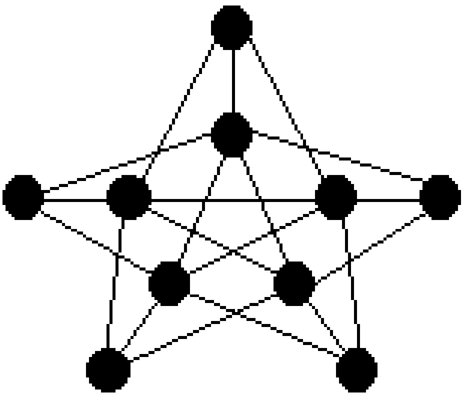
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра компьютерных интеллектуальных технологий проектирования

55-2013

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы
по дисциплине «Дискретная математика»
для студентов направления подготовки бакалавров
230100 «Информатика и вычислительная техника»,
профиль «Системы автоматизированного проектирования в машиностроении» заочной формы обучения



Воронеж 2013

Составители: канд. техн. наук О.В. Собенина,
канд. техн. наук Р.С. Лопатин

УДК 517.9

Методические указания к выполнению контрольной работы по дисциплине «Дискретная математика» для студентов направления подготовки бакалавров 230100 «Информатика и вычислительная техника», профиль «Системы автоматизированного проектирования в машиностроении» заочной формы обучения. / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. О.В. Собенина, Р.С. Лопатин. Воронеж, 2013. 58 с.

Методические указания содержат необходимые для выполнения контрольной работы теоретические сведения, примеры решения задач и варианты контрольных заданий.

Предназначены для студентов 2 курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе Word и содержится в файле «mathlogika.doc».

Ил. 19. Библиогр.: 7 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.Н. Дурова

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. М.И. Чижов

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

Правила выполнения и оформления контрольной работы

1. Контрольная работа выполняется в тетради в клетку. Необходимо оставлять поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, шифр группы, названии дисциплины. В начале работы указывается вариант контрольной работы. В конце работы ставится дата ее выполнения и подпись студента.

3. В работу включаются все задачи, указанные в задание, и строго по положенному варианту.

4. Условия задач приводятся полностью. Решения излагаются подробно, объясняются все действия по ходу решения.

5. После получения проверенной работы исправляются все отмеченные рецензентом ошибки.

6. Выбор варианта контрольной работы производится по двум последним цифрам номера зачетной книжки в соответствии со следующей таблицей.

Предпоследняя цифра *x* совпадает с одной из цифр: 0, 2, 4, 6, 8	Предпоследняя цифра *x* совпадает с одной из цифр: 1, 3, 5, 7, 9
$x1$ – 1-й вариант $x2$ – 2-й вариант $x3$ – 3-й вариант $x4$ – 4-й вариант $x5$ – 5-й вариант $x6$ – 6-й вариант $x7$ – 7-й вариант $x8$ – 8-й вариант $x9$ – 9-й вариант $x0$ – 10-й вариант	$x1$ – 11-й вариант $x2$ – 12-й вариант $x3$ – 13-й вариант $x4$ – 14-й вариант $x5$ – 15-й вариант $x6$ – 16-й вариант $x7$ – 17-й вариант $x8$ – 18-й вариант $x9$ – 19-й вариант $x0$ – 20-й вариант

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Теоретические сведения

Под множеством понимается любая совокупность определенных и различимых между собой объектов, мыслимая как единое целое.

Множества будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита; объекты, которые образуют множества, будем называть *элементами* множества и обозначать малыми буквами латинского алфавита. Если элемент *x* принадлежит множеству X, то этот факт записывается в виде $x \in \mathrm{X}$, иначе $x \notin \mathrm{X}$. Как правило, считается, что все элементы множества различны. Множество с повторяющимися элементами называется *мультимножеством.*

Множество, содержащее конечное число элементов, называется *конечным;* в противном случае множество называется бесконечным. Количество элементов конечного множества называется *мощностью* и обозначается $|\mathrm{X}|$=n, если множество X содержит n элементов. Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Для произвольных множеств X и Y можно определить два типа отношений – *отношение равенства и отношение включения.*

Два множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Принято обозначение X=Y, если X и Y равны, и X≠Y- иначе.

Если каждый элемент множества X является элементом множества Y, то говорят, что X включено в Y и обозначают $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{Y}$:

$$\mathrm{X} \subseteq \mathrm{Y} \Leftrightarrow (\forall x : x \in \mathrm{X} \to x \in \mathrm{Y}).$$

В этом случае говорят, что множество X является *подмножеством* множества Y. В частности X и Y могут совпадать, поэтому $\subseteq$ называется также отношение *нестрогого включения.*

Если $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$, то говорят, что X есть *собственное подмножество* Y и обозначают $X \subset Y$, отношение между множествами в этом случае называется отношением *нестрого-го включения.*

Невключение подмножества X в множество Y обозначается $X \not\subset Y (X \not\subseteq Y)$.

Заметим, что если X является подмножеством Y и наоборот, то X и Y состоят из одних и тех же элементов, поэтому

$$X = Y \Leftrightarrow (X \subseteq Y \text{ и } Y \subseteq X).$$

Если в рамках некоторого рассуждения рассматриваются подмножества некоторого множества, то оно называется *универсальным,* или универсумом и обозначается U [7].

Множество может быть задано различными способами [1, 2, 6]: перечислением элементов в скобках $\{\ \}$ (для конечных множеств) или указанием их свойств, однозначно определяющих принадлежность элементов данному множеству, при этом используется запись

$$X=\{\, x \mid x \text{ обладает свойством } P(x)\}$$

(выражение в скобках читается: множество всех элементов *x*, которые обладают свойством P(*x*). Так, множество натуральных чисел N={1,2,…} может быть описано следующим образом:

$$N=\{\, i \mid \text{ если целое } i \in N, \text{ то } i+1 \in N, i \geq 1\}.$$

Для получения новых множеств из уже существующих используют операции над множествами [1, 2, 6]. Рассмотрим основные из них.

Объединением множеств X и Y называется множество $X \cup Y$, все элементы которого являются элементами множества X или Y:

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$

Пересечением множеств X и Y называется множество $X \cap Y$, элементы которого являются элементами обоих множеств X и Y:

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$

Очевидно, что выполняются включения

$$X \cap Y \subseteq X \subseteq X \cup Y; \quad X \cap Y \subseteq Y \subseteq X \cup Y.$$

Дополнением множества X называется множество $\overline{X}$ всех тех элементов *x*, которые не принадлежат множеству X:

$$\overline{X} = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin X\}.$$

Разностью множеств X и Y называется множество X\Y всех тех элементов X, которые не принадлежат Y:

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin \overline{Y}\} = X \cap \overline{Y}.$$

Дополнение множества X представляется с помощью операции разности следующим образом

$$\overline{X} = U \setminus X.$$

Симметричной разностью множеств X и Y называется множество

$$X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Пример. Пусть на универсуме U={*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*} определены множества X={*a*, *c*, *d*, *f*} и Y={*b*, *d*, *e*, *f*}, тогда

$X \cup Y = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$X \cap Y = \{d, f\}$,

$\overline{X} = \{b, e, g\}$,

$X \setminus Y = \{a, c\}$,

$Y \setminus X = \{b, e\}$,

$X \oplus Y = \{a, b, c, e\}$.

Одним из важных понятий теории множеств является понятие декартова произведения множеств.

Декартовым (прямым) произведением множеств X и Y называется множество упорядоченных пар вида

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ и } y \in Y\}.$$

Пример. Пусть $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, $Y=\{y_1, y_2\}$
Тогда $X\times Y=\{(x_{1,}y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_1),(x_3,y_2)\}$.

Две пары (x, y) и (u, v) считаются равными тогда и только тогда, когда x=u и y =v.

Для любых множеств X, Y, Z справедливы следующие тождества (основные свойства операций над множествами):

1. $X\cup Y=Y\cup X$, $X\cap Y=Y\cap X$ (*коммутативность*);
2. $X\cup(Y\cup Z)=(X\cup Y)\cup Z$,
   $X\cap(Y\cap Z)=(X\cap Y)\cap Z$ (*ассоциативность*);
3. $X\cup(Y\cap Z)=(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$,
   $X\cap(Y\cup Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$ (*дистрибутивность*);
4. $X\cup\varnothing=X, X\cap\varnothing=\varnothing$;
5. $X\cup U=U, X\cap U=X$;
6. $X\cup\overline{X}=U$, $X\cap\overline{X}=\varnothing$ (*комплиментарность*);
7. $X\cup X=X$, $X\cap X=X$ (*идемпотентность*);
8. $\overline{X\cup Y}=\overline{X}\cap\overline{Y}$,
   $\overline{X\cap Y}=\overline{X}\cup\overline{Y}$ (*законы де Моргана*);
9. $\overline{\overline{X}}=X$ (*двойное дополнение*);
10. $X\cup(X\cap Y)=X$,
    $X\cap(X\cup Y)=X$ (*законы поглощения*).

Примеры решения задач

Задача 1.

Доказать A∩(B∪C) = (A∩B)∪(A∩C).

Решение. Чтобы доказать равенство двух множеств X = Y нужно доказать, что X⊆Y и X⊆Y. Докажем, что A∩(B∪C) ⊆ (A∩B)∪(A∩C). Для доказательства этого включения выберем произвольный элемент из множества A∩(B∪C) и покажем, что он принадлежит множеству (A∩B)∪(A∩C). Итак, пусть x∈ A∩(B∪C). Тогда x∈A и x∈B∪C. Если x∈B, то x∈A∩B, а значит, $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Если $x\in C$, то $x\in A\cap C$, а значит, $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Таким образом, $A\cap(B\cup C)\subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$. Теперь докажем, что $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$. Пусть $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Если $x\in A\cap B$, то $x\in A$ и $x\in B$, отсюда следует, что $x\in A$ и $x\in B\cup C$, т.е. $x\in A\cap(B\cup C)$. Если $x\in A\cap C$, то $x\in A$ и $x\in C$. Отсюда следует, что $x\in A$ и $x\in B\cup C$, т.е. $x\in A\cap(B\cup C)$. Итак, $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$. Таким образом, получили, что $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$ и $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$, а это значит, что эти два множества равны.

Решение подобных задач можно оформить в более формализованном виде, используя “{” для системы высказываний, объединенных союзом “и”, “[”- для системы высказываний, объединенных союзом «или».

Задача 2. Доказать закон де Моргана.

Доказательство проведем с помощью двух включений.

С одной стороны,

$$x\in\overline{X\cup Y}\Rightarrow\begin{cases}x\in U\\ x\notin X\cup Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\notin X\\ x\notin Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in\overline{X}\\ x\in\overline{Y}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\overline{X}\cap\overline{Y}\Rightarrow\overline{X\cup Y}\subseteq\overline{X}\cap\overline{Y}.$$

С другой стороны,

$$x\in\overline{X}\cap\overline{Y}\Rightarrow\begin{cases}x\in\overline{X}\\ x\in\overline{Y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in U\\ x\notin X\\ x\notin Y\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\notin X\cup Y\Rightarrow x\in\overline{X\cup Y}\Rightarrow\overline{X}\cap\overline{Y}\subseteq\overline{X\cup Y}.$$

Так как $\overline{X\cup Y}\subseteq\overline{X}\cap\overline{Y}$ и $\overline{X}\cap\overline{Y}\subseteq\overline{X\cup Y}$, то $\overline{X\cup Y}=\overline{X}\cap\overline{Y}$, что и требовалось доказать.

Задача 3.

Доказать тождество $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$.

Решение. Используя свойства операций над множествами, покажем, что правую часть выражения с помощью равносильных преобразований можно привести к левой.

$$(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)=(A\cap\overline{C})\cap\overline{(B\cap\overline{C})}=(A\cap\overline{C})\cap(\overline{B}\cup\overline{\overline{C}})=$$

$$=(A\cap\overline{C})\cap(\overline{B}\cup C)=(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C}\cap C)=$$

$$=(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup(A\cap\varnothing)=(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup\varnothing=A\cap\overline{C}\cap\overline{B}=$$

$$=A\setminus B\setminus C$$

Задача 4. Упростить выражение

$$(A\cap B\cap Y\cap\overline{X})\cup(\overline{A}\cap Y)\cup(\overline{B}\cap Y)\cup(Y\cap X).$$

Решение.

1) Применив дистрибутивный закон, получим

$$(A\cap B\cap Y\cap\overline{X})\cup(\overline{A}\cap Y)\cup(\overline{B}\cap Y)\cup(Y\cap X)=(A\cap B\cap$$

$$\cap Y\cap\overline{X})\cup(Y\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup X))$$

2) Используя коммутативный закон, закон де Моргана и Закон двойного дополнения, получим

$$(A\cap B\cap Y\cap\overline{X})\cup(Y\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup X))=(Y\cap(A\cap B\cap\overline{X}))\cup$$

$$\cup(Y\cap(\overline{A\cap B}\cup\overline{\overline{X}})).$$

3) Применив дистрибутивный закон и закон де Моргана, получим

$$(Y\cap(A\cap B\cap\overline{X}))\cup(Y\cap(\overline{A\cap B}\cup\overline{\overline{X}}))=$$

$$=Y\cap((A\cap B\cap\overline{X})\cup(\overline{A\cap B\cap\overline{X}}))=Y\cap U=Y$$

4) Применим закон $\mathrm{X}\cup\overline{\mathrm{X}}=U$, получим

$$=Y\cap((A\cap B\cap\overline{X})\cup(\overline{A\cap B\cap\overline{X}}))=Y\cap U=Y.$$

Варианты заданий

1. Докажите тождество $(\boldsymbol{A}\bigcap \boldsymbol{B})\setminus(\boldsymbol{A}\bigcap \boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\bigcap \boldsymbol{B})\setminus \boldsymbol{C}$.

2. Докажите, что $B\bigcap(A\setminus C)=(B\bigcap A)\setminus(B\bigcap C)$.

3. Упростите $(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup \overline{B})\bigcap(\overline{A}\bigcup B)$.

4. Докажите тождество

$$\overline{[(A\bigcap \overline{X})\bigcup(B\bigcap \overline{X})]}=(\overline{A}\bigcup X)\bigcap(\overline{B}\bigcup X).$$

5. Упростите $A\setminus((A\bigcup B)\setminus B)$.

6. Докажите тождество $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$.

7. Докажите тождество

$$(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B)=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A).$$

8. Докажите тождество $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$.

9. Докажите тождество $(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap B)=A$.

10. Докажите тождество $(A\bigcup B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$.

11. Докажите тождество $(A\bigcap B)\setminus(A\bigcap C)=(A\bigcap B)\setminus C$.

12. Упростите $\overline{(A\bigcap \overline{X})\bigcup(B\bigcap \overline{X})}$.

13. Докажите тождество $(B\setminus A)\bigcup(C\setminus A)=(B\bigcup C)\setminus A$.

14. Докажите закон поглощения $X\bigcup(X\bigcap Y)=X$.

15. Докажите тождество $A\setminus(A\setminus C)=(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap C)$.

16. Докажите закон поглощения $X\bigcap(X\bigcup Y)=X$.

17. Докажите тождество $X\setminus(Y\bigcup Z)=(X\setminus Y)\bigcap(X\setminus Z)$.

18. Докажите тождество $X\setminus(Y\bigcap Z)=(X\setminus Y)\bigcup(X\setminus Z)$.

19. Докажите тождество $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

20. Докажите, тождество $(A\bigcap B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcap(B\setminus C)$.

2. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Теоретические сведения

В множестве X n-местным или *n-арным отношением* называется подмножество R n-й декартовой степени $X^n = X \times X \times .... \times X$ заданного множества, $R \subseteq X^n$, X называется носителем отношения [2, 6, 7]. Будем говорить, что упорядоченные элементы $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ находятся в отношении R, если $x_1, x_2, ..., x_n \in$R. Одноместное отношение называется *унарным,* или свойством, и соответствует подмножеству множества X. Особую роль в приложениях играют *бинарные* отношения $R \subseteq X \times X$. Каждому бинарному отношению можно поставить в соответствие матрицу бинарного отношения, которую также будем обозначать через R$=(r_{ij})_{n\times n}(n = |X|)$ и элементы которой r_{ij} определяются по следующему правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_i, x_j) \in R \\ 0, \text{ если } (x_i, x_j) \notin R \end{cases}$$

Рассмотрим свойства бинарных отношений.

Отношение $R \subseteq X \times X$ называется

рефлексивным, если для $\forall\, x \in X$ $(x, x) \in R$;

антирефлексивным, если $\forall\, x \in X$ $(x, x) \notin R$;

симметричным, если $\forall\, x, y \in X$ из условия $(x,y) \in R$ следует $(y,x) \in R$;

антисимметричным, если $\forall\, x, y \in X$ из условия $(x, y) \in R$ следует условие $(y, x) \notin R$;

транзитивным, если $\forall\, x, y,z \in X$ из условий $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следует $(x, z) \in R$.

Матрица бинарного отношения содержит единицы на главной диагонали, если отношение является рефлексивным; такая матрица является симметричной относительно главной диагонали, если отношение симметрично; для антисимметричного отношения произведение элементов, расположенных симметрично относительно главной диагонали, равно нулю.

Так как отношение является прежде всего множеством упорядоченных пар, то для отношений можно ввести те же операции, что и для множеств, то есть операции объединения, пересечения, дополнения и разности. Кроме того, для отношений существуют специальные операции [1, 6]:

инверсией отношения R называется отношение $R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$.

Пусть R_1, R_2 - отношения, заданные на множестве X, тогда *композицией отношений* R_1 и R_2 называется отношение, определяемое следующим образом

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) \mid \exists z : (x, z) \in R_1 \quad и \quad (z, y) \in R_2\}.$$

Замечание. $R_2 \circ R_1 \neq R_1 \circ R_2$.

Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение называется отношением эквивалентности или *эквивалентностью* (обозначение I) [1, 2].

Пример. Отношение равенства на множестве целых чисел, отношения подобия на множестве треугольников являются отношениями эквивалентности.

Классом эквивалентности K(x) элемента *x* называется множество всех элементов $y \in$ X, каждый из которых находится с этим элементом в отношении эквивалентности. Иными словами, класс эквивалентности - это множество эквивалентных элементов.

Два различных класса эквивалентности не пересекаются, поэтому если все элементы множества X распределены по классам эквивалентности, то эти классы эквивалентности образуют разбиение множества X.

Для определения, является ли заданное отношение R отношением эквивалентности, используют следующий критерий:

Пусть R - матрица бинарного отношения. Если путем перестановки строк и столбцов ее можно привести к блочно-диагональному виду (на главной диагонали расположены подматрицы, состоящие из 1, а остальные элементы равны 0), то R является отношением эквивалентности, иначе - R не является отношением эквивалентности.

Примеры решения задач

1. **Задача 1.** Определить свойства отношения R={(x,y)| x,y∈**R** и x+2=y+1}. Отношение задано на множестве действительных чисел **R**.

Решение.

1. Проверим отношение на рефлексивность.

Условие (x,x)∈R для данного отношения принимает вид x+2=x+1. Полученное соотношение не выполняется ни для одного значения x∈**R**. Поэтому данное отношение является антирефлексивным.

2. Проверим отношение на симметричность. Условие (x,y)∈R для данного отношения принимает вид x+2=y+1. Условие (y,x)∈R для данного отношения принимает вид y+2=x+1.

Получаем систему уравнений и исследуем ее на совместность.

$$\begin{cases} x+2=y+1 \\ y+2=x+1 \end{cases}$$

Из первого уравнения x+2=y+1 получим x+2+1=y+1+1, x+3=y+2. Из второго уравнения системы y+2=x+1, т. е. получаем x+3=x+1, что не является верным ни для одного значения x∈**R**. Таким образом, отношение является антирефлексивным.

Опровергнуть свойство можно используя прием контрпримера. Для этого возьмем, например, пару (3,4). Она принадлежит рассматриваемому отношению, так как выполняется условие 3+2=4+1. Проверим принадлежит ли отношению пара (4,3). Так как $4+2 \neq 3+1$, то отношение не является симметричным.

3. Проверим отношение на транзитивность. Составим систему уравнений, соответствующую определению транзитивности:

$$\begin{cases} x+2=y+1, \\ y+2=z+1, \\ x+2=z+1. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений системы исключим y:

$y+2=z+1$, $y=z-1$, $x+2=z-1+1$, $x+2=z$.

Полученное соотношение не совпадает с третьим уравнением системы. Следовательно, отношение не является транзитивным.

Задача 2.

Отношение R задано матрицей, которая имеет вид.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	0	0
c	0	0	1	0	1	1
d	1	0	0	1	0	0
e	0	0	1	0	1	1
f	0	0	1	0	1	1

Является ли данное отношение эквивалентностью. Для отношения эквивалентности определить классы эквивалентности.

Решение. Так как все элементы главной диагонали матрицы равны единице, то отношение заданное данное матрицей является рефлексивным. Симметричность матрицы относительно главной диагонали свидетельствует о симметричности бинарного отношения.

Переставляя строки и столбцы, попробуем привести матрицу отношения R к блочно-диагональному виду. Поменяем местами столбцы b, d и строки b, d, получим

R	a	d	c	b	e	f
a	1	1	0	0	0	0
b	0	0	0	1	0	0
c	0	0	1	0	1	1
d	1	1	0	0	0	0
e	0	0	1	0	1	1
f	0	0	1	0	1	1

R	a	d	c	b	e	f
a	1	1	0	0	0	0
d	1	1	0	0	0	0
c	0	0	1	0	1	1
b	0	0	0	1	0	0
e	0	0	1	0	1	1
f	0	0	1	0	1	1

Поменяем местами столбцы c, b и строки c, b, получим

R	a	d	b	c	e	f
a	1	1	0	0	0	0
d	1	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1	1
b	0	0	1	0	0	0
e	0	0	0	1	1	1
f	0	0	0	1	1	1

R	a	d	b	c	e	f
a	1	1	0	0	0	0
d	1	1	0	0	0	0
b	0	0	1	0	0	0
c	0	0	0	1	1	1
e	0	0	0	1	1	1
f	0	0	0	1	1	1

Матрицу отношения привели к блочно-диагональному виду, значит, R является эквивалентностью, и по полученной матрице можно определить классы эквивалентности $К_1, К_2, К_3$.

Таким образом $К_1 = \{a, d\}$, $К_2 = \{b\}$, $К_3 = \{c, e, f\}$.

Задание 2

Определите свойства отношения. Отношение задано на множестве действительных чисел **R**.

Варианты

1. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x - y<0\}$.
2. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x+y\le 0\}$.
3. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x = y\}$.
4. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x = y^2\}$.
5. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x^2 = y\}$.
6. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $|x - y| \le 3\}$.
7. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x^3 = y\}$.
8. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x = y^3\}$.
9. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x +5>3 - y\}$.
10. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $|x| \ge |y|\}$.
11. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x^2 = y^2\}$.
12. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x >y^2\}$.
13. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x^3 = y^3\}$.
14. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x\le y+1\}$.
15. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x^2 +y^2=1\}$.
16. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x\le y\}$.
17. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x\le 2y\}$.
18. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x+2\le y+1\}$.
19. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $x-5\le y+3\}$.
20. $R=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R}$ и $2x \ge 3y\}$.

Задание 3

Для отношения, заданного матрицей, определить является ли оно отношением эквивалентности. Если является, то определить классы эквивалентности.

Варианты

1.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	1	1
c	0	0	1	0	0	0
d	1	0	0	1	0	0
e	0	1	0	0	1	1
f	0	1	0	0	1	1

2.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	1	0	1
b	0	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0
d	1	0	0	1	0	1
e	0	0	0	0	1	0
f	1	0	0	1	0	1

3.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	0	0	0
b	0	1	0	1	0	0
c	0	0	1	0	0	1
d	0	1	0	1	0	0
e	0	0	0	0	1	0
f	0	0	1	0	0	1

4.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	0	0	1
b	0	1	0	0	0	0
c	0	0	1	1	1	0
d	0	0	1	1	1	0
e	0	0	1	1	1	0
f	1	0	0	0	0	1

5.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	0	1	1
b	0	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0
d	0	0	0	1	0	0
e	1	0	0	0	1	1
f	1	0	0	0	1	1

6.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0
c	0	0	1	0	1	0
d	0	0	0	1	0	0
e	0	0	1	0	1	0
f	0	0	0	0	0	1

7.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	0	0	0
b	0	1	0	1	0	1
c	0	0	1	0	0	0
d	0	1	0	1	0	1
e	0	0	0	0	1	0
f	0	1	0	1	0	1

8.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	0	1	0
b	0	1	0	1	0	0
c	0	0	1	0	0	1
d	0	1	0	1	0	0
e	1	0	0	0	1	0
f	0	0	1	0	0	1

9.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	0	0	0
b	0	1	0	0	0	1
c	0	0	1	1	1	0
d	0	0	1	1	1	0
e	0	0	1	1	1	0
f	0	1	0	0	0	1

10.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	1	0	1	1
b	0	1	0	1	0	0
c	1	0	1	0	1	1
d	0	1	0	1	0	0
e	1	0	1	0	1	1
f	1	0	1	0	1	1

11.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	1	0	0	0
b	0	1	0	1	0	1
c	1	0	1	0	0	0
d	0	1	0	1	0	1
e	0	0	0	0	1	0
f	0	1	0	1	0	1

12.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	1	0	0
b	0	1	1	0	0	1
c	0	1	1	0	0	1
d	1	0	0	1	0	0
e	0	0	0	0	1	0
f	0	1	1	0	0	1

13.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	0	0	1
b	0	1	0	0	0	0
c	0	0	1	1	1	0
d	0	0	1	1	1	0
e	0	0	1	1	1	0
f	1	0	0	0	0	1

14.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	1	0	0	1
b	0	1	0	0	0	0
c	1	0	1	0	0	1
d	0	0	0	1	1	0
e	0	0	0	1	1	0
f	1	0	1	0	0	1

15.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	1	0	0	0
b	0	1	0	0	1	1
c	1	0	1	0	0	0
d	0	0	0	1	0	0
e	0	1	0	0	1	1
f	0	1	0	0	1	1

16.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	1	1
c	0	0	1	0	0	0
d	1	0	0	1	0	0
e	0	1	0	0	1	1
f	0	1	0	0	1	1

17.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	0	1	0
b	0	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0
d	0	0	0	1	0	1
e	1	0	0	0	1	0
f	0	0	0	1	0	1

18.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	0	1	0
b	0	1	0	0	0	0
c	0	0	1	0	0	1
d	0	0	0	1	0	0
e	1	0	0	0	1	0
f	0	0	1	0	0	1

19.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	1	1	0	0
b	0	1	0	0	0	0
c	1	0	1	1	0	0
d	1	0	1	1	0	0
e	0	0	0	0	1	1
f	0	0	0	0	1	1

20.

R	a	b	c	d	e	f
a	1	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0
c	0	0	1	0	0	1
d	0	0	0	1	1	0
e	0	0	0	1	1	0
f	0	0	1	0	0	1

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Теоретические сведения

Граф есть совокупность точек и линий, соединяющих эти точки. Эти соединения могут обладать различными характеристиками, и теория графов занимается изучением этих характеристик.

Пусть задано некоторое конечное множество X, элементы которого будем называть вершинами, и множество V, состоящее из пар элементов (x_i, x_j) множества X. Упорядоченная пара множеств $G=(X,V)$ называется графом. Вершины изображаются точками, а пары элементов – линиями, соединяющими точки, соответствующие образующим пары вершинам [3, 4, 5, 6].

Если в определении графа существенно в каком порядке выбираются вершины (то есть пара (x_i, x_j) отлична от пары (x_j,x_i)), то такой граф называют ориентированным или орграфом, а пару (x_i, x_j) - дугой, при этом считается, что x_i - начальная вершина, а x_j - конечная. В геометрической интерпретации дуге соответствует направленный отрезок. Часто орграф задают парой $G=(X, \Gamma)$, где X - множество вершин, а Г - неоднозначное отображение, ставящее в соответствие каждой вершине подмножество в X. $\Gamma(x_i)$ - множество вершин $x_j \in X$, для которых в графе G существует дуга (x_i, x_j). $\Gamma^l(x_i)$ - множество вершин $x_j \in X$, для которых в графе G существует дуга (x_j, x_i).

Если в определении графа не существенен порядок вершин при образовании пары (x_i, x_j), то граф называют неориентированным или неорграфом, а пару (x_i, x_j) - ребром.

Пример. На рис. 1 изображен ориентированный граф, а на рис. 2 – неориентированный граф.

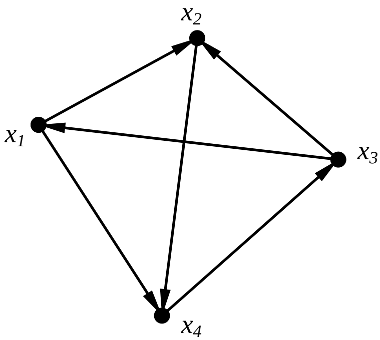


Рис. 1

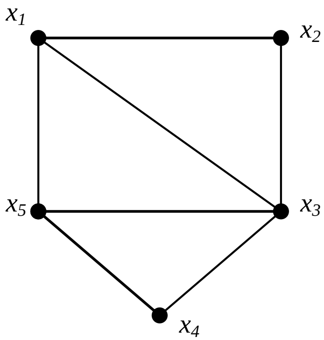


Рис. 2

Путем в графе G называется такая последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Для неорграфа такая последовательность ребер называется цепью. Если путь (цепь) проходит через вершины x_1, ..., x_k то будем обозначать его (ее) символом $[x_1, \ldots, x_k]$.

Для графа на рис. 2 последовательность дуг (x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_3) является путем и может быть обозначена следующим образом $[x_1, x_2, x_4, x_3]$. Для графа на рис. 3 цепью является, например, следующая последовательность ребер (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_5, x_4), которую обозначим через $[x_2, x_3, x_5, x_4]$.

Маршрут есть неориентированный "двойник" пути, и это понятие рассматривается в тех случаях, когда можно пренебречь направленностью дуг в графе.

Путь (цепь), у которого(-ой) начальная и конечная вершина совпадают, называется контуром (циклом). Для графа на рис. 3 циклом является, например, следующая цепь $[x_2, x_3, x_5, x_1, x_2]$.

Простым циклом графа называется цикл, в котором все вершины различны за исключением начальной и конечной вершины, которые совпадают. Например, для графа на рис. 3 цикл $[x_2, x_3, x_5, x_1, x_2]$ является простым, а цикл $[x_2, x_3, x_4, x_5, x_3, x_1, x_2]$ не является простым.

Петлей называется дуга, начальная и конечная вершины которой совпадают.

Две вершины x_i и x_j называются смежными, если существует соединяющее их ребро (дуга), при этом вершины называются инцидентными этому ребру (дуге), а ребро (дуга) – инцидентным(-ой) этим вершинам. Аналогично, два различных ребра (дуги) называются смежными, если они имеют по крайней мере одну общую вершину.

Вершины x_1 и x_4 смежны (рис. 2.), дуга (x_1, x_4) инцидентна вершинам x_1 и x_4, а вершины x_1 и x_4 инцидентны дуге (x_1, x_4). Ребра (x_1, x_3) и (x_3, x_4) смежны (рис. 3).

Число дуг, исходящих из вершины x_i ориентированного графа, называется полустепенью исхода вершины x_i и обозначается $d^-(x_i)$. Число дуг, заходящих в вершину x_i ориентированного графа, называется полустепенью захода вершины x_i и обозначается $d^+(x_i)$. Так, для орграфа, представленного на рис.2 $d^-(x_1)=1$, $d^+(x_1)=2$.

В неориентированном графе число ребер, инцидентных данной вершине x_i, называют степенью вершины x_i и обозначают $d(x_i)$. Вершина графа, имеющая степень 0, называется изолированной, а вершина, имеющая степень 1 – висячей. Для неорграфа на рис. 3 $d(x_1)=3$, $d(x_3)=4$.

Информация о структуре графа может быть задана матрицей смежности. *Матрицей смежности* графа $G=(X,V)$, $|X|=n$ называется квадратная матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны,}\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Замечание. Матрица смежности неориентированного графа симметрична. В случае кратных ребер a_{ij} есть количество ребер, соединяющих вершины x_i и x_j. Для орграфа a_{ij} определяется как количество дуг, направленных от вершины x_i к вершине x_j.

Матрицей инцидентности графа $G=(X,V)$, $|X|=n$,$|V|=m$ называется матрица $B=(b_{ij})_{n\times m}$, элементы которой определяются следующим образом:

если G – ориентированный граф, то

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{если вершина } x_i \text{ - начальная вершина дуги } v_j;\\ -1, \text{если вершина } x_i \text{ - конечная вершина дуги } v_j;\\ 0, \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } v_j;\end{cases}$$

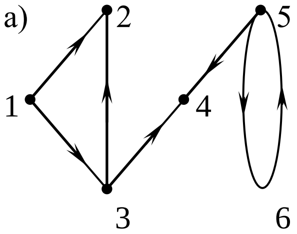
если G - неориентированный граф, то

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } v_j;\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Замечание. Для ориентированного графа петлю, т. е. дугу вида (x_i, x_i) удобно представлять иным значением в строке x_i, например, 2.

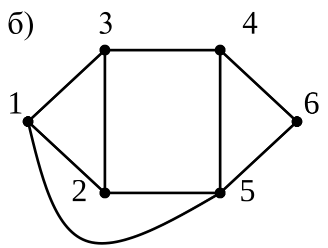
Пример. Матричные представления графов проиллюстрированы на рис. 3, 4.

а)



$$B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}(1,2) & (1,3) & (3,2) & (3,4) & (5,4) & (5,6) & (6,5)\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

б)



$$B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc}(1,2) & (1,3) & (1,5) & (2,3) & (2,5) & (3,4) & (4,5) & (4,6) & (5,6)\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

Рис. 3

а) ориентированный граф и его матрица инцидентности,

б) неориентированный граф и его матрица инцидентности

(а)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

(б)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

Рис. 4. Матрицы смежности для графов на рис. 3

Понятия связности и достижимости. Если в графе существует путь, идущий от вершины x_i к вершине x_j, то говорят, что вершина x_j *достижима* из вершины x_i.

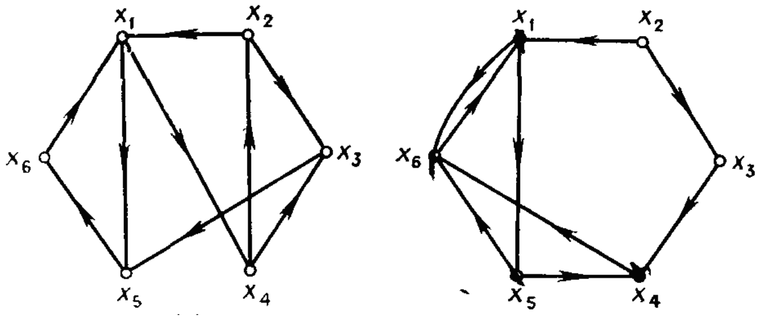
Если для любой пары вершин неориентированного графа существует цепь их соединяющая, то такой граф называется *связным.* Иначе неориентированный граф называется *несвязным.*

Ориентированный граф называется *сильно связным* или *сильным*, если для любых двух различных вершин x_i и x_j существует по крайней мере один путь, соединяющий x_i с x_j. Это определение означает также, что любые две вершины такого графа взаимно достижимы.

Если для некоторой пары вершин орграфа не существует маршрута, соединяющего их, то такой орграф называется *несвязным*.

Пример. Граф, приведенный на рис. 5(а) является сильно связный. Граф, показанный на рис. 5(б), не является сильным, так как в нем нет пути из x_5 в x_2. Граф, приведенный на рис. 6, является несвязным.

Максимальный по включению сильно связный подграф данного графа называется его сильной компонентой связности (СК).



а) б)

Рис. 5. Сильно связный граф (а), граф, не являющийся сильным графом (б)

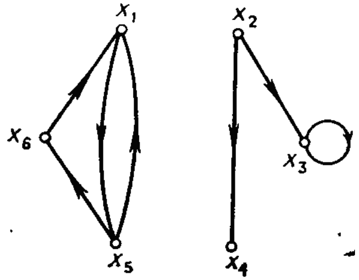


Рис. 6. Несвязный граф (в)

Например, в графе G, приведенном на рис. 5(б), подграф $(\{x_1, x_4, x_5, x_6\})$ является сильной компонентой графа G. С другой стороны, подграфы $(\{x_1, x_6\})$ и $(\{x_1, x_5, x_6\})$ не являются сильными компонентами, хотя и являются сильными подграфами, поскольку они содержатся в графе $(\{x_1, x_4, x_5, x_6\})$ и, следовательно, не максимальные.

Максимальный связный подграф неориентированного графа G называется *компонентой связности*.

Матрица достижимостей графа $G=(X,V)$ $R=(r_{i,j})_{n\times n}$, $n=|X|$ определяется следующим образом:

$$r_{ij}=\begin{cases}1, \text{если вершина } x_j \text{ достижима из } x_i\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Множество вершин $R(x_i)$ графа G, достижимых из заданной вершины x_i, состоит из таких элементов x_j, для которых (i,j)-й элемент в матрице достижимостей равен 1.

Замечание. Считают, что каждая вершина достижима из себя самой с помощью пути длины 0, поэтому все диагональные элементы в матрице R равны 1.

Поскольку $\Gamma(x_i)$ является множеством таких вершин x_j, которые достижимы из x_i с использованием путей длины 1 (т.е. $\Gamma(x_i)$ – такое множество вершин, для которых в графе существуют дуги (x_i, x_j)) и поскольку $\Gamma(x_j)$ является множеством вершин, достижимых из x_j с помощью путей длины 1, то множество $\Gamma(\Gamma(x_i))=\Gamma^2(x_i)$ состоит из вершин, достижимых из x_i с использованием путей длины 2. Аналогично $\Gamma^p(x_i)$ является множеством вершин, которые достижимы из x_i с помощью путей длины p.

Так как любая вершина графа G, которая достижима из x_i, должна быть достижима с использованием пути (или путей) длины 0, или 1, или 2, ..., или p (с некоторым конечным $p \le n$), то множество вершин, достижимых из x_i , можно представить в виде

$$R(x_i) = \{ x_i \} \cup \Gamma(x_i) \cup \Gamma^2 (x_i) \cup \ldots \cup \Gamma^p (x_i) \qquad (1)$$

Таким образом, множество $R(x_i)$ может быть получено последовательным выполнением (слева направо) операций объединения в соотношении (1), до тех пор, пока «текущее» множество не перестанет изменяться при очередной операции объединения. С этого момента последующие операции не будут давать новых элементов множеству и, таким образом, будет получено, достижимое множество $R(x_i)$. Число объединений, которое нужно выполнить, зависит от графа, но, очевидно, что число p меньше числа вершин в графе.

Матрицу достижимостей можно построить так. Находим достижимые множества $R(x_i)$ для всех вершин $x_i \in X$ способом, приведенным выше. Положим r_{ij}=1, если $x_j \in R(x_i)$, и r_{ij}=0 в противном случае. *Матрица контрдостижимостей* (*матрица обратных достижимостей*) $Q = (q_{i,j})_{n \times n}$, $n = |X|$ определяется следующим образом:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если из вершины } x_j \text{ можно достигнуть вершину и } x_i, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Контрдостижимым множеством $Q(x_i)$ графа G является множество таких вершин, что из любой вершины этого множества можно достигнуть вершину x_i.

Из определений очевидно, что столбец x_i матрицы Q (в котором $q_{ij}=1$, если $x_i \in Q(x_i)$, и $q_{ij}=0$ в противном случае) совпадает со строкой x_i матрицы R, т. е. $Q=R^{\mathrm{T}}$, где R^{T} – матрица, транспонированная к матрице достижимостей R.

Алгоритм нахождения сильных компонент графа

Шаг 1. G – данный граф. Для G построить матрицу достижимости R. Получить матрицу контрдостижимости $Q=R^T$.

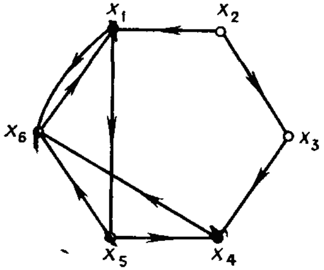
Шаг 2. Положить $C=R \otimes Q$, где $\otimes$ – поэлементное умножение матриц.

Шаг 3. Преобразовать матрицу C к блочно-диагональному виду путем перестановки строк и столбцов. Каждая из диагональных подматриц соответствует сильной компоненте графа G. Останов.

Граф $G^*=(X^*,V^*)$ определяется так: каждая его вершина представляет множество вершин некоторой сильной компоненты графа G, дуга (x_i^*, x_j^*) существует в G^* тогда и только тогда, когда в G существует дуга (x_i, x_j), такая, что x_i принадлежит компоненте, соответствующей вершине x_i^*, а x_j – компоненте, соответствующей вершине x_j^*. Граф G^* называют *конденсацией* графа G.

Пример решения задачи

Для графа построить матрицу смежности, матрицу инцидентности; получить матрицу достижимостей; найти сильные компоненты и построить граф конденсации.



Решение. Матрица смежности графа имеет вид:

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица инцидентности графа имеет вид:

$$B = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{pmatrix} (x_1,x_6) & (x_1,x_5) & (x_2,x_1) & (x_2,x_3) & (x_3,x_4) & (x_4,x_6) & (x_5,x_4) & (x_5,x_6) & (x_6,x_1) \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Построим матрицу достижимостей R. Для этого найдем множества достижимостей для каждой вершины графа по формуле (1), используя матрицу смежности A.

$R(x_1) = \{x_1\} \bigcup \{x_5, x_6\} \bigcup \{x_4, x_6, x_1\} \bigcup \{x_6, x_1, x_5, x_6\} = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}$

$R(x_2) = \{x_2\} \bigcup \{x_1, x_3\} \bigcup \{x_5, x_6, x_4\} \bigcup \{x_4, x_6, x_1, x_6\} =$

$= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$R(x_3) = \{x_3\} \bigcup \{x_4\} \bigcup \{x_6\} \bigcup \{x_1\} \bigcup \{x_5, x_6\} \bigcup \{x_4, x_1\} =$

$= \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$R(x_4) = \{x_4\} \bigcup \{x_6\} \bigcup \{x_1\} \bigcup \{x_5, x_6\} \bigcup \{x_4, x_6, x_1\} = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}$

$R(x_5) = \{x_5\} \bigcup \{x_4, x_6\} \bigcup \{x_6, x_1\} \bigcup \{x_5, x_6\} = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}$

$R(x_6) = \{x_6\} \bigcup \{x_1\} \bigcup \{x_5, x_6\} \bigcup \{x_4, x_6, x_1\} \bigcup \{x_6, x_1, x_5\} =$

$= \{x_1, x_4, x_5, x_6\}$

Матрица достижимостей графа примет вид:

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем сильные компоненты графа. Матрица контрдостижимостей $Q = R^{\mathbf{T}}$

$$Q = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Получим матрицу C, осуществив поэлементное умножение матриц R и Q. Матрица C примет вид:

$$C = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразуем полученную матрицу С к блочно-диагональному виду. Поменяем местами 1-й и 3-й столбцы матрицы.

$$C = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Поменяем местами 1-ю и 3-ю строчки матрицы, получим

$$C = \begin{array}{c} \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Из преобразованной матрицы видно, что в графе можно выделить три сильные компоненты:

$$CK_1 = \{x_3\}, \quad CK_2 = \{x_2\}, \quad CK_3 = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}.$$

Построим граф конденсации, вершинами которого сильные компоненты графа, т. е.

$CK_1 = \{x_3\}$, $CK_2 = \{x_2\}$, $CK_3 = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}$. Так как в исходном графе существует дуга (x_2, x_1), то в графе конденсации будет дуга, связывающая вершины $CK_2 = \{x_2\}$ и $CK_3 = \{x_1, x_4, x_5, x_6\}$. Дуга ($x_2$, x_3) позволяет сформировать дугу (CK_2, CK_1) графа конденсации. Дуга (x_3, x_4) позволяет сформировать дугу (CK_1, CK_3) графа конденсации. Граф конденсации исходного графа примет вид (рис. 7):

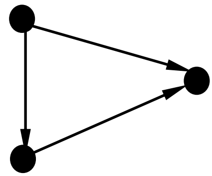
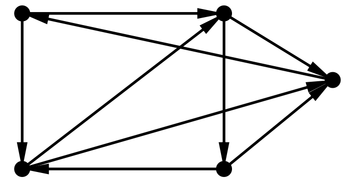
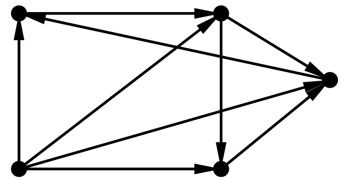
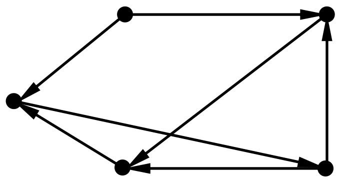
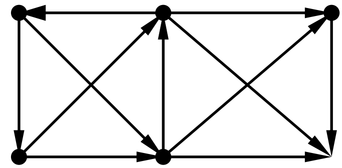
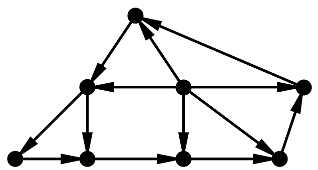
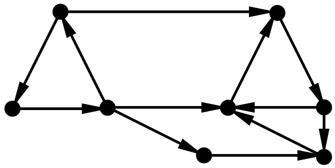
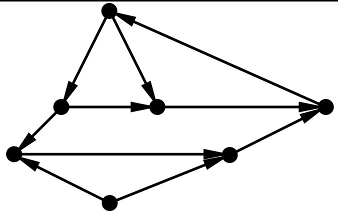
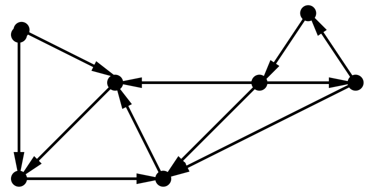


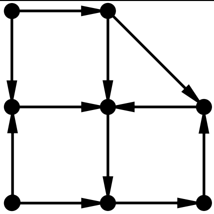
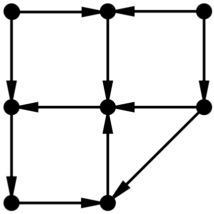
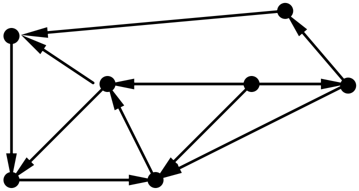
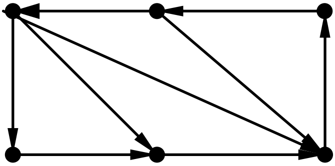
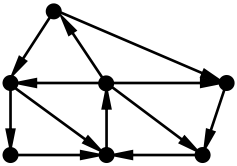
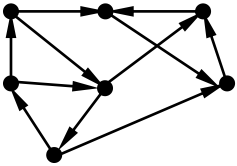
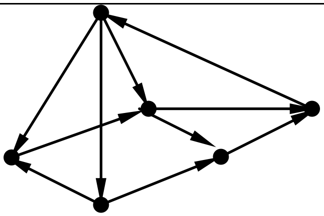
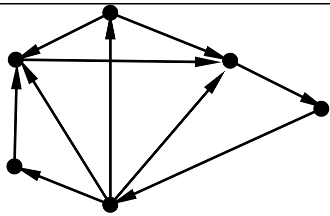
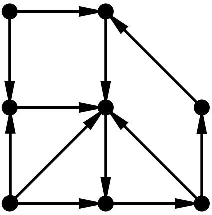
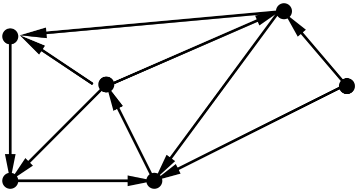
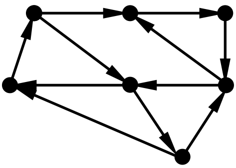
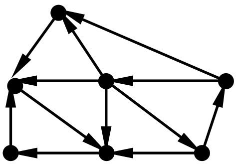
Рис. 7

Задание 4

Для графа построить матрицу смежности, матрицу инцидентности; получить матрицу достижимостей; найти сильные компоненты и построить граф конденсации.

Варианты

1		11	
2		12	
3		13	
4		14	

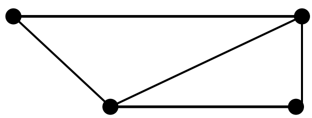
5		15	
6		16	
7		17	
8		18	
9		19	
10		20	

4. ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

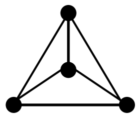
Во многих случаях не имеет значения, как изобразить граф, поскольку изоморфные графы несут одну и ту же информацию. Однако встречаются ситуации, когда важно выяснить, возможно ли нарисовать граф на плоскости так, чтобы его изображение удовлетворяло определенным требованиям. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем печатным способом электрические цепи наносятся на плоскую поверхность изоляционного материала. А так как проводники не изолированы, то они не должны пересекаться. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

Таким образом, возникает понятие плоского графа. Плоским графом называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными линиями без самопересечений, соединяющими соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины.

Примеры плоских графов.



а



б

Рис. 8. Плоские графы

Любой граф, изоморфный плоскому графу, будем называть планарным. Граф на рис.9 является планарным, так как он изоморфен графу на рис 8.б.

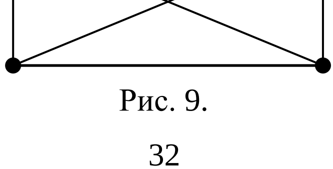


Рис. 9.

Очевидны следующие утверждения:

1) всякий подграф планарного графа планарен;

2) граф планарен тогда и только тогда, когда каждая его связная компонента – планарный граф.

О планарных графах говорят, что они укладываются на плоскости (имеют плоскую укладку).

Алгоритм укладки графа на плоскости

Для решения практических задач недостаточно знать, что граф планарен, а необходимо построить его плоское изображение. Существуют алгоритмы, которые не только проверяют граф на планарность, но и одновременно строят его плоскую укладку, если это возможно.

Одним из таких алгоритмов является следующий [3].

Рассмотрим граф $G=(X,U)$. Алгоритм укладки графа представляет собой процесс последовательного присоединения к некоторому уложенному подграфу G' ($G'=(X',U')$) графа G новой цепи, оба конца которой принадлежат G'. Тем самым эта цепь разбивает одну из граней G' на две. При этом в качестве начального плоского графа G' выбирается любой простой цикл графа G. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет построен плоский граф, изоморфный графу G, или присоединение некоторой цепи окажется невозможным. В этом случае граф не является планарным.

Введем ряд определений.

Плоский граф – это граф, уложенный на плоскости.

Область, ограниченная ребрами в плоском графе, и не содержащая внутри себя вершин и ребер, называется гранью графа. Внешняя часть плоскости также образует грань. На рис. 10 изображен граф с 3 гранями.

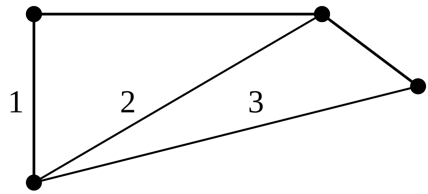


Рис. 10

Пусть построена некоторая укладка подграфа G' графа G. Сегментом S относительно G' (или просто сегментом) будем называть подграф графа G одного из следующих двух видов:

1) ребро $e=(u,v)\in G$, такое, что $e\notin G'$, $u, v \in X'$;

2) связанную компоненту графа G-G', дополненную всеми ребрами графа G, инцидентными вершинам взятой компоненты, и концам этих ребер.

Очевидно, что в случае, когда граф G планарный, всякий сегмент, как подграф графа G, планарен, а в случае, когда G не является планарным, сегмент может быть как планарным, так и не планарным.

Вершину v сегмента S относительно G' будем называть контактной, если $v \in X'$.

Поскольку граф G' плоский, то он разбивает плоскость на грани. Допустимой гранью для сегмента S относительно G' называется грань Г графа G', содержащая все контактные вершины сегмента S. Через Г(S) будем обозначать множество допустимых граней для S. Может оказаться, что $\Gamma(S)=\varnothing$.

Простую цепь L сегмента S, соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин, назовем α–цепью. Очевидно, что всякая α–цепь, принадлежащая сегменту, может быть уложена в любую грань, допустимую для этого сегмента.

Два сегмента S_1 и S_2 относительно G' назовем конфликтующими, если

1) $\theta=\Gamma(S)\cap\Gamma(S)\neq\varnothing$,

2) существуют две α-цепи $L_1\in S_1$, $L_2\in S_2$, которые без пересечений нельзя уложить одновременно ни в какую грань $\Gamma\in\theta$. В противном случае будем говорить, что сегменты не конфликтуют.

Вернемся к алгоритму. На первом шаге этого алгоритма уложим произвольный простой цикл графа G.

Пусть G' - построенная на предыдущем шаге укладка некоторого подграфа графа G. Для каждого сегмента относительно G' находим множество допустимых граней. Теперь могут представиться только следующие три случая.

1. Существует сегмент, для которого нет допустимой грани. В этом случае граф не планарен.

2. Для некоторого сегмента S существует единственная допустимая грань Г. Тогда очередной шаг состоит в расположении любой α–цепи сегмента S в грани Г. При этом α–цепь разбивает грань Г на две грани.

3. $\Gamma(S)\geq 2$ для всякого сегмента S. Тогда появляется несколько вариантов продолжения построения укладки графа, поскольку любой сегмент можно размещать в любую допустимую для этого сегмента грань. Поэтому возникают опасения, что неудачный выбор сегмента и грани может помешать процессу построения укладки на следующих шагах и плоская укладка планарного графа не будет построена. Это могло бы привести к неверному заключению о том, что планарный граф непланарен. В [3] показано, что в этом случае для продолжения алгоритма можно выбирать α–цепь в любом сегменте и помещать его в любую допустимую грань.

Пошаговое описание алгоритма укладки графа на плоскости

0. Выберем некоторый простой цикл C графа G и уложим его на плоскости; положим G'=C.

1. Найдем грани графа G' и сегменты относительно G'. Если множество сегментов пусто, то перейдем к п. 7.

2. Для каждого сегмента S определим множество Г(S).

3. Если существует сегмент S, для которого $Г(S)=\varnothing$, то граф G непланарен. Конец. Иначе перейти к п. 4.

4. Если существует сегмент S, для которого имеется единственная допустимая грань Г, то перейти к п. 6. Иначе – к п. 5.

5. Для некоторого сегмента S (Г(S)>1) выбираем произвольную допустимую грань Г.

6. Поместить произвольную α–цепь $L \in S$ в грань Г; заменить G' на $G' \cup L$ и перейти к п. 1.

7. Построена укладка G' графа G на плоскости. Конец.

Проиллюстрируем работу алгоритма на примерах.

Пример 1. Для графа G, изображенного на рис 11, построить его укладку на плоскости.

Решение. Уложим сначала цикл C =(1, 2, 3, 4, 1), который разбивает плоскость на две грани $Г_1$ в $Г_2$. На рис. 12 изображены граф G'=C и сегменты S_1, S_2, S_3 относительно G' с контактными вершинами, обведенными кружками. Так как $Г(S_i)=\{Г_1, Г_2\}$ (i=1, 2, 3), то любую α-цепь произвольного сегмента можно укладывать в любую допустимую для него грань. Поместим, например, α-цепь L = (2, 5, 4) в $Г_1$. Возникает новый граф G' и его сегменты (рис. 13). При этом $Г(S_1) = \{Г_3\}$, $Г(S_2) = \{Г_1, Г_2\}$, $Г(S_3) = \{Г_1, Г_2, Г_3\}$. Укладываем цепь L = (1, 5) в $Г_3$ (рис. 14). Тогда $Г(S_1) = \{Г_1, Г_2\}$, $Г(S_2) = \{Г_1, Г_2\}$. Далее, уложим α-цепь L = (2, 6, 4) сегмента S_1 в $Г_1$ (рис. 15). В результате имеем $Г(S_1) = \{Г_5\}$, $Г(S_2) = \{Г_1, Г_2, Г_3\}$. Наконец, уложив ребро (6,3) в $Г_5$, а ребро (2,4) - например, а $Г_1$, получаем укладку графа G на плоскости (рис. 16).

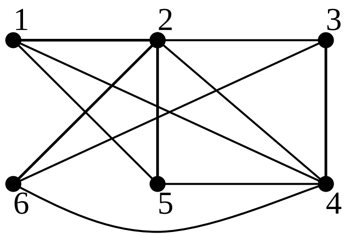


Рис. 11

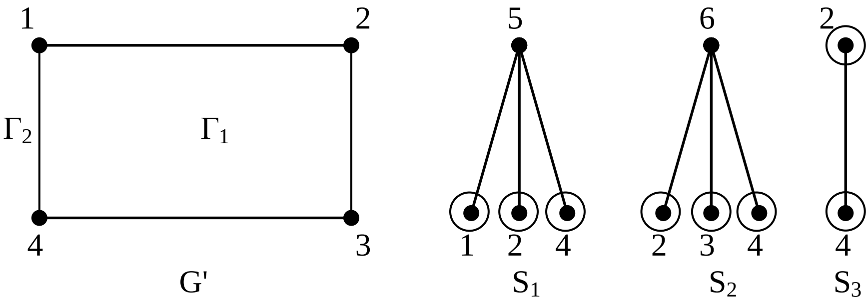


Рис. 12

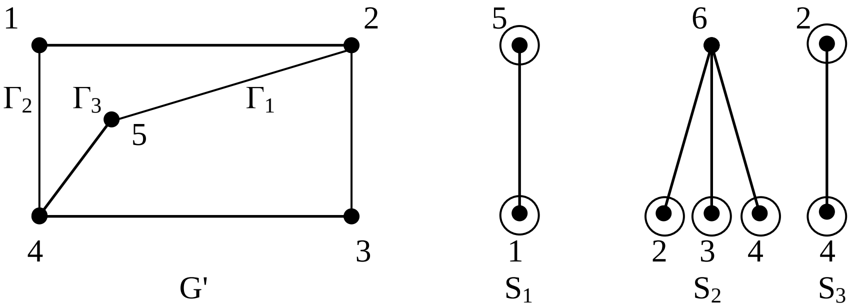


Рис. 13

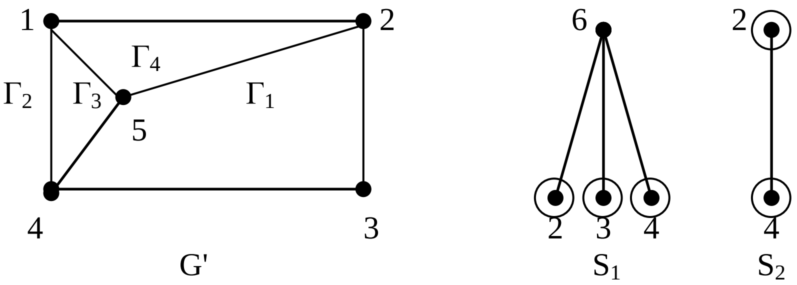


Рис. 14

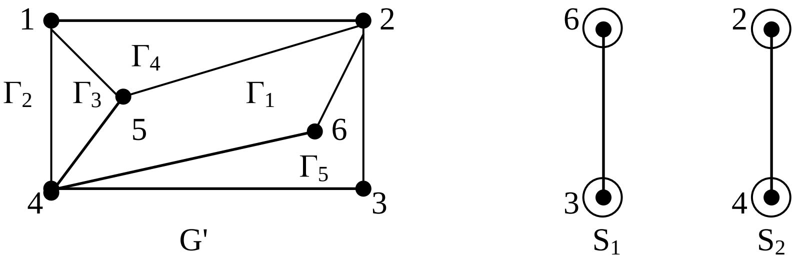


Рис. 15

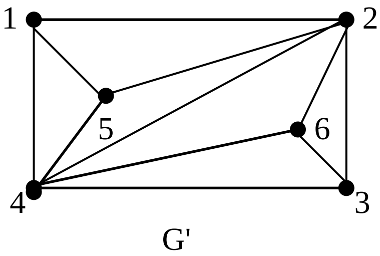


Рис. 16

Пример 2. Для графа $K_{3,3}$, изображенного на рис.17, построить, если это возможно, его укладку на плоскости.

Решение цикл G' и сегменты относительно этого цикла изображены на рис. 18. При этом $\Gamma(S_i) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ (i=1,2,3). Помещает S_1 в грань Γ_2. Тогда S_2 необходимо поместить в грань Γ_1 (рис. 19). Поскольку $\Gamma(S_1)=\varnothing$, то $K_{3,3}$ - непланарный граф.

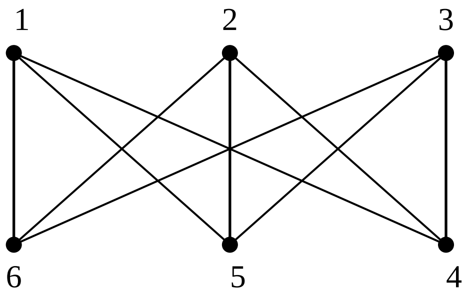


Рис. 17

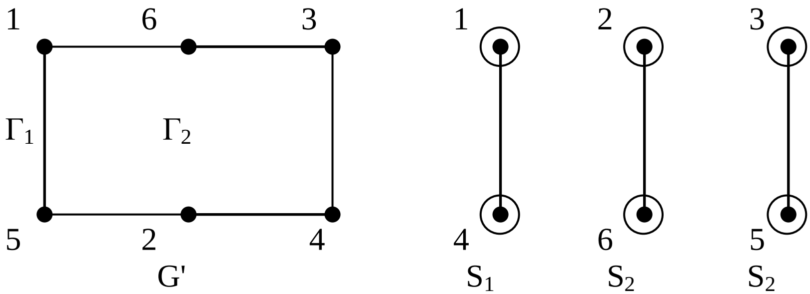


Рис. 18

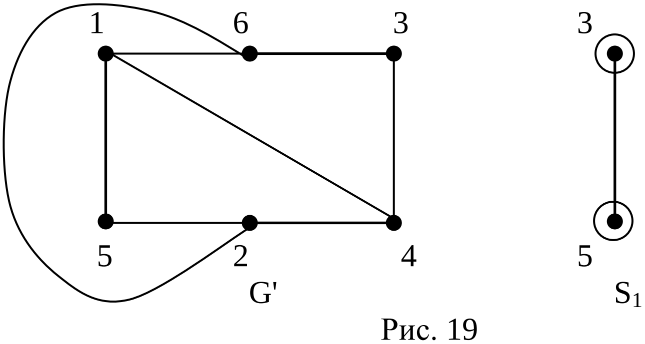


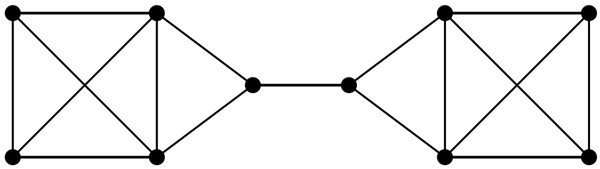
Рис. 19

Задание 5

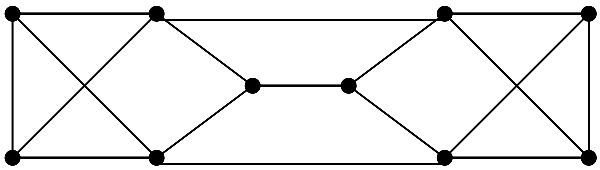
Для графа построить, если это возможно, его укладку на плоскости.

Варианты

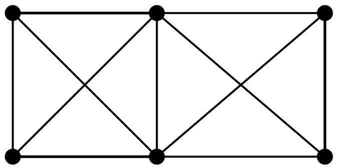
1.



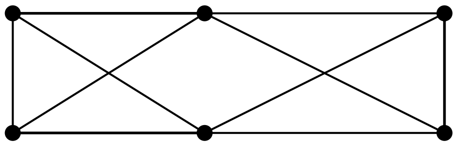
2.



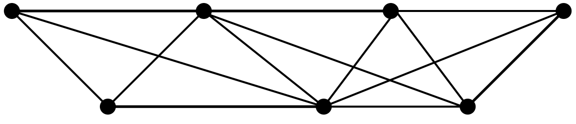
3.



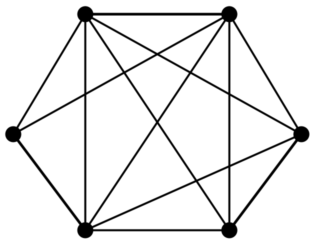
4.



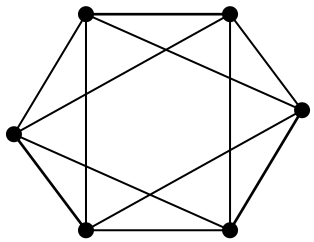
5.



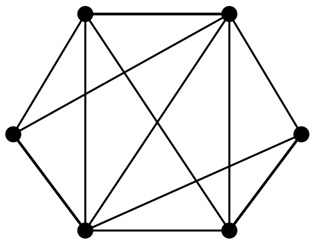
6.



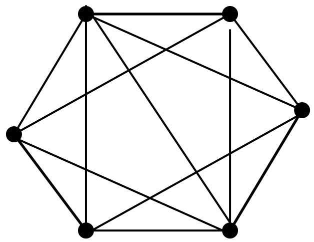
7.



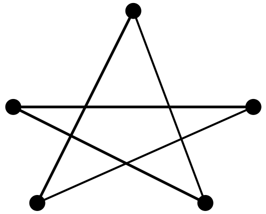
8.



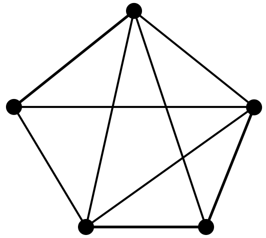
9.



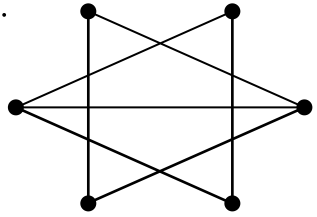
10.



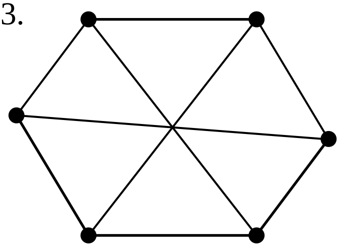
11.



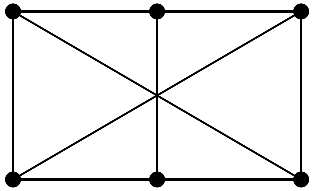
12.



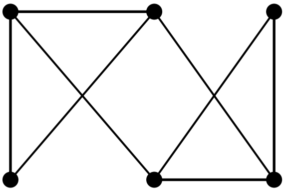
13.



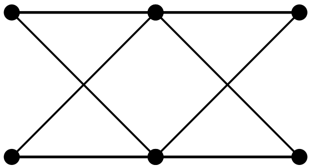
14.



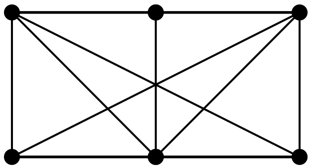
15.



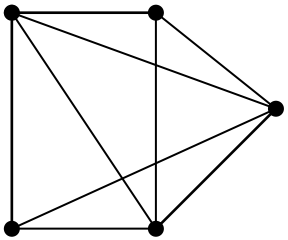
16.



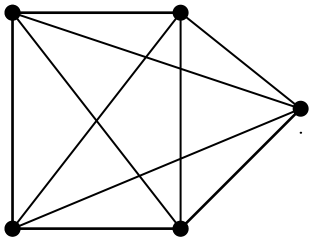
17.



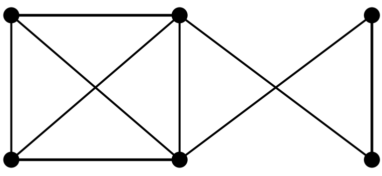
18.



19.



20.



5. ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ И ИХ СВОЙСТВА

Теоретические сведения

Под высказыванием понимают предложение, относительно которого имеет смысл утверждать, истинно оно (обозначают символами 1 или И) или ложно (символы 0 или Л). Значения И и Л (или 1 и 0) называются истинностными значениями высказывания, множество {И, Л} (или {0,1}) называют множеством истинностных значений. Заметим, что значение высказывания ситуативно, при этом в каждой ситуации высказывание принимает одно и только одно из двух значений – И или Л.

Условимся считать высказывание *элементарным (простым)*, если никакую его часть нельзя рассматривать как отдельное высказывание. Для образования *составных (сложных) высказываний* используют *логические операции.*

Пусть X и Y – два высказывания. Определим основные логические операции.

Отрицанием высказывания X называют высказывание $\overline{X}$, которое истинно тогда и только тогда, когда X ложно. В разговорной речи высказывание $\overline{X}$ соответствует составлению из высказывания X нового высказывания «не X» или «неверно, что X».

Конъюнкцией двух высказываний X и Y называют высказывание $X \wedge Y$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. Конъюнкция иначе называется логическим умножением, а X и Y – сомножителями. В разговорной речи конъюнкция соответствует соединительному союзу «и», $X \wedge Y$ – читается как «X и Y».

Дизъюнкцией двух высказываний X и Y называют высказывание $X \vee Y$, которое ложно тогда и только тогда, когда X

и Y ложны. Дизъюнкция иначе называется логическим сложением, а X и Y – слагаемыми. В разговорной речи дизъюнкция соответствует соединительному союзу «или», $X \vee Y$ – читается как «X или Y».

Импликацией двух высказываний $X \to Y$ называют высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда X – истинно, а Y – ложно. В разговорной речи импликация высказываний соответствует составлению высказывания вида: «X имплицирует Y», «из X следует Y», «если X, то Y», «X достаточно для Y», «X только тогда, когда Y», «Y необходимо для X», «Y тогда, когда X». В обозначении $X \to Y$: X – посылка, Y – заключение.

Эквиваленцией двух высказываний X и Y называют высказывание $X \leftrightarrow Y$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинностные значения высказываний X и Y совпадают. В разговорной речи эквиваленция двух высказываний соответствует составлению нового высказывания вида «X эквивалентно Y», «X тогда и только тогда, когда Y», «X необходимо и достаточно для Y».

Всякое сложное высказывание, составленное из некоторых исходных высказываний посредством применения логических операций $\bar{\ }, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$, будем называть формулой алгебры высказываний. Исходные высказывания при этом могут быть постоянными, то есть иметь определенное значение И или Л, или могут не иметь определенного значения. В первом случае исходные высказывания будем называть *постоянными элементарными высказываниями*, во втором – *переменными элементарными высказываниями*. Переменные элементарные высказывания будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита.

При вычислении по формуле учитывают приоритет операций

$$\bar{\ } \Rightarrow \wedge \Rightarrow \vee \Rightarrow \to \Rightarrow \leftrightarrow,$$

где знак $\Rightarrow$ обозначает убывание приоритета. При необходимости изменить естественную последовательность действий используют скобки.

Символы, соответствующие переменным элементарным высказываниям, называются *пропозициональными переменными.*

Пропозициональной формулой (*ПФ*) называется выражение, построенное из пропозициональных переменных с помощью логических операций $\bar{\ },\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$ (и, возможно, некоторых других) по следующим правилам:

1) каждая пропозициональная переменная есть ПФ;
2) если X и Y – ПФ, то $\overline{X}$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \rightarrow Y$, $X \leftrightarrow Y$ – тоже ПФ.

Иногда понятие формулы расширяют за счет введения в них следующих логических операций:

1. Операция сложения по модулю два $X \oplus Y \equiv \overline{X \leftrightarrow Y}$.
2. Штрих Шеффера (функция Шеффера) $X \mid Y \equiv \overline{X \wedge Y}$.
3. Функция Вебба (стрелка Пирса) $X \circ Y \equiv \overline{X \vee Y}$.

Заметим, что каждая пропозициональная переменная принимает значения 0 или 1, тогда ПФ в соответствии с определением логических операций также принимает значения 0 или 1, поэтому ее можно рассматривать как функцию, область значений и область определения которой совпадают и равны $\{0,1\}$. Такую функцию будем называть *двоичной или булевой функцией*.

Каждой ПФ, а значит и булевой функции, можно поставить в соответствие таблицу, называемую *таблицей истинности,* в которой перечислены все возможные значения входящих в нее переменных и значения ПФ или булевой функции на этих наборах.

Если функция зависит от n переменных, то таблица истинности содержит 2^n наборов значений переменных.

С помощью таблицы истинности определяют все логические операции над высказываниями:

X	Y	$\overline{X}$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$	$X \leftrightarrow Y$	$X \oplus Y$	$X \mid Y$	$X \circ Y$
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

ПФ называют *тождественно истинной (общезначимой или тавтологией)*, если она принимает значение 1 на всех наборах переменных. Для обозначения того, что ПФ F есть тавтология используют запись $\vdash$ F.

ПФ называют *тождественно ложной или противоречием*, если она принимает значение 0 на всех наборах значений переменных.

ПФ называют *выполнимой*, если на некоторых наборах значений переменных она принимает значение 1, а на остальных – 0.

Тип ПФ можно определить с помощью таблицы истинности.

Две формулы алгебры высказываний F_1 и F_2 называются равносильными, если их таблицы истинности совпадают. Равносильность формул будем обозначать через $F_1 \equiv F_2$.

Для любых формул *X*, *Y*, *Z* справедливы следующие *равносильности*:

1. $X \wedge Y \equiv Y \wedge X$, $X \vee Y \equiv Y \vee X$ (*коммутативность*);

2. $X \wedge (Y \wedge Z) \equiv (X \wedge Y) \wedge Z$, $X \vee (Y \vee Z) \equiv (X \vee Y) \vee Z$ (*ассоциативность*);

3. $X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$,
$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ (*дистрибутивность*);

4. $X \wedge X \equiv X$, $X \vee X \equiv X$ (*идемпотентность*);

5. $X \wedge (X \vee Y) \equiv X$, $X \vee (X \wedge Y) \equiv X$ (*законы поглощения*)**;**

6. $\overline{\overline{X}} \equiv X$ (*закон двойного отрицания*);

7. $\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$, $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$ (*законы де Моргана*);

8. $X \wedge 0 \equiv 0$, $X \vee 0 \equiv X$, $X \wedge 1 \equiv X$, $X \vee 1 \equiv 1$, $X \wedge \overline{X} \equiv 0$, $X \vee \overline{X} \equiv 1$ (*законы, определяющие действия с константами*);

9. $X \to Y \equiv \overline{X} \vee Y$, $X \leftrightarrow Y \equiv (\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y})$ (*исключение импликации и эквиваленции*);

10. $X \vee Y \equiv \overline{\overline{X} \wedge \overline{Y}}$ (*исключение дизъюнкции*);

11. $X \wedge Y \equiv \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}$ (*исключение конъюнкции*);

Любая равносильность может быть легко доказана либо с помощью таблиц истинности, либо равносильным преобразованием одной или обеих частей.

Примеры решения задач

Задача 1. Упростить ПФ $X \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee X \wedge Y \vee \overline{X} \wedge Y$, используя равносильные преобразования.

Решение.

1) Применим дистрибутивный закон, получим

$$X \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee X \wedge Y \vee \overline{X} \wedge Y \equiv X \wedge Y \wedge (\overline{Z} \vee 1) \vee \overline{X} \wedge Y.$$

2) Так как $Z \vee 1 \equiv 1$, то получим

$$X \wedge Y \wedge (\overline{Z} \vee 1) \vee \overline{X} \wedge Y \equiv X \wedge Y \vee \overline{X} \wedge Y.$$

3) По дистрибутивному закону

$$X \wedge Y \vee \overline{X} \wedge Y \equiv Y \wedge (X \vee \overline{X}).$$

4) Так как $X \vee 1 \equiv 1$, $Y \wedge 1 \equiv Y$, то получим

$$X \wedge Y \vee \overline{X} \wedge Y \equiv Y \wedge 1 \equiv Y.$$

Таким образом, $X \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee X \wedge Y \vee \overline{X} \wedge Y \equiv Y$.

Замечание. Шаги 1-2 в решении можно заменить одним шагом, если использовать закон поглощения

$$(X \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge Y) \equiv X \wedge Y \vee \overline{X} \wedge Y .$$

Задача 2. Составить таблицу истинности ПФ и определить тип ПФ $\left(\overline{X \leftrightarrow Y}\right) \to \overline{Z}|Y$.

Решение. Составим таблицу истинности ПФ

$F(X,Y,Z) = \left(\overline{X \leftrightarrow Y}\right) \to \overline{Z}|Y$.

X	Y	Z	$\left(\overline{X \leftrightarrow Y}\right)$	$\overline{Z}\|Y$	$F(X,Y,Z)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

Как видно из таблицы истинности, данная ПФ $F(X,Y,Z) = \left(\overline{X \leftrightarrow Y}\right) \to \overline{Z}|Y$ является выполнимой.

Задание 6

Упростить ПФ, используя равносильные преобразования.

Варианты

1. $(\overline{X} \leftrightarrow \overline{Y}) \wedge (X \vee Y)$.

2. $(Y \to X) \wedge Y \vee \overline{(\overline{X} \wedge \overline{Y})}$.

3. $\overline{X} \vee X \wedge Z \vee \overline{X} \wedge Z \vee X \wedge Y$.

4. $(\overline{(\overline{X} \to \overline{Y})} \to X) \wedge (X \to \overline{(\overline{X} \to \overline{Y})})$.

5. $\overline{X} \wedge Y \wedge Z \vee \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee Y \wedge Z$.

6. $\overline{(\overline{X} \vee \overline{Y})} \vee \overline{(X \to Y)}$.

7. $\overline{X}\wedge(X\vee Y)$.

8. $X\wedge Y\wedge\overline{Z}\vee\overline{Y}\wedge\overline{Z}\vee\overline{X}$.

9. $\overline{(X\wedge Y\wedge Z)}\to\overline{(X\wedge Z)}$.

10. $(X\to Y)\wedge(Y\to Z)\to(Z\to X)$.

11. $(X\leftrightarrow Y)\wedge(Y\vee Z)\to(Z\wedge X)$.

12. $(Y\wedge X)\leftrightarrow Y\vee\overline{(\overline{X}\wedge\overline{Y})}$.

13. $\overline{X}\vee\overline{X\to Z}\vee\overline{X}\wedge Z\vee X\wedge Y$.

14. $(\overline{(\overline{X}\wedge\overline{Y})}\to X)\wedge(X\to\overline{(\overline{X}\wedge\overline{Y})})$.

15. $\overline{X}\wedge\overline{Y}\wedge Z\vee\overline{\overline{X}\to\overline{Y}}\wedge Z\vee Y\to Z$.

16. $\overline{(X\wedge Y\wedge Z)}\wedge\overline{(X\to Z)}$.

17. $\overline{X\wedge Y\wedge\overline{Z}}\vee X\to Y\vee\overline{X}\wedge Y$.

18. $\overline{(\overline{X}\vee\overline{Y})}\to\overline{(X\leftrightarrow Y)}$.

19. $(\overline{\overline{X}\to\overline{Y}})\to(X\vee Y)$.

20. $(X\vee\overline{Y})\wedge(\overline{Y\vee Z})\wedge(Z\wedge X)$.

Задание 7

Составить таблицу истинности ПФ и определить тип ПФ.

Варианты

1	$(X\to Y)\wedge(Y\to Z)\to(X\to Z)$	$(X\oplus Y)\mid(X\oplus Z)$
2	$(\overline{X}\vee\overline{Y})\wedge Z\to(X\leftrightarrow Y)$	$(X\mid Y)\to(X\mid Z)$
3	$(X\wedge\overline{Z}\to\overline{Y})\leftrightarrow D$	$(X\oplus Y)\leftrightarrow(X\oplus Z)$
4	$X\to(\overline{X}\to Y)\wedge(Z\vee\overline{Y})$	$(X\circ Y)\mid(X\circ Z)$
5	$(X\to(Y\to Z))\to(Y\to(X\to Z))$	$\overline{(\overline{X}\vee\overline{Y})}\to\overline{(X\circ Y)}$
6	$Z\wedge Y\vee\overline{X}\leftrightarrow\overline{X}\vee\overline{Z}$	$\overline{(X\vee\overline{Y})\to(Z\oplus\overline{X})}$
7	$\overline{(X\to Y)}\to(X\to Y)\wedge(Z\vee Y)$	$(X\oplus Y)\to(X\oplus Z)$
8	$(\overline{X}\to Z)\wedge\overline{\overline{X}\wedge\overline{Y}}\to Z$	$X\oplus(Y\to Z)$

9	$(X \to \overline{Y}) \wedge Y \to \overline{X} \leftrightarrow (Z \vee X)$	$(X \circ Y) \oplus (X \circ Z)$
10	$X \vee Y \to X \wedge D \to X \vee \overline{Z}$	$(X \vee Y) \oplus (X \vee Z)$
11	$(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \vee Z) \to (Z \wedge X)$	$(X \leftrightarrow Y) \oplus (X \leftrightarrow Z)$
12	$(Z \wedge X) \leftrightarrow D \vee \overline{(\overline{X} \wedge \overline{Y})}$	$(X \mid \overline{Y}) \oplus (\overline{Z} \to X)$
13	$\overline{X} \vee \overline{X \to Z} \vee \overline{X} \wedge Z \vee X \wedge Y$	$X \circ (Y \mid Z)$
14	$(\overline{(\overline{X} \wedge \overline{Y})} \to Z) \wedge (D \to \overline{(\overline{X} \wedge \overline{Y})})$	$(\overline{(X \leftrightarrow Y)} \to \overline{Z} \mid Y$
15	$\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee \overline{\overline{\overline{X} \to \overline{Y}}} \wedge Z \vee Y \to Z$	$\overline{(Z \mid X) \leftrightarrow (Y \mid X)}$
16	$\overline{(X \wedge Y \wedge Z)} \wedge \overline{(X \to Z)}$	$(X \to Y) \mid (X \to Z)$
17	$\overline{X \wedge Y \wedge \overline{Z}} \vee X \to Y \vee \overline{X} \wedge Y$	$\overline{(X \mid \overline{Y}) \to (Z \leftrightarrow \overline{X})}$
18	$\overline{(\overline{X} \vee \overline{Z})} \to \overline{(D \leftrightarrow Y)}$	$(\overline{Z} \to X) \leftrightarrow (\overline{X} \mid Y)$
19	$(\overline{\overline{D} \to Z}) \to (X \vee Y)$	$X \oplus (\overline{Y} \to (Y \leftrightarrow Z))$
20	$(X \vee \overline{Y}) \wedge \overline{(Y \vee Z)} \wedge (Z \wedge X)$	$X \circ (\overline{Y} \mid (Z \vee \overline{X \wedge Y}))$

6. НОРМАЛЬНЫЕ И СОВЕРШЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Теоретические сведения

Определим некоторые канонические представления ПФ.

ПФ называется *элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией),* если она является конъюнкцией (дизъюнкцией) переменных и отрицаний переменных.

Пример.

$X \wedge Y \wedge \overline{Z}$ - элементарная конъюнкция.

$\overline{X} \vee Z$ - элементарная дизъюнкция.

Говорят, что ПФ задана в *дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ),* если она является дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

Пример. $X \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee X \wedge Y \vee \overline{Y} \wedge Z$ - ДНФ.

Говорят, что ПФ задана в *конъюнктивной нормальной форме (КНФ),* если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

Пример. $(\overline{X} \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \overline{Y})$ - КНФ.

На основе равносильных преобразований любая формула может быть приведена к нормальной форме (ДНФ или КНФ).

Алгоритм 6.1

(приведение ПФ к нормальной форме)

1. Если ПФ содержит операции $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\oplus$, $|$, $\circ$ то их исключают с помощью равносильностей

$$X \rightarrow Y \equiv \overline{X} \vee Y,\ X \leftrightarrow Y \equiv (\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}),$$

$$X \oplus Y \equiv \overline{X \leftrightarrow Y},\quad X \mid Y \equiv \overline{X \wedge Y},\ X \circ Y \equiv \overline{X \vee Y}.$$

2. Приводят отрицания к независимым переменным, используя законы де Моргана.

3. Раскрывают скобки по дистрибутивному закону конъюнкции относительно дизъюнкции для приведения к ДНФ или по дистрибутивному закону дизъюнкции относительно конъюнкции для приведения к КНФ.

Пример. Определить нормальные формы для ПФ $(X \vee \overline{Y}) \rightarrow Z$.

Действуя, в соответствии с алгоритмом 6.1, получим

$$(X \vee \overline{Y}) \rightarrow Z \equiv \overline{X \vee \overline{Y}} \vee Z \equiv \overline{X} \wedge Y \vee Z - \textit{ДНФ}.$$

Применяя к полученной ДНФ дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции, получим

$$(X \vee \overline{Y}) \rightarrow Z \equiv (\overline{X} \vee Z) \wedge (Y \vee Z) - \textit{КНФ}$$

Замечание. Для данной ПФ существует множество ДНФ и КНФ, переход от одной формы к другой осуществляется на основе равносильных преобразований.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) данной ПФ называется ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция содержит все переменные – без отрицания или с отрицанием, но не вместе.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) данной ПФ называется КНФ, в которой каждая элементарная дизъюнкция содержит все переменные – без отрицания или с отрицанием, но не вместе.

Существует два способа перехода к совершенным формам табличный и аналитический.

Алгоритм 6.2
(аналитический способ приведения к СДНФ)

1. С помощью равносильных преобразований привести ПФ к ДНФ.
2. Те элементарные конъюнкции, в которые сомножителями входят не все переменные, умножить на единицы, представленные в виде дизъюнкций каждой недостающей переменной с ее отрицанием.
3. Раскрыть скобки по соответствующему дистрибутивному закону.
4. Для получения искомой СДНФ исключить повторения.

Приведение к СКНФ осуществляется аналогично, но только к элементарным дизъюнкциям, содержащим слагаемыми не все переменные, прибавляют нули, представленные в виде конъюнкций каждой недостающей переменной с ее отрицанием.

Пример. Пусть ПФ, содержащая переменные *X, Y, Z*, имеет ДНФ вида $\overline{X} \wedge Z \vee Y \wedge Z$.

Заметим, что в первую элементарную конъюнкцию не входит переменная Y, а во вторую – переменная X. В соответствии с процедурой приведения к СНДФ первую элементарную конъюнкцию умножим на $1 \equiv Y \vee \overline{Y}$, а вторую – на $1 \equiv X \vee \overline{X}$. Получим

$$X \wedge Z \vee Y \wedge Z \equiv X \wedge Z \wedge (Y \vee \overline{Y}) \vee Y \wedge Z \wedge (X \vee \overline{X}) \equiv$$

$$\equiv X \wedge Z \wedge Y \vee X \wedge Z \wedge \overline{Y} \vee Y \wedge Z \wedge X \vee Y \wedge Z \wedge \overline{X} \equiv$$

$$\equiv X \wedge Z \wedge Y \vee X \wedge Z \wedge \overline{Y} \vee Y \wedge Z \wedge \overline{X} - СДНФ$$

Алгоритм 6.3
(табличный способ приведения к СДНФ)

1. Составляется таблица истинности данной ПФ.
2. Рассматриваются те строки, в которых формула принимает истинностное значение 1. Каждой такой строке ставится в соответствие элементарная конъюнкция, причем переменная, принимающая значение 1, входит в нее без отрицания, а 0 – с отрицанием.
3. Образуется дизъюнкция всех полученных элементарных конъюнкций, которая и составляет СДНФ.

Алгоритм 6.4
(табличный способ приведения к СКНФ)

1. Составляется таблица истинности данной ПФ.
2. Рассматриваются те строки, в которых формула принимает истинностное значение 0. Каждой такой строке ставится в соответствие элементарная дизъюнкция, причем переменная, принимающая значение 1, входит в нее с отрицанием, а 0 – без отрицания.
4. Образуется конъюнкция всех полученных элементарных дизъюнкций, которая и составляет СКНФ.

Пример решения задачи

Задача. Привести ПФ $(X \vee \overline{Y}) \to (\overline{Z} \oplus \overline{X})$ к нормальным и совершенным нормальным формам.

Решение. С помощью равносильных преобразований, согласно алгоритма 6.1, приведем ПФ к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ).

1) Исключим операцию импликацию ($\to$), получим

$$(X\vee\overline{Y})\to(\overline{Z}\oplus\overline{X})\equiv\overline{(X\vee\overline{Y})}\vee(\overline{Z}\oplus\overline{X})$$

2) Исключим операцию сложение по модулю два ($\oplus$), получим.

$$\overline{(X\vee\overline{Y})}\vee(\overline{Z}\oplus\overline{X})\equiv\overline{(X\vee\overline{Y})}\vee\overline{(\overline{Z}\leftrightarrow\overline{X})}$$

3) Исключим операцию эквиваленцию ($\leftrightarrow$), получим

$$\overline{(X\vee\overline{Y})}\vee\overline{(\overline{Z}\leftrightarrow\overline{X})}\equiv(\overline{X}\wedge Y)\vee\overline{((Z\vee\overline{X})\wedge(\overline{Z}\vee X))}$$

4) Применив закон де Моргана, получим

$$(\overline{X}^{\cdot}\wedge Y)\vee\overline{((Z\vee\overline{X})\wedge(\overline{Z}\vee X))}\equiv(\overline{X}\wedge Y)\vee(\overline{Z}\wedge X)\vee$$
$$\vee(Z\wedge\overline{X})$$

Таким образом, искомая ДНФ имеет вид

$$(\overline{X}\wedge Y)\vee(\overline{Z}\wedge X)\vee(Z\wedge\overline{X})$$

С помощью равносильных преобразований приведем ПФ к конъюнктивной нормальной форме (КНФ).

Используя дистрибутивный закон и равносильности $X\vee\overline{X}\equiv 1,\ Z\vee\overline{Z}\equiv 1$, получим

$$(\overline{X}\wedge Y)\vee(\overline{Z}\wedge X)\vee(Z\wedge\overline{X})\equiv(\overline{X}\wedge(Y\vee Z))\vee(X\wedge\overline{Z})\equiv$$
$$\equiv((X\wedge\overline{Z})\vee\overline{X})\wedge((X\wedge\overline{Z})\vee(Y\vee Z))\equiv((\overline{X}\vee X)\wedge(\overline{X}\vee\overline{Z}))\wedge$$
$$\wedge((Y\vee Z\vee X)\wedge(Y\vee Z\vee\overline{Z}))\equiv(\overline{X}\vee\overline{Z})\wedge(X\vee Y\vee Z)\wedge Y$$

Таким образом, искомая КНФ имеет вид

$$(\overline{X}\vee\overline{Z})\wedge(X\vee Y\vee Z)\wedge Y\ .$$

Приведем ПФ к совершенным нормальным формам (СДНФ, СКНФ) с помощью табличного способа. Построим таблицу истинности и на ее основе составим СДНФ и СКНФ.

X	Y	Z	$X \vee \overline{Y}$	$\overline{Z} \oplus \overline{X}$	$\boldsymbol{F}$	Элементарные конъюнкции	Элементарные дизъюнкции
0	0	0	1	0	**0**		$X \vee Y \vee Z$
0	0	1	1	1	**1**	$\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z$	
0	1	0	0	0	**1**	$\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z}$	
0	1	1	0	1	**1**	$\overline{X} \wedge Y \wedge Z$	
1	0	0	1	1	**1**	$X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}$	
1	0	1	1	0	**0**		$\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}$
1	1	0	1	1	**1**	$X \wedge Y \wedge \overline{Z}$	
1	1	1	1	0	**0**		$\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}$

СКНФ: $(X \vee Y \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$.

СДНФ:

$$\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee \overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee \overline{X} \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z} \vee X \wedge Y \wedge \overline{Z}.$$

Приведем к СДНФ, СКНФ с помощью аналитического способа.

СДНФ:

$$(\overline{X} \wedge Y) \vee (\overline{Z} \wedge X) \vee (Z \wedge \overline{X}) \equiv \overline{X} \wedge Y \wedge 1 \vee \overline{Z} \wedge X \wedge 1 \vee Z \wedge \overline{X} \wedge 1 \equiv$$

$$\equiv \overline{X} \wedge Y \wedge (Z \vee \overline{Z}) \vee \overline{Z} \wedge X \wedge (Y \vee \overline{Y}) \vee Z \wedge \overline{X} \wedge (Y \vee \overline{Y}) \equiv$$

$$\equiv (\overline{X} \wedge Y \wedge Z) \vee (\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (X \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee$$

$$\vee (\overline{X} \wedge Y \wedge Z) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z \equiv (\overline{X} \wedge Y \wedge Z) \vee (\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee$$

$$\vee (X \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z).$$

СКНФ:

$$(\overline{X} \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee Y \vee Z) \wedge Y \equiv (Y \vee 0 \vee 0) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Z} \vee 0) \wedge (X \vee Y \vee Z) \equiv$$

$$\equiv (Y \vee (X \wedge \overline{X}) \vee (Z \wedge \overline{Z})) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Z} \vee (Y \wedge \overline{Y})) \wedge (X \vee Y \vee Z) \equiv$$

$$\equiv (((Y \vee X) \wedge (Y \vee \overline{X})) \vee (Z \wedge \overline{Z})) \wedge ((\overline{X} \vee \overline{Z} \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Z} \vee \overline{Y})) \wedge$$

$$\wedge (X \vee Y \vee Z) \equiv (Y \vee X \vee Z) \wedge (Y \vee \overline{X} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{Y} \vee \overline{X} \vee \overline{Z}) \wedge$$

$$\wedge (Y \vee \overline{X} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Z} \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Z} \vee \overline{Y}) \wedge (X \vee Y \vee Z) \equiv$$

$$\equiv (X \vee Y \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Задание 8

Привести ПФ к нормальным и совершенным нормальным формам.

Варианты

1	$X \to Y \wedge \overline{Z}$	$(X \oplus Y) \mid (X \oplus Z)$
2	$(X \vee \overline{Y}) \to X$	$(X \mid Y) \to (X \mid Z)$
3	$X \wedge Y \vee \overline{X} \leftrightarrow \overline{X} \vee \overline{Y}$	$(X \oplus Y) \leftrightarrow (X \oplus Z)$
4	$X \to (\overline{X} \to Y)$	$(X \circ Y) \mid (X \circ Z)$
5	$X \to Y \vee Z$	$\overline{(\overline{X} \vee \overline{Y})} \to \overline{(X \circ Y)}$
6	$(X \to \overline{Y}) \wedge Y \to \overline{X}$	$\overline{(X \vee \overline{Y}) \to (Z \oplus \overline{X})}$
7	$\overline{(X \to Y)} \to (X \to Y)$	$(X \oplus Y) \to (X \oplus Z)$
8	$(\overline{X} \to Y) \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y}$	$X \oplus (Y \to Z)$
9	$(X \wedge \overline{Z} \to \overline{Y}) \leftrightarrow X$	$(X \circ Y) \oplus (X \circ Z)$
10	$X \vee Y \to X \wedge Y$	$(X \vee Y) \oplus (X \vee Z)$
11	$\overline{(X \to Y)} \vee (Z \to Y)$	$(X \leftrightarrow Y) \oplus (X \leftrightarrow Z)$
12	$(\overline{X} \to Z) \wedge \overline{Z} \wedge \overline{Y}$	$(X \mid \overline{Y}) \oplus (\overline{Z} \to X)$
13	$(X \wedge \overline{Z} \to \overline{Y}) \vee X$	$X \circ (Y \mid Z)$
14	$\overline{X \vee Z} \to X \wedge Y$	$((\overline{X \leftrightarrow Y}) \to \overline{Z} \mid Y$

15	$\overline{X \to Y} \to \overline{Z}$	$\overline{(Z \mid X) \leftrightarrow (Y \mid X)}$
16	$(X \vee \overline{Y}) \wedge \overline{Z}$	$(X \to Y) \mid (X \to Z)$
17	$X \wedge Z \vee \overline{X} \to \overline{Z} \vee \overline{Y}$	$\overline{(X \mid \overline{Y}) \to (Z \leftrightarrow \overline{X})}$
18	$Z \to (\overline{X} \leftrightarrow Y)$	$(\overline{Z} \to X) \leftrightarrow (\overline{X} \mid Y)$
19	$X \to \overline{Y \vee Z}$	$X \oplus (\overline{Y} \to (Y \leftrightarrow Z))$
20	$(X \to \overline{Z}) \wedge Y \wedge \overline{X}$	$X \circ (\overline{Y} \mid (Z \vee \overline{X \wedge Y}))$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов /Ф.А. Новиков. СПб.: Питер, 2004. 364 с.

2. Судоплатов С.В. Элементы дискретной математики / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. М.: ИНФРА-М, 2002. 280 с.

3. Судоплатов С.В. Математическая логика и теория алгоритмов: учебник / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. М.: ИНФРА-М, 2004. – 224 с.

4. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы / Б.Н. Иванов. М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 288 с.

5. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. СПб.: Лань, 2005. – 400 с.

6. Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 256 с.

7. Гаврилов Г.П. Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы
по дисциплине «Дискретная математика»
для студентов направления подготовки бакалавров
230100 «Информатика и вычислительная техника»,
профиль «Системы автоматизированного проектирования в машиностроении» заочной формы обучения

Составители

Собенина Ольга Валерьевна
Лопатин Роман Сергеевич

В авторской редакции

Компьютерный набор О.В.Собениной

Подписано к изданию 15.02.2013
Уч.-изд. л. 3,6 . «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14