Определить непрерывность функции на всей числовой оси

$$y=\begin{cases} x^2, & x\le 0,\\ -3x, & 0<x<\pi,\\ \sin x, & x\ge\pi. \end{cases}$$

Как указано выше, элементарные функции непрерывны всюду, где определены. Наша функция совпадает с элементарными функциями x^2, $(-3x)$ и $\sin x$, соответственно, на промежутках $(-\infty;0]$, $(0;\pi)$ и $[\pi;+\infty)$. Следовательно, во всех точках этих промежутков она непрерывна, так как на них непрерывны перечисленные элементарные функции. Остаются две точки $x=0$ и $x=\pi$, где происходит стыковка разных функций и где непрерывность не гарантирована.

Рассмотрим точку $x=0$.

По определению $y(x)$ непрерывна в точке $x=a$, если левый предел в этой точке $y(a-0)$ равен правому пределу $y(a+0)$ и равен значению $y(a)$.

Вычислим все три величины для $x=0$:

$y(0-0)=\lim\limits_{x\to a-0} y(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} x^2=0$ (так как при $x<0$: $y(x)=x^2$);

$y(0+0)=\lim\limits_{x\to a+0} y(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} (-3x)=0$ (так как при $x>0$: $y(x)=-3x$);

$y(0)=0^2=0$ (так как при $x=0$: $y(x)=x^2$).

Все три числа равны, следовательно, функция непрерывна в точке $x=0$.

Проверим точку $x=\pi$:

$y(\pi-0)=\lim\limits_{\substack{x\to\pi- \\ x<\pi}} y(x)=\lim\limits_{x\to\pi-} (-3x)=-3\pi$;

$y(\pi+0)=\lim\limits_{\substack{x\to\pi+ \\ x>\pi}} y(x)=\lim\limits_{x\to\pi+} \sin x=\sin\pi=0$.

Оба предела конечны, но левый предел не равен правому и, значит, функция имеет разрыв первого рода типа “скачка” в точке $x=\pi$. График функции $y(x)$ приведен ниже на рис. 11.

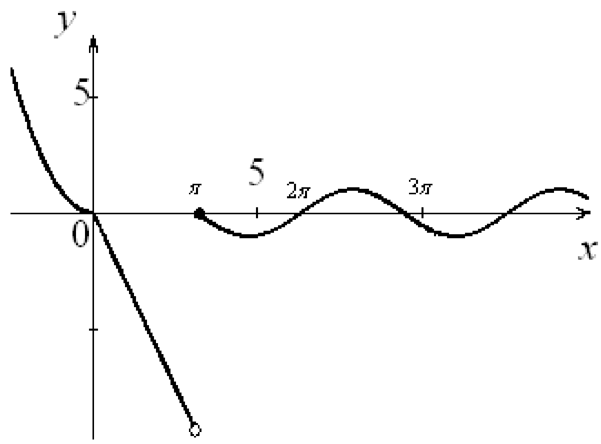


Рис. 11. График функции

Приведенное ранее определение непрерывности функции не является единственным. В некоторых случаях удобнее работать с определением, связывающим приращения аргумента и функции.

Определение 3.4. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

На рис. 12 очевидна связь между Δx и Δf: при уменьшении приращения $\Delta x \to 0$ точка B по кривой будет стремиться к точке A, то стремиться к нулю будет и приращение функции Δf.

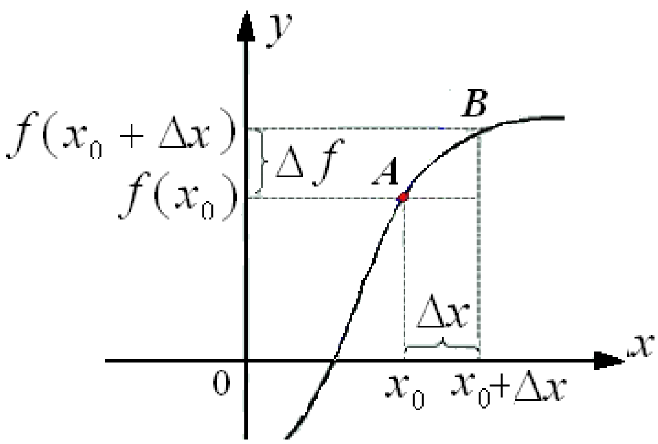


Рис. 12. Непрерывность функции через приращения аргумента Δx и функции Δf [10]

3. 2. *Арифметические свойства непрерывных на промежутке функций*

Теорема 3.1. *График непрерывной на интервале функции есть непрерывная линия.*

Теорема 3.2. *Сумма (разность) конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.*

Теорема 3.3. *Произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.*

Теорема 3.4. *Частное непрерывных функций* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *если на рассматриваемом интервале* $g(x) \neq 0$ *есть функция непрерывная.*

Теорема 3.5. *Суперпозиция двух непрерывных функций также непрерывна.*

3.3. *Свойства непрерывных на отрезке функций*

1. Первая теорема Больцано–Коши. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *а на его концах принимает значения* $f(a)$ *и* $f(b)$ *разных знаков, то есть* $f(a)f(b) < 0$ *, то на этом отрезке найдётся по крайней мере одна такая точка* $x = c$, *в которой функция обращается в ноль*: $f(c) = 0$.

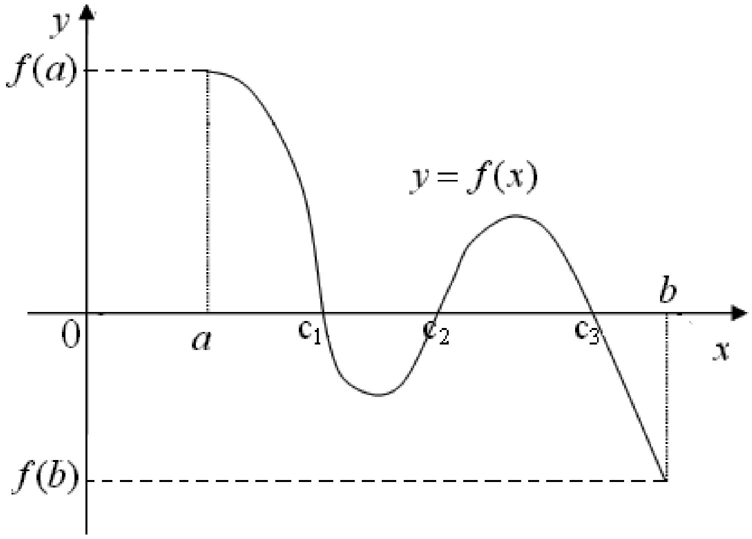


Рис. 13. Непрерывная функция на отрезке

Утверждение этой теоремы следует из геометрического представления непрерывной функции, как некоторой непрерывной (без разрыва) линии или нити, которая при переходе через некоторую прямую (ось *Ox*) с одной стороны на другую, обязательно её пересечёт (по крайней мере в одной точке).

На рис. 13 $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$, т.е. таких точек три.

2. Вторая теорема Больцано–Коши. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *а на концах этого отрезка принимает неравные значения* $f(a) = A \neq f(b) = B$, *то она принимает на этом отрезке любое промежуточное значение, заключённое между* A *и* B.

3. Теорема Вейерштрасса. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то она достигает на нём своего наименьшего* m *и наибольшего* M *значений.*

§ 4. Дифференциальное исчисление

4.1. *Определение производной, ее геометрический и физический смысл*

Производная функции – одно из важнейших понятий математики. С помощью производной можно находить различные характеристики функции: определять промежутки монотонности, интервалы выпуклости и вогнутости, находить точки экстремумов и точки перегиба, а в конечном итоге получить умение обучающегося строить функции по аналитически заданной формуле.

С введением производной появляется возможность решать трудно или вообще недоступные для методов элементарной математики задачи.

Задача о касательной. Пусть $M_0(x_{0,}y_0)$ – фиксированная точка графика функции $y = f(x)$ и $M(x, y)$ – произвольная точка графика функции, где $x = x_0 + \Delta x, \quad y = f(x_0 + \Delta x)$ (см. рис. 14).

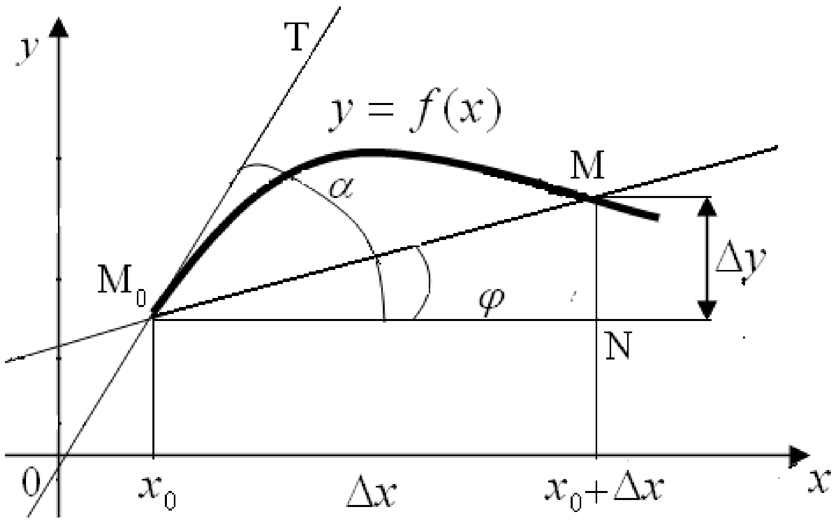


Рис. 14. График функции с касательной M_0T

Составим уравнение касательной линии M_0T к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Из треугольника ΔM_0MN находим $\text{tg}\varphi = \dfrac{MN}{M_0M} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, где φ – угол образуемый секущей M_0M с осью Ox.

Пусть $M \to M_0$ вдоль кривой $y = f(x)$, M_0T – касательная к ней в т. M_0, α – угол наклона касательной к оси Ox, тогда при $\Delta x \to 0$,

$\mathrm{tg}\varphi \to \mathrm{tg}\alpha$, следовательно: $\mathrm{tg}\alpha = \lim\limits_{\varphi\to\alpha} \mathrm{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Так как $tg\alpha = k$ угловой коэффициент касательной, то

$$k = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} . \qquad (4.1)$$

Таким образом, задача о касательной приводит к вычислению предела отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Далее составим уравнение прямой (касательной M_0T) по найденному угловому коэффициенту и точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0) .$$

Подставив $y_0 = f(x_0)$ и $k = f'(x_0)$ (см. (4.1)), получим уравнение касательной

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) . \qquad (4.2)$$

Задача о скорости движения. Пусть материальная точка М движется вдоль некоторой прямой по закону $S = S(t)$, где S − путь, пройденный точкой за время t и необходимо найти скорость точки в момент t_0.

К моменту времени t_0 движущаяся точка занимает положение M_0 и пройденный путь равен $S(t_0)$. В момент времени $t_0 + \Delta t$ материальная точка переместится в точку М, т.е. за время Δt пройденный путь $M_0M = \Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$.

Средняя скорость движения $V_{ср}$ за промежуток времени Δt определяется отношением пройденного пути ко времени $V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Средняя скорость характеризует движение тем точнее, чем меньше Δt. Поэтому за скорость точки в момент $t = t_0$ принимается предел $V_{ср}$ при условии $\Delta t \to 0$, т.е.

$$V = \lim_{\Delta t\to 0} V_{ср} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} . \qquad (4.3)$$

Отвлечёмся от конкретного смысла рассматриваемых выше задач и проведём рассуждения для произвольной непрерывной функции $y = f(x)$, заданной в интервале (a, b):

1) возьмём произвольное значение аргумента $x \in (a, b)$;
2) зададим аргументу столь малое приращение Δx, что $(x + \Delta x)$ и $x \in (a; b)$, и вычислим значение функции $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$;

3) найдём приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

4) найдём предел отношения приращения функции к приращению аргумента $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Определение 4.1. *Производной функции* $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{4.4}$$

Производную обозначают разными символами: y', y'_x, $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$.

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Функция, имеющая конечную производную в точке x_0, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала, называется *дифференцируемой на этом интервале.*

4.2. *Взаимосвязь непрерывности и дифференцируемости функции*

Теорема 4.1. *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x*, то она в этой точке непрерывна.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) < 0$, тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = \ y'(x) \cdot 0 = 0$. В силу определения (3.4) функция непрерывна.

Таким образом, можно заметить, что любая дифференцируемая в точке функция всегда непрерывна в этой точке и ее малой окрестности. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, то есть непрерывная в точке функция не обязательно дифференцируема в этой точке. Примером такой функции является $y = |x|$, которая непрерывна в точке $x = 0$, но в ней не дифференцируема, потому что знак производной зависит от знака Δx (этот факт возможно проверить самостоятельно).

Поскольку значение производной не должно зависеть от знака Δx, то это условие требует наличия гладкости функции, то есть единой касательной в рассматриваемой точке, а у функции $y=|x|$ в точке $x=0$ ее нет. Таким образом, следует заметить, что дифференцируемая функция – это гладкая функция. И наоборот, гладкая функция дифференцируема.

4.3. *Правила дифференцирования функций*

Пусть даны дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$, тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.2. *Производная суммы* (*разности*) *двух функций равна сумме* (*разности*) *производных этих функций*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \tag{4.5}$$

Доказательство. Рассмотрим производную суммы двух слагаемых: $(u+v)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x))-(u(x)+v(x))}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(u(x+\Delta x)-u(x))+(v(x+\Delta x)-v(x))}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u'+v'$.

Следствие. Формула (4.5) легко обобщается на случай любого конечного числа слагаемых, например, для трех слагаемых: $(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w'$.

Теорема 4.3. *Производная произведения двух функций вычисляется по формуле*

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{4.6}$$

Доказательство. $(u \cdot v)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x+\Delta x)\cdot v(x)]+[u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]+v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\Delta v(x)+v(x)\Delta u(x)}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}+v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}=u(x)\cdot v'(x)+u'(x)\cdot v(x).$$

Следствие 1. Формула (4.6) легко обобщается на случай любого конечного числа множителей, например для трех:

$$(u\cdot v\cdot w)'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'.$$

Следствие 2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(cu)'=cu'. \tag{4.7}$$

Теорема 4.4. *Производная частного двух функций вычисляется по формуле*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad ,v\neq 0. \tag{4.8}$$

Для доказательства формулы применим метод логарифмического дифференцирования (см. п. 4.5. на ст. 44):

$$y=\frac{u}{v}\ \Rightarrow\ \ln y=\ln u-\ln v\ \Rightarrow\left|\begin{matrix}\text{продифференцируем}\\ \text{обе части}\end{matrix}\right|\Rightarrow\ \frac{y'}{y}=\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}.$$

Выразим y': $y'=y\dfrac{u'v-uv'}{uv}=\dfrac{u}{v}\cdot\dfrac{u'v-uv'}{uv}=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Теорема 4.5. *Пусть функция $u=u(v)$ дифференцируема в точке v_0 и функция $v=v(x)$ дифференцируема в точке x_0, где $v_0=v(x_0)$, тогда сложная функция $u=u(v(x))$, которая является функцией аргумента x, дифференцируема по независимому аргументу x, ее производная равна произведению производной внешней функции $u=u(v)$ по промежуточному аргументу v на производную внутренней функции $v=v(x)$ по независимому аргументу x, то есть*

$$u'(x_0)=u'_v(v_0)\cdot v'_x(x_0). \tag{4.9}$$

Доказательство. Заметим, что функции $v=v(x)$ и $u=u(v)$ дифференцируемы, тогда они непрерывны в точках x_0 и v_0, соответственно. Непрерывность значит, что приращения каждой из них стремится к нулю, то есть при $\Delta x \to 0$ приращение $\Delta v \to 0$, а так как $\Delta v \to 0$, то $\Delta u \to 0$.

Рассмотрим $u'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta v \to 0 \\ \Delta u \to 0}} \dfrac{\Delta u}{\Delta v}\dfrac{\Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u'_v(v_0) \cdot v'_x(x_0)$.

4.4. *Таблица производных основных элементарных функций*

1. $(c)' = 0$; $(c = const)$;
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n \in R$; в частности $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; в частности $(e^x)' = e^x$;
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$; в частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Докажем некоторые производные из данного списка табличных производных:

Табл. 2

$(c)'$	$\overset{\text{по}}{\underset{\text{определению}}{=}} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c-c}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$;
$(a^x)'$	$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \Big\vert$ см.форм. (2.7) $\Big\vert = a^x \cdot \ln a$;

$(\log_a x)'$	$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}x}=$ $=\dfrac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\left\lvert\begin{matrix}\text{см.формулу}\\ (2.6)\end{matrix}\right\rvert=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln a};$
$(\sin x)'$	$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{x+\Delta x-x}{2}\cos\dfrac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x}=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{2\dfrac{\Delta x}{2}}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x;$
$(\cos x)'$	$=\sin(\pi/2-x))'=\cos(\pi/2-x)\cdot(\pi/2-x)'=-\sin x;$
$(tgx)'$	$=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\sin' x\cdot\cos x-\cos' x\cdot\sin x}{(\cos x)^2}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos x)^2}=\dfrac{1}{\cos^2 x}.$ Аналогично выводится производная функции котангенс.
$(arctgx)'$	Вывод будет приведен в разделе 4.7 – дифференцируемость обратных функций.
$(\arcsin x)'$	Вывод будет приведен в разделе 4.7 – дифференцируемость обратных функций.

Примеры.

1) Вычислить производную функции $y=4x^5-3\sqrt[4]{x}+2$.

Функция является элементарной, так как составлена из основных элементарных функций с применением арифметических операций над ними, тогда для нахождения производной применим формулы дифференцирования:

а) $(u-v+w)'=u'-v'+w'$; б) $(c\cdot u)'=c\cdot u'$;

в) $(u^{\alpha})=\alpha\cdot u^{\alpha-1}$; г) $(c)'=0$.

$$y'=(4x^5-3\sqrt[4]{x}+2)'=\lvert\text{а), б)}\rvert=(4x^5)'-(3\sqrt[4]{x})'+(2)'=4(x^5)'-3(x^{1/4})'+(2)'=$$

$$=\lvert\text{в), с)}\rvert=4\cdot 5x^4-3\cdot\frac{1}{4}\cdot x^{-3/4}+0=20x^4-\frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

2) Вычислить производную функции $y=(x^3+4)\cdot(5x-1)$.

Применим формулу производной произведения двух функций $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$ и формулы б) и в) из примера 1.

В нашем случае $u=x^3+4,\ v=5x-1$.

$$y'=(x^3+4)'(5x-1)+(x^3+4)(5x-1)'=3x^2\cdot(5x-1)+(x^3+4)\cdot 5=20x^3-3x^2+20.$$

3) Вычислить производную функции $y=\dfrac{3x^5}{a^2-x^4}$.

Воспользуемся формулой производной частного двух функций $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$. В данном примере $u=x^5,\quad v=a^2-x^4$.

$$y'=3\cdot\left(\frac{x^5}{a^2-x^4}\right)'=3\cdot\frac{(x^5)'\cdot(a^2-x^4)-x^5\cdot(a^2-x^4)'}{(a^2-x^4)^2}=3\cdot\frac{5x^4(a^2-x^4)-x^5(-4x^3)}{(a^2-x^4)^2}=$$

$$=3\cdot\frac{5x^4a^2-5x^8+4x^8}{(a^2-x^4)^2}=3\cdot\frac{5x^4a^2-x^8}{(a^2-x^4)^2}.$$

4) Вычислить производную функции $y=\dfrac{\cos(7x-2)}{x^2}$.

В этом примере необходимо применять формулы дифференцирования частного двух функций и дифференцирования сложной функции (функции от функции), а для такой функции $y=u(v(x))$ производная вычисляется по формуле $u'(x)=u'_v(v)\cdot v'_x(x)$.

$$y'=\frac{(\cos(7x-2))'x^2-\cos(7x-2)(x^2)'}{\left(x^2\right)^2}=\frac{-\sin(7x-2)(7x-2)'x^2-2x\cos(7x-2)}{x^4}=$$

$$=\frac{-7x^2\cdot\sin(7x-2)-2x\cdot\cos(7x-2)}{x^4}=-\frac{7x\cdot\sin(7x-2)+2\cdot\cos(7x-2)}{x^3}.$$

5) Вычислить производную функции $y=\arcsin\sqrt{x-3}$.

По формуле дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'=(\arcsin\sqrt{x-3})'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x-3}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{x-3}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-(x-3)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-3}}\cdot(x-3)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-3}}\cdot 1=\frac{1}{2\sqrt{(4-x)(x-3)}}.$$

6) Вычислить производную функции $y=2^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

По формуле дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'=\left(2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right)'=2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\ln 2\cdot\left(\sin^{-2}x\right)'=2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\ln 2\cdot(-2)\cdot\sin^{-3}x\cdot(\sin x)'=$$

$$=-2\cdot\ln 2\cdot 2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\sin^{-3}x\cdot\cos x=-2\cdot\ln 2\cdot 2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\frac{\cos x}{\sin^3 x}.$$

7) Вычислить производную функции $y=\lg\left(\frac{1}{x}-\sin 2x\right)$.

По формуле дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'=\left(\lg\left(\frac{1}{x}-\sin 2x\right)\right)'=\frac{1}{\frac{1}{x}-\sin 2x}\cdot\frac{1}{\ln 10}\left(\frac{1}{x}-\sin 2x\right)'=$$

$$=\frac{x}{1-x\sin 2x}\cdot\frac{1}{\ln 10}\left(\left(-\frac{1}{x^2}\right)-2\cos 2x\right)=\frac{x}{x\sin 2x-1}\cdot\frac{1}{\ln 10}\left(\frac{1}{x^2}+2\cos 2x\right).$$

4.5. *Логарифмическое дифференцирование*

На практике метод логарифмического дифференцирования применяется для показательно-степенной функции $y=u^v$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$, или в случае, когда функция представляет собой произведение, частное, степень нескольких функций.

Суть метода заключается в следующем:

1. Логарифмируем функцию $y(x)=u(x)^{v(x)}$:
   $\ln y(x)=\ln u(x)^{v(x)}=v(x)\ln u(x)$;
2. Дифференцируем обе части полученного равенства
   $\ln y(x)=v(x)\ln u(x)$:
$$\frac{y'}{y}=v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)};$$
3. Выражаем $y'(x)$ из последнего уравнения, умножив обе части на
   $y(x)$, тогда получим формулу искомой производной
$$y'(x)=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right).\qquad(4.10)$$

Замечание. Запоминать данную формулу не рекомендуется, проще запомнить сам прием логарифмического дифференцирования.

8) Вычислить производную функции $y=(\cos x)^{\sin x}$.

Так как в этом примере и основание, и показатель степени есть функции аргумента x, то имеем показательно-степенную функцию, к которой применим метод логарифмического дифференцирования:

1. Прологарифмируем $y(x)=(\cos x)^{\sin x}$, т.е.

$$\ln y(x)=\ln(\cos x)^{\sin x}=\sin x\ln(\cos x);$$

2. Последнее равенство дифференцируем как сложную функцию, т.е.

$$(\ln y(x))'=(\sin x\cdot\ln(\cos x))',\ \text{тогда}\ \frac{y'(x)}{y(x)}=\left(\cos x\cdot\ln\cos x+\sin x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}\right);$$

3. Умножив обе части последнего равенства на $y(x)$, получим искомую производную $(y(x))'=(\cos x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln\cos x-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$.

9) Вычислить производную функции $y=\dfrac{x^5\cdot\sin^3 x\cdot\sqrt[4]{x^5}}{(1-x)^2\cdot\sqrt{x^3}}$.

Функция представляет собой произведение и частное большого числа функций. Последовательно выполним все шаги метода:

1. $\ln y=5\ln x+3\ln\sin x+\dfrac{5}{4}\ln x-2\ln(1-x)-\dfrac{3}{2}\ln x$;

2. $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{5}{x}+3\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{5}{4x}+2\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{2x}\Rightarrow\ \dfrac{y'}{y}=\dfrac{19}{4x}+3\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{2}{1-x}$;

3. $y'=\left(\dfrac{19}{4x}+3\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{2}{1-x}\right)\dfrac{x^5\sin^3 x\sqrt[4]{x^5}}{(1-x)^2\sqrt{x^3}}$.

4.6. *Дифференцирование обратных функций*

Пусть $y=f(x)$ дифференцируемая и строго монотонная функция. Если переменную y рассматривать как аргумент, а переменную x как функцию, то новая функция $x=\varphi(y)$ является *обратной* $y=f(x)$ и по определению

$$\varphi(f(x))=x. \tag{4.11}$$

Теорема 4.6. *Если $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ − взаимно обратные и дифференцируемые функции, где $y'_x\neq 0$, то*

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}. \tag{4.12}$$

Доказательство. Заметим, что по условию функция $y = f(x)$ дифференцируема, тогда она непрерывна, т.е. малому приращению аргумента $\Delta x \to 0$ соответствует малое приращение функции $\Delta y \to 0$, что верно и в обратную сторону для непрерывной функции, тогда $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{1}{\Delta x / \Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'(y)}$, из чего, очевидно, следует

$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$.

10) Вычислить производную функции $y = arctgx$.

Обратной функцией к рассматриваемой является $x(y) = tgy$, ее производная $x'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$.

Так как $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$, то $y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \cos^2 y$.

Для вычисления искомой производной осталось выразить $\cos^2 y$ через $tgy = x(y)$: $\cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$.

Итак, $y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$, что соответствует таблице производных.

11) Вычислить производную функции $y = \arcsin x$.

Обратной функцией к рассматриваемой является $x(y) = \sin y$, ее производная $x'(y) = \cos y$.

Так как $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$, то есть для вычисления искомой производной нужно выразить $x'(y) = \cos y$ через $x(y) = \sin y$: $x'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

Итак, $y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, что соответствует таблице производных.

Аналогично вычисляются производные других обратных тригонометрических функций.

4.7. *Дифференцирование функций, заданных в неявном виде*

Если функция задаётся в виде уравнения $F(x,y)=0$, где $F(x,y)-$выражение, содержащее x и y, то y называется неявной функцией от x (или x неявной функцией от y). В некоторых случаях уравнение удаётся разрешить относительно y (или x), и тогда можно перейти к явному заданию функции $y=f(x)$, $(x=\varphi(y))$. В других случаях переход оказывается невозможным. Но в любых случаях найти производную возможно.

Для начала следует выбрать, какая из переменных будет считаться независимым аргументом, а значит, производную по какой переменной следует искать.

Например, если в уравнении $\ln(2x\cdot y)=2^x-y$ искомой производной будет $y'(x)$, то есть независимой переменной является x, то будем работать с уравнением вида $\ln(2x\cdot y(x))=2^x-y(x)$. Далее применяем к последнему уравнению правила дифференцирования и правило дифференцирования сложной функции (см. п. 4.3). Если же в уравнении искомой производной будет $x'(y)$, т.е. свободной переменной является y, то будем работать с уравнением вида $\ln(2x(y)\cdot y)=2^{x(y)}-y$, обе части которого будем дифференцировать по аргументу y.

Из полученного уравнения, после проведенной операции дифференцирования, выразим искомую производную.

Пример. Найти производную $y'(x)$ для функции $\ln(2x\cdot y)=2^x-y$.

Данная функция задана в неявном виде. Чтобы найти производную $y'(x)$, нужно обе части уравнения продифференцировать по x, рассматривая y как функцию от x:

$$\left(\ln(2x\cdot y(x))\right)'_x=\left(2^x-y(x)\right)'_x \Rightarrow \quad \frac{1}{2x\cdot y(x)}\cdot(2x\cdot y(x))'_x=2^x\cdot\ln 2-y'(x) \quad \Rightarrow$$

для упрощения записи опустим зависимость от аргумента

$$\frac{1}{2xy}\cdot 2(y+xy')=2^x\cdot\ln 2-y' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{y'}{y}=2^x\cdot\ln 2-y'.$$

Далее из полученного уравнения выразим искомую производную y':

$$y'+\frac{y'}{y}=2^x\cdot\ln 2-\frac{1}{x}\Rightarrow y'(1+\frac{1}{y})=2^x\cdot\ln 2-\frac{1}{x}\Rightarrow$$

$$y'\frac{y+1}{y}=2^x\cdot\ln 2-\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\frac{y}{y+1}\left(2^x\cdot\ln 2-\frac{1}{x}\right).$$

4.8. *Дифференцирование функций, заданных параметрически*

Теорема 4.7. *Пусть функция задана параметрически уравнениями:* $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t);\end{cases}$ *причём в области изменения параметра* t *верно* $x'(t)\neq 0$ *и обе функции дифференцируемы по аргументу* t*, (который называют параметром, а отсюда и название способа задания функции), тогда производная функции* y *по аргументу* x *равна*:

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Заметим, что функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$ дифференцируемы, тогда они непрерывны в точке t_0, и сама функция непрерывна в точке $M(x_0;y_0)=M(x(t_0);y(t_0))$. Непрерывность значит, что малому приращению аргумента $\Delta t\to 0$ соответствует малое приращение функции $\Delta x\to 0$, что верно и в обратную сторону для непрерывной функции, тогда

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}}\frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Пример. Найти производную $y'(x)$ от функции $\begin{cases}x=2\sin t^2,\\ y=3\cos t^2.\end{cases}$

Так как данная функция задана параметрически, то по формуле (4.13) получим $y'_x=\dfrac{\left(3\cos t^2\right)'_t}{\left(2\sin t^2\right)'_t}=\dfrac{-3\sin t^2\left(t^2\right)'}{2\cos t^2(t^2)'}=-\dfrac{3}{2}\dfrac{\sin t^2}{\cos t^2}=-\dfrac{3}{2}tgt^2.$

УПРАЖНЕНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется производной функции?
2. Какие правила дифференцирования функций Вы знаете?
3. Укажите взаимосвязь непрерывности и дифференцируемости функции?

4. Для каких функций применяется логарифмическое дифференцирование?
5. Какая функция в точке x_0 является дифференцируемой?
6. Установите соответствие между функцией и ее производной:

1. $y = 3^x \cdot arctg 3x$; А) $y' = e^x\left(\frac{3}{1+9x^2} + arctg 3x\right)$;

2. $y = tg 3x \cdot e^x$; Б) $y' = 3^x\left(\ln 3 \cdot arctg 3x + \frac{3}{1+9x^2}\right)$;

3. $y = arctg 3x \cdot e^x$; В) $y' = e^x \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}$;

Г) $y' = e^x \frac{6+\sin 6x}{2\cos^2 3x}$;

Д) $y' = 3^x\left(arctg 3x + \frac{1}{1+9x^2}\right)$.

7. Продифференцируйте функции:

1. $y = \frac{\sqrt{2x} + 2x - 1/x}{\sqrt[3]{x}}$; 2. $y = \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2} + x^2}{x^3}$; 3. $y = \left(e^{\sin x} - 2\right)\ln x$;
4. $y = \left(e^{-3x} - 2\right)\ln\left(x^2 + 1\right)$; 5. $y = \cos x / \left(4x^2 - 3\right)$; 6. $y = 5tgx / \left(4 - 2x^3\right)$;
7. $y = 20\sqrt[5]{x^4 + 3x^2}$; 8. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{6 - 3x + x^2}}$; 9. $y = arctg\,\frac{3}{x}$;
10. $y = \frac{1}{4}\arccos 4x^2$.

§ 5. Дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

С понятием производной тесно связано понятие *дифференциала* функции, одного из важнейших понятий высшей математики.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема при некотором значении переменной x, то есть в точке x существует конечная производная $f'(x)$.

Определение 5. Главную (линейную) часть приращения функции называют *дифференциалом* в точке x и обозначают dy (или $df(x)$).

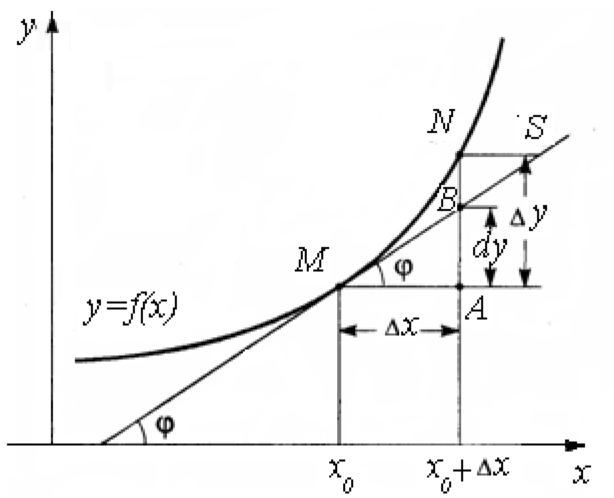


Рис. 15. Полное приращение Δy и дифференциал функции dy [15]

Из рис. 15 видно, что дифференциалом функции является отрезок AB, для определения его длины рассмотрим прямоугольный ΔABM, в котором катет $AB = dy$, катет $AM = \Delta x$ есть приращение аргумента, то $tg\varphi = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{dy}{\Delta x}$.

С другой стороны $tg\varphi = y'(x_0)$.

Приравнивая правые части, получим $\dfrac{dy}{\Delta x} = y'(x_0)$, т.е. $dy = y'(x)\Delta x$, или, что то же самое,

$$dy(x) = y'(x)dx \tag{5.1}$$

(для функции $y = x$ легко проверить, что дифференциал независимой переменной dx совпадает с ее приращением Δx, поэтому всегда $\Delta x = dx$).

При небольшом изменении аргумента разница между дифференциалом функции $AB = dy$ и приращением $AN = \Delta y$ очень мала (это очевидно, если значение Δx на рис. 15 взять поменьше). Это свойство дифференциала используется в приближенных вычислениях: $dy(x) \approx \Delta y \to \quad \Delta y \approx y'(x)dx \to \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$, окончательно получим формулу приближенного вычисления:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \tag{5.2}$$

где $(x_0 + \Delta x)$ – точка, в которой следует вычислить значение функции, а x_0 – такая точка, близкая к заданной, значение функции в которой легко вычисляется.

Пример 1. Вычислить $\sqrt[3]{8{,}02}$.

Рассмотрим функцию $y=\sqrt[3]{x}$. За x_0 выбираем значение, наиболее близкое к подкоренному выражению, корень кубический из которого есть целое число. В нашем случае $x_0=8$, тогда $\Delta x=0{,}02$, $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, а $f'(x_0)=f'(8)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{64}}=\dfrac{1}{12}$.

Итак, по формуле (5.2) имеем: $\sqrt[3]{8{,}02}\approx\sqrt[3]{8}+\dfrac{1}{12}\cdot 0{,}02=2{,}002$.

Пример 2. Вычислить $\cos 59^0$.

Рассмотрим функцию $y=\cos x$, $x_0=60^0$. Перейдем к радианам: $x_0=\dfrac{\pi}{3}$, $\Delta x=-1^0=-\dfrac{\pi}{180}=-\dfrac{3{,}14}{180}$.

Вычислим $f'(x)=(\cos x)'=-\sin x$ и ее значение в точке x_0: $f'(x_0)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx-\dfrac{1{,}732}{2}=-0{,}866$.

Итак, по формуле (5.2): $\cos 59^0\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\Delta x=$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+(-\sin\frac{\pi}{3})\cdot\left(-\frac{3{,}14}{180}\right)=\frac{1}{2}+0{,}866\cdot 0{,}0174=0{,}5150 \quad\Rightarrow\quad \cos 59^0\approx 0{,}5150.$$

§ 6. Свойства дифференцируемых функций на интервале

Теорема 6.1. (Ролля). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны $f(a) = f(b)$, то в интервале (a, b) существует точка ε, $a < \varepsilon < b$, в которой производная функция $f(x)$ равная нулю,* $f'(\varepsilon)=0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы в интервале (a, b) существует такая точка ε, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна оси Ox. Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает, что существует по крайней мере одна такая точка.

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке, функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ принимает наибольшее и наименьшее значения. Обозначим эти значения M и m соответственно.

Пусть $M \neq m$ (иначе $f(x)$=const). Так как значения функции на концах отрезка равны, то хотя бы одно из значений M или m функция принимает внутри отрезка $[a, b]$, без ущерба общности пусть это будет M. Обозначим через ε, $a < \varepsilon < b$ точку, в которой $f(\varepsilon) = M$. Так как M – наибольшее значение функции, то для любого Δx (будем считать, что точка $(\varepsilon+\Delta x)$ находится внутри рассматриваемого интервала) и верно неравенство:

$$\Delta f(\varepsilon) = f(\varepsilon + \Delta x) - f(\varepsilon) \leq 0.$$

При этом $\frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \leq 0, & \text{если} \quad \Delta x > 0, \\ \geq 0, & \text{если} \quad \Delta x < 0, \end{cases}$ но так как по условию производная в точке ε существует, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}$.

Поскольку $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \leq 0$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \geq 0$, то можно сделать вывод: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0$, т.е. $f'(\varepsilon) = 0$.

Следствие. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ удовлетворяет теореме Ролля, причем $f(a) = f(b) = 0$, то существует по крайней мере одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что $f'(\varepsilon) = 0$. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

Теорема 6.2 (Лагранжа). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале (a,b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε: $a < \varepsilon < b$, такая, что* $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon)$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа (см. рис. 16) состоит в том, что если на некотором промежутке выполняются условия теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной в некоторой промежуточной точке ε, а касательная в ней параллельна секущей, соединяющей точки A и B. Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно. Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно угловому коэффициенту секущей AB. Рассмотренная ранее теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Доказательство. Рассмотрим некоторую вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет теореме Ролля. Действительно, она непрерывна в отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале (a,b). По теореме Ролля существует хотя бы одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая что $F'(\varepsilon) = 0$, т.е. $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$, то $F'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$, следовательно, $f'(\varepsilon) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

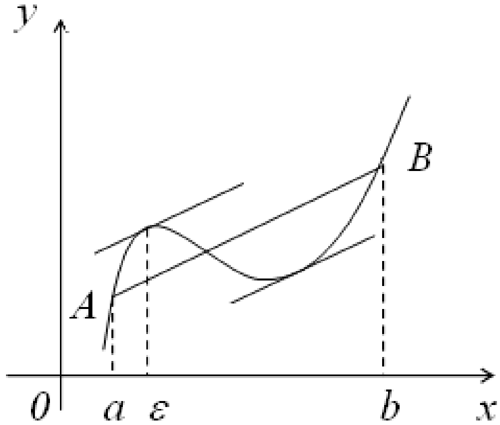


Рис. 16. Геометрический смысл теоремы Лагранжа [9]

Определение. Выражение $f(a) - f(b) = f'(\varepsilon)(b-a)$ называется *формулой Лагранжа* или *формулой конечных приращений***.**

Теорема 6.3 (Коши). *Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируемы в интервале* (a,b) *и* $g'(x) \neq 0$ *в интервале* (a,b)*, то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что* $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$.

Геометрический смысл теоремы (формулы) Коши состоит в том, что отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в некоторой точке ε из интервала (a,b).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию, которая на интервале $[a,b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Очевидно, что при $x = a$ и $x = b$: $F(a) = F(b) = 0$. Тогда по теореме Ролля существует такая точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что $F'(\varepsilon) = 0$:

$$F'(\varepsilon) = 0 = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\varepsilon).$$

А т.к. $g'(\varepsilon) \neq 0$, то $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$.

Замечание. Доказанная нами теорема Коши очень широко используется для раскрытия неопределенностей, возникающих при вычислении пределов. Применение полученных результатов позволяет существенно упростить процесс вычисления пределов функций, что будет подробно рассмотрено в следующей теореме.

Теорема 6.4 (правило Лопиталя). *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы вблизи точки* a, *непрерывны в точке* a, $g'(x)$ *отлична от нуля вблизи* a *и* $f(a) = g(a) = 0$, *то предел отношения функций при* $x \to a$ *равен пределу отношения их производных, если этот предел существует и конечный*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Применив формулу Коши, получим: $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$, где ε – точка, находящаяся между точками a и x.

Учитывая, что $f(a) = g(a) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Пусть при $x \to a$ отношение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит между точками a и x, то при $x \to a$ получим $\varepsilon \to a$, а, следовательно, и отношение $\dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, можно получаем:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Можно доказать, что правило Лопиталя применимо и к неопределенностям вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Примеры:

1) Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

При подстановке $x = 1$ в выражение внутри предела получается неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, тогда по формуле (6.1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e}.$$

2) Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$=$ Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило может быть применено второй раз, третий и так далее, пока не будет получен результат $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(1-\cos x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

3) Найти предел $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(xe^{\frac{x}{2}}\right)'}{\left(x+e^x\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}+\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2}}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{e^x}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)'}{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

Неопределенности вида (0^0), (1^∞), (∞^0), (0^∞) можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y=[f(x)]^{g(x)}$, $f(x)>0$ вблизи точки a при $x \to a$. Для нахождения предела такой функции ее достаточно прологарифмировать

$$\ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}=g(x)\ln f(x),$$

а далее найти ее предел:

$$\lim_{x\to a}(\ln y)=\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x).$$

Из полученного следует

$$\lim_{x\to a} y=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}.$$

4) Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.

Обозначим $A=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$, прологарифмируем обе части равенства и поменяем местами предел и логарифм (для непрерывных функций это возможно):

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln A=\lim_{x\to 0+0}\ln x^x=\lim_{x\to 0+0} x\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0+0} x=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln A=0 \Rightarrow \ln A=0 \Rightarrow A=1 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x=1.$

УПРАЖНЕНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Укажите свойства дифференцируемых на интервале функций.
2. Для каких неопределенностей применяется правило Лопиталя?
3. Используя правило Лопиталя, вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5}{x^3-4x-10}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{arctg\,6x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{2x-5}-1}$;

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{(1-\cos x)}$; 7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos\pi x-1}{x^3-8}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt[3]{27x}-1}$.

4. Применяя правило Лопиталя, вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)^{x-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-5}{4x^2}-\dfrac{x^2+3}{2x}\right)$; 3. $\lim\limits_{x\to 0} x^3\ln x$; 4. $\lim\limits_{x\to 3+}(x-3)^{\sin\pi x}$.

§ 7. Исследование функции и построение графика

7.1. *Возрастание и убывание функций*

Определение 7.1. Функция $f(x)$ *возрастает* (или *убывает*) на $[a;b]$, если для любых точек x_1, $x_2 \in [a;b]$, где $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (или $f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема 7.1.

1) *Если функция* $f(x)$ *имеет производную на отрезке* $[a;b]$ *и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. для всех* $x \in [a;b]$: $f'(x) \geq 0$.

2) Если функция $f(x)$ *дифференцируема в интервале* (a, b), *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и на отрезке выполняется условие* $f'(x) > 0$, *то эта функция возрастает на отрезке* $[a;b]$.

Доказательство.

1) Если функция $f(x)$ возрастает, то

$$f(x + \Delta x) > f(x) \text{ при } \Delta x > 0 \quad \text{и} \quad f(x + \Delta x) < f(x) \text{ при } \Delta x < 0,$$

т.е. приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ и приращение аргумента Δx одного знака, тогда: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$, то есть $f'(x) \geq 0$.

2) Пусть $f'(x) > 0$ для любых точек x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), принадлежащих отрезку $[a, b]$, тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < \varepsilon < x_2$. По условию $f'(\varepsilon) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, из чего следует $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. функция $f(x)$ возрастает.

Замечание. Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в интервале (a, b), то для убывающей на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ справедливо $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке.

А если $f'(x) < 0$ в интервале $(a;b)$, то $f(x)$ убывает на отрезке $[a;b]$.

Например. Функции $y = e^x$ и $y = -x^3$ монотонны на всей числовой оси. Первая из них везде возрастает, а вторая убывает. Это легко подтверждается производными этих функций:

$y'(x) = (e^x)' = e^x > 0$ при всех $x \in [-\infty; +\infty]$, т.е. везде возрастает;

$y'(x) = (-x^3)' = -3x^2 < 0$ при всех $x \in [-\infty; +\infty]$, т.е. везде убывает.

7.2. *Точки экстремума*

Определение 7.2. Точка x_1 называется точкой *максимума*, если значение функции $f(x)$ в точке x_1 больше значений функции в некоторой окрестности этой точки: $f(x_1+\Delta x) < f(x_1)$ при любом $\Delta x \neq 0$, $|\Delta x| < \delta$ (Δx может быть любого знака).

Аналогично x_2 называется точкой *минимума*, если $f(x_2+\Delta x) > f(x_2)$ при любом $\Delta x \neq 0$, $|\Delta x| < \delta$ (Δx может быть любого знака).

Определение 7.3. Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*.

Теорема 7. 2. (Необходимое условие существования экстремума). *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, которая является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке* $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум.

При достаточно малых положительных $\Delta x > 0$ верно неравенство $f(x_0+\Delta x) < f(x_0)$, т.е. $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) < 0$, из чего следует,

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0.$$

Аналогично, при достаточно малых отрицательных $\Delta x < 0$ верно неравенство

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

По определению: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Если $\Delta x \to 0$, но $\Delta x<0$, то $f'(x_0) \geq 0$, а если $\Delta x \to 0$, но $\Delta x > 0$, то $f'(x_0) \leq 0$. В силу теоремы 7.1. имеем слева от x_0 возрастающую функция, а справа от x_0 убывающую функцию, тогда в точке x_0 есть максимум. Из чего следует $f'(x_0) = 0$.

Для случая, если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум, теорема доказывается аналогично.

Следствие. Обратное утверждение неверно, то есть, если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не экстремум.

Рассмотренная выше теорема дает нам одно из необходимых условий существования экстремума, которое не является достаточным.

Определение 7.4. *Критическими (особыми) точками* функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Вообще говоря, функция $f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю. Примером являются функции: $f(x) = |x|$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Первая из них не дифференцируема в точке x=0 (она не гладкая), а вторая имеет производную, которая не определена в нуле.

Теорема 7. 3. (Достаточные условия существования экстремума.) *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна в интервале* (a, b), *который содержит критическую точку* x_1, *и дифференцируема во всех точках этого интервала* (*кроме, может быть, самой точки* x_1).
Если при переходе через точку x_1 *слева направо производная функции* $f'(x)$ *меняет знак с "+" на "–", то в точке* $x = x_1$ *функция* $f(x)$ *имеет максимум, а если производная меняет знак с "–" на "+", то в точке* x_1 *функция имеет минимум.*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы, т.е. при $x < x_1$: $f'(x) > 0$ и при $x > x_1$: $f'(x) < 0$. Тогда в силу теоремы 7.1 слева от x_1 функция $f(x)$ возрастает, а справа от x_1 функция $f(x)$ убывает. Следовательно, x_1 есть точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Определение знаков функции иногда бывает затруднительно. В этом случае лучше пользоваться вторым достаточным условием экстремума.

Пусть в точке $x = x_1$: $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

Теорема 7.4. *Если* $f'(x_1)=0$, *то функция* $f(x)$ *в точке* $x=x_1$ *имеет максимум, если* $f''(x_1)<0$ *и минимум, если* $f''(x_1)>0$.

Доказательство. Пусть $f'(x_1)=0$ и $f''(x_1)<0$. Т.к. функция $f''(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1. Т.к. $f''(x)=(f'(x))'<0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1, но $f'(x_1)=0$, поэтому $f'(x)>0$ при $x<x_1$ и $f'(x)<0$ при $x>x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x=x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с "+" на "–", т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x)=0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование с использованием производных высших порядков.

На практике возникает большое количество задач на экстремум.

Пример. Каково должно быть соотношение между радиусом и высотой консервной банки, чтобы при данном объеме расход жести был минимален.

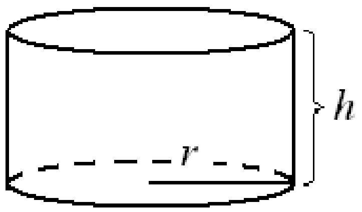


Рис. 17. Геометрическая фигура – цилиндр

Решение. Обозначим радиус основания банки r, высоту банки h (см. рис. 17), а объем банки V. Тогда $S_{полн}=2S_{осн}+S_{бок}=2\pi r^2+2\pi rh\to\min$.

Отметим, что этот минимум, очевидно, существует: если радиус очень большой, а высота мала, или наоборот, то полная поверхность может быть сколь угодно большой. $S_{полн}$ зависит от двух переменных, поэтому воспользовавшись постоянством объема $V=\pi r^2h$, выразим h через r: $h=V/\pi r^2$ и, подставив в $S_{полн}$, окончательно получим $S_{полн}(r)=2\pi r^2+2V/r$ $(r>0)$.

Найдем производную $S'_{полн}=2(2\pi r-V/r^2)=2\dfrac{2\pi r^3-V}{r^2}$ и критические точки. В силу положительности радиуса такая точка получится только при $S' = 0$, $2\pi r^3 - V = 0$, $r^3 = V / 2\pi$, $r_{\min} = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ (обоснуйте это с помощью одного из достаточных условий экстремума).

Наконец, $h_{\min} = \dfrac{V}{\pi r_{\min}^2} = \dfrac{V}{\pi \sqrt[3]{V^2/4\pi^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{V^3 4\pi^2}{\pi^3 V^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{8V}{2\pi}} = 2r_{\min}$.

Следовательно, оптимальным вариантом будет высота равная диаметру (в осевом сечении будет квадрат). Консервные банки часто производят с уменьшенной высотой из-за потребительских свойств (например, шпроты более двух слоев не положишь), а вот нефтяные баки и другие подобные объекты делают так, как мы рассчитали.

К задачам на экстремум относят задачи на вычисление экстремального значения функции на отрезке.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда у нее существует $f_{\text{наим.}}$ и $f_{\text{наиб.}}$. Отметим, что они достигаются или в точках экстремума, попавших на отрезок $[a,b]$, или на концах отрезка (см. рис. 18, для приведенного на нем графика функции, очевидно, $f_{\text{наим.}} = f(x_{\min})$, $f_{\text{наиб.}} = f(b)$).

Для нахождения $f_{\text{наим.}}$ и $f_{\text{наиб}}$ нужно:

1) найти критические точки и выбрать те из них x_1, x_2, …, x_n, которые попали на отрезок $[a,b]$;
2) вычислить $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$, $f(a)$, $f(b)$ и выбрать среди них $f_{\text{наим.}}$ и $f_{\text{наиб}}$ (могут достигаться неоднократно).

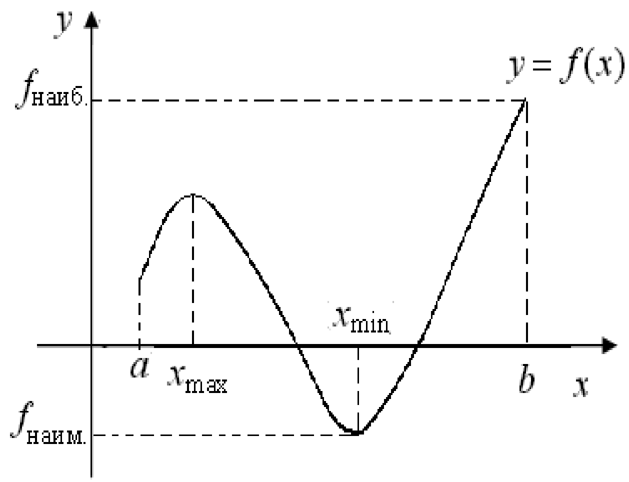


Рис. 18. Иллюстрация непрерывной на отрезке функции

Пример. Найти на отрезке [–2; –0,5] наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2$.

Решение.

1) Найдем критические точки:

$$f'(x) = 3(x-1)^2(x+1)^2 + 2(x-1)^3(x+1) = (x-1)^2(x+1)(5x+1),$$

тогда необходимое условие существования экстремума $y' = 0$ дает корни $x_1 = -1$, $x_2 = -1/5$, $x_3 = 1$, из них только $x_1 = -1 \in [-2; -0{,}5]$.

2) Вычислим значение функции в точке $x_1 = -1$ и на концах интервала:

$$f(-2) = (-3)^3(-1)^2 = -27,\ f(-1) = 0,\ f(-0{,}5) = (-3/2)^3(1/2)^2 = -27/32.$$

Выберем по вычисленным значениям $f_{\text{наим}} = f(-2) = -27$ и $f_{\text{наиб.}} = f(-1) = 0$. Отметим, что без использования достаточного условия экстремума в данном примере (на отрезке) можно утверждать, что $x_1 = -1$ является точкой максимума, а $x_2 = -2$ является точкой минимума.

7.3. *Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба*

Определение 4.5. Кривая называется *выпуклой* в интервале (a,b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая называется *вогнутой* в интервале (a,b), если все ее точки лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

На рис. 19 проиллюстрировано приведенное выше определение: при $x<L$ точки кривой находятся ниже проведенных к ним касательных и по определению кривая там выпукла, и наоборот, вогнута правее точки $x=L$.

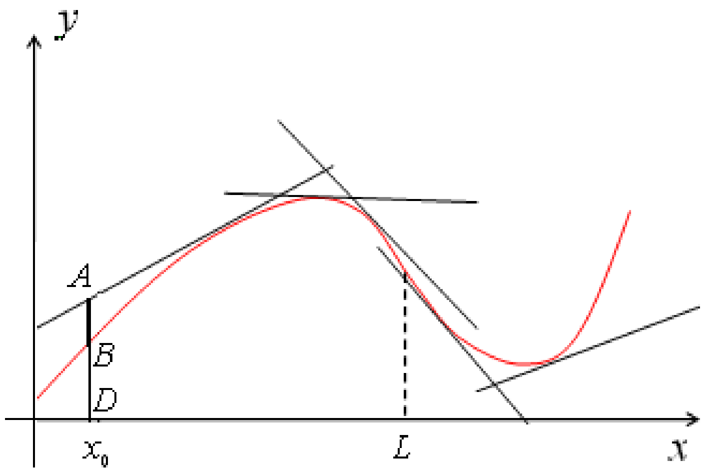


Рис. 19. Точка перегиба [10]

Теорема 7.5. *Если во всех точках интервала* (a,b) *вторая производная функции* $f(x)$ *отрицательна* (*положительна*), *то кривая* $y = f(x)$ *выпукла* (*вогнута*) *на интервале.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a,b)$.

Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в этой точке. Уравнение касательной имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ (или } \tilde{y}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\text{)}.$$

Для фиксированной точки $x_0 \in (a,b)$ рассмотрим разность (рис. 19):

$$|BD| - |AD| = y(x) - \tilde{y}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где $x_0 < c < x$.

Тогда $y(x) - \tilde{y}(x) = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$.

По теореме Лагранжа для производной данной функции

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0), \text{ где } x_0 < c_1 < c.$$

Окончательно $y - \tilde{y} = (x - x_0)(c - x_0) f''(c_1)$.

Если $x > x_0$, тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Так как $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \tilde{y} < 0$.

Если $x < x_0$, тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, и, кроме того, по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \tilde{y} < 0$.

Из неравенства $y - \tilde{y} < 0$ следует, что кривая $y = f(x)$ лежит ниже касательной, а, значит, она выпукла.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ в интервале (a, b), то кривая $y = f(x)$ вогнута в интервале (a, b).

Пример. Определить направление выпуклости кривой $y(x) = \ln x$ с помощью второй производной.

Решение. Вычислим вторую производную:

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Следовательно, логарифмическая функция по основанию *e* везде на области определения выпуклая.

Определение 7.6. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой части, называется *точкой перегиба*.

Очевидно, что в точке перегиба кривая пересекает касательную, на рис. 19 это точка *L*.

Теорема 7.6. *Пусть вторая производная* $f''(a) = 0$ *или* $f''(a)$ *не существует. Если при переходе через точку* $x = a$ *меняет знак* $f''(x)$*, то точка кривой с абсциссой* $x = a$ *является точкой перегиба.*

Доказательство.

Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тогда при $x < a$ кривая выпукла, а при $x > a$ кривая вогнута, т.е. точка $x = a$ – точка перегиба.

Пусть $f''(x) > 0$ при $x < a$ и $f''(x) < 0$ при $x < a$. Тогда при $x < a$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > a$ – выпуклостью вверх. Тогда $x = a$ – точка перегиба.

Замечание. Отметим, что ситуация применения первой производной для нахождения точек экстремума полностью аналогична ситуации со второй производной для нахождения точек перегиба (единственное отличие, что по определению точки экстремума лежат на числовой оси Ox, а точки перегиба на графике функции). Поэтому в обоих случаях сначала применяют необходимые условия и находят нули соответствующих производных, потом, расставив знаки производных, проверяют достаточные условие для полученных точек.

Пример.

1. Исследовать кубическую параболу $y(x) = x^3/3 - 2x^2 + 3x + 1$ с помощью первой и второй производных.

2. Определить количество корней уравнения $x^3/3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

Решение.

1. Исследуем функцию по первой производной:

$$y' = (x^3/3 – 2x^2 + 3x + 1)' = x^2 – 4x + 3 = 0.$$

По теореме Виета $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Расставим знаки производной (в нашем случае для параболы, ветви которой идут вверх), график производной этой функции указан на рис. 20.

Следовательно, исследуемая кубическая парабола убывает при $x \in (1,3)$ и возрастает при $x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$, тогда

$$x_{\max} = 1, \quad f_{\max} = f(1) = 2\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad x_{\min} = 3, \quad f_{\min} = f(3) = 1.$$

Экстремумами функции являются точки $A_1(1;2\frac{1}{3})$, $A_2(3;1)$.

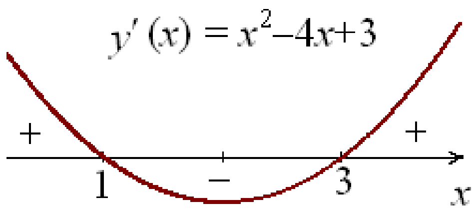


Рис. 20. График производной функции $y(x) = x^3/3 - 2x^2 + 3x + 1$

Исследуем функцию по второй производной:

$$y'' = (x^2–4x+3)'=2x–4=0,$$

тогда x=2, причем $y'' <0$ при x<2 и $y'' >0$ при x>2, значение функции в точке $f(2) = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$, т.е. в точке $B(2;1\frac{2}{3})$ есть перегиб.

Построим схематический график кубической параболы, что указано на рис. 21.

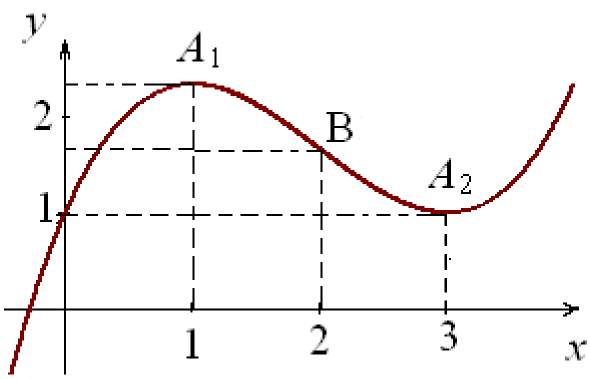


Рис. 21. График функции кубической параболы $y(x) = x^3/3 - 2x^2 + 3x + 1$

2. Определим количество корней уравнения.

Так как т. A_2 лежит выше оси Ox (см. рис. 21), то уравнение $x^3/3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ (его левая часть будет $F(x)$ = $3f(x)$) имеет единственное решение.

Можно еще вычислить значения левой части уравнения $F(x)$ = $x^3–6x^2+9x+3$ в двух целочисленных точках $F(0)$ = 3, $F(–1)$ = –1–6–9+3 = –13. Так как они разных знаков, то по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции у кубического уравнения будет корень $x_1 \in (–1, 0)$.

Если нам надо будет повысить точность (например, до 0.1), то вычислим значение функции $F(x)$ при x = – 0.4 (обычно берут середину отрезка, но из поведения функции на интересующем нас промежутке (см. рис. 20) следует, что корень лежит ближе к правому концу): $F(–0,4)$ = –0.064–6·0.16–3.6+3 < 0, поэтому выберем интервал (–0.4;0), на концах которого значения функции будут опять разных знаков и, следовательно, корень находится в этом интервале, возьмем на этот раз середину $x = -0{,}2$. Наконец, $F(-0{,}2) = -0.008-0.24-0.18+3=2.572 > 0$ и, взяв середину интервала $(-0.4; -0.2)$ длиной 0.2, найдем $x = -0.3$; в результате мы и получим ответ с заданной точностью 0.1.

7.4. *Асимптоты*

При исследовании функций часто бывает, что при стремлении аргумента функции $x \to x_0$, где $x_0 < \infty$ или $x_0 = \infty$, сама кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение 7.7. Прямая для заданной кривой называется *асимптотой*, если кратчайшее расстояние от переменной точки кривой до этой прямой стремится к нулю при $x \to x_0$, где x_0 конечное или бесконечное число.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту.

Асимптоты можно классифицировать. Асимптоты могут быть вертикальные (в точках разрыва функции) и наклонные. Частным случаем наклонных асимптот являются асимптоты горизонтальные. Исследование функций на асимптотическое поведение имеет большое значение и при наличии асимптот позволяет более точно определить характер поведения функции, что упрощает построение графика.

На рис. 22 указаны вертикальная, наклонная и горизонтальные асимптоты, соответственно.

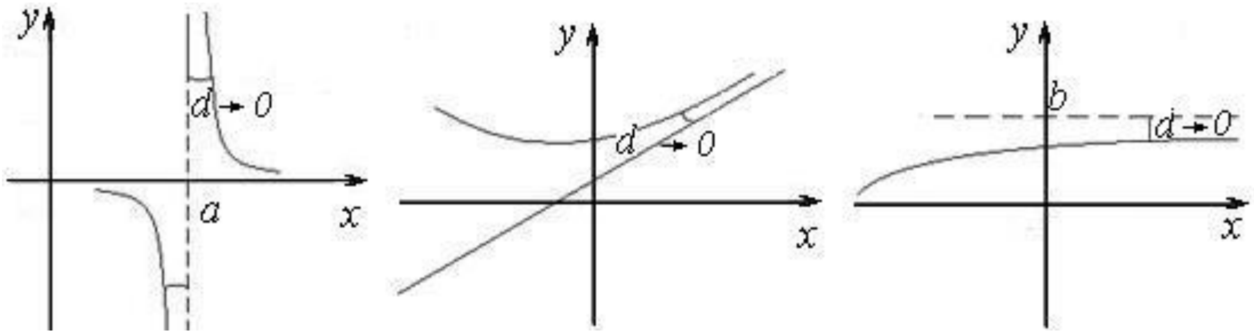


Рис. 22. Различные виды асимптот [3]

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на рис. 23 для графика функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота $y = x$.

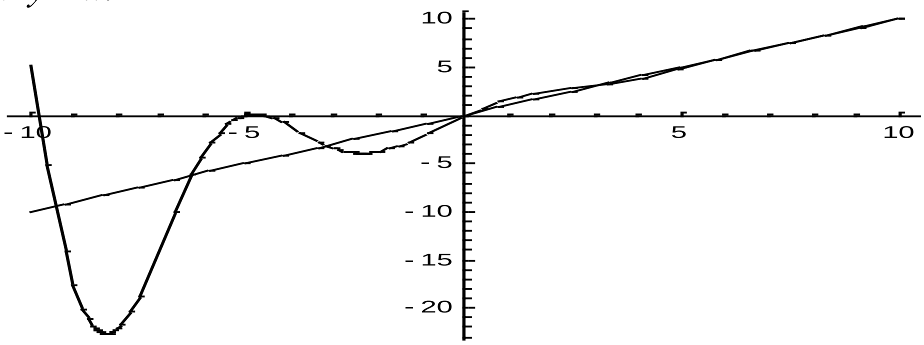


Рис. 23. График функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$ с асимптотой

Но для подавляющего большинства функций при подходе их графика к асимптоте вторая производная знака не меняет, и кривая подходит к своей асимптоте с одной стороны. Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

7.4.1. Вертикальные асимптоты

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ есть вертикальная асимптота кривой $y = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая $x = 5$ является такой асимптотой. Напомним, что по определению в точке $x = 5$ на оси Ox у данной функции будет бесконечный разрыв второго рода.

7.4.2. Наклонные асимптоты

Предположим, что кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$, что указано на рис. 24, где M – точка пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте, N – точка пересечения этого перпендикуляра с прямой.

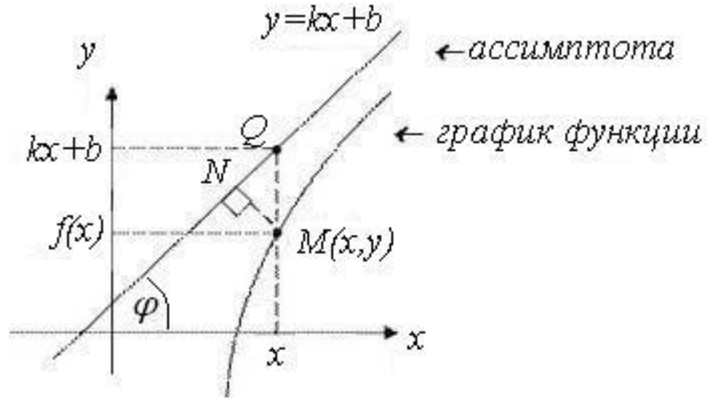


Рис. 24. Иллюстрация наклонной асимптоты [3]

Перпендикуляр MQ к оси Ox пересекает асимптоту. В прямоугольном треугольнике ΔMNQ: $\angle NMQ = \varphi$, т.к. $MN \perp NQ,\ QM \perp OX$ и $QM = \dfrac{MN}{\cos\varphi}$. По определению асимптоты $\lim\limits_{x\to\pm\infty} MN = 0$ то, следовательно, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} MN = \lim\limits_{x\to\pm\infty} |\, f(x) - kx - b \,| = 0$.

В полученном выражении выносим за скобки x: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$.

Так как $x\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$, из табличных пределов имеем $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{b}{x} = 0,\quad \lim\limits_{x\to\infty} k = k$, тогда $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, и, следовательно,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{7.1}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - (kx + b)\right] = 0$, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right] - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$, следовательно,

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right]. \tag{7.2}$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет вид

$$y = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot x + \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right]. \tag{7.3}$$

Замечание 1. Сначала вычисляют угловой коэффициент k и, если он конечен, подставляют его в формулу для вычисления свободного члена b. Отметим, что значения пределов справа $k_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b_+ = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$ и слева $k_- = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b_- = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-kx]$ на числовой оси могут быть различными – это обозначает, что асимптота есть только там, где оба соответствующих коэффициентов k и b конечны.

Замечание 2. Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k = 0$.

Пример 1. Найти асимптоты функции $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$.

1) Вертикальная асимптота $x = 0$ – точка бесконечного разрыва функции 2-го рода.

2) Наклонная асимптота: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1$,

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right) = 2.$$

Таким образом, прямая $y = x+2$ является наклонной асимптотой.

Пример 2. Найти асимптоты функции $y = \frac{9x}{9-x^2}$.

1) Прямые $x = 3$ и $x = -3$ являются вертикальными асимптотами кривой.

2) Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{9-x^2} = 0, \quad b = \lim_{x\to\infty} \frac{9x}{9-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2}-1} = 0.$$

Итак, $y = 0$– горизонтальная асимптота (см. рис. 25).

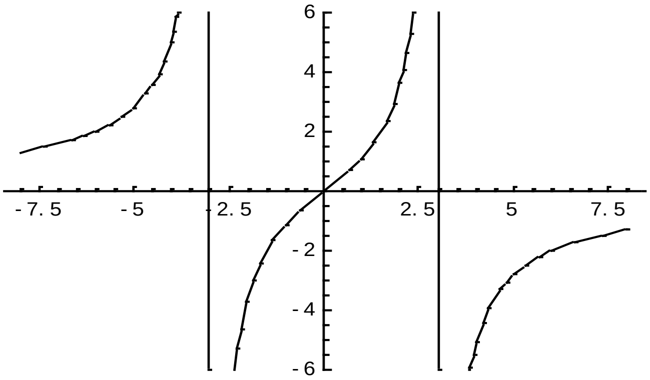


Рис. 25. График функции $y = \frac{9x}{9-x^2}$

Пример 3. Найти асимптоты и построить график функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

1) Прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой кривой.

2) Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -4.$$

Итак, прямая $y = x - 4$ является наклонной асимптотой. Укажем ее на графике (см. рис. 26).

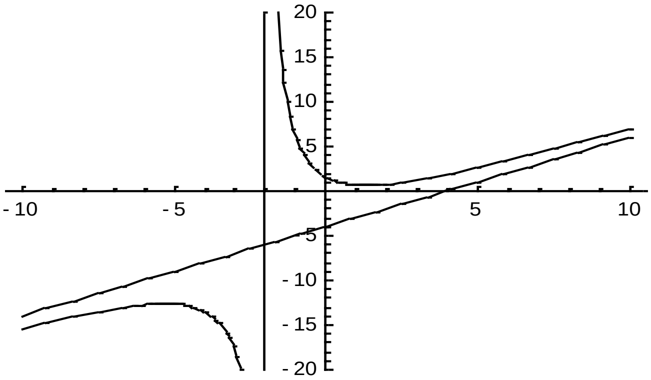


Рис. 26. График функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$

Есть функции, которые имеют асимптоты только справа или слева, а не на всей числовой оси, что указано в следующем примере.

Пример 4. Найти асимптоты функции $y = \dfrac{x}{e^x}$.

Решение. 1) Так как $e^x > 0$ и функция существует при всех $x \in R$, то вертикальных асимптот нет.

2) Найдем наклонную асимптоту, заметив, что в рассматриваемой функции содержится функция показательная e^x, поведение которой справа и слева на числовой оси сильно отличается, что приводит к необходимости вычислять отдельно значение пределов при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$:

$k_- = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{xe^x} = \left(\dfrac{1}{0}\right) = \infty$, следовательно, слева наклонной асимптоты нет;

$k_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{xe^x} = \left(\dfrac{1}{e^{+\infty}}\right) = \left(\dfrac{1}{\infty}\right) = 0$, т.к. $k_+ = 0 < \infty$, то вычислим b_+, и только если оба эти коэффициента конечны функция имеет асимптоту справа, $b_+ = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = \left(\dfrac{1}{\infty}\right) = 0.$

Итак, слева кривая асимптоту не имеет, а справа есть горизонтальная асимптота $y = 0$.

Замечание. Как уже было сказано, асимптоты бывают не у всех функций, как правило, это функции бесконечно растущие (убывающие) при $x \to \pm\infty$, но функции с асимптотами более предсказуемы.

7.5. *Общая схема исследования функций*

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и построения ее графика необходимо:

1. Найти область определения и область значения функции;
2. Установить четность, нечетность, периодичность функции; найти точки её пересечения с осями;
3. Определить асимптоты: вертикальные (точки разрыва функции), наклонные (в том числе горизонтальные);
4. Определить точки экстремума функции, промежутки возрастания и убывания функции;
5. Определить точки перегиба функции, промежутки выпуклости и вогнутости функции;
6. Составить таблицу по всем особым точкам функции, к которым относят все точки, в которых обращаются в ноль или не определены производные (см. п. 4 и п. 5);
7. Построить график по таблице (сначала нанести на плоскость xOy точки пересечения функции с осями, ее асимптоты и все критические точки производных).

Пример. Исследовать функцию и построить ее график $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

1. Область определения: вся числовая ось за исключением точки $x=0$, или $x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

2. Полезно определить точки, где график пересекает оси координат, а также учесть периодичность, четность или нечетность функции.

В нашем примере функция не является периодической, так как не содержит тригонометрических функций.

Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $y(-x)=(-x+2)e^{1/-x}=\dfrac{2-x}{e^{1/x}}$, т.е. $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$.

Пересечение с осью Ox определяют точки, в которых $y(x)=0$. В нашем случае $(x+2)e^{1/x}=0$ при $x=-2$, т.е. имеем точку на оси Ox, которую обозначим $A(-2;0)$.

Пересечение графика с осью Oy происходит при $x=0$. В нашем случае это невозможно, так как $x=0$ не входит в область определения.

3. Изучим поведение функции на границе области определения, то есть выясним, к чему стремится y, если x приближается к границам области определения.

Рассмотрим граничную точку $x=0$.

Определим односторонние пределы:

$$y(0-0)=\lim_{x\to 0-}(x+2)e^{1/x}=\lim_{x\to 0-}(x+2)\cdot\lim_{x\to 0-}e^{1/x}=2\cdot\left(e^{-\infty}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{e^{\infty}}\right)=2\cdot 0=0;$$

$$y(0+0)=\lim_{x\to 0+}(x+2)e^{1/x}=\lim_{x\to 0+}(x+2)\cdot\lim_{x\to 0+}e^{1/x}=2\cdot\left(e^{+\infty}\right)=2\cdot(+\infty)=+\infty.$$

Получено, что при приближении x к конечной точке $x=0$ функция справа уходит в ∞, это обозначает, что в этой точке y графика есть вертикальная асимптота. В нашем случае вертикальной асимптотой является прямая $x=0$, то есть ось Oy.

Проверим наличие наклонных асимптот вида $y=kx+b$ при $x\to\pm\infty$, а коэффициенты k и b находят по формулам $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+2)e^{1/x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)\cdot e^{1/x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)\cdot\lim_{x\to\pm\infty}e^{1/x}=1\cdot e^{0}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(x+2\right)e^{1/x}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)+\lim_{x\to\pm\infty}2\cdot e^{1/x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}+2\cdot e^{0}=\left|\begin{array}{l}\text{по следствию 2 - го замечат. предела}\\ \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{z}-1}{z}=1\end{array}\right|=1+2=3.$$

Коэффициенты k и b определены и конечны, а значит, у графика функции при $x\to\pm\infty$ есть наклонная асимптота $y=x+3$.

4. Исследуем функцию по первой производной:

$$y'=e^{1/x}-\frac{x+2}{x^2}\cdot e^{1/x}=e^{1/x}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}.$$

Как известно, точки экстремума функции находятся среди тех точек области определения, в которых производная первого порядка равна нулю или не существует:

- нулем $y'(x)$ являются точки $x=-1$ и $x=2$;
- особой точкой $y'(x)$ является $x=0$.

Методом интервалов расставим знаки производной (рис. 27):

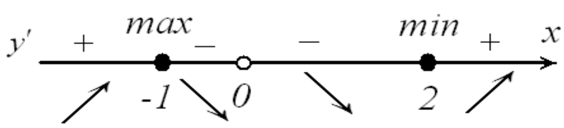


Рис. 27. Знаки производной $y'(x)$ функции $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$

Из выделенных точек экстремумами являются те, в которых производная функции меняет знак.

Очевидно, такими точками являются:

$x=-1$ – это максимум, до точки $x=-1$ функция возрастает, а после убывает;

$x=2$ – это минимум, до точки $x=2$ функция убывает, а далее возрастает.

Величина локального максимума равна $y(-1)=e^{-1}(-1+2)=e^{-1}\approx 0{,}4$, соответствующую точку максимума обозначим $B(-1;\ 0{,}4)$.

Величина локального минимума равна $y(2)=e^{1/2}(2+2)=4e^{1/2}\approx 6{,}6$, соответствующую точку минимума обозначим $C(2;\ 6{,}6)$.

5. Исследуем функцию по второй производной. Для определения точек перегиба надо найти те значения x, при которых $y''(x)=0$ или не существует.

$$y''=\left(e^{1/x}\,\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}\right)'=-\frac{e^{1/x}}{x^2}\cdot\frac{\left(x^2-x-2\right)}{x^2}+e^{1/x}\cdot\frac{(2x-1)x^2-\left(x^2-x-2\right)\cdot 2x}{x^4}=$$

$$=e^{1/x}\cdot\frac{5x+2}{x^4}.$$

Нулем $y''(x)$ является точка $x=-2/5$, а особой является $x=0$. Методом интервалов укажем знаки $y''(x)$ на числовой оси (рис. 28).

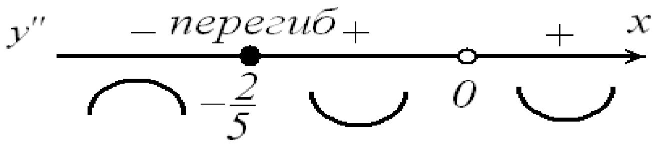


Рис. 28. Знаки второй производной $y''(x)$ функции $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$

В точке $x=-2/5$ производная $y''(x)$ поменяла знак, а значит, есть перегиб, значение функции в точке перегиба $y(-2/5)=e^{-5/2}\cdot(-2/5+2)\approx 0{,}13$, обозначим точку перегиба через точку $D(-0{,}4;0{,}13)$.

6. Составим таблицу по всем особым точкам п. 4. и п. 5.:

Табл. 3

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;-\frac{2}{5})$	$-\frac{2}{5}$	$(-\frac{2}{5};0)$	0	(0, 2)	2	$(2;+\infty)$
$y'(x)$	$\nearrow$	*max*	$\searrow$		$\searrow$	не-опред	$\searrow$	*min*	$\nearrow$
$y''(x)$	$\frown$		$\frown$	перегиб	$\smile$	не-опред	$\smile$		$\smile$
$y(x)$		$B(-1;0,4)$		$D(-2/5;0,13)$				$C(2;6,6)$	

7. Построим график по таблице.

На координатную плоскость xOy, см. рис. 29, наносим те точки графика, которые соответствуют точкам локального максимума и минимума, точкам перегиба, отмечаем точки пересечения с осями, а также проведём асимптоту.

Далее строим график, последовательно указывая поведение функции по столбцам на каждом из интервалов (у нас их пять). При правильном выполнении вычислений на концах интервалов функция состыковывается.

Например, на первом промежутке $(-\infty;-1)$ функция выпукла, возрастает, проходит через точку $A(-2;0)$ на оси Ox, слева стремится к асимптоте $y = x + 3$, а правой границей кривой является точка $B(-1;0,4)$.

На промежутке $(-1;-2/5)$ функция выпукла и убывает, левой и правой границами кривой являются точки $B(-1;0,4)$ и $D(-2/5;0,13)$.

Аналогичным образом строят график исследуемой функции на оставшихся интервалах.

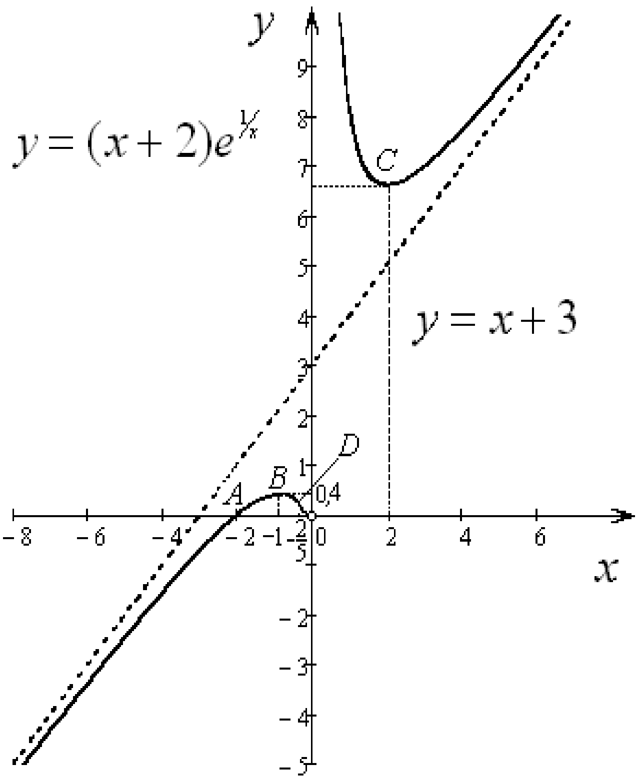


Рис. 29. График функции $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$

УПРАЖНЕНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется точкой максимума и точкой минимума функции?
2. Что называется точкой перегиба функции?
3. Какая функция является выпуклой в точке, выпуклой в интервале?

4. Укажите необходимое условие существования экстремума функции в точке.
5. Укажите достаточное условие существования экстремума функции в точке.
6. Укажите необходимое и достаточное условия существования перегиба функции в точке.
7. Установите соответствие между производными функций и количеством точек экстремума.

1. $f'(x) = 27 - x^3$;	А) 0;
2. $f'(x) = 25 - x$;	Б) 1;
3. $f'(x) = 25x^2$.	В) 2.

8. Вертикальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{3x-5}{2x+3}$ является прямая, определяемая уравнением:

1. $x = 0$;	3. $y = -\dfrac{5}{3}$;
2. $y = \dfrac{3}{2}$;	4. $x = -\dfrac{3}{2}$.

9. Вертикальными асимптотами кривой $y = \dfrac{x+7}{x(x-5)}$ являются следующие две прямые:

1. $x = -7$;	3. $x = 5$;
2. $x = 0$;	4. $y = 0$.

10. Наклонной асимптотой графика функции $y(x) = \dfrac{4x^2 + 2x - 2}{2x+1}$ является прямая …

1. $y = 2x$;	3. $y = x + 2$;
2. $y = 4x - 2$;	4. график не имеет наклонных асимптот.

11. Определить точки экстремума функции:
 1. $y(x) = (x+2)e^{2x-1}$; 2. $y = x^3 + 3x^2$; 3. $y = x + 3\sqrt[3]{x^2}$.
12. Определить точки перегиба функции:
 1. $y(x) = (2x+1)e^{3x}$; 2. $y = x + 3\sqrt[3]{x^2}$; 3. $y = \ln(x^2 + 16)$.

Варианты расчетно-графических работ

Вариант N 1

1. Найти область определения функции: 1) $\cos x+\sqrt{1-x}$; 2) $tgx+\dfrac{1}{\lg x}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{4x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-x}{x^2-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2}{x+x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^{2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^{x^2-1}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0,\\ -(x-2)^2, & 0<x<1,\\ x-2, & x\ge 1.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x+1}}}$, $x=-1$, $x=-2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=3x^2-3\sqrt[3]{x^2}+1$; 2) $y=\left(x^2-3\right)\cdot(2x+1)$; 3) $y=\dfrac{2x^4}{b^2-x^4}$;

4) $y=\dfrac{\sin(3x+5)}{x}$; 5) $y=x\cdot\arcsin x^3$; 6) $y=\ln\left(\dfrac{1-e^x}{e^x}\right)$;

7) $\begin{cases} x=1-t^2,\\ y=\log_3 t;\end{cases}$ 8) $y=(\sin x)^{\cos x}$; 9) $\mathrm{arc}tg(x\cdot y)=5^x$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{25{,}01}$; 2) $arctg0{,}98$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{9}{x^2-9}$; 2) $y=e^{2x-x^2}$.

Вариант N 2

1. Найти область определения функции:

1) $\arcsin\dfrac{x}{5}+5^x$; 2) $ctg2x-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx^2}{2x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x^3+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{4+2x}\right)^{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0+}(ctgx)^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\le 1,\\ x^2, & 1<x<2,\\ 3x-4, & x\ge 2.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{2}{3+2^{\frac{1}{x+1}}}$, $x=-1,\quad x=2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=3x^{3/2}-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}+x^{-1}$; 2) $y=x\sqrt{4-x}$; 3) $y=\dfrac{ctgx}{x^2+1}$;

4) $y=5^{\frac{x}{\sin x}}$; 5) $y=(\lg x)^3$; 6) $y=tg(3x-5)$;

7) $\begin{cases}x=5\cos t^2,\\ y=7\sin t^2;\end{cases}$ 8) $y=x^{(x+5)}$; 9) $x\cdot\ln y=y$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{63{,}98}$; 2) $\sin 31^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=x\cdot\ln x$; 2) $y=\dfrac{2x}{2-x^2}$.

Вариант N 3

1. Найти область определения функции:

1) $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}+(x-1)^3$; 2) $\ln(x^2+1)+\arcsin(5^{-x})$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{(x^2-\frac{\pi^2}{4})^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x+3}{x^3+x^2+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x^2-\dfrac{\pi^2}{4}\right)\cdot tgx$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1,\\ x^3, & 1<x\le 2,\\ \sqrt{x}, & x>2.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{2}{4+3^{\frac{1}{x+3}}}$, $x=0,\quad x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=5{,}4\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}$; 2) $y=5(x^3-3x)\cdot(x^2-1)$; 3) $y=\dfrac{3x^2+1}{\sin x}$;

4) $y=e^x\cdot\sin 3x$; 5) $y=arctg\sqrt{x+10}$; 6) $y=\cos(\arcsin x)$;

7) $\begin{cases}x=1+1/t,\\ y=1-1/t;\end{cases}$ 8) $y=(x+1)^{2/x}$; 9) $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=x\cdot y$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{15,97}$; 2) $\sin 62^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-4}}$; 2) $y=\ln(1+x^2)$.

Вариант N 4

1. Найти область определения функции:

1) $tg(x-\pi)-\dfrac{3}{\ln(x^2+1)}$; 2) $\sqrt[3]{x}+\arcsin(x+1)$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\arcsin(4-x)}{\sin(4-x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^2-1}{2x^2-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{x/(x-2)}$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-tgx\right)$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases} x^2+3, & x\le 0, \\ \sin x, & 0<x<\pi, \\ x-\pi, & x\ge\pi. \end{cases}$ 2) $y=\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x-4}}}$, $x=5$, $x=4$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=\dfrac{1}{2}x^{-2}+\sqrt[4]{x^3}-9$; 2) $y=(x^3-x+3)\ln x$; 3) $y=\dfrac{x+2}{\cos x}$;

4) $y=\sqrt{1+tg^2x}$; 5) $y=x\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}}$; 6) $y=\arcsin\sqrt{x+1}$;

7) $\begin{cases} x=\sin(2t+5), \\ y=\cos^2(2t+5); \end{cases}$ 8) $y=(tgx)^x$; 9) $ctg(x^2+y^2)=1$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{27,02}$; 2) $\cos 31^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=e^{\frac{1}{x}}$; 2) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

Вариант N 5

1. Найти область определения:

1) $\sqrt[4]{1-x^2}+arctgx$; 2) $\lg\dfrac{x-1}{x+1}-\sin(2x+5)$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4^2-x^2}{x-\sqrt{8+2x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4x^2+1}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x-2)-\ln x)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0+}x^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases} x/2, & x\le 2, \\ x^3-7, & 2<x<3, \\ 2x-3, & x\ge 3. \end{cases}$ 2) $y=\dfrac{2}{1-2^{\frac{1}{x+4}}}$, $x=5$, $x=-4$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt[3]{3}-5x^{\frac{1}{2}}$; 2) $y=x^2\cdot\log_3 x$; 3) $y=\arcsin^2 x$;

4) $y=\dfrac{\sin(e^x)}{x+1}$ 5) $y=\lg(x+\cos x)$; 6) $y=10^{tgx}$;

7) $\begin{cases} x=e^t, \\ y=\ln t; \end{cases}$ 8) $y=x^{x^2}$; 9) $y-\sin(x\cdot y)=0$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{121{,}2}$; 2) $\cos 62^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=x\cdot e^{-\frac{x}{2}}$; 2) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

Вариант N 6

1. Найти область определения: 1) $\dfrac{1}{x^2+1}+\lg(x+3)$; 2) $3x^2-tg(2x-5)$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\arcsin x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{3+4x}\right)^{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx^2)^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases} \cos 3x, & x\le 0, \\ x+1, & 0<x<1, \\ \ln x, & x\ge 1. \end{cases}$ 2) $y=\dfrac{3}{2+3^{\frac{1}{x-2}}}$, $x=2$, $x=-2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=11\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$; 2) $y=(\sqrt[3]{x}+1)\cdot(\sqrt[5]{x}-1)$; 3) $y=\dfrac{1}{\arcsin x}$;

4) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$; 5) $y=x\cdot\cos^2(x-1)$; 6) $y=2^{\frac{x}{\log_2 5}}$;

7) $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=t(1-\sin t); \end{cases}$ 8) $y=x^{\ln x}$; 9) $8^{x+y}=x\cdot y$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{168{,}02}$; 2) $\cos 46^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; 2) $y=x\cdot e^{-x^2}$.

Вариант N 7

1. Найти область определения функции:

1) $\sqrt{x^2-4x+3}+arctgx$; 2) $\sin x\cdot\ln(-x)$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{3+x}-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctgx}{x+x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{4})^2}{x^2-\frac{\pi^2}{16}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(2^{\frac{4}{x^2}}-1)$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(tgx)^{x-\frac{\pi}{2}}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0, \\ tgx, & 0<x<\pi/4, \\ 2, & x\ge\pi/4. \end{cases}$ 2) $y=\dfrac{3}{2-3^{\frac{1}{x+2}}}$, $x=2$, $x=-2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=0{,}8\sqrt[4]{x}+\dfrac{x^3}{0{,}3}+\dfrac{1}{5}$; 2) $y=(x^2-1)\cdot(x+4)$; 3) $y=\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$;

4) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$; 5) $y=x\cdot e^{-x^2}$; 6) $y=\log_3(tgx)$;

7) $\begin{cases} x=-\arccos t, \\ y=t^2-5; \end{cases}$ 8) $y=x^{\frac{1}{x}}$; 9) $5^{x\cdot y}=x\cdot y$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{26{,}98}$; 2) $\sin 46^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{1}{x^2+2x}$; 2) $y=x\cdot e^{2x-1}$.

Вариант N 8

1. Найти область определения функции:

1) $\lg(x+5)-10^{\frac{1}{x}}$; 2) $ctgx+8^{-x^2}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x+5}{x^2+x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx^2}{\arcsin x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{4+3x}\right)^{x^3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2+}(\sin(x-2))^{x^2-4}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\le \pi/4,\\ ctgx, & \pi/4<x<\pi/2,\\ x-1, & x\ge \pi/2.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{2}{1+3^{\frac{1}{x+6}}}$, $x=6$, $x=-6$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=1{,}3x^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[5]{x}-\sqrt{3}$; 2) $y=(x+1)\cdot(x^2-5)$; 3) $y=\dfrac{x^5}{x^3-2}$;

4) $y=arctg\sqrt{x}$; 5) $y=2^{\frac{x}{\sin x}}$; 6) $y=(\cos 2x)^3$;

7) $\begin{cases}x=2^t,\\ y=\ln 2^t;\end{cases}$ 8) $y=(\ln x)^{\ln x}$; 9) $ctg(x^2+y^2)=1$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[5]{32{,}03}$; 2) $arctg1{,}1$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\ln(x^2+2x+2)$; 2) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$.

Вариант N 9

1. Найти область определения функции:

1) $\arcsin\dfrac{x}{2}+\cos 3x$; 2) $\dfrac{1}{x^2+x-6}-\sqrt[3]{x^2-5}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x+1}{2x^4+x^3+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}ctg(x-2)\cdot\dfrac{1}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0+}(ctgx)^x$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}2x^2+1, & x\le 0,\\ \cos 2x, & 0<x<\pi/2,\\ x-2, & x\ge \pi/2.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{2}{1+3^{\frac{1}{x-6}}}$, $x=6$, $x=-6$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=0{,}1x^{-\frac{2}{3}}-5{,}2\sqrt{x}$; 2) $y=(1+\sqrt{x})\cdot(1+x^3)$; 3) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$;

4) $y=x\cdot arctg\sqrt{x-1}$ 5) $y=2^{\frac{\ln x}{x}}$; 6) $y=\log_{2}^{3}\left(\sin x^2\right)$;

7) $\begin{cases}x=t\sin t,\\ y=1+t;\end{cases}$ 8) $y=\left(tgx\right)^{8x}$; 9) $y=5^{xy+1}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{1{,}02}$; 2) $\arcsin 0{,}54$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$; 2) $y=(x+4)\cdot e^{2x}$.

Вариант N 10

1. Найти область определения функции:

1) $x^{-2}-\dfrac{1}{9^{\sin x}}$; 2) $\sqrt{1-x}+\lg(3+x^2)$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{\sqrt{5-x}-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+x^3+2x+1}{5x^5+x^4+2x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-4x\right)}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)^{3x-4}$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\cdot\dfrac{1}{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\le -1,\\ x^2-1, & -1<x<2,\\ 2x-1, & x\ge 2.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{2}{3+2^{\frac{1}{x-3}}}$, $x=3$, $x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=1{,}8\sqrt[3]{x}-\dfrac{x}{5}+3$; 2) $y=(x^2+5)^5$; 3) $y=\dfrac{2x}{arctgx}$;

4) $y=\lg(x^2+1)$; 5) $y=5^{tgx}$; 6) $y=x\cdot\sin x^3$;

7) $\begin{cases}x=2^t,\\ y=t^2;\end{cases}$ 8) $y=\left(\ln x\right)^x$; 9) $x^2+y^2=x\cdot\sin y$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{1,02}$; 2) $\arccos 0,54$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{3x^2}{2x^2-1}$; 2) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

Вариант N 11

1. Найти область определения функции:

1) $4^x+2\arcsin 3x$; 2) $\ln\dfrac{x-3}{x^2+1}-tgx$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2ctg\,2x}{\sin 4x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6-x^3+x+1}{x^6+x^4+x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{x^2-4}}$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x\cdot\dfrac{1}{x^3}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 1,\\ 2, & 1<x<3,\\ x-1, & x\ge 3.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x-5}}}$, $x=5$, $x=-5$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=3\sqrt{x}-1,5x^{-2}+8$; 2) $y=\lg x-x\cdot\arccos x$; 3) $y=\dfrac{1-x^3}{\sqrt{\pi}\cdot x}$;

4) $y=tg(x\cdot\sin x)$; 5) $y=x\cdot\log_2(\cos x)$; 6) $y=\cos(2^x)$;

7) $\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t);\end{cases}$ 8) $y=x^{(-x)}$; 9) $arctg(x^2-y^2)=1$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{1,02}$; 2) $\arcsin 0,07$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{x^3-4}{4x^2}$; 2) $y=x^3\cdot e^{-x}$.

Вариант N 12

1. Найти область определения функции:

1) $\cos(3-x)-19\lg(3-x)$; 2) $8^{-\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^2-2x+1}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\cos x+1}{\sin 4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^4+1}{2x^4+2x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctgx}{\sin 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\frac{1}{x^2-9}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1+}(x^2-1)^{x-1}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & x\le 0,\\ 2\sin 2x, & 0<x<\pi/2,\\ \cos x, & x\ge \pi/2.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{2-3^{\frac{1}{x+5}}}$, $x=5$, $x=-5$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=3x^{-1}+\sqrt[5]{x^2}+2{,}4\sqrt{5}$; 2) $y=x\cdot 5^x$; 3) $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$;

4) $y=\dfrac{1}{tg^2 2x}$; 5) $y=arctg(\sin x)$; 6) $y=\sqrt{\log_3 x}$

7) $\begin{cases}x=5^t,\\ y=t^2-5;\end{cases}$ 8) $y=(\cos x)^x$; 9) $\sqrt{x+\sqrt{y}}=x\cdot y$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{16{,}3}$; 2) $\arccos 0{,}05$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$; 2) $y=x-\ln x$.

Вариант N 13

1. Найти область определения функции:

1) $tgx+3^x$; 2) $\arcsin(x+3)-\lg(-x)$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-6x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos^2(2x)}{\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^4-x^2+1}{3x^4+2x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}(x-3)^{\frac{1}{(x-4)^2}}$; 5) $\lim\limits_{x\to\pi/4} tg 2x\cdot(x-\pi/4)$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x<0,\\ tgx, & 0\le x\le \pi/4,\\ \cos 8x, & x>\pi/4.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{2-3^{\frac{1}{x+3}}}$, $x=3$, $x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=0,7\sqrt[3]{x}-\dfrac{x^2}{1,3}+1$; 2) $y=(\sqrt{x}+x^2)\cdot(x-2)$; 3) $y=\dfrac{x}{4^x}$;

4) $y=\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin 2x$; 5) $y=10^{\sqrt{x}}$; 6) $y=\lg(\cos 3x)$;

7) $\begin{cases} x=5^t-t, \\ y=\ln t; \end{cases}$ 8) $y=x^{\arcsin x}$; 9) $y=ctg(x\cdot y-2x)$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{9,02}$; 2) $\mathrm{arc}\,tg 1,2$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; 2) $y=x^2\cdot\ln x$.

Вариант N 14

1. Найти область определения функции:

1) $arctg\sqrt{2x}-\dfrac{1}{5^x}$; 2) $\mathrm{c}tg 3x+\sqrt[3]{8-x}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x-2}}{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-7x+3}{x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x}{2^x}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{\frac{1}{x+1}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases} arctgx, & x\le 0, \\ 3x-1, & 0<x<2, \\ x^2+1, & x\ge 2. \end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x+3}}}$, $x=3$, $x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{x}+37$; 2) $y=x\cdot\lg x$; 3) $y=\dfrac{3^x}{x^5}$;

4) $y=(x^2+1)^7$; 5) $y=6e^{-3x^2}$; 6) $y=t\,\mathrm{g}(\sqrt{3}x)$;

7) $\begin{cases} x=arctgt, \\ y=t\sin t; \end{cases}$ 8) $y=x^{x^3}$; 9) $x\cdot y+arcctg(x+y)=5$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{8,02}$; 2) $\arcsin 0,03$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=x\cdot\ln x^2$; 2) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

Вариант N 15

1. Найти область определения функции:

1) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}-\cos x$;   2) $\lg(9-x^2)+tg\dfrac{x}{3}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 2x+\cos 4x}{x-\frac{\pi}{2}}$;   2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{x^2-x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+x^4-3x+1}{6x^5-3x^4+2x}$;   4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{x^2}$;   5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\cos x)^{x-\frac{\pi}{2}}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x<2,\\ 3x-1, & x\ge 2.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{4+2^{\frac{1}{x+1}}}$, $x=1$, $x=-1$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=3x^2-5\sqrt{x^{-3}}+5$;   2) $y=x\cdot\arcsin x$;   3) $y=\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{tgx}$;

4) $y=(\ln x)^2\cdot arctgx$;   5) $y=(x+3x^2)^3$;   6) $y=\sqrt{\ln x}$;

7) $\begin{cases}x=8t^2+2,\\ y=\ln t;\end{cases}$ 8) $y=(1+\ln x)^x$;   9) $\arcsin x+x\cdot y=5^y$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{7{,}99}$;   2) $\arccos 0{,}03$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{3x^2}{1-2x^2}$;   2) $y=e^{\frac{1}{x+2}}$.

Вариант N 16

1. Найти область определения функции:

1) $\arccos x+2^{-\frac{1}{x}}$;   2) $arctgx-\dfrac{x-3}{x^2+x-6}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-3x+2}$;   2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos x}{\sin 2x+\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2-x+1}{2x^5+x^4-x^2+2}$;   4) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{2/(x^2-4)}$;   5) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\sqrt{x}\right)^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}-x+3, & x\le 1,\\ \sqrt{2x+2}, & 1<x<7,\\ x+3, & x\ge 7.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{3+4^{\frac{1}{x+1}}}$, $x=1$, $x=-1$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}$; 2) $y=\sin x\cdot\log_3 x$; 3) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$;

4) $y=(x^4-x^2+1)^3$; 5) $y=x\cdot(\arcsin x)^2$; 6) $y=\lg(x+tgx)$;

7) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=arctgt/5;\end{cases}$ 8) $y=(x+1)^{\frac{2}{x}}$; 9) $x^2+x\cdot y=e^y$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[5]{31{,}98}$; 2) $\sin 30^0 05'$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\ln(2x^2+3)$; 2) $y=\dfrac{x^3+16}{x}$.

Вариант N 17

1. Найти область определения функции:

1) $18^{-x}+ctg\dfrac{x}{2}$; 2) $\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\ln x^2}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{2x^3+4-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\cdot tgx}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\ln(3-x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sin\pi(x+2)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x^2}}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le -1,\\ x^2+2, & -1< x<2,\\ 2x+2, & x\ge 2.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{4-2^{\frac{1}{x+1}}}$, $x=1$, $x=-1$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{3}$; 2) $y=(arctgx)^2$; 3) $y=\dfrac{2\cos x}{\log_5(x+1)}$;

4) $y=\sqrt{9-x^2}-9\cdot\arccos\dfrac{x}{9}$; 5) $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$; 6) $y=\dfrac{e^{-x^2}}{3-x}$;

7) $\begin{cases}x=2\sin t,\\ y=\arccos t+t;\end{cases}$ 8) $y=x^{\ln x}$; 9) $e^{xy}+\dfrac{x}{y}=1$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[5]{242{,}98}$; 2) $\sin\ 44^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$; 2) $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$.

Вариант N 18

1. Найти область определения функции:

1) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\sqrt[5]{x^3}$; 2) $\arcsin(x+1)-9^x$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4x^3-1}{2x^3+x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(ctgx-\dfrac{1}{\sin 2x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0+}x^2\cdot\ln x$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}3^x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x<2,\\ -2x+3, & x\ge 2.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{3-4^{\frac{1}{x+1}}}$, $x=1$, $x=-1$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=0{,}1x^{-\frac{2}{3}}+5{,}2\sqrt[4]{x}$; 2) $y=(1+\sqrt{x})(1+x^3)$; 3) $y=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$;

4) $y=\dfrac{1-\ln x}{\lg x}$; 5) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$; 6) $y=5^{\sin x}-2x$;

7) $\begin{cases}x=2(t-\cos t),\\ y=3t^2\sin t;\end{cases}$ 8) $y=\left(\dfrac{3}{x}\right)^{x^2}$; 9) $tgx+ctgy-xy=0$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{81{,}01}$; 2) $arctg\ 1{,}05$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=x^2+\dfrac{2}{x}$; 2) $y=x\cdot e^{-x}$.

Вариант N 19

1. Найти область определения функции:

1) $8tg(x+\dfrac{\pi}{2})+3x^3$; 2) $arctgx+\lg(x^2+x+1)$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-4x}{3x^2-2x-8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg^2x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^{-2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln x-\ln(x+1)\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\sin x\right)^{x^3}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\ln(-x), & x\le -1,\\ x+2, & -1< x<2,\\ \sqrt{x+14}, & x\ge 2.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-4}}}$, $x=4$, $x=-4$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=2\sqrt{x}-3x^{-\frac{2}{3}}$; 2) $y=x\cdot\arccos x$; 3) $y=\dfrac{1+tgx}{\sin x}$;

4) $y=\ln(1+\lg x)$; 5) $y=(x^2+2x)^5$; 6) $y=x^2\cdot 10^{-x^2}$;

7) $\begin{cases}x=5t^2,\\ y=arctg(t^{-1});\end{cases}$ 8) $y=\sin^{\ln x}$; 9) $\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{xy}=\cos\dfrac{\pi}{6}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{80{,}98}$; 2) $arcctg\,1{,}03$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$; 2) $y=(x-2)\cdot e^{3-x}$.

Вариант N 20

1. Найти область определения функции:

1) $-13+\sqrt{x}+ctg\dfrac{x}{2}$; 2) $8\cos x+\dfrac{1}{\ln x}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx^2}{3x-4x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\arcsin 4x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{2^x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0+0}tgx\cdot\ln^2 x$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}x^3-1, & x\le 1,\\ \sin 3(x-1), & 1<x\le 2,\\ -x+2, & x>2.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x+4}}}$, $x=4$, $x=-4$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=(x+1)^2-9x^{-\frac{1}{3}}+\frac{5}{x}$; 2) $y=x^2\log_2 2x$; 3) $y=\frac{8\sin 3x}{5x}$;

4) $y=arctg\sqrt{1+x}$; 5) $y=(x-0{,}5)^8$; 6) $y=\sqrt{\arccos x}$;

7) $\begin{cases} x=a(1-\sin t), \\ y=b(1-\cos t); \end{cases}$ 8) $y=(\sin)^x$; 9) $e^{xy+1}-9y=3$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[6]{63{,}97}$; 2) $arcctg\ 0{,}99$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\frac{8}{x^2-4}$; 2) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Вариант N 21

1. Найти область определения функции:

1) $\sqrt{6-x}+10^{-x^2}$; 2) $11\arcsin\frac{3}{x}+tgx$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{\sin 2x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x+1}{3x^3+x^2+x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg3x+tgx)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\ln^2 x)^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases} \cos 2x, & x\le 0, \\ x^2+1, & 0<x\le 2, \\ 3x-2, & x>2. \end{cases}$ 2) $y=\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x+3}}}$, $x=3$, $x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+35$; 2) $y=\ln x\cdot\arccos(x+1)$; 3) $y=\frac{x}{1-\cos 2x}$;

4) $y=(tg(3x-5))^2$; 5) $y=6\cdot e^{-3x^2}$; 6) $y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

7) $\begin{cases} x=8t^2, \\ y=e^{-t^2}; \end{cases}$ 8) $y=(\ln x)^{\cos x}$; 9) $tgxy-arctgy=2$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[6]{1{,}03}$; 2) $\sin\ 29^0 58'$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\frac{2x}{x^2-9}$; 2) $y=\frac{\ln x}{x}$.

Вариант N 22

1. Найти область определения функции:

1) $2^{-\frac{1}{x^2}}+5\ln(x^2+1)$; 2) $arctg\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{1}{x^2-1}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{tg3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg^2 x}{\ln(x-\pi/2)^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-3x}{4-3x}\right)^{x-4}$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\cos x}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}-3x/2, & x\le 0,\\ \sqrt{x+4}, & 0<x<5,\\ 3, & x\ge 5;\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{3-2^{\frac{1}{x+3}}}$, $x=3$, $x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=0{,}5\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}-\dfrac{8}{x}$; 2) $y=x^2\cdot\log_3 x$; 3) $y=\dfrac{x}{23^x}$;

4) $y=\lg(\cos x-x)$; 5) $y=(x^3-3x+2)^5$; 6) $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

7) $\begin{cases}x=\sin t^2,\\ y=\cos t^2;\end{cases}$ 8) $y=(x-1)^{\frac{2}{x}}$; 9) $tg\left(x-y^2\right)+xy=1$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{143{,}2}$; 2) $\sin 29^0 58'$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; 2) $y=\ln\left(x^2-4\right)$.

Вариант N 23

1. Найти область определения функции:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}-\sqrt[3]{x}$; 2) $\cos x^3-\arccos x^3$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x}{4x^3-x^5+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg3x}{\cos^2 x-\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} ctg4x-\dfrac{1}{\sin 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\sqrt{x}\right)^{\ln(x-1)}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\le 0,\\ tg2x, & 0<x<\pi/8,\\ 2, & x\ge \pi/8;\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x+2}}}$, $x=2$, $x=-2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=1{,}3x^{-1}+9{,}1x^2-11^2$; 2) $y=x^2\cdot arctg9x$ 3) $y=\dfrac{7x-\sin x}{1+x}$;

4) $y=ctg(3x-5)+9$; 5) $y=\cos\left(\dfrac{\arcsin x}{2}\right)$; 6) $y=8^{x^2}+\ln x$;

7) $\begin{cases}x=t^2-\sin 2t,\\ y=\cos 2t;\end{cases}$ 8) $y=(\ln x)^x$; 9) $3^{x^2+y^2}-xy=x^2$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{8{,}03}$; 2) $\cos 44^0 59'$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{8}{9+x^2}$; 2) $y=x\cdot e^{2-x}$.

Вариант N 24

1. Найти область определения функции:

1) $\dfrac{2}{3^x}+\ln\left(\dfrac{x}{2}-4\right)$; 2) $ctg\,\dfrac{x-\pi}{2}+\sqrt{x}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{2-\sqrt{x+1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+4x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx^2}{x\sin 6x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\pi}\cos 2x^{(x-\pi)^{-2}}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}(1/2)^x, & x\le 0,\\ x+1, & 0<x<3,\\ -x^2+2, & x\ge 3;\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x-2}}}$, $x=2$, $x=-2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=0{,}8\sqrt[4]{x}-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{1}{9}$; 2) $y=x\cdot\lg x$; 3) $y=\dfrac{x^5}{x^3-2}$;

4) $y=\sqrt{1-x^2}-\arccos x$; 5) $y=tg\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$; 6) $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$

7) $\begin{cases}x=5t+\ln t,\\ y=\cos t;\end{cases}$ 8) $y=(arctgx)^{x^2}$; 9) $\sin\left(x^2+y^2\right)-y=3$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{7{,}97}$; 2) $\cos 30^0\ 05'$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$; 2) $y=\dfrac{x}{x-1}$.

Вариант N 25

1. Найти область определения функции:

1) $\sqrt{8-x}+2tgx$; 2) $5^{-x}+\arccos\dfrac{x}{4}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\pi x}{x^2-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{7x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2+}(\sin\pi x)^{(x-2)\pi}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin(x/2), & x\le 0,\\ 2x+1, & 0<x<3,\\ 7, & x\ge 3;\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{3-x}}}$, $x=3$, $x=-3$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=3\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}-9x^{-1}$; 2) $y=x^2\cdot\log_5 x$; 3) $y=\dfrac{4^x-5}{x}$;

4) $y=\left(x^4+x^2-1\right)^3$; 5) $y=\sqrt{ctgx}$; 6) $y=(arctg3x)^{12}$;

7) $\begin{cases}x=10^t,\\ y=tgt;\end{cases}$ 8) $y=(5x)^{x^2}$; 9) $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=5\ln xy$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{15{,}99}$; 2) $arctg\ 0{,}96$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{x^3-32}{x^2}$; 2) $y=\dfrac{e^{2(x+1)}}{x+1}$.

Вариант N 26

1. Найти область определения функции:

1) $\sqrt{1-x^2}+\arccos 2x$; 2) $\dfrac{1}{x^3-x}+\ln(x+5)$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{2-\sqrt{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+1}\right)^{3-x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\pi+}(\sin 2x)^{(x-\pi)^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x\le -2,\\ x^2-2, & -2< x\le 0,\\ -2\cos x, & x>0;\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{2-x}}}$, $x=2$, $x=-2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=8x^2+9\sqrt[3]{x}-x^{-3}$; 2) $y=\cos x\cdot\ln(x+5)$; 3) $y=\dfrac{\arcsin x}{x^2}$;

4) $y=ctg\left(\sqrt{x}+5\right)$; 5) $y=(8x+5)^{10}$; 6) $y=x\cdot 8^{-x^2}$;

7) $\begin{cases}x=\dfrac{t}{1-9t},\\ y=\sin(2t-5);\end{cases}$ 8) $y=2\cdot x^{\cos x}$; 9) $arctg\,\dfrac{x}{y}=x\cdot y$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{15{,}97}$; 2) $arctg\ 1{,}04$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\dfrac{x}{3-2x^2}$; 2) $y=x\cdot e^{-3x}$.

Вариант N 27

1. Найти область определения функции:

1) $\sqrt{-3x}+\dfrac{1}{x^2-1}$; 2) $\lg(x+3)+\dfrac{1}{x^2+1}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{5+x}-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x(1-\cos x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(2-2x)}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{2x^2-\frac{16}{3}x-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{3+x}\right)^{2x-1}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x\le 2\pi,\\ \arcsin(\pi/x), & 2\pi<x;\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{1+7^{\frac{1}{x}}}$, $x=0$, $x=0{,}5$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y = 1{,}2x^3 - 2\sqrt[3]{x} - 5^2$; 2) $y = \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2-2\right)$; 3) $y = \dfrac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$;

4) $y = tg\left(x^2+1\right)$; 5) $y = x \cdot \arcsin\dfrac{x}{2}$; 6) $y = \dfrac{5^{2x-1}-x}{x+1}$;

7) $\begin{cases} x = 1+t^3, \\ y = arctgt + 1; \end{cases}$ 8) $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sin x}$; 9) $arctg\dfrac{x}{y} = 2x + x \cdot y$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{26{,}7}$; 2) $\sin 33^0$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y = \dfrac{4}{4-x^2}$; 2) $y = x \cdot e^x$.

Вариант N 28

1. Найти область определения функции:

1) $\dfrac{x+5}{x^2-3x+2} - \lg x$; 2) $arctg\sqrt{x} + \dfrac{1}{1-3^x}$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-x}{x^2-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{3x^2+x-9}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{x^2-\pi/4}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\ln x - \ln(x-1)\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 1+}\left(\sqrt{x-1}\right)^{x^2-1}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x) = \begin{cases} 2 + x/3, & x < -1, \\ arctgx, & -1 \le x \le 1, \\ \pi x^2/4, & x > 1; \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{3}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}$, $x = 2$, $x = -2$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y = 5x^2 + 3\sqrt[4]{x} - 1$; 2) $y = 5^x \cdot \sin x$; 3) $y = \dfrac{3x^2-1}{\cos x}$;

4) $y = \dfrac{x \cdot tgx}{\lg(2x+1)}$; 5) $y = (\arcsin x)^3$; 6) $y = arctg\sqrt{x}$;

7) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = e^t; \end{cases}$ 8) $y = \ln x^{\ln x}$; 9) $ctg(xy+1) = x^2 + y^2$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{25{,}06}$; 2) $\arcsin 0{,}9$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\frac{x^2+1}{x^2-2}$; 2) $y=\ln(x^2+2x-2)$.

Вариант N 29

1. Найти область определения функции:

1) $\lg(x+5)-10^{1/x}$; 2) $\arcsin\frac{5}{x}+ctgx$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^2-x^2}{x-\sqrt{8+2x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^2+5x}{3x^2+7x^3+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x^2}{\arcsin x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4+3x}\right)^{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2+}(\sin(x-2))^{x^2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<-1,\\ arctgx, & -1\le x\le 0,\\ x^2/4, & x>0;\end{cases}$ 2) $y=\frac{2}{1+3^{\frac{1}{x-6}}}$, $x=6$, $x=-6$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=3x^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[4]{4x^3+4}-2$; 2) $y=(x^{-2}+3x)(x^2-5)$; 3) $y=\frac{x^5-7x^3+9}{x^3-8}$;

4) $y=(\cos 2x)^{10}$; 5) $y=5^{\frac{8}{\sin x}}$; 6) $y=tg(\arcsin\sqrt{x})$;

7) $\begin{cases}x=e^{2t},\\ y=\ln^2 t;\end{cases}$ 8) $y=(\sin x)^{\ln x}$; 9) $ctg(x^2+xy^2)=1$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[5]{32{,}03}$; 2) $arctg\ 1{,}1$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=\ln(x^2+2)$; 2) $y=\frac{x^2-1}{x^2+2}$.

Вариант N 30

1. Найти область определения функции:

1) $\frac{\sqrt{x}}{x^2-5x+6}-\sqrt[5]{x^3}$; 2) $\arcsin(3x-7)+2^x$.

2. Найти пределы функций: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+x^3-1}{2x^3+x^2+1}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\pi}\left(ctgx-\dfrac{1}{\sin 2x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^2\ln x$.

3. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x)=\begin{cases}3^x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x<2,\\ 2x+3, & x\ge 2;\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{3-4^{\frac{1}{x-1}}}$, $x=1$, $x=-1$.

4. Найти производные данных функций:

1) $y=0{,}1x^{-\frac{2}{3}}+5{,}2\sqrt[4]{x}$; 2) $y=(1+\sqrt{x})(1+x^3)$; 3) $y=\dfrac{11+\cos x}{\sin 3x}$;

4) $y=5^{\sin x}+2tgx$; 5) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$; 6) $y=\dfrac{\ln(x^3)}{\sqrt{\lg x}}$;

7) $\begin{cases}x=t^2(t-\cos t^2),\\ y=t^2\cos t;\end{cases}$ 8) $y=\left(\dfrac{5x^{-3}}{\sqrt{x}}\right)^{x^2+6x}$; 9) $tgx+ctgy-x^3y^2=0$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[4]{81{,}01}$; 2) $arctg\ 1{,}05$.

6. Исследовать функции и построить график:

1) $y=x^2+\dfrac{3}{x}$; 2) $y=(x+2)\cdot e^{-x}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вы, добросовестный студент, завершили изучение основных понятий математического анализа, к которым относится раздел дифференциального исчисления, рассмотренного в данном пособии. Впереди вас ждут новые разделы математики, в которых изложенные в пособии сведения будут необходимы. Уже во втором семестре на основе теории пределов и производных, будет введено и исследовано понятие интеграла. Поэтому хочется посоветовать студентам обратить особое внимание на понятия предела функции, производной и ее дифференциала.

Более подробное изложение данного материала можно найти в книгах, учебных пособиях и монографиях, указанных в списке литературы.

Библиографический список

1. Аксенов, А.П. Математический анализ в 2 ч. часть 2 в 2 т. учебник и практикум для академического бакалавриата / А.П. Аксенов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 767 с.
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М.: Наука, 2003, – 416 с.
3. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – 15 изд. сер. СПБ.; Лань, 2009, –735 с.
4. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. - М. Просвещение, 2002. – 328 с.
5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 2009. – 368 с.
6. Демидович, Б. П. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Б. П. Демидович – М.: Наука: 1974. – 472 с.
7. Злобина, С.В. Математический анализ в задачах и упражнениях / С.В. Злобина, Л.Н. Посицельская. - М.: Физматлит, 2009. - 360 с.
8. Ильин, В.А. Математический анализ ч. 14-е изд., пер. и доп. учебник для бакалавров / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 660 с.
9. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа в 3-х томах. Ч. 1 / Л.Д. Кудрявцев. - М: Дрофа, 2003. - 704 с.

10. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Ч.1. / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл - Пресс, 2008. – 416 с.
11. Письменный, Д.К. Конспект лекций по высшей математике / Д. К. Письменный – М.: Айрис Пресс, 2009. – 608 с.
12. Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч.1. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. – Минск: Высшая школа, 1990. – 271 с.
13. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч.2. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. – Минск: Высшая школа, 1991. – 350 с.
14. Шершнев, В.Г. Математический анализ: сборник задач с решениями: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 164 с.
15. Шилов, Г. Математический анализ. Функции одного переменного: Учебное пособие / Г. Шилов. – СПб.: Лань, 2002. – 880 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Акчурина Людмила Васильевна
Некрасова Наталия Николаевна
Кущев Анатолий Борисович
Каверина Валерия Константиновна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

по дисциплине «Математика»

Подписано в печать ____________2018.
Формат 60х84 1/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л. ___. Тираж ____ экз. Заказ № ____.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский проспект, 14

Участок оперативной полиграфии издательства ВГТУ
394026 Воронеж, Московский проспект, 14